



**PENERAPAN *RAINBOW CONNECTION*
PADA GRAF-GRAF HASIL OPERASI**

SKRIPSI

Oleh

Anang Fajariyanto

NIM 101810101042

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER**

2015



**PENERAPAN *RAINBOW CONNECTION*
PADA GRAF-GRAF HASIL OPERASI**

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Anang Fajariyanto

NIM 101810101042

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER**

2015

HALAMAN PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah S.W.T yang maha pengasih lagi maha penyayang, serta sholawat atas Nabi Muhammad S.A.W, kupersembahkan sebuah kebahagiaan dalam perjalanan hidupku teriring rasa terima kasihku yang terdalam kepada:

1. orang tuaku tercinta dan terkasih : Ayahanda Alm. Moh. Rum dan Ibunda Muryati, serta kedua Kakakku Agus Purniawan dan Adi Irawan, yang selalu mengalirkan rasa cinta dan kasih sayangnya serta doa yang tiada pernah putus yang selalu mengiringiku dalam meraih cita-cita;
2. Ibu Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. dan Bapak Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. yang dengar sabar dan tulus ikhlas membimbing sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan;
3. guru dan dosen-dosenku, yang telah memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;
4. sahabat-sahabat terbaikku: Alfian, Ina, Trian, Ulum, Ica, Dara, Muafa, Khuri, Sari, Iil, Fia, Diana, Diah, Hendry, dan semua sahabat yang belum disebutkan yang senantiasa membantu dan menorehkan sebuah pengalaman indah yang tak terlupakan;
5. teman-teman pejuang graf yang selalu berbagi suka maupun duka dan selalu memberikan dukungan untuk terus semangat;
6. teman-teman angkatan 2010 FMIPA Matematika yang selalu menorehkan sebuah pengalaman indah yang tak terlupakan;
7. Almamater tercinta Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

MOTTO

"Jika pikiran saya bisa membayangkannya, hati saya bisa meyakinkannya, saya tahu saya akan mampu menggapainya."

(Jesse Jackson)*

"Tahu bahwa kita tahu apa yang kita ketahui dan tahu bahwa kita tidak tahu apa yang tidak kita ketahui, itulah pengetahuan sejati."

(Copernicus)**

"Tidak ada rahasia untuk sukses. Ini adalah hasil sebuah persiapan, kerja keras, dan belajar dari kesalahan."

(Colin Powel)***

* Jesse Jackson, politikus dan pemimpin masyarakat sipil Amerika Serikat.

** Copernicus (1473-1543), pakar astronomi Polandia.

*** Colin Powel, mantan Menteri Luar Negeri Amerika Serikat.

HALAMAN PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Anang Fajariyanto

NIM :101810101042

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: Penerapan *Rainbow Connection* pada Graf-graf Hasil Operasi adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, April 2015

Yang menyatakan,

Anang Fajariyanto

NIM. 101810101042

SKRIPSI

**PENERAPAN *RAINBOW CONNECTION*
PADA GRAF-GRAF HASIL OPERASI**

Oleh

Anang Fajariyanto

NIM 101810101042

Dosen Pembimbing 1 : Ika Hesti Agustin, S.Si, M.Si

Dosen Pembimbing 2 : Prof. Dafik, M.Sc., Ph.D.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul "Penerapan *Rainbow Connection* pada Graf-graf Hasil Operasi" telah diuji dan disahkan oleh Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam pada:

hari :

tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Tim Penguji :

Dosen Pembimbing Utama,

Dosen Pembimbing Anggota

Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

NIP. 19840801 200801 2 006

NIP. 19680802 199303 1 004

Anggota I,

Anggota II,

Drs. Rusli Hidayat, M.Sc.

Kusbudiono, S.Si., M.Si.

NIP. 19661012 199303 1 001

NIP. 19771430 200501 1 001

Mengesahkan

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Jember,

Prof. Kusno, M.Sc., Ph.D.

NIP. 1961018 198602 1 001

RINGKASAN

Penerapan *Rainbow Connection* pada Graf-graf Hasil Operasi; Anang Fajariyanto, 101810101042; 2015: 77 halaman; Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Salah satu teori yang dikembangkan dalam teori graf adalah *Rainbow Connection*. *Rainbow Connection* adalah pemberian warna pada sisi graf dengan syarat dua sisi yang bertetangga boleh diberi warna yang sama. Namun sisi yang masuk dalam *rainbow path* tidak boleh ada dua sisi atau lebih yang memiliki warna sama. Pewarnaan di sini disebut *Rainbow Coloring*, dan pewarnaan minimal dalam suatu graf G disebut *Rainbow Connection Number* yang dilambangkan dengan $rc(G)$. Untuk pemberian *Rainbow Coloring* harus menggambarkan pola fungsi agar mudah dalam mencari fungsi dari pewarnaannya.

Rainbow Connection dapat diterapkan pada graf yang merupakan hasil operasi dari beberapa graf khusus, misalnya seperti hasil operasi dari graf lintasan (*path*), graf lingkaran (*cycle*), graf bintang (*star*) dan graf roda (*wheel*). Sedangkan operasi graf adalah beberapa cara untuk memperoleh graf baru dengan melakukan suatu operasi terhadap dua graf. Adapun graf-graf hasil operasi yang digunakan dalam penelitian ini yaitu $(P_n + C_n, C_n + S_n, P_n + W_n, C_n + W_n, S_n + W_n, P_n \square W_m, P_n \otimes C_n, P_n[C_m], P_n[W_m], P_n[S_m], Amal(C_n, r) \square P_2, Amal(P_n, r) \square P_2$ dan $Amal(W_n, r) \square P_2$).

Pada penelitian ini menggunakan metode penelitian eksploratif dan terapan. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan kardinalitas titik dan sisi, *rainbow connection number*, dan fungsi *rainbow coloring* pada graf $(P_n + C_n, C_n + S_n, P_n + W_n, C_n + W_n, S_n + W_n, P_n \square W_m, P_n \otimes C_n, P_n[C_m], P_n[W_m], P_n[S_m], Amal(C_n, r) \square P_2, Amal(P_n, r) \square P_2$ dan $Amal(W_n, r) \square P_2$). Pada penelitian ini dihasilkan 13 teorema baru, antara lain:

1. **Teorema 4.1.1** Misal G adalah *joint* dari graf lintasan dan graf lingkaran. Untuk $n \geq 3$, *rainbow connection number* $P_n + C_n$ adalah $rc(P_n + C_n) = 2$;
2. **Teorema 4.1.2** Misal G adalah *joint* dari graf lingkaran dan graf bintang. Untuk $n \geq 3$, *rainbow connection number* $C_n + S_n$ adalah $rc(C_n + S_n) = 2$;
3. **Teorema 4.1.3** Misal G adalah *joint* dari graf lintasan dan graf roda. Untuk $n \geq 3$, *rainbow connection number* $P_n + W_n$ adalah $rc(P_n + W_n) = 2$;
4. **Teorema 4.1.4** Misal G adalah *joint* dari graf lingkaran dan graf roda. Untuk $n \geq 3$, *rainbow connection number* $C_n + W_n$ adalah $rc(C_n + W_n) = 2$;
5. **Teorema 4.1.5** Misal G adalah *joint* dari graf bintang dan graf roda. Untuk $n \geq 3$, *rainbow connection number* $S_n + W_n$ adalah $rc(S_n + W_n) = 2$;
6. **Teorema 4.1.6** Misal G adalah *cartesian product* dari graf lintasan dan graf roda. Untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$, *rainbow connection number* $P_n \square W_m$ adalah

$$rc(P_n \square W_m) = \begin{cases} n, & \text{untuk } m = 3 \\ n + 1, & \text{untuk } 4 \leq m \leq 6 \\ n + 2, & \text{untuk } m \geq 7 \end{cases}$$

7. **Teorema 4.1.7** Misal G adalah *tensor product* dari graf lintasan dan graf lingkaran. Untuk $n \geq 3$, *rainbow connection number* $P_n \otimes C_n$ adalah $rc(P_n \otimes C_n) = n$;
8. **Teorema 4.1.8** Misal G adalah komposisi dari graf lintasan dan graf lingkaran. Untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$, *rainbow connection number* $P_n[C_m]$ adalah

$$rc(P_n[C_m]) = \begin{cases} n - 1, & \text{untuk } n - 1 \geq \frac{m}{2} \\ 1, & \text{untuk } n - 1 < \frac{m}{2} \text{ dan } m = 3 \\ \frac{m}{2}, & \text{untuk } n - 1 < \frac{m}{2} \text{ dan } m \text{ genap} \\ \frac{m-1}{2} + 1, & \text{untuk } n - 1 < \frac{m}{2} \text{ dan } m \text{ ganjil } > 3 \end{cases}$$

9. **Teorema 4.1.9** Misal G adalah komposisi dari graf lintasan dan graf roda. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, *rainbow connection number* $P_n[W_m]$ adalah

$$rc(P_n[W_m]) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } n = 3 \\ n - 1, & \text{untuk } n \geq 4 \end{cases}$$

10. **Teorema 4.1.10** Misal G adalah komposisi dari graf lintasan dan graf bintang. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, *rainbow connection number* $P_n[S_m]$ adalah

$$rc(P_n[S_m]) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } n = 3 \\ n - 1, & \text{untuk } n \geq 4 \end{cases}$$

11. **Teorema 4.1.11** Misal G adalah *cartesian product* dari $Amal(C_n, v = 1, r)$ dan P_2 . Untuk $n \geq 3$ dan $r \geq 3$, *rainbow connection number* $(Amal(C_n, v = 1, r)) \square P_2$ adalah $rc(Amal(C_n, v = 1, r) \square P_2) = n + 1$;
12. **Teorema 4.1.12** Misal G adalah *cartesian product* dari $Amal(P_n, v = 1, r)$ dan P_2 . Untuk $n \geq 3$ dan $r \geq 3$, *rainbow connection number* $Amal(P_n, v = 1, r) \square P_2$ adalah $rc(Amal(P_n, v = 1, r) \square P_2) = 2n$;
13. **Teorema 4.1.13** Misal G adalah *cartesian product* dari $Amal(W_n, v = 1, r)$ dan P_2 . Untuk $n \geq 3$ dan $r \geq 3$, *rainbow connection number* $(Amal(W_n, v = 1, r)) \square P_2$ adalah $rc(Amal(W_n, v = 1, r) \square P_2) = 4$.

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul Penerapan *Rainbow connection* pada Graf-graf Hasil Operasi. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Prof. Drs. Kusno, DEA., Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Kosala Dwidja Purnomo S.Si., M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Utama, Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D., selaku Dosen Pembimbing Anggota, Drs. Rusli Hidayat, M.Sc., selaku dosen Penguji I dan Kusbudiono, S.Si., M.Si., selaku dosen penguji II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
4. dosen dan karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
5. semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, April 2015

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSEMBAHAN	ii
HALAMAN MOTTO	iii
HALAMAN PERNYATAAN	iv
HALAMAN PENGESAHAN	vi
RINGKASAN	vii
KATA PENGANTAR	x
DAFTAR ISI	xi
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR TABEL	xv
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan Penelitian	3
1.5 Manfaat Penelitian	3
2 TINJAUAN PUSTAKA	4
2.1 Definisi dan Terminologi Graf	4
2.2 <i>Rainbow Connection</i>	7
2.3 Fungsi	8
2.4 Graf Khusus dan Operasi Graf	10
2.5 Aplikasi <i>Rainbow Connection</i> pada Proses Distribusi	15
2.6 Hasil-hasil <i>Rainbow Connection</i>	17
3 METODE PENELITIAN	19

3.1	Jenis Penelitian	19
3.2	Data	19
3.3	Rancangan Penelitian	19
4	HASIL DAN PEMBAHASAN	22
4.1	<i>Rainbow Connection Number</i> dan Fungsi <i>Rainbow Coloring</i>	22
4.2	Pembahasan	72
5	KESIMPULAN DAN SARAN	75
5.1	Kesimpulan	75
5.2	Saran	75
	DAFTAR SUMBER RUJUKAN	76

DAFTAR GAMBAR

2.1	Contoh graf yang memuat Jalan, Jejak, Lintasan, Sikel	6
2.2	Contoh $rc(G)$	8
2.3	Contoh $src(G)$	8
2.4	(a) Fungsi Injektif, (b) Fungsi Surjektif dan (c) Fungsi Bijektif . .	9
2.5	Graf Lintasan P_3 dan P_5	10
2.6	Graf Lingkaran C_4 dan C_5	10
2.7	Graf Roda W_4 dan W_6	11
2.8	Graf Bintang S_4 dan S_6	11
2.9	Contoh Operasi <i>Joint</i>	12
2.10	Contoh Operasi <i>Cartesian Product</i>	12
2.11	Contoh Operasi <i>Tensor Product</i>	13
2.12	Contoh Operasi <i>Composition</i>	13
2.13	Contoh operasi <i>Amalgamation</i>	14
2.14	Contoh Aplikasi dalam Bentuk Graf G	16
2.15	Contoh Aplikasi dalam Bentuk <i>Spanning Tree</i>	17
3.1	Skema Penelitian	21
4.1	Contoh Operasi $P_6 + C_6$	24
4.2	Contoh <i>Rainbow Coloring</i> $P_n + C_n$	25
4.3	Contoh Operasi $C_4 + S_4$	26
4.4	Contoh <i>Rainbow Coloring</i> $C_n + S_n$	27
4.5	Contoh Operasi $P_4 + W_4$	28
4.6	Contoh <i>Rainbow Coloring</i> $P_n + W_n$	29
4.7	Contoh Operasi $C_4 + W_4$	31
4.8	Contoh <i>Rainbow Coloring</i> $C_n + W_n$	32

4.9	Contoh Operasi $S_4 + W_4$	34
4.10	Contoh <i>Rainbow Coloring</i> $S_n + W_n$	35
4.11	Contoh Operasi $P_4 \square W_4$	37
4.12	Contoh <i>Rainbow Coloring</i> $P_n \square W_m$	39
4.13	Contoh Operasi $P_4 \otimes C_5$	41
4.14	Contoh <i>Rainbow Coloring</i> $P_n \otimes C_n$	43
4.15	Contoh Operasi $P_2[C_4]$	44
4.16	Contoh <i>Rainbow Coloring</i> $P_n[C_m]$	46
4.17	Contoh Operasi $P_5[W_4]$	49
4.18	Contoh <i>Rainbow Coloring</i> $P_n[W_m]$	51
4.19	Contoh Operasi $P_4[S_3]$	54
4.20	Contoh <i>Rainbow Coloring</i> $P_n[S_m]$	56
4.21	Contoh Operasi $Amal(C_4, v = 1, 4)$	58
4.22	Contoh Operasi $Amal(C_4, v = 1, 4) \square P_2$	60
4.23	Contoh <i>Rainbow Coloring</i> $(Amal(C_n, v = 1, r)) \square P_2$	61
4.24	Contoh Operasi $Amal(P_4, v = 1, 4)$	63
4.25	Contoh Operasi $Amal(P_4, v = 1, 4) \square P_2$	64
4.26	Contoh <i>Rainbow Coloring</i> $(Amal(P_n, v = 1, r)) \square P_2$	66
4.27	Contoh Operasi $Amal(W_4, v = 1, 4)$	67
4.28	Contoh Operasi $Amal(W_4, v = 1, 4) \square P_2$	69
4.29	Contoh <i>Rainbow Coloring</i> $Amal(W_n, v = 1, r) \square P_2$	71

DAFTAR TABEL

2.1 Hasil *Rainbow Connection* Sebelumnya 17



BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori graf adalah bagian dari matematika diskrit yang banyak digunakan sebagai alat bantu untuk menggambarkan suatu persoalan agar lebih mudah dimengerti dan diselesaikan. Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler, seorang matematikawan berkebangsaan Swiss pada tahun 1736 melalui tulisannya yang berisi upaya pemecahan masalah Jembatan Königsberg yang sangat sulit dipecahkan pada masa itu. Meskipun pada awalnya graf diciptakan untuk diterapkan dalam penyelesaian kasus, namun graf telah mengalami perkembangan yang sangat luas didalam teori graf itu sendiri (Slamin., 2009).

Salah satu teori yang dikembangkan dalam teori graf adalah Koneksi Pelangi (*Rainbow Connection*). Koneksi Pelangi (*Rainbow Connection*) adalah pemberian warna pada sisi graf dengan syarat dua sisi yang bertetangga boleh diberi warna yang sama. Namun sisi yang masuk dalam *rainbow path* tidak boleh ada dua sisi atau lebih yang memiliki warna sama, dimana *rainbow path* adalah sebuah lintasan yang terdapat dalam graf tersebut. Pewarnaan di sini disebut *Rainbow Coloring*, dan pewarnaan minimal dalam suatu graf G disebut *Rainbow Connection Number* yang dilambangkan dengan $rc(G)$. Untuk pemberian *Rainbow Coloring* harus menggambarkan pola fungsi agar mudah dalam mencari fungsi dari pewarnaannya (Chartrand *et al.*, 2006).

Rainbow Connection dapat diterapkan pada graf yang merupakan hasil operasi dari beberapa graf khusus yaitu graf yang mempunyai keunikan dan karakteristik bentuk khusus. Keunikannya adalah graf khusus tidak isomorfis dengan graf lainnya. Karakteristik bentuknya dapat diperluas sampai order n dan

simetris seperti graf lintasan (*path*), graf lingkaran (*cycle*), graf bintang (*star*) dan graf roda (*wheel*). Sedangkan operasi graf adalah beberapa cara untuk memperoleh graf baru dengan melakukan suatu operasi terhadap dua graf. Adapun macam-macam pengoperasian graf yaitu operasi *Joint* ($G + H$), *Cartesian Product* ($G \square H$), *Tensor Product* ($G \otimes H$), *Composition* ($G[H]$) dan *Amalgamation* ($Amal(G, v = 1, r)$) (Harary, 2007).

Sebelumnya, Histamedika (2012) telah melakukan penelitian yang mengkaji tentang *Rainbow Connection* pada beberapa graf. Wijaya (2013) melakukan penelitian Bilangan *Rainbow Connection* pada graf Komplemen. Alfarisi and Dafik. (2014) melakukan pengembangan *Rainbow Connection* pada sebarang graf khusus.

Berdasarkan pada penelitian sebelumnya, peneliti akan mengkaji dan mengembangkan *Rainbow Connection* pada beberapa graf hasil operasi yang dihasilkan dari dua graf khusus, antara lain operasi yang diperoleh dari graf lintasan (*path*), graf lingkaran (*cycle*), graf bintang (*star*) dan graf roda (*wheel*). Dalam penelitian ini ditentukan *Minimum Rainbow Coloring* dan fungsi *Rainbow Coloring* pada setiap graf yang dihasilkan dari pengoperasian dua buah graf. Fungsi *Rainbow Coloring* menjelaskan pola pemberian warna pada sisi-sisi dalam sebuah graf.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana kardinalitas titik dan sisi, *Rainbow Connection Number*, dan fungsi *Rainbow Coloring* pada graf-graf hasil operasi dari *Joint* ($P_n + C_n$, $C_n + S_n$, $P_n + W_n$, $C_n + W_n$, $S_n + W_n$), *Cartesian Product* ($P_n \square W_m$), *Tensor Product* ($P_n \otimes C_n$), *Composition* ($P_n[C_m]$, $P_n[W_m]$, $P_n[S_m]$), ($Amal(C_n, r) \square P_2$), ($Amal(P_n, r) \square P_2$) dan ($Amal(W_n, r) \square P_2$)?

1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah dari penelitian ini yaitu:

- a. Graf tidak berarah dan konektif.
- b. Graf khusus yang digunakan yaitu: graf lintasan (*path*), graf lingkaran (*cycle*), graf bintang (*star*) dan graf roda (*wheel*).

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini yaitu menentukan kardinalitas titik dan sisi, *Rainbow Connection Number*, dan fungsi *Rainbow Coloring* pada graf-graf hasil operasi dari *Joint* ($P_n + C_n$, $C_n + S_n$, $P_n + W_n$, $C_n + W_n$, $S_n + W_n$), *Cartesian Product* ($P_n \square W_m$), *Tensor Product* ($P_n \otimes C_n$), *Composition* ($P_n[C_m]$, $P_n[W_m]$, $P_n[S_m]$), ($Amal(C_n, r) \square P_2$), ($Amal(P_n, r) \square P_2$) dan ($Amal(W_n, r) \square P_2$).

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini, antara lain:

- a. Menambah pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya dalam ruang lingkup *Rainbow Connection*, yaitu *Rainbow Connection* pada operasi graf khusus.
- b. Memberi motivasi pada peneliti lain untuk meneliti lebih lanjut tentang *Rainbow Connection*.
- c. Hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan atau perluasan ilmu dan aplikasi dalam masalah *Rainbow Connection*.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Definisi dan Terminologi Graf

Secara matematis, graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) ditulis dengan notasi $G = (V, E)$, yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari titik-titik (*vertex*) v_1, v_2, \dots, v_n dan E adalah himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang simpul e_1, e_2, \dots, e_n . Definisi graf tersebut menyatakan bahwa V tidak boleh kosong, sedangkan E boleh kosong. Jadi sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi, tetapi harus memiliki titik (Slamin., 2009).

Suatu graf $G = (V, E)$ terdiri atas himpunan $V = \{v_1, v_2, \dots\}$ yang disebut himpunan titik dan himpunan $E = \{e_1, e_2, \dots\}$, dimana anggotanya disebut sisi dari titik-titik pada V . Graf yang terdiri dari satu titik dan himpunan sisinya kosong disebut graf trivial. Banyak titik yang ada pada graf G dinyatakan sebagai $|V(G)|$ atau $|V|$. Banyak sisi yang ada pada graf G dinyatakan sebagai $|E(G)|$ atau $|E|$. Apabila $|V|$ berhingga, maka graf G disebut graf berhingga (Harary, 2007).

Misal G adalah sebuah graf. Jalan (*walk*) di G adalah barisan berhingga (tak kosong) $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k)$ yang suku-sukunya bergantian titik (*vertex*) dan sisi (*edge*), sedemikian hingga v_{i-1} dan v_i adalah akhir sisi e_i untuk $1 \leq i \leq k$. W dikatakan sebagai jalan (*walk*) dari v_0 ke v_k atau (v_0, v_k) . Titik v_0 dan v_k berturut-turut disebut titik awal dan titik akhir W . Sedangkan titik-titik v_1, v_2, \dots, v_{k-1} disebut titik-titik internal dari W dan k disebut panjang W . Panjang jalan W adalah banyaknya sisi dalam W . Jalan W dikatakan tertutup jika titik awal dan titik akhir W sama ($v_0 = v_k$). W disebut jejak (*trail*) jika semua sisi $e_1, e_2, e_3, \dots, e_k$ dalam jalan W berbeda atau tanpa ada sisi yang berulang

(Hartsfield and Ringel, 1994).

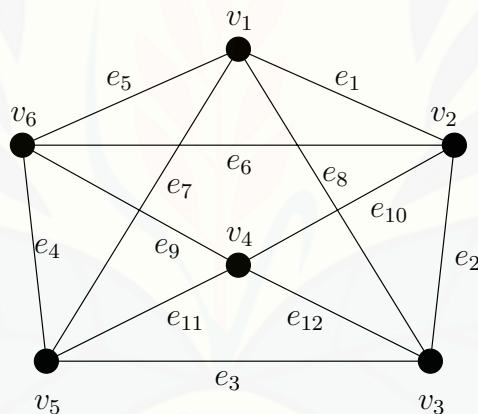
Misal $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k)$ adalah sebuah jalan di graf G . W disebut lintasan (*path*) jika semua simpul dan rusuk dalam jalan W berbeda. Jarak dari titik v_0 ke titik v_k dinotasikan dengan (v_0, v_k) adalah panjang dari lintasan terpendek dari titik v_0 ke titik v_k . Diameter dari sebuah graf G adalah jarak maksimum dari sebarang dua titik yang dinotasikan dengan $diam G = \max\{e(v) : v \in V\}$. Sikel (*cycle*) adalah sebuah jejak tertutup (*closed trail*). Banyaknya sisi dalam suatu sikel disebut panjang sikel tersebut. Sebuah sikel yang memuat semua titik graf disebut sikel *hamilton*. Sebuah graf yang memuat Sikel *Hamilton* disebut Graf *Hamilton* (Hartsfield and Ringel, 1994).

Pada Gambar 2.1, $W = (v_1, e_1, v_2, e_{10}, v_4, e_9, v_6, e_6, v_2, e_{10}, v_4, e_{12}, v_3)$ adalah sebuah jalan di graf G_6 . Jalan (v_1, v_3) di graf G_6 mempunyai panjang 6. Karena dalam barisan ini sisi e_{10} muncul lebih dari sekali, jelas barisan ini bukan jejak. $W = (v_1, e_1, v_2, e_{10}, v_4, e_{12}, v_3, e_3, v_5, e_{11}, v_4, e_9, v_6)$ adalah sebuah jejak di graf G_6 dengan panjang 6. Karena v_4 muncul dua kali, maka jejak ini bukan lintasan. $W = (v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_{12}, v_4, e_{11}, v_5, e_4, v_6)$ adalah sebuah lintasan di graf G_6 dengan panjang 5. Sedangkan $W = (v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_5, e_4, v_6, e_5, v_1)$ adalah sebuah sikel di graf G_6 dengan panjang 5. Jarak (v_1, v_4) di graf G_6 adalah 2, dan diameter dari graf G_6 adalah 2. Panjang dari sikel terpendek di G disebut *girth*. *Girth* dari graf G adalah 3 (Kemnitz, 2011).

Suatu graf disebut graf terhubung (*connected graph*), jika untuk setiap pasang titik v_i dan v_j di dalam himpunan V terdapat *path* dari v_i ke v_j . Jika tidak, maka G disebut graf tak terhubung (*disconnected graph*). Sebuah graf $G - \{e\}$ adalah sebuah graf yang dihasilkan dari G dengan menghapus sisi e . Jika $G - \{e\}$ tidak terhubung maka e disebut jembatan (*bridge*). Secara umum, jika E_1 adalah himpunan sisi dalam G maka $G - E_1$ adalah graf yang dihasilkan dari G dengan menghapus semua sisi E_1 (Dafik., 2007).

Misal u dan v adalah titik pada sebuah graf G . Titik u pada graf G dikatakan bertetangga (*adjacent*) pada v , jika terdapat sisi e diantara u dan v ditulis $e = uv$. Dengan kata lain u dan v bersisian (*incident*) dengan sisi e . Sebagai contoh pada Gambar 2.1 titik v_1 bertetangga dengan titik v_2 , titik v_3 bersisian dengan sisi v_3v_1, v_3v_2, v_3v_4 , dan v_3v_5 , maka tetangga dari titik v_3 adalah v_1, v_2, v_4, v_5 (Figueroa-Centeno *et al.*, 2002).

Banyaknya sisi yang bersisian pada titik v disebut derajat (*degree*) titik v pada graf G . Jika v mempunyai derajat 0 artinya tidak bertetangga dengan titik yang lain, maka titik v disebut titik terisolasi (*isolated vertex*). Titik yang mempunyai derajat satu disebut titik akhir (*end vertex*). Jika semua titik pada graf G mempunyai derajat sama d , maka dikatakan graf reguler d (Yulianti and Dafik., 2014).



Gambar 2.1 Contoh graf yang memuat Jalan, Jejak, Lintasan, Sikel

Suatu graf juga dapat disajikan dalam bentuk matriks ketetanggaan. Matriks ketetanggaan (*adjacent matrix*) graf G adalah matrik yang berukuran $n \times n$. Bila matriks tersebut dinamakan $A = [a_{ij}]$, maka $a_{ij} = 1$ jika titik i dan j bertetangga, sebaliknya $a_{ij} = 0$ jika titik i dan j tidak bertetangga. Berikut matriks ketetanggaan dari Gambar 2.1 (Yulianti and Dafik., 2014).

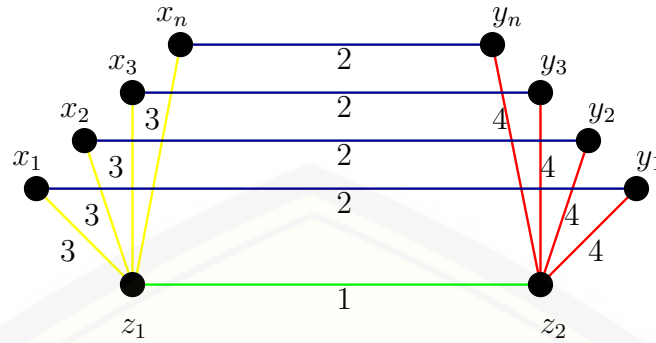
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2 *Rainbow Connection*

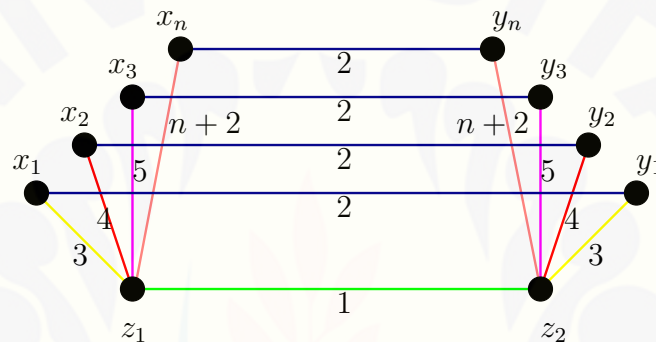
Definisi dari *Rainbow Connection* adalah sebagai berikut:

Misalkan $G = (V(G), E(G))$ sebuah graf terhubung tidak trivial. *Rainbow Connection* adalah suatu pewarnaan terhadap sisi-sisi di G yang didefinisikan sebagai $f : E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k | k \in \mathbb{N}\}$, dimana dua sisi yang bertetangga boleh berwarna sama. Suatu lintasan $u - v$ path di G merupakan *rainbow path* jika tidak ada dua sisi di lintasan yang berwarna sama, dimana *rainbow path* adalah sebuah lintasan yang terdapat dalam graf tersebut. Graf G disebut *rainbow connected* dengan pewarnaan f jika G memuat suatu *rainbow $u-v$ path* untuk setiap dua titik $u, v \in G$. Dalam hal ini, pewarnaan f dikatakan *rainbow coloring* di G . Jika terdapat k warna di G maka f dikatakan *rainbow k -coloring*. Minimum k sehingga terdapat *rainbow k -coloring* di G disebut *rainbow connection number*, ditulis $rc(G)$. Suatu *rainbow coloring* yang menggunakan $rc(G)$ warna dikatakan *minimum rainbow coloring* di G . Lihat pada Gambar 2.2 (Li and Sun, 2012).

Misalkan f suatu *rainbow coloring* pada suatu graf terhubung G . Untuk sebarang dua titik u dan v di G , *rainbow $u-v$ geodesic* di G adalah suatu *rainbow path* dengan panjang $d(u, v)$, dimana $d(u, v)$ adalah jarak antara u dan v . Graf G dikatakan *strongly rainbow connected* jika G memuat satu *rainbow $u-v$ geodesic* untuk setiap dua titik u dan v pada G , ditulis $src(G)$. Lihat pada Gambar 2.3 (Li and Sun, 2012).



Gambar 2.2 Contoh $rc(G)$



Gambar 2.3 Contoh $src(G)$

Sebelumnya telah dilakukan penelitian tentang batas bawah dan batas atas dari *Rainbow Connection*. Berikut teorema yang didapatkan dan akan digunakan untuk membuktikan beberapa teorema yang didapatkan dalam penelitian ini.

Teorema 2.2.1. *Misal G adalah graf terhubung dengan $d(G) \geq 2$ dan jika G adalah interval graf, maka $k(G) \leq rc(G) \leq k(G) + 1$ (Li and Sun, 2012).*

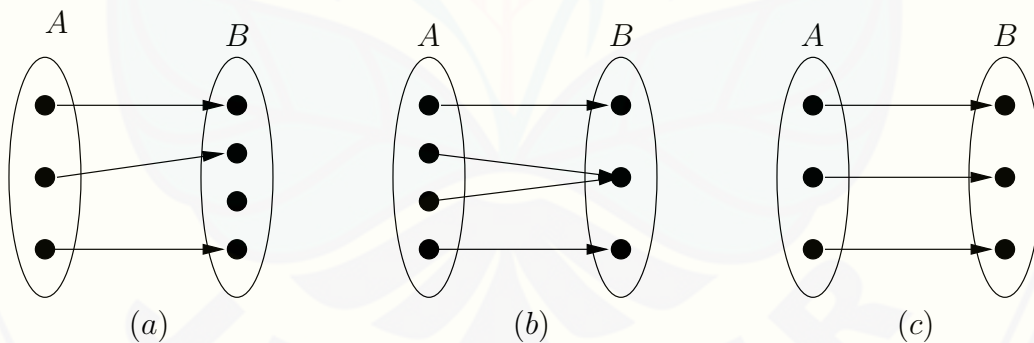
2.3 Fungsi

Fungsi seringkali dikenal sebagai pemetaan. Fungsi " f " dari himpunan A ke himpunan B , ditulis dengan notasi $f : A \rightarrow B$, adalah aturan korespondensi yang menghubungkan setiap $x \in A$ dengan tepat satu anggota B . Himpunan A yaitu

himpunan yang memuat elemen pertama dari elemen-elemen dalam f , disebut *domain* f dan dapat dinyatakan sebagai D_f . Himpunan B yaitu himpunan yang memuat elemen kedua dari elemen-elemen dalam f , disebut *range* f dan dinyatakan sebagai R_f . Notasi $f : A \rightarrow B$ menunjukkan bahwa f merupakan fungsi dari A ke B , yang sering juga dibaca " f adalah pemetaan dari A ke B ", atau " f memetakan A ke B ". Jika (a, b) anggota dari f , maka $b = f(a)$ untuk $(a, b) \in f$ (Bloom and Golomb, 1977).

Fungsi dapat digolongkan menjadi 3 golongan sebagai berikut:

- Fungsi satu-satu (injektif) adalah pemetaan dimana setiap elemen di daerah kodomain yang berpasangan mempunyai pasangan elemen tepat satu di daerah domain, $\forall a_1$ dan $a_2 \in A, a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$.
- Fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi kepada atau fungsi surjektif $\Leftrightarrow \forall b \in B, \exists a \in A \Rightarrow f(a) = b$. Dengan kata lain, suatu kodomain fungsi surjektif sama dengan kisarannya (range).
- Fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi bijektif apabila fungsi tersebut merupakan fungsi injektif sekaligus surjektif.



Gambar 2.4 (a) Fungsi Injektif, (b) Fungsi Surjektif dan (c) Fungsi Bijektif

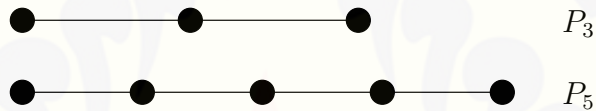
2.4 Graf Khusus dan Operasi Graf

Graf khusus adalah graf yang mempunyai keunikan dan karakteristik bentuk khusus. Keunikan graf khusus adalah tidak isomorfis dengan graf lainnya. Karakteristik bentuknya dapat diperluas sampai order n dan tetap simetris. Berikut ini adalah beberapa contoh graf khusus.

a. Graf Lintasan (*Path*)

Graf lintasan adalah graf sederhana yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan dengan n titik dinotasikan dengan P_n dengan $n \geq 2$ (Damayanti, 2011).

Contoh dari graf lintasan bisa dilihat pada Gambar 2.5.

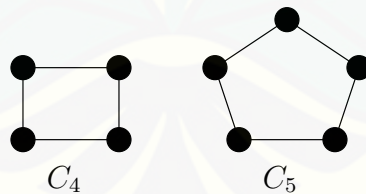


Gambar 2.5 Graf Lintasan P_3 dan P_5

b. Graf Lingkaran (*Cycle*)

Graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n titik dilambangkan dengan C_n (Harary, 2007).

Contoh dari graf lingkaran bisa dilihat pada Gambar 2.6.



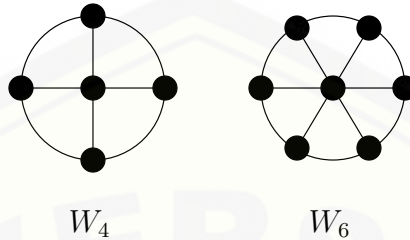
Gambar 2.6 Graf Lingkaran C_4 dan C_5

c. Graf Roda (*Wheel Graph*)

Graf roda W_n ($n > 3$) adalah graf yang didapat dengan menghubungkan

semua titik dari graf lingkaran C_n dengan suatu titik yang disebut titik pusat. Jadi, W_n terdiri dari $n + 1$ titik dan $2n$ sisi (Nasser *et al.*, 2009).

Contoh dari graf roda bisa dilihat pada Gambar 2.7.

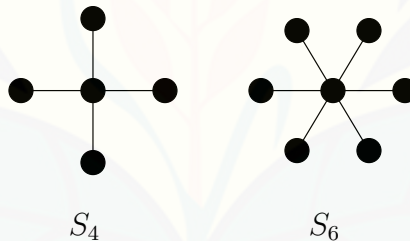


Gambar 2.7 Graf Roda W_4 dan W_6

d. Graf Bintang (*Star Graph*)

Graf Bintang adalah graf pohon yang terdiri dari satu titik pusat yang berderajat n dan n titik yang berderajat 1. Jadi, graf bintang S_n terdiri dari $n + 1$ titik dan n sisi dengan $n \geq 2$ (Damayanti, 2011).

Contoh dari graf bintang bisa dilihat pada Gambar 2.8.

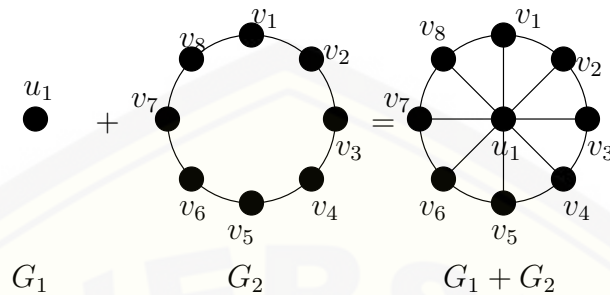


Gambar 2.8 Graf Bintang S_4 dan S_6

Operasi graf merupakan cara untuk memperoleh graf baru dengan melakukan suatu operasi terhadap dua graf. Berikut ini adalah beberapa macam operasi graf beserta contohnya.

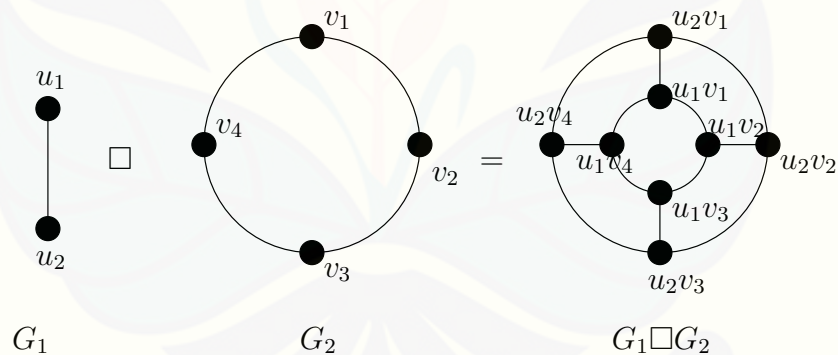
Definisi 2.4.1. *Graph Joint* ($G_1 + G_2$) dari graf G_1 dan G_2 , dinotasikan dengan $G = G_1 + G_2$, adalah graf G dimana $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G) =$

$E(G_1) \cup E(G_2) \cup uv | u \in V(G_1), v \in V(G_2)$ (Harary, 2007). Contoh dari operasi *joint* dapat dilihat pada Gambar 2.9.



Gambar 2.9 Contoh Operasi *Joint*

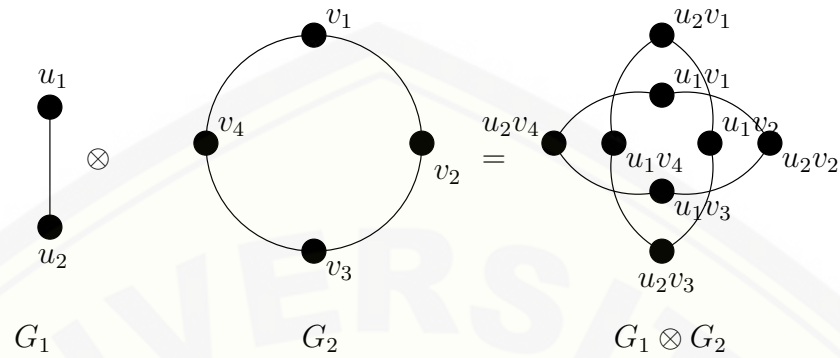
Definisi 2.4.2. *Catesian Product* dari graf $G_1(V_1, E_1)$ dan $G_2(V_2, E_2)$ adalah graf $G(V, E)$, ditulis $G = G_1 \square G_2$, jika $V = V(G_1) \times V(G_2)$, dan dua titik $\langle u_1, u_2 \rangle$ dan $\langle v_1, v_2 \rangle$ di G bertetangga jika dan hanya jika salah satu dari dua hal berikut berlaku: $u_1 = v_1$ dan $(u_2, v_2) \in E(G_2)$ atau $u_2 = v_2$ dan $(u_1, v_1) \in E(G_1)$ (Harary, 2007). Contoh operasi *Catesian Product* dapat dilihat pada Gambar 2.10.



Gambar 2.10 Contoh Operasi *Cartesian Product*

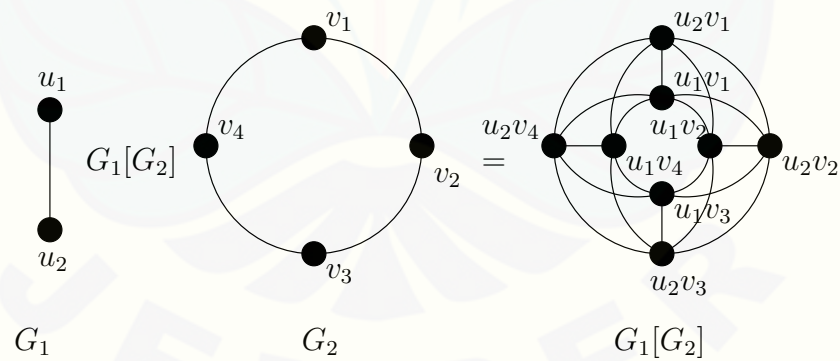
Definisi 2.4.3. *Tensor product* dari dua graf G_1 dan G_2 adalah penggabungan dari dua graf G_1 dan G_2 yang dinotasikan oleh $G_1 \otimes G_2$ mempunyai himpunan titik $V(G_1 \otimes G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G_1 \otimes G_2) =$

$\{(u_1, v_2)(u_2, v_1) | u_1u_2 \in E(G_1) \text{ dan } v_1v_2 \in E(G_2)\}$ (Schiermeyer., 2008). Contoh operasi *Tensor Product* dapat dilihat pada Gambar 2.11.



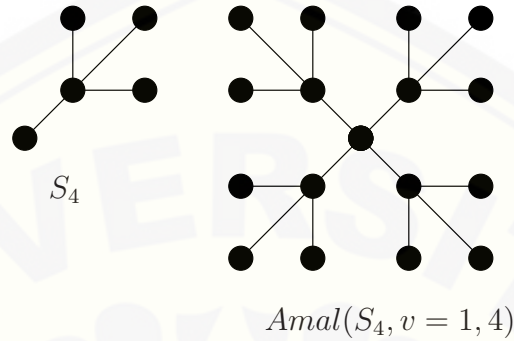
Gambar 2.11 Contoh Operasi *Tensor Product*

Definisi 2.4.4. *Composition* dinotasikan dengan $G = G_1[G_2]$, G_1 dan G_2 dengan disjoint himpunan titik $V(G_1)$ dan $V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G_1)$ dan $E(G_2)$ adalah graf dengan titik $V(G_1) \times V(G_2)$ dan $u = (u_1, u_2)$ yang adjacent dengan $v = (v_1, v_2)$ ketika $[u_1 \text{ adj } v_1]$ atau $[u_1 = v_1 \text{ dan } u_2 \text{ adj } v_2]$ (Harary, 2007). Contoh operasi *Composition* dapat dilihat pada Gambar 2.12.



Gambar 2.12 Contoh Operasi *Composition*

Definisi 2.4.5. *Amalgamation* dinotasikan dengan $Amal(H_i, v_{0i})$. Misalkan G adalah suatu keluarga graf berhingga dan setiap H_n mempunyai suatu titik v_i yang disebut *titik terminal* (Schiermeyer., 2008). Contoh operasi *amalgamation* lihat pada Gambar 2.13.



Gambar 2.13 Contoh operasi *Amalgamation*

Beberapa graf hasil operasi yang telah ditemukan oleh Harsya *et al.* (2014) dan akan dipakai dalam penelitian ini, yaitu:

- a. Misal G adalah joint dari graf lintasan dan graf lingkaran. Untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$, maka himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam $V = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq m\}$, $E = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_j y_{j+1}, y_n y_1; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_i y_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$, $|V| = n + m$ dan $|E| = nm + n + m - 1$.
- b. Misal G adalah joint dari graf lingkaran dan graf bintang. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, maka himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam $V = \{A\} \cup \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq m\}$, $E = \{x_i x_{i+1}, x_n x_1; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{A y_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{A x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$, $|V| = n + m + 1$, $|E| = nm + 2n + m$.
- c. Misal G adalah composition dari graf lintasan dan graf lingkaran. Untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$, maka himpunan titik dan sisinya dapat dituliskan dalam $V = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E = \{x_{i,j} x_{i,j+1}, x_{i,m} x_{i,1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$.

$m - 1\} \cup \{x_{i,j}x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j}x_{i+1,j+1}, x_{i,m}x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq i \leq m - 1\} \cup \{x_{i,j}x_{i+1,j+1}, x_{i,m}x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq j \leq m - 1\}, |V| = nm, |E| = 4nm - 3m.$

- d. Misal G adalah tensor product dari graf lintasan dan graf lingkaran. Untuk $n \geq 3$, maka himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam $V = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n\}$ dan $E = \{x_{i,j}x_{i+1,j+1}; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq j \leq n - 1\} \cup \{x_{i,n}x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_{i+1,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq j \leq n - 1\} \cup \{x_{i+1,n}x_{i,1}; 1 \leq i \leq n - 1\}, |V| = n^2, |E| = 2n^2 - 2n.$

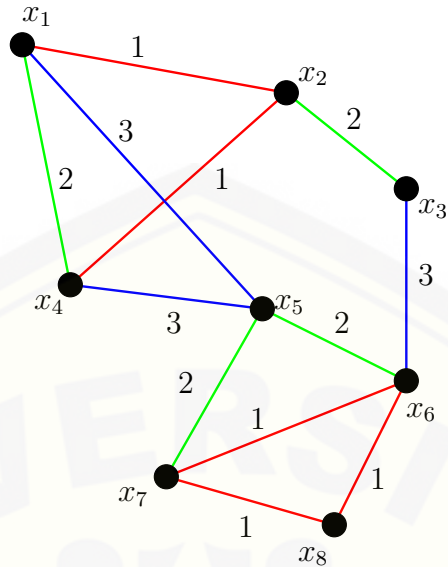
2.5 Aplikasi *Rainbow Connection* pada Proses Distribusi

Konsep *Rainbow Connection* dapat diaplikasikan pada proses distribusi, misalnya digunakan dalam pengantaran kartu suara dari KPUD kabupaten/kota sampai ke Kecamatan perlu pengawalan dan pengawasan yang ketat agar tidak terjadi masalah yang tidak diinginkan. Pengantaran kartu suara dari KPUD kabupaten/kota sampai ke Kecamatan perlu pengawasan karena dikhawatirkan pada waktu pengantaran dari KPUD kabupaten/kota sampai ke Kecamatan ditakutkan terjadi penyelewengan surat suara oleh salah satu pihak calon apabila tidak diantarkan oleh pihak yang berwenang, misalnya dari Polres, KPUD dan panitia pelaksana. Jadi, hal-hal yang buruk dapat diminimalkan.

Dengan demikian, dapat dipilih jalur yang bisa menjangkau kecamatan terbanyak dan jalur yang dilewati tidak ada penjaga dari tim yang sama. Sehingga harus ditentukan jumlah minimal tim pengawas yang dibutuhkan. Situasi inilah yang dapat dimodelkan dalam bilangan *rainbow connection*.

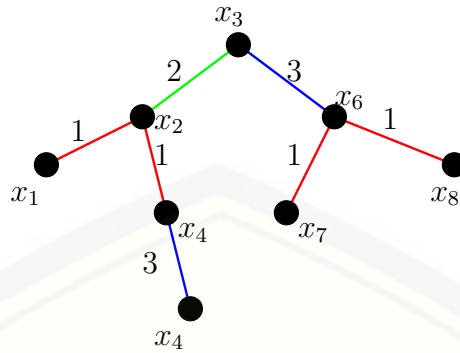
Contoh ilustrasi lihat Gambar 2.14.

Pada Gambar 2.14 memiliki $k = 3$, yang menurut Teorema 2.2.1 adalah $k(G) \leq rc(G) \leq k(G) + 1$, maka batas bawah dan batas atas dari $rc(G)$ adalah $3 \leq rc(G) \leq 3 + 1$, maka $3 \leq rc(G) \leq 4$, setelah diwarnai $f : E(G) \rightarrow 1, 2, 3$ sehingga $rc(G) = 3$. Jadi yang harus dibentuk adalah 3 tim dan disebar menurut

Gambar 2.14 Contoh Aplikasi dalam Bentuk Graf G

warna dari $rc(G)$ seperti pada Gambar 2.14.

Setelah ditemukan *Rainbow Connection Number*-nya, dibentuk tim sebanyak *Rainbow Connection Number* yang telah ditemukan yaitu 3, misal tim pertama dari Polres dan KPUD, tim kedua dari KPUD dan panitia pelaksana, tim ketiga dari Polres dan panitia pelaksana. Kemudian diambil lintasan yang dapat menjangkau titik terbanyak dan warna sisi harus berbeda. Kondisi tersebut dapat dimodelkan dalam bentuk *Spanning Tree* seperti Gambar 2.15. Pada Gambar 2.15 dimisalkan KPUD kabupaten terletak pada posisi x_3 . Untuk menuju x_5 harus berhenti di x_2 dan diperiksa oleh tim 2, kemudian berhenti di x_4 dan diperiksa oleh tim 1, setelah sampai di x_5 diperiksa oleh tim 3. Untuk menuju x_1 , perlu tambahan kendaraan untuk mengantarkan langsung ke x_1 dengan diperiksa oleh tim 1. Sedangkan untuk menuju x_7 harus berhenti di x_6 dan diperiksa oleh tim 3, dan dilanjutkan ke x_7 diperiksa oleh tim 1, Untuk menuju x_8 juga perlu tambahan kendaraan untuk mengantarkan langsung ke x_8 dengan diperiksa oleh tim 1, maka semua titik sudah dapat dijangkau.



Gambar 2.15 Contoh Aplikasi dalam Bentuk *Spanning Tree*

2.6 Hasil-hasil *Rainbow Connection*

Pada bagian ini disajikan beberapa rangkuman hasil *Rainbow Connection* yang dapat digunakan sebagai rujukan penelitian ini.

Tabel 2.1: Hasil *Rainbow Connection* Sebelumnya

Graf	$rc(G)$	Keterangan
<i>graf Gear</i> G_8	4	Syafrizal. (2013)
<i>graf Fan</i> (F_{10})	3	Alfarisi and Dafik. (2014))
<i>graf Lengkap</i> ($K_{2,9}$)	3	Histamedika (2012)
<i>graf Komplemen</i>	2	Wijaya (2013)
<i>Lingkaran</i> \overline{C}_8		
<i>graf Lingkaran</i> C_n	$\frac{n}{2}$	(Chartrand <i>et al.</i> , 2006)
<i>graf Roda</i> W_n	1, untuk $n = 3$ 2, untuk $4 \leq n \leq 6$ 3, untuk $n \geq 7$	(Chartrand <i>et al.</i> , 2006)
<i>graf Kipas Tangkai</i> Kt_n	1, untuk $n = 2, 3$ 3, untuk $n \geq 4$	Alfarisi and Dafik. (2014)
<i>graf Jaring</i>	3, untuk $3 \leq n \leq 6$	Alfarisi and Dafik. (2014)
<i>Laba-laba</i> Wb_n	4, untuk $n = 7$ 5, untuk $n \geq 8$	
<i>graf Tangga</i>	$n + 1$	Alfarisi and Dafik. (2014)
<i>Permata</i> Dl_n		

Graf	$rc(G)$	Keterangan
<i>graf Bunga Fl_n</i>	3	Alfarisi and Dafik. (2014)
<i>graf Parasut Pc_n</i>	$n + 1$	Alfarisi and Dafik. (2014)
<i>graf Windmild W₄ⁿ</i>	3	Alfarisi and Dafik. (2014)
<i>graf Prisma P_{n,m}</i>	m , untuk $n = 3$ $\lceil \frac{n}{2} \rceil + (m - 1)$, untuk $n \geq 4$	Darmawan and Dafik. (2014)
<i>graf AntiPrisma AP_n</i>	2, untuk $n = 3$ $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$, untuk $n \geq 4$	Darmawan and Dafik. (2014)

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini dikategorikan kedalam penelitian eksploratif dan penelitian terapan (*applied research*), yaitu:

- a. Penelitian eksploratif adalah jenis penelitian yang bertujuan menggali hal-hal yang ingin diketahui oleh peneliti dan hasil penelitian dapat digunakan sebagai dasar penelitian selanjutnya.
- b. Penelitian terapan (*applied research*) merupakan penyelidikan yang hati-hati, sistematis dan terus-menerus terhadap suatu masalah dengan tujuan untuk digunakan dengan segera untuk keperluan tertentu.

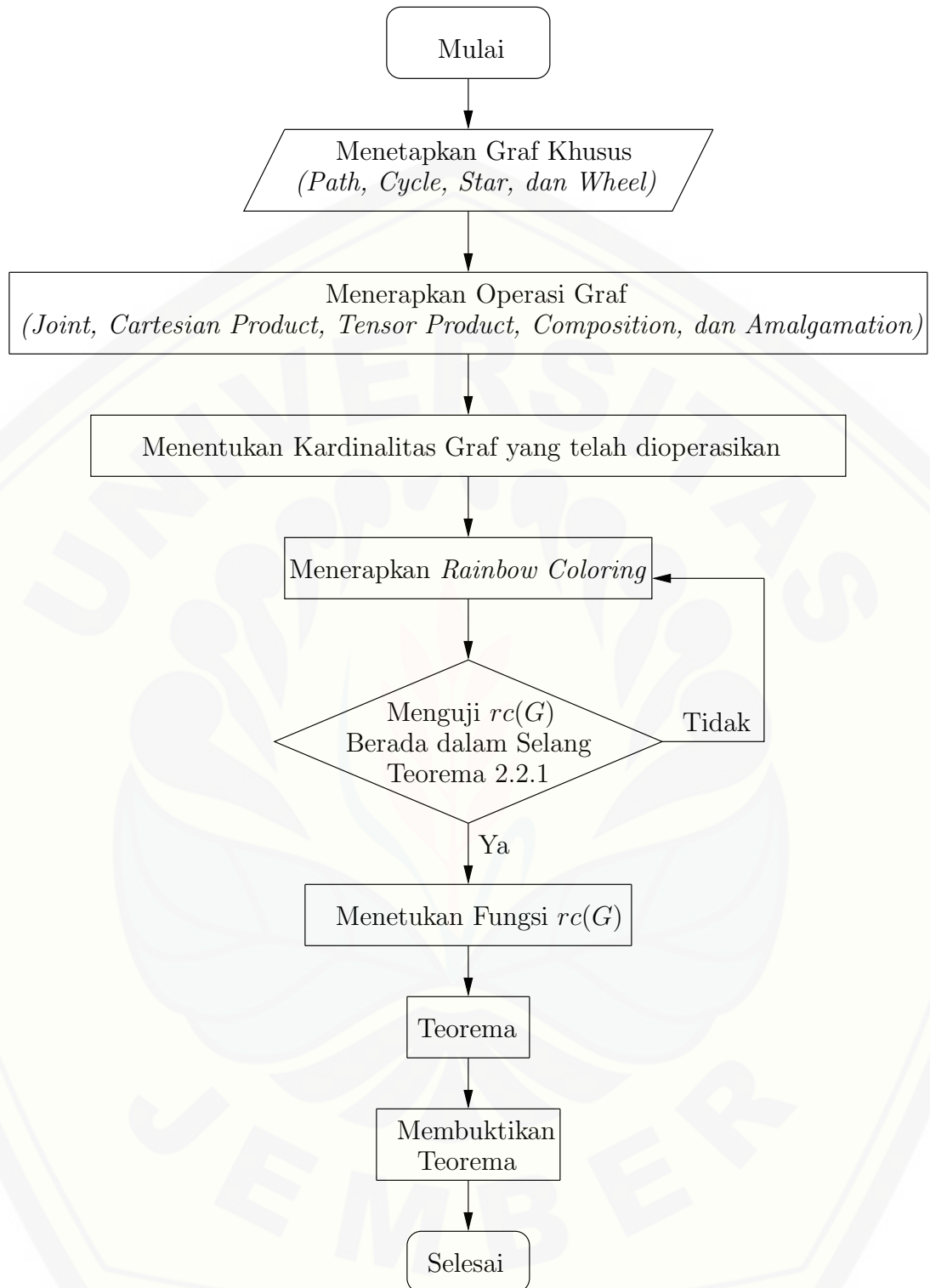
3.2 Data

Data dalam penelitian ini adalah data sekunder yang didapat dari penelitian sebelumnya. Data yang digunakan berupa graf-graf khusus yang akan dioperasikan. Graf-graf yang digunakan adalah graf lintasan (*path*), graf lingkaran (*cycle*), graf bintang (*star*), dan graf roda (*wheel*). Penelitian ini menggunakan metode deduktif aksiomatik dalam menyelesaikan permasalahan. Metode deduktif menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada untuk memecahkan suatu masalah.

3.3 Rancangan Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada pengoperasian graf, yaitu pada graf lintasan (*path*), graf lingkaran (*cycle*), graf bintang (*star*), dan graf roda (*wheel*). Adapun teknik penelitian adalah sebagai berikut:

- a. Menentukan graf-graf khusus sebagai objek penelitian.
- b. Menerapkan operasi graf pada graf-graf khusus yang telah ditentukan.
- c. Menentukan kardinalitas graf-graf khusus yang telah dioperasikan.
- d. Menerapkan *Rainbow Coloring* pada graf-graf yang telah.
- e. Memeriksa *Rainbow Connection Number* dengan menggunakan Teorema 2.2.1, apabila sudah berada dalam selang, maka dilanjutkan dengan menentukan fungsi, apabila belum berada dalam selang, maka kembali ke tahap sebelumnya yaitu menerapkan *Rainbow Coloring* pada graf.
- f. Menentukan fungsi berdasarkan keteraturan dari *Rainbow Coloring* sehingga didapatkan teorema.
- g. Membuktikan teorema yang telah didapatkan.



Gambar 3.1 Skema Penelitian

BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam bab ini akan dijelaskan hasil penelitian mengenai *Rainbow Connection* pada operasi graf. Hasil utama dalam penelitian ini adalah teorema tentang *Rainbow Connection* dan fungsi *Rainbow Coloring*-nya. Penelitian ini diawali dengan mengoperasikan graf khusus yang telah ditentukan. Kemudian menerapkan *Rainbow Coloring* dan menguji apakah *Rainbow Coloring* sudah berada di dalam interval dengan menggunakan Teorema 2.2.1, kemudian *Rainbow Coloring* dibentuk pola fungsi agar mudah dalam mencari fungsi dari pewarnaannya, jika sudah berada di dalam interval Teorema 2.2.1 dan membentuk pola fungsi maka dilanjutkan dengan mencari fungsi dari *Rainbow Coloring*-nya. Dalam penelitian ini tidak hanya $rc(G)$, tetapi dilengkapi dengan cara menggambar graf yang merupakan hasil dari operasi. Bukti untuk $rc(G)$ yang berada pada $k + 1$ sudah dilengkapi pembuktian kualitatif dengan menggunakan *counter example*.

Terdapat 13 teorema baru dalam penelitian ini yaitu *Rainbow Connection Number* dari operasi graf lintasan, graf lingkaran, graf bintang dan graf roda yang ditemukan secara eksperimen. Dalam penelitian ini terdapat empat graf yang mengambil dari penelitian sebelumnya dan sisanya merupakan graf baru. Format penyajian temuan penelitian ini diawali dengan pernyataan teorema *Rainbow Connection* kemudian dilanjutkan dengan bukti dan contoh gambar atau ilustrasi sebagai visualisasi kebenaran pembuktian teorema.

4.1 *Rainbow Connection Number* dan Fungsi *Rainbow Coloring*

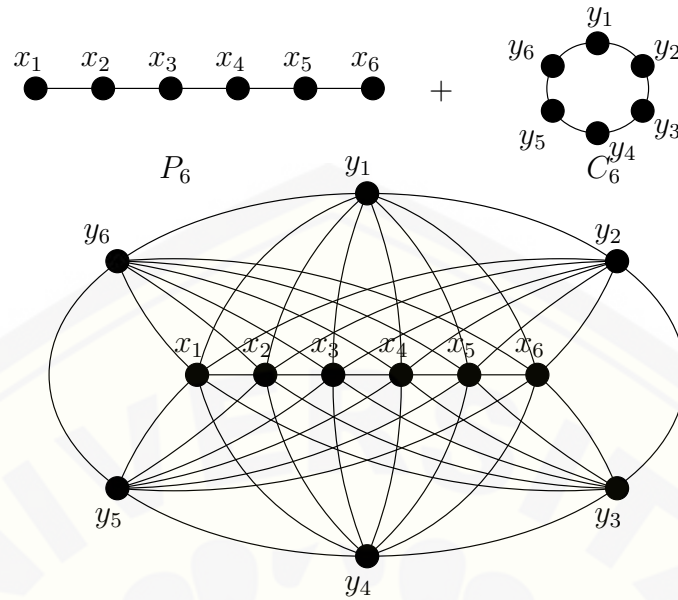
Langkah pertama dalam penelitian ini adalah menerapkan operasi graf dengan menggunakan observasi terlebih dahulu. Observasi bertujuan untuk mendefinisikan himpunan titik, himpunan sisi, kardinalitas titik, dan kardinalitas sisi

dari graf hasil operasi. Setelah melakukan observasi, didapatkan 13 teorema baru terkait *Rainbow Connection* pada operasi graf lintasan, graf lingkaran, graf bintang dan graf roda. Teorema-teorema baru itu diantaranya *Joint* $[(P_n + C_n), (C_n + S_n), (P_n + W_n), (C_n + W_n), \text{ dan } (S_n + W_n)]$, *Cartesian Product* $(P_n \square W_m)$, *Tensor Product* $(P_n \otimes C_n)$, *Composition* $[(P_n[C_m]), (P_n[W_m]) \text{ dan } (P_n[S_m])]$, *Amalgamasi* $[(Amal(C_n, v = 1, r) \square P_2), (Amal(P_n, v = 1, r) \square P_2) \text{ dan } (Amal(W_n, v = 1, r) \square P_2)]$. Berikut hasil observasi dan teorema beserta pembuktiannya.

◇ **Observasi 4.1.1.** *Misal diketahui graf lintasan P_n dengan $V(P_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(P_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\}$ dan graf lingkaran C_m dengan $V(C_m) = \{y_j; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(C_m) = \{y_j y_{j+1}, y_m y_1; 1 \leq j \leq m - 1\}$. Joint graf G yang dinotasikan dengan $G = P_n + C_m = C_m + P_n$, maka untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$, himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam $V(P_n + C_m) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq m\}$, $E(P_n + C_m) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{y_j y_{j+1}, y_m y_1; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{x_i y_j; 1 \leq i \leq n \ 1 \leq j \leq m\}$, $|V(P_n + C_m)| = n + m$ dan $|E(P_n + C_m)| = nm + n + m - 1$.*

Bukti. Definisi 2.4.1 menjelaskan bahwa $G = P_n + C_m$ memiliki $V(P_n + C_m) = V(P_n) \cup V(C_m)$ dan $E(P_n + C_m) = E(P_n) \cup E(C_m) \cup uv | u \in V(P_n), v \in V(C_m)$. Dari Gambar 4.1 didapatkan $V(P_n + C_m) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq m\}$, $E(P_n + C_m) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{y_j y_{j+1}, y_m y_1; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{x_i y_j; 1 \leq i \leq n \ 1 \leq j \leq m\}$, $|V(P_n + C_m)| = n + m$ dan $|E(P_n + C_m)| = nm + n + m - 1$. □

Gambar 4.1 mengilustrasikan bahwa untuk menggambar graf $P_n + C_m$ diawali dengan menggambar graf lingkaran, kemudian menggambar graf lintasan yang berada di dalam graf lingkaran. Setelah itu, masing-masing titik pada graf lingkaran dihubungkan ke semua titik pada graf lintasan. Untuk mengekspansinya tinggal menambah jumlah titik dan sisi pada kedua graf tersebut, sedangkan ketetanggaannya dilakukan melalui cara yang sama. Harsya *et al.* (2014) telah memvisualisasi graf ini, namun modifikasinya dilakukan dalam penelitian ini.



Gambar 4.1 Contoh Operasi $P_6 + C_6$

Dari Observasi 4.1.1, ditentukan *rainbow connection number* dan fungsi *rainbow coloring* pada graf $G = P_n + C_n$ yang disajikan dalam teorema berikut.

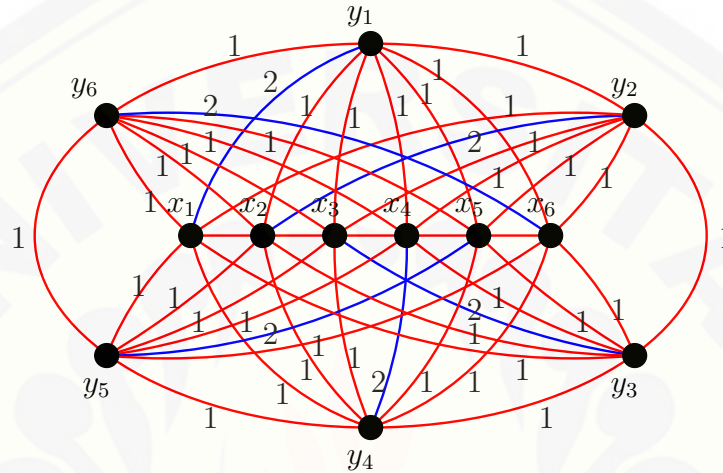
◇ **Teorema 4.1.1.** Misal G adalah joint dari graf lintasan dan graf lingkaran. Untuk $n \geq 3$, *rainbow connection number* $G = P_n + C_n$ adalah $rc(P_n + C_n) = 2$.

Bukti. Sesuai dengan Observasi 4.1.1, didapatkan $V = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq n\}$, $E = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{y_j y_{j+1}, y_n y_1; 1 \leq j \leq n - 1\} \cup \{x_i y_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}$, $|V| = 2n$ dan $|E| = n^2 + 2n - 1$. Berdasarkan Teorema 2.2.1, nilai rc berada pada selang $k(P_n + C_n) \leq rc(P_n + C_n) \leq k(P_n + C_n) + 1$. Untuk $n \geq 3$, $P_n + C_n$ berdiameter 2 maka $2 \leq rc(P_n + C_n) \leq 3$. Diberikan pewarnaan sisi $P_n + C_n$ dengan fungsi berikut.

$$f(e) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } e = x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1 \\ 1, & \text{untuk } e = y_j y_{j+1}, y_n y_1; 1 \leq j \leq n - 1 \end{cases}$$

$$f(e) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } e = x_i y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n; i \neq j \\ 2, & \text{untuk } e = x_i y_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n; i = j \end{cases}$$

Jelas bahwa $f : E(P_n + C_n) \rightarrow \{1, 2\}$. Sehingga, $rc(P_n + C_n) = 2$ dan mencapai lower bound.

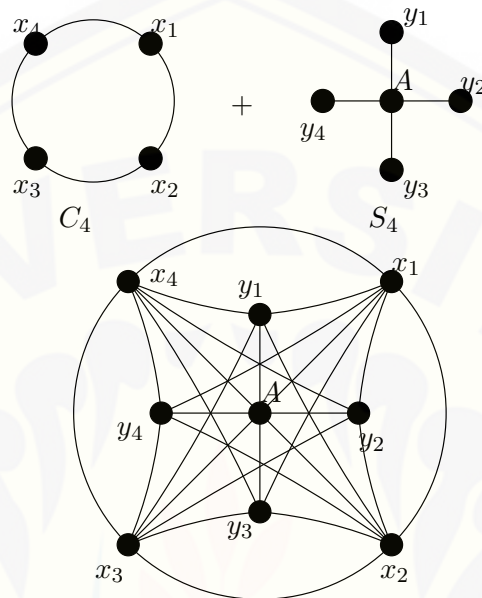


Gambar 4.2 Contoh *Rainbow Coloring* $P_n + C_n$

◇ **Observasi 4.1.2.** Misal diketahui graf lingkaran C_n dengan $V(C_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(C_n) = \{x_i x_{i+1}, x_n x_1; 1 \leq i \leq n - 1\}$ dan graf bintang S_m dengan $V(S_m) = \{A, y_j; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(S_m) = \{A y_j; 1 \leq j \leq m\}$. Joint graf G yang dinotasikan dengan $G = C_n + S_m = S_m + C_n$, maka untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam $V(C_n + S_m) = \{A\} \cup \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq m\}$, $E(C_n + S_m) = \{x_i x_{i+1}, x_n x_1; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{A y_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{A x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$, $|V(C_n + S_m)| = n + m + 1$, $|E(C_n + S_m)| = nm + 2n + m$.

Bukti. Definisi 2.4.1 menjelaskan bahwa $G = C_n + S_m$ memiliki $V(C_n + S_m) = V(C_n) \cup V(S_m)$ dan $E(C_n + S_m) = E(C_n) \cup E(S_m) \cup \{uv | u \in V(C_n), v \in V(S_m)\}$. Dari Gambar 4.3 didapatkan $V(C_n + S_m) = \{A\} \cup \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq m\}$,

$$E(C_n + S_m) = \{x_i x_{i+1}, x_n x_1; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{Ay_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{Ax_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}, |V(C_n + S_m)| = n + m + 1, |E(C_n + S_m)| = nm + 2n + m. \quad \square$$

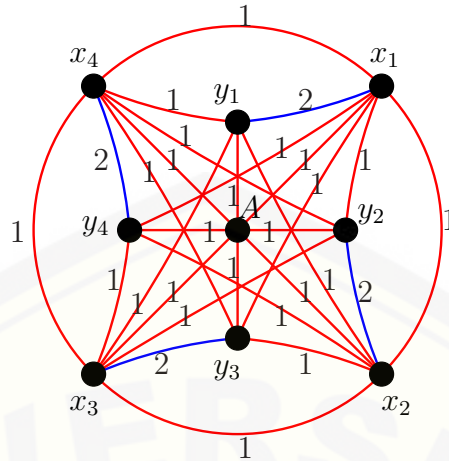


Gambar 4.3 Contoh Operasi $C_4 + S_4$

Gambar 4.3 mengilustrasikan bahwa untuk menggambar graf $C_n + S_m$ diawali dengan menggambar graf lingkaran, kemudian menggambar graf bintang yang berada di dalam graf lingkaran. Setelah itu, masing-masing titik pada graf lingkaran dihubungkan ke semua titik pada graf lintasan. Untuk mengekspansinya tinggal menambah jumlah titik dan sisi pada kedua graf tersebut, sedangkan ketetanggaannya dilakukan melalui cara yang sama. Harsya *et al.* (2014) telah memvisualisasi graf ini, namun modifikasinya dilakukan dalam penelitian ini.

Dari Observasi 4.1.2, ditentukan *rainbow connection number* dan fungsi *rainbow coloring* pada graf $G = C_n + S_n$ yang disajikan dalam teorema berikut.

◇ **Teorema 4.1.2.** Misal G adalah *joint* dari graf lingkaran dan graf bintang. Untuk $n \geq 3$, *rainbow connection number* $G = C_n + S_n$ adalah $rc(C_n + S_n) = 2$.



Gambar 4.4 Contoh *Rainbow Coloring* $C_n + S_n$

Bukti. Sesuai dengan Observasi 4.1.2, didapatkan $V = \{A\} \cup \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq n\}$, $E = \{x_i x_{i+1}, x_n x_1; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{A y_j; 1 \leq j \leq n\} \cup \{A x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n\}$, $|V| = 2n + 1$, $|E| = n^2 + 3n$. Berdasarkan Teorema 2.2.1 nilai rc berada pada selang $k(C_n + S_n) \leq rc(C_n + S_n) \leq k(C_n + S_n) + 1$.

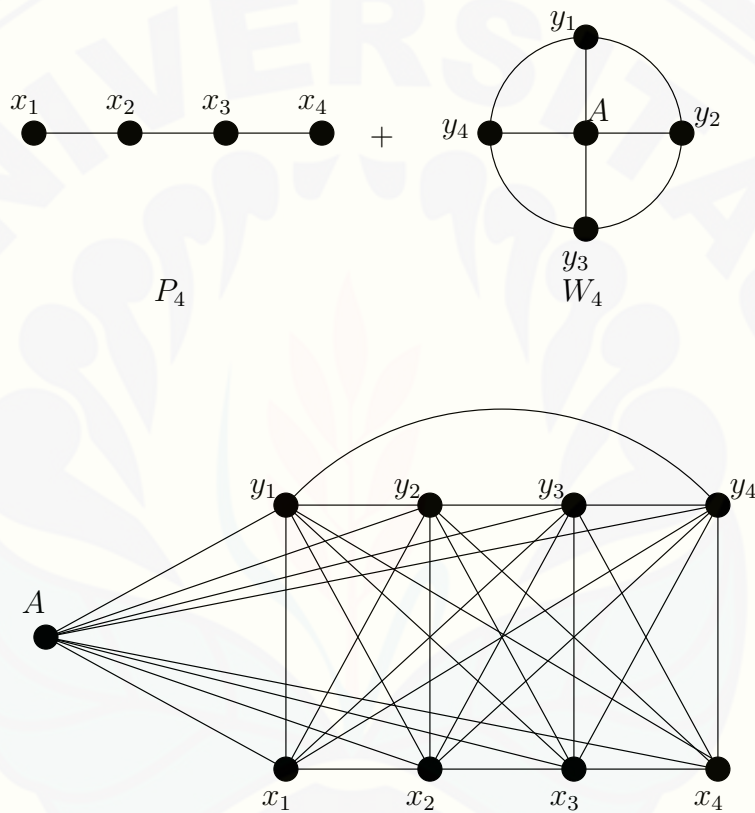
Untuk $n \geq 3$, $C_n + S_n$ berdiameter 2 maka $2 \leq rc(C_n + S_n) \leq 3$. Diberikan pewarnaan sisi $C_n + S_n$ dengan fungsi berikut.

$$f(e) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } e = x_i x_{i+1}, x_n x_1; 1 \leq i \leq n - 1 \\ 1, & \text{untuk } e = A y_j; 1 \leq j \leq n \\ 1, & \text{untuk } e = A x_i; 1 \leq i \leq n \\ 1, & \text{untuk } e = x_i y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n; i \neq j \\ 2, & \text{untuk } e = x_i y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n; i = j \end{cases}$$

Jelas bahwa $f : E(C_n + S_n) \rightarrow \{1, 2\}$. Sehingga, $rc(C_n + S_n) = 2$ dan mencapai lower bound.

◇ **Observasi 4.1.3.** Misal diketahui graf lintasan P_n dengan $V(P_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(P_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\}$ dan graf roda W_m dengan $V(W_m) =$

$\{A, y_j; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(W_m) = \{Ay_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j y_{j+1}, y_m y_1; 1 \leq j \leq m - 1\}$. Joint graf G yang dinotasikan dengan $G = P_n + W_m = W_m + P_n$, maka untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$, himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam $V(P_n + W_m) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{A\}$ dan $E(P_n + W_m) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{y_j y_{j+1}, y_m y_1; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{Ay_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_i y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{Ax_i; 1 \leq i \leq n\}$, $|V(P_n + W_m)| = n + m + 1$, $|E(P_n + W_m)| = nm + 2n + 2m - 1$.



Gambar 4.5 Contoh Operasi $P_4 + W_4$

Bukti. Definisi 2.4.1 menjelaskan bahwa $G = P_n + W_m$ memiliki $V(P_n + W_m) = V(P_n) \cup V(W_m)$ dan $E(P_n + W_m) = E(P_n) \cup E(W_m) \cup uv | u \in V(P_n), v \in V(W_m)$. Dari Gambar 4.5 didapatkan $V(P_n + W_m) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{A\}$ dan $E(P_n + W_m) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{y_j y_{j+1}, y_m y_1; 1 \leq j \leq m - 1\}$

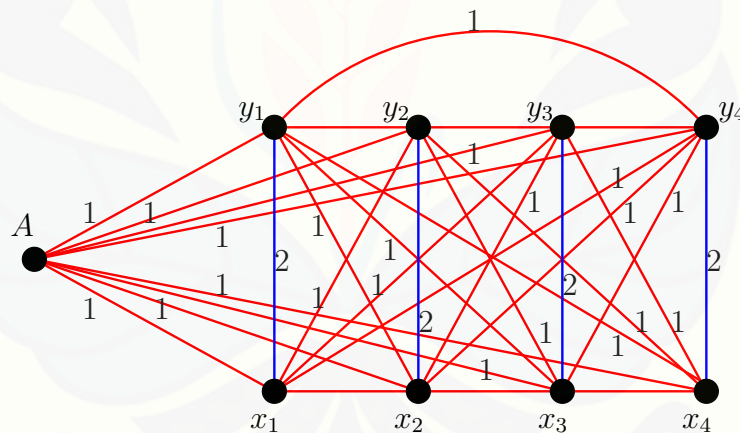
$$\cup \{Ay_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_iy_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{Ax_i; 1 \leq i \leq n\},$$

$$|V(P_n + W_m)| = n + m + 1, |E(P_n + W_m)| = nm + 2n + 2m - 1. \quad \square$$

Gambar 4.5 mengilustrasikan bahwa untuk menggambar graf $P_n + W_m$ diawali dengan menggambar graf lintasan di posisi bawah, kemudian menggambar graf roda yang berada di atas graf lintasan dengan titik A ditarik ke arah kiri. Setelah itu, masing-masing titik pada graf lintasan dihubungkan ke semua titik pada graf roda. Untuk mengekspannya tinggal menambah jumlah titik dan sisi pada kedua graf tersebut, sedangkan ketetanggaannya dilakukan melalui cara yang sama.

Dari Observasi 4.1.3, ditentukan *rainbow connection number* dan fungsi *rainbow coloring* pada graf $G = P_n + W_n$ yang disajikan dalam teorema berikut.

◇ **Teorema 4.1.3.** Misal G adalah joint dari graf lintasan dan graf roda. Untuk $n \geq 3$, *rainbow connection number* $G = P_n + W_n$ adalah $rc(P_n + W_n) = 2$.



Gambar 4.6 Contoh *Rainbow Coloring* $P_n + W_n$

Bukti. Sesuai dengan Observasi 4.1.3, didapatkan $V = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq n\} \cup \{A\}$ dan $E = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{y_j y_{j+1}, y_n y_1; 1 \leq j \leq n - 1\} \cup \{Ay_j; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_i y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n\} \cup \{Ax_i; 1 \leq i \leq n\}$, $|V| =$

$2n + 1, |E| = n^2 + 4n - 1$. Berdasarkan Teorema 2.2.1 nilai rc berada pada selang $k(P_n + W_n) \leq rc(P_n + W_n) \leq k(P_n + W_m) + 1$.

Untuk $n \geq 3$, $P_n + W_n$ berdiameter 2 maka $2 \leq rc(P_n + W_n) \leq 3$. Diberikan pewarnaan sisi $P_n + W_n$ dengan fungsi berikut.

$$f(e) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } e = x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1 \\ 1, & \text{untuk } e = y_j y_{j+1}, y_n y_1; 1 \leq j \leq n - 1 \\ 1, & \text{untuk } e = A y_j; 1 \leq j \leq n \\ 1, & \text{untuk } e = A x_i; 1 \leq i \leq n \\ 1, & \text{untuk } e = x_i y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n; i \neq j \\ 2, & \text{untuk } e = x_i y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n; i = j \end{cases}$$

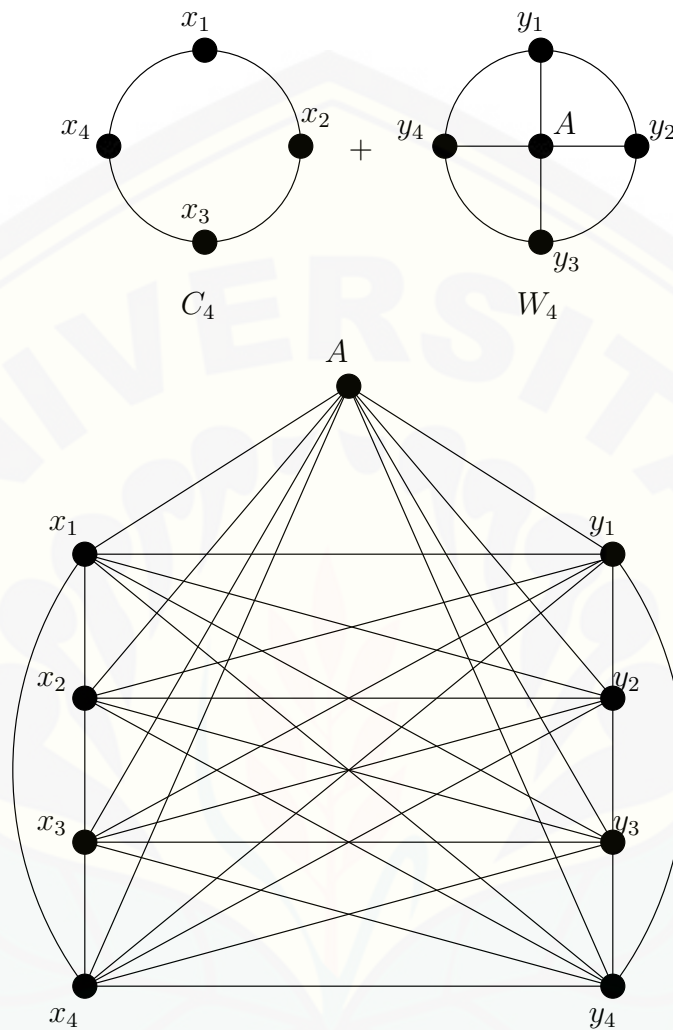
Jelas bahwa $f : E(P_n + W_n) \rightarrow \{1, 2\}$. Sehingga, $rc(P_n + W_n) = 2$ dan mencapai lower bound.

◇ **Observasi 4.1.4.** Misal diketahui graf lingkaran C_n dengan $V(C_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(C_n) = \{x_i x_{i+1}, x_n x_1; 1 \leq i \leq n - 1\}$ dan graf roda W_m dengan $V(W_m) = \{A, y_j; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(W_m) = \{A y_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j y_{j+1}, y_m y_1; 1 \leq j \leq m - 1\}$. Joint graf G yang dinotasikan dengan $G = (C_n + W_m) = W_m + C_m$, maka untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam $V(C_n + W_m) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{A\}$ dan $E(C_n + W_m) = \{x_i x_{i+1} x_n x_1; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{y_j y_{j+1}, y_m y_1; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{A y_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_i y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{A x_i; 1 \leq i \leq n\}$, $|V(C_n + W_m)| = n + m + 1$, $|E(C_n + W_m)| = nm + 2n + 2m$.

Bukti. Definisi 2.4.1 menjelaskan bahwa $G = C_n + W_m$ memiliki $V(C_n + W_m) = V(C_n) \cup V(W_m)$ dan $E(C_n + W_m) = E(C_n) \cup E(W_m) \cup uv | u \in V(C_n), v \in V(W_m)$. Dari Gambar 4.7 didapatkan $V(C_n + W_m) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{A\}$ dan $E(C_n + W_m) = \{x_i x_{i+1} x_n x_1; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{y_j y_{j+1}, y_m y_1; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{A y_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_i y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{A x_i; 1 \leq i \leq n\}$,

$$|V(C_n + W_m)| = n + m + 1, |E(C_n + W_m)| = nm + 2n + 2m.$$

□



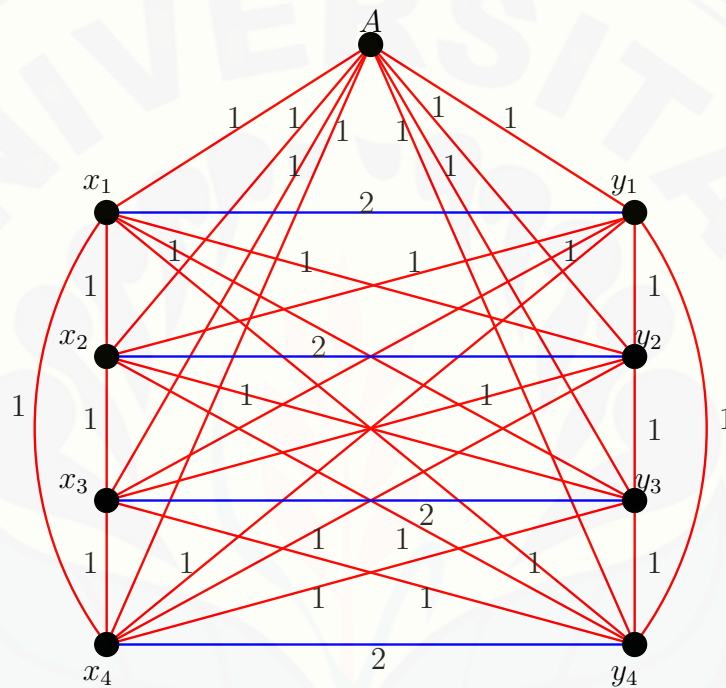
Gambar 4.7 Contoh Operasi $C_4 + W_4$

Gambar 4.7 mengilustrasikan bahwa untuk menggambar graf $C_n + W_m$ diawali dengan menggambar graf lingkaran di posisi kiri, kemudian menggambar graf roda yang berada di posisi kanan dari graf lingkaran dengan titik A ditarik ke atas. Setelah itu, masing-masing titik pada graf lingkaran dihubungkan ke semua titik pada graf roda. Untuk mengekspansinya tinggal menambah jumlah titik

dan sisi pada kedua graf tersebut, sedangkan ketetanggaannya dilakukan melalui cara yang sama.

Dari Observasi 4.1.4, ditentukan *rainbow connection number* dan fungsi *rainbow coloring* pada graf $G = C_n + W_n$ yang disajikan dalam teorema berikut.

◇ **Teorema 4.1.4.** Misal G adalah joint dari graf lingkaran dan graf roda. Untuk $n \geq 3$, *rainbow connection number* $G = C_n + W_n$ adalah $rc(C_n + W_n) = 2$.



Gambar 4.8 Contoh *Rainbow Coloring* $C_n + W_n$

Bukti. Sesuai dengan Observasi 4.1.4, didapatkan $V = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq n\} \cup \{A\}$ dan $E = \{x_i x_{i+1} x_n x_1; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_j y_{j+1}, y_n y_1; 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{A y_j; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_i y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n\} \cup \{A x_i; 1 \leq i \leq n\}$, $|V| = 2n + 1$, $|E| = n^2 + 4n$. Berdasarkan Teorema 2.2.1 nilai rc berada pada selang $kC_n + W_n \leq rc(C_n + W_n) \leq k(C_n + W_n) + 1$.

Untuk $n \geq 3$, $C_n + W_n$ berdiameter 2 maka $2 \leq rc(C_n + W_n) \leq 3$. Diberikan

pewarnaan sisi $C_n + W_n$ dengan fungsi berikut.

$$f(e) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } e = x_i x_{i+1}, x_n x_1; 1 \leq i \leq n-1 \\ 1, & \text{untuk } e = y_j y_{j+1}, y_n y_1; 1 \leq j \leq n-1 \\ 1, & \text{untuk } e = A y_j; 1 \leq j \leq n \\ 1, & \text{untuk } e = A x_i; 1 \leq i \leq n \\ 1, & \text{untuk } e = x_i y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n; i \neq j \\ 2, & \text{untuk } e = x_i y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n; i = j \end{cases}$$

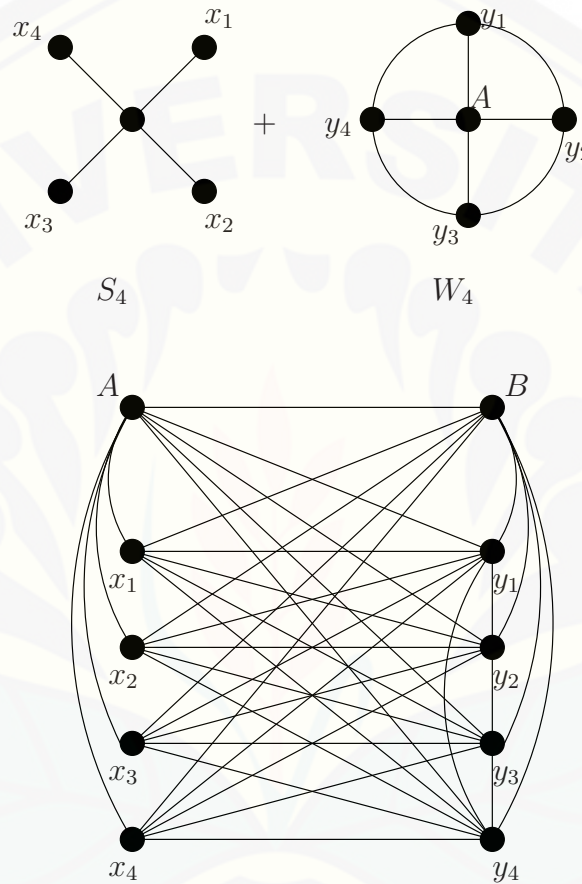
Jelas bahwa $f : E(C_n + W_n) \rightarrow \{1, 2\}$. Sehingga, $rc(C_n + W_n) = 2$ dan mencapai lower bound.

◇ **Observasi 4.1.5.** Misal diketahui graf bintang S_n dengan $V(S_n) = \{A, x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(C_n) = \{A x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan graf roda W_m dengan $V(W_m) = \{B, y_j; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(W_m) = \{B y_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j y_{j+1}, y_m y_1; 1 \leq j \leq m-1\}$. Joint graf G yang dinotasikan dengan $G = S_n + W_m$, maka untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam $V(S_n + W_m) = \{A, B\} \cup \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E = \{A x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{B x_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{AB\} \cup \{x_i y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{y_m y_1\}$, $|V| = 2n + 2$, $|E| = nm + n + 2m + 1$.

Bukti. Definisi 2.4.1 menjelaskan bahwa $G = S_n + W_m$ memiliki $V(S_n + W_m) = V(S_n) \cup V(W_m)$ dan $E(S_n + W_m) = E(S_n) \cup E(W_m) \cup uv | u \in V(S_n), v \in V(W_m)$. Dari Gambar 4.9 didapatkan $V(S_n + W_m) = \{A, B\} \cup \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E = \{A x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{B x_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{AB\} \cup \{x_i y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{y_m y_1\}$, $|V| = 2n + 2$, $|E| = nm + n + 2m + 1$. □

Gambar 4.9 mengilustrasikan bahwa untuk menggambar graf $S_n + W_m$ diawali dengan menggambar graf bintang di posisi kiri dengan A ditarik ke atas, kemudian menggambar graf roda yang berada di posisi kanan dari graf lingkaran

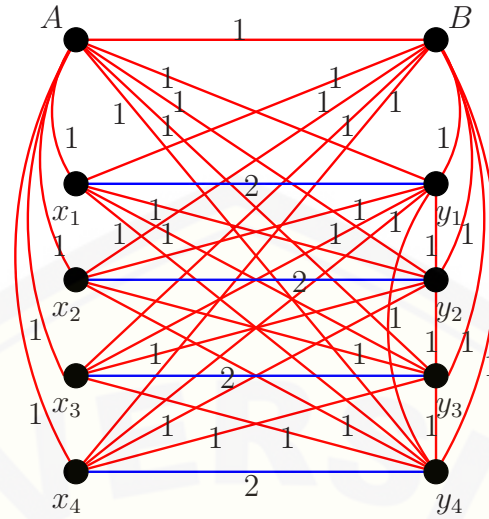
dengan titik B juga ditarik ke atas. Setelah itu, masing-masing titik pada graf lingkaran dihubungkan ke semua titik pada graf roda. Untuk mengekspannya tinggal menambah jumlah titik dan sisi pada kedua graf tersebut, sedangkan ketetanggaannya dilakukan melalui cara yang sama.



Gambar 4.9 Contoh Operasi $S_4 + W_4$

Dari Observasi 4.1.5, ditentukan *rainbow connection number* dan fungsi *rainbow coloring* pada graf $G = S_n + W_n$ yang disajikan dalam teorema berikut.

◇ **Teorema 4.1.5.** Misal G adalah joint dari graf bintang dan graf roda. Untuk $n \geq 3$, *rainbow connection number* $G = S_n + W_n$ adalah $rc(S_n + W_n) = 2$.



Gambar 4.10 Contoh *Rainbow Coloring* $S_n + W_n$

Bukti. Sesuai dengan Observasi 4.1.5, didapatkan $V = \{A, B\} \cup \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq n\}$ dan $E = \{Ax_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{By_j; 1 \leq j \leq n\} \cup \{AB\} \cup \{x_i y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq n - 1\} \cup \{y_n y_1\}$, $|V| = 2n + 2$, $|E| = n^2 + 3n + 1$. Berdasarkan Teorema 2.2.1 nilai rc berada pada selang $k(S_n + W_n) \leq rc(S_n + W_n) \leq k(S_n + W_n) + 1$.

Untuk $n \geq 3$, $(S_n + W_n)$ berdiameter 2 maka $2 \leq rc(S_n + W_n) \leq 3$. Diberikan pewarnaan sisi $(S_n + W_n)$ dengan fungsi berikut.

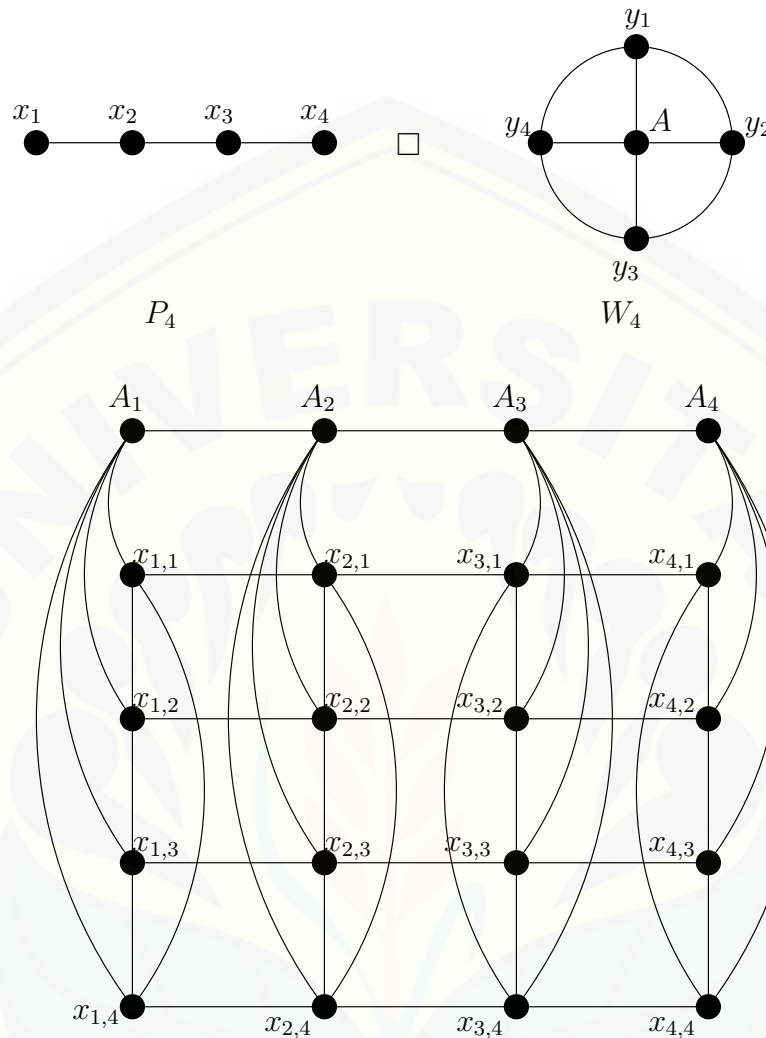
$$f(e) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } e = AB \\ 1, & \text{untuk } e = Ax_i; 1 \leq i \leq n \\ 1, & \text{untuk } e = By_j; 1 \leq j \leq n \\ 1, & \text{untuk } e = y_j y_{j+1}, y_n y_1; 1 \leq j \leq n - 1 \\ 1, & \text{untuk } e = Ay_j; 1 \leq j \leq n \\ 1, & \text{untuk } e = Ax_i; 1 \leq i \leq n \\ 1, & \text{untuk } e = x_i y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n; i \neq j \\ 2, & \text{untuk } e = x_i y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n; i = j \end{cases}$$

Jelas bahwa $f : E(S_n + W_n) \rightarrow \{1, 2\}$. Sehingga, $rc(S_n + W_n) = 2$ dan mencapai lower bound.

◇ **Observasi 4.1.6.** Misal diketahui graf lintasan P_n dengan $V(P_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(P_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$ dan graf roda W_m dengan $V(W_m) = \{A, y_j; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(W_m) = \{A y_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j y_{j+1}, y_m y_1; 1 \leq j \leq m-1\}$. Cartesian product graf G yang dinotasikan dengan $G = P_n \square W_m$, maka untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$, himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam $V(P_n \square W_m) = \{A_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E = \{A_i A_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{i,j} x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j} x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{i,m} x_{i,1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{A_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$, $|V| = nm + n$, $|E| = 3nm + n - m - 1$.

Bukti. Definisi 2.4.2 menjelaskan bahwa $G = P_n \square W_m$ jika $V = V_1 \times V_2$, dan dua titik $\langle u_1, u_2 \rangle$ dan $\langle v_1, v_2 \rangle$ di G bertetangga jika dan hanya jika salah satu dari dua hal berikut berlaku: $u_1 = v_1$ dan $(u_2, v_2) \in E_2$ atau $u_2 = v_2$ dan $(u_1, v_1) \in E_1$. Dari Gambar 4.11 didapatkan $V(P_n \square W_m) = \{A_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(P_n \square W_m) = \{A_i A_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{i,j} x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j} x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{i,m} x_{i,1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{A_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$, $|V(P_n \square W_m)| = nm + n$, $|E(P_n \square W_m)| = 3nm + n - m - 1$. □

Operasi *cartesian product* merupakan operasi perkalian, titik-titik pada graf roda dikalikan sebanyak titik-titik pada graf lintasan atau sebaliknya. Kemudian titik-titiknya dihubungkan sesuai dengan bentuk graf lintasan dan graf roda. Gambar 4.11 mengilustrasikan bahwa untuk menggambar graf $P_n \square W_m$ diawali dengan menggambar graf roda dengan A ditarik ke atas, kemudian diduplikasi sebanyak n kali, dan titik-titik yang bersesuaian membentuk graf lintasan. Untuk mengekspannya tinggal menambah jumlah titik dan sisi pada kedua graf tersebut, sedangkan ketetanggaannya dilakukan melalui cara yang sama.



Gambar 4.11 Contoh Operasi $P_4 \square W_4$

Dari Observasi 4.1.6, ditentukan *rainbow connection number* dan fungsi *rainbow coloring* pada graf $G = P_n \square W_m$ yang disajikan dalam teorema berikut.

◇ **Teorema 4.1.6.** *Misal G adalah cartesian product dari graf lintasan dan graf roda. Untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$, rainbow connection number $G = P_n \square W_m$ adalah:*

$$rc(P_n \square W_m) = \begin{cases} n, & \text{untuk } m = 3 \\ n + 1, & \text{untuk } 4 \leq m \leq 6 \\ n + 2, & \text{untuk } m \geq 7 \end{cases}$$

Bukti. Sesuai dengan Observasi 4.1.6, didapatkan $V = \{A_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E = \{A_i A_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_{i,j} x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j} x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{x_{i,m} x_{i,1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{A_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$, $|V| = nm + n$, $|E| = 3nm + n - m - 1$. Berdasarkan Teorema 2.2.1 nilai rc berada pada selang $k(P_n \square W_m) \leq rc(P_n \square W_m) \leq k(P_n \square W_m) + 1$.

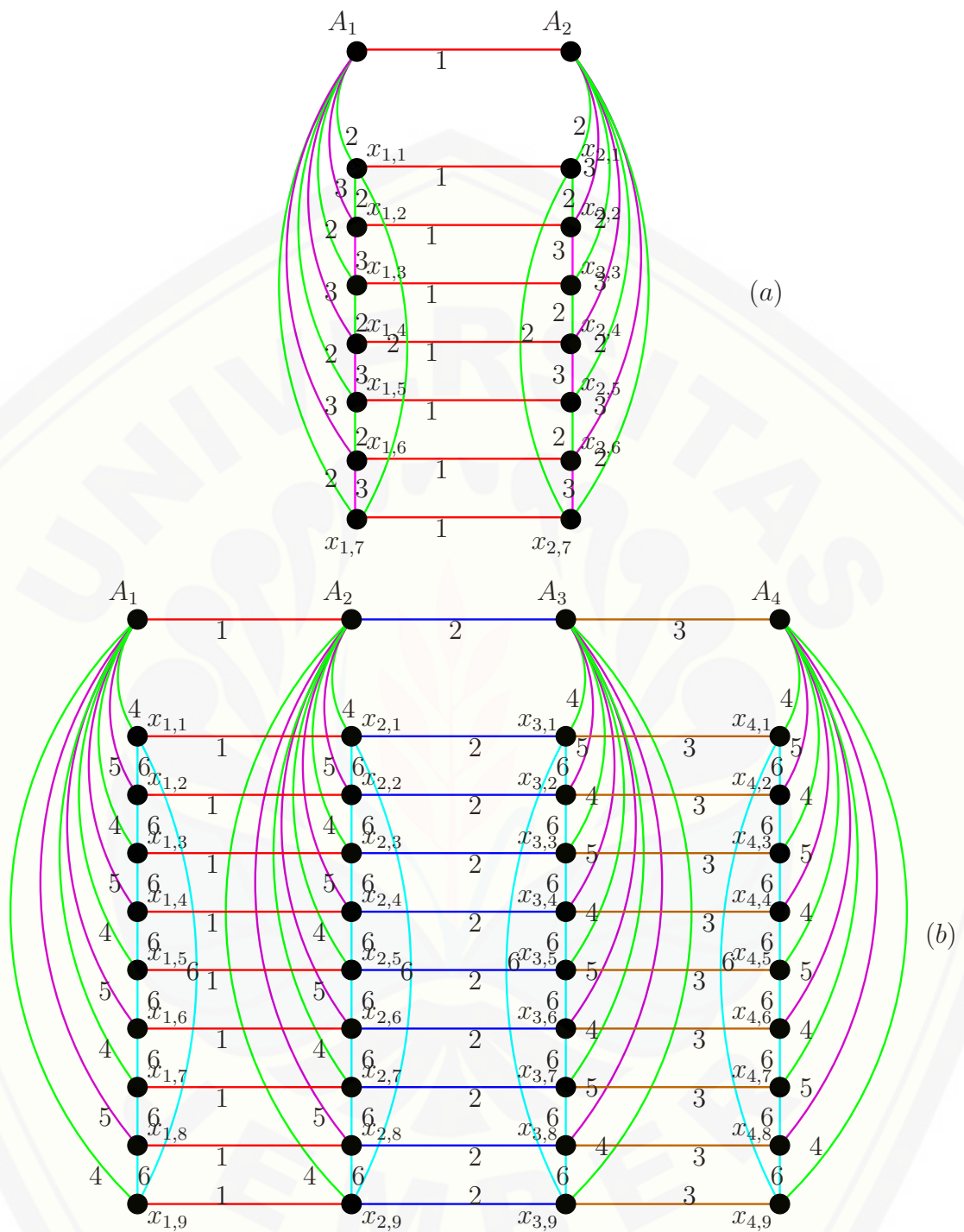
Untuk $m = 3$, $P_n \square W_m$ berdiameter n maka $n \leq rc(P_n \square W_m) \leq n + 1$. Diberikan pewarnaan sisi $P_n \square W_m$ dengan fungsi berikut.

$$f(e) = \begin{cases} i, & \text{untuk } e = A_i A_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1 \\ i, & \text{untuk } e = x_{i,j} x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq j \leq m \\ n, & \text{untuk } e = x_{i,j} x_{i,j+1}, x_{i,m} x_{i,1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m - 1 \\ n, & \text{untuk } e = A_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

Jelas bahwa $f : E(P_n \square W_m) \rightarrow \{1, 2, \dots, (n - 1), n\}$. Sehingga, $rc(P_n \square W_m) = n$ dan mencapai lower bound.

Untuk $4 \leq m \leq 6$, $P_n \square W_m$ berdiameter $n+1$ maka $n + 1 \leq rc(P_n \square W_m) \leq n + 2$. Diberikan pewarnaan sisi $P_n \square W_m$ dengan fungsi berikut.

$$f(e) = \begin{cases} i, & \text{untuk } e = A_i A_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1 \\ i, & \text{untuk } e = x_{i,j} x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq j \leq m \\ n, & \text{untuk } e = x_{i,j} x_{i,j+1}, x_{i,m} x_{i,1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m - 1; j = \text{ganjil} \\ n + 1, & \text{untuk } e = x_{i,j} x_{i,j+1}, x_{i,m} x_{i,1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m - 1; j = \text{genap} \\ n, & \text{untuk } e = A_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m; j = \text{ganjil} \\ n + 1, & \text{untuk } e = A_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m; j = \text{genap} \end{cases}$$



Gambar 4.12 Contoh *Rainbow Coloring* $P_n \square W_m$

Jelas bahwa $f : E(P_n \square W_m) \rightarrow \{1, 2, \dots, (n-1), n, (n+1)\}$. Sehingga, $rc(P_n \square W_m) = n + 1$ dan mencapai lower bound.

Untuk $m \geq 7$, $P_n \square W_m$ berdiameter $n+1$ maka $n + 1 \leq rc(P_n \square W_m) \leq n + 2$.

Diberikan pewarnaan sisi $P_n \square W_m$ dengan fungsi berikut.

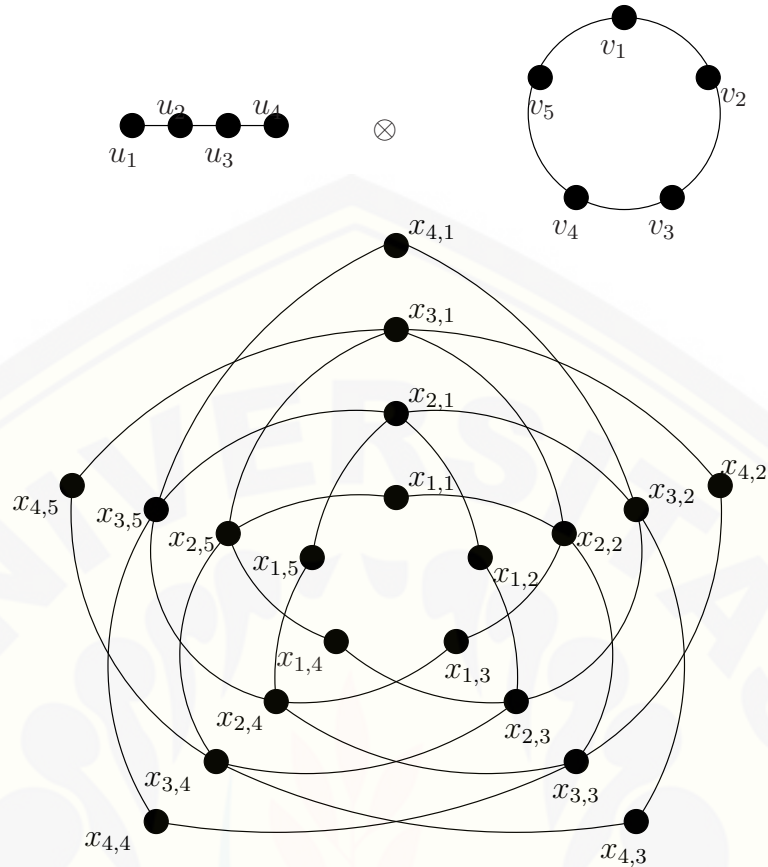
$$f(e) = \begin{cases} i, & \text{untuk } e = A_i A_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1 \\ i, & \text{untuk } e = x_{i,j} x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq j \leq m \\ n, & \text{untuk } e = x_{i,j} x_{i,j+1}, x_{i,m} x_{i,1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m - 1 \\ n + 1, & \text{untuk } e = A_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m; j = \text{ganjil} \\ n + 2, & \text{untuk } e = A_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m; j = \text{genap} \end{cases}$$

Jelas bahwa $f : E(P_n \square W_m) \rightarrow \{1, 2, \dots, (n - 1), n, (n + 1), (n + 2)\}$. Sehingga, $rc(P_n \square W_m) = n + 2$. Untuk membuktikan bahwa $rc(P_n \square W_m) = n + 2$ adalah yang minimal. Dari Gambar 4.12 (a) menunjukkan bahwa apabila menggunakan $n + 1$ warna maka ada lintasan yang warnanya sama yaitu $x_{i,j} - x_{i,j+4}, x_{i,j} - x_{i,j+6}$. Sehingga, $rc(P_n \square W_m) = n + 2$.

Berdasarkan tiga kasus diatas maka nilai rainbow connection numbernya adalah:

$$rc(P_n \square W_m) = \begin{cases} n, & \text{untuk } m = 3 \\ n + 1, & \text{untuk } 4 \leq m \leq 6 \\ n + 2, & \text{untuk } m \geq 7 \end{cases}$$

◇ **Observasi 4.1.7.** Misal diketahui graf lintasan P_n dengan $V(P_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(P_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\}$ dan graf lingkaran C_m dengan $V(C_m) = \{y_j; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(C_m) = \{y_j y_{j+1}, y_m y_1; 1 \leq j \leq m - 1\}$. Tensor product graf G yang dinotasikan dengan $G = P_n \otimes C_m$, maka untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$, himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam $V(P_n \otimes C_m) = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(P_n \otimes C_m) = \{x_{i,j} x_{i+1,j+1}; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{x_{i,m} x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_{i+1,j} x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{x_{i+1,m} x_{i,1}; 1 \leq i \leq n - 1\}$, $|V(P_n \otimes C_m)| = nm$, $|E(P_n \otimes C_m)| = 2nm - 2m$.



Gambar 4.13 Contoh Operasi $P_4 \otimes C_5$

Bukti. Definisi 2.4.3 menjelaskan bahwa $G = P_n \otimes C_m$ memiliki $V(P_n \otimes C_m) = V(P_n) \times V(C_m)$ dan $(u_1, v_2)(u_2, v_2) | u_1 u_2 \in E(P_n)$ dan $v_1 v_2 \in E(C_m)$. Dari Gambar 4.13 didapatkan $V(P_n \otimes C_m) = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n\}$ dan $E(P_n \otimes C_m) = \{x_{i,j} x_{i+1,j+1}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{x_{i,n} x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{i+1,j} x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{x_{i+1,n} x_{i,1}; 1 \leq i \leq n-1\}$, $|V(P_n \otimes C_m)| = nm$, $|E(P_n \otimes C_m)| = 2nm - 2m$. \square

Operasi *tensor product* memiliki kesamaan dengan operasi *cartesian product* karena sama-sama operasi perkalian. Titik-titik pada graf lingkaran dikalikan sebanyak titik-titik pada graf lintasan atau sebaliknya, kemudian hasil perkalian

titik-titik tersebut yang *adjacent* dihubungkan. Gambar 4.13 mengilustrasikan bahwa untuk menggambar graf $P_n \otimes C_m$ diawali dengan menggambar titik-titik graf lingkaran, kemudian diduplikasi sebanyak n kali. Setelah itu titik-titiknya yang *adjacent* dihubungkan secara menyilang sampai bertemu di titik awal. Untuk mengekspannya tinggal menambah jumlah titik dan sisi pada kedua graf tersebut, sedangkan ketetanggaannya dilakukan melalui cara yang sama. Harsya *et al.* (2014) telah memvisualisasi graf ini, namun modifikasinya dilakukan dalam penelitian ini.

Dari Observasi 4.1.7, ditentukan *rainbow connection number* dan fungsi *rainbow coloring* pada graf $G = P_n \otimes C_n$ yang disajikan dalam teorema berikut.

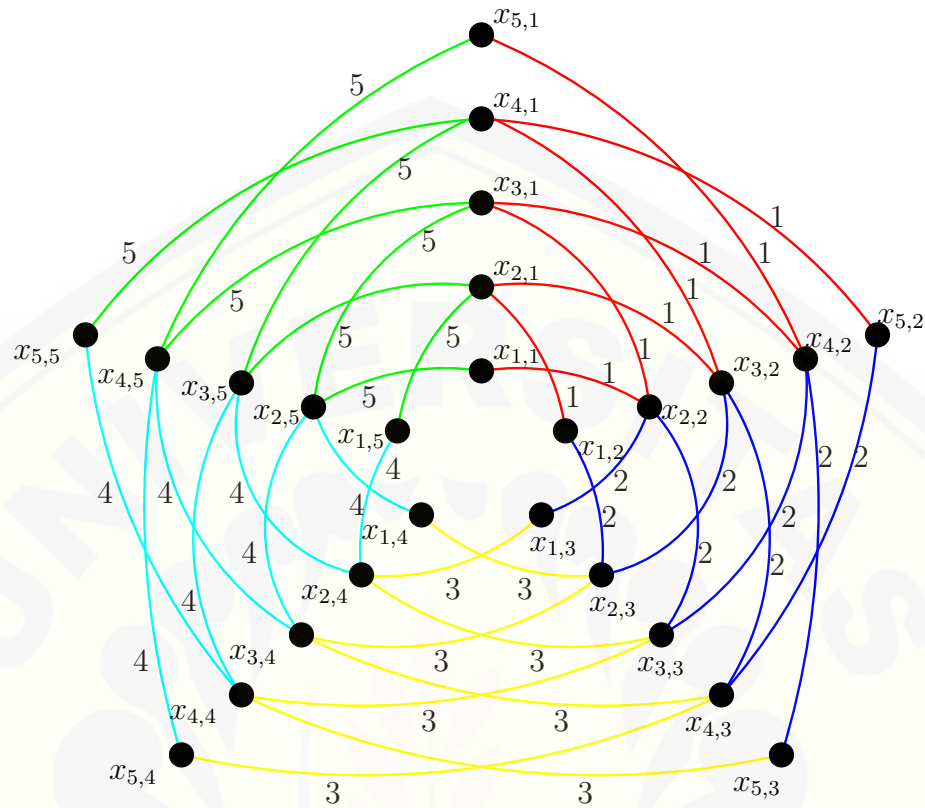
◇ **Teorema 4.1.7.** *Misal G adalah tensor product dari graf lintasan dan graf lingkaran. Untuk $n \geq 3$, rainbow connection number $G = P_n \otimes C_n$ adalah $rc(P_n \otimes C_n) = n$.*

Bukti. Sesuai dengan Observasi 4.1.7, didapatkan $V = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n\}$ dan $E = \{x_{i,j}x_{i+1,j+1}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{x_{i,n}x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{i+1,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{x_{i+1,n}x_{i,1}; 1 \leq i \leq n-1\}$, $|V| = n^2$, $|E| = 2n^2 - 2n$. Berdasarkan Teorema 2.2.1 nilai rc berada pada selang $k(P_n \otimes C_n) \leq rc(P_n \otimes C_n) \leq k(P_n \otimes C_n) + 1$.

Untuk n ganjil dan ≥ 3 , $P_n \otimes C_n$ berdiameter n maka $n \leq rc(P_n \otimes C_n) \leq n + 1$. Diberikan pewarnaan sisi $P_n \otimes C_n$ dengan fungsi berikut.

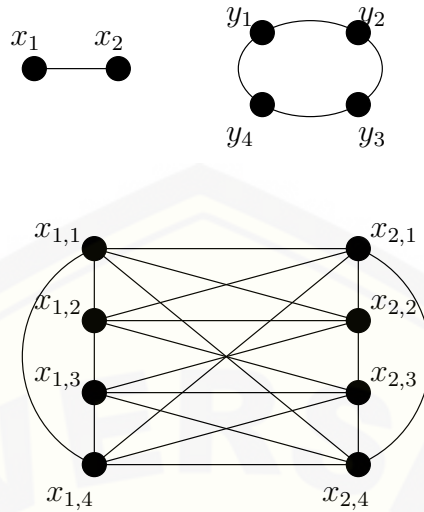
$$f(e) = \begin{cases} j, & \text{untuk } e = x_{i,j}x_{i+1,j+1}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq n-1 \\ n, & \text{untuk } e = x_{i,n}x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n-1 \\ j, & \text{untuk } e = x_{i+1,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq n-1 \\ n, & \text{untuk } e = x_{i+1,n}x_{i,1}; 1 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

Jelas bahwa $f : E(P_n \otimes C_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$. Sehingga, $rc(P_n \otimes C_n) = n$ dan mencapai lower bound.



Gambar 4.14 Contoh *Rainbow Coloring* $P_n \otimes C_n$

◇ **Observasi 4.1.8.** Misal diketahui graf lintasan P_n dengan $V(P_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(P_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\}$ dan graf lingkaran C_m dengan $V(C_m) = \{y_j; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(C_m) = \{y_j y_{j+1}, y_m y_1; 1 \leq j \leq m - 1\}$. Composition graf G yang dinotasikan dengan $G = P_n[C_m]$, maka untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$, himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam $V(P_n[C_m]) = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(P_n[C_m]) = \{x_{i,j} x_{i,j+1}, x_{i,m} x_{i,1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{x_{i,j} x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j} x_{i+1,j+1}, x_{i,m} x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{x_{i,j} x_{i+1,j+1}, x_{i,m} x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq j \leq m - 1\}$, $|V(P_n[C_m])| = nm$, $|E(P_n[C_m])| = 4nm - 3m$.



Gambar 4.15 Contoh Operasi $P_2[C_4]$

Bukti. Definisi 2.4.4 menjelaskan bahwa $G = P_n[C_m]$, G_1 dan G_2 dengan *disjoint* himpunan titik V_1 dan V_2 dan himpunan sisi X_1 dan X_2 adalah graf dengan titik $V_1 \times V_2$ dan $u = (u_1, u_2)$ yang *adjacent* dengan $v = (v_1, v_2)$ ketika $[u_1 \text{ adj } v_1]$ atau $[u_1 = v_1 \text{ dan } u_2 \text{ adj } v_2]$. Dari Gambar 4.15 didapatkan $V(P_n[C_m]) = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(P_n[C_m]) = \{x_{i,j}x_{i,j+1}, x_{i,m}x_{i,1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{i,j}x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j}x_{i+1,j+1}, x_{i,m}x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq i \leq m-1\} \cup \{x_{i,j}x_{i+1,j+1}, x_{i,m}x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m-1\}$, $|V(P_n[C_m])| = nm$, $|E(P_n[C_m])| = 4nm - 3m$. \square

Operasi *composition* merupakan kombinasi dari operasi *cartesian product* dengan operasi *tensor product*. Gambar 4.15 mengilustrasikan bahwa untuk menggambar graf $P_n[C_m]$ diawali dengan menggambar titik-titik graf lingkaran, kemudian diduplikasi sebanyak n kali. Setelah titik-titik pada graf lintasan dan graf lingkaran dikalikan seperti operasi *cartesian product* atau operasi *tensor product*, kemudian titik-titiknya dihubungkan sesuai dengan graf lintasan dan graf lingkaran seperti operasi *cartesian product* dan hasil perkalian titik-titik tersebut

yang *adjacent* dihubungkan seperti operasi *tensor product*. Untuk mengekspansinya tinggal menambah jumlah titik dan sisi pada kedua graf tersebut, sedangkan ketetanggaannya dilakukan melalui cara yang sama. Harsya *et al.* (2014) telah memvisualisasi graf ini, namun modifikasinya dilakukan dalam penelitian ini.

Dari Observasi 4.1.8, ditentukan *rainbow connection number* dan fungsi *rainbow coloring* pada graf $G = P_n[C_m]$ yang disajikan dalam teorema berikut.

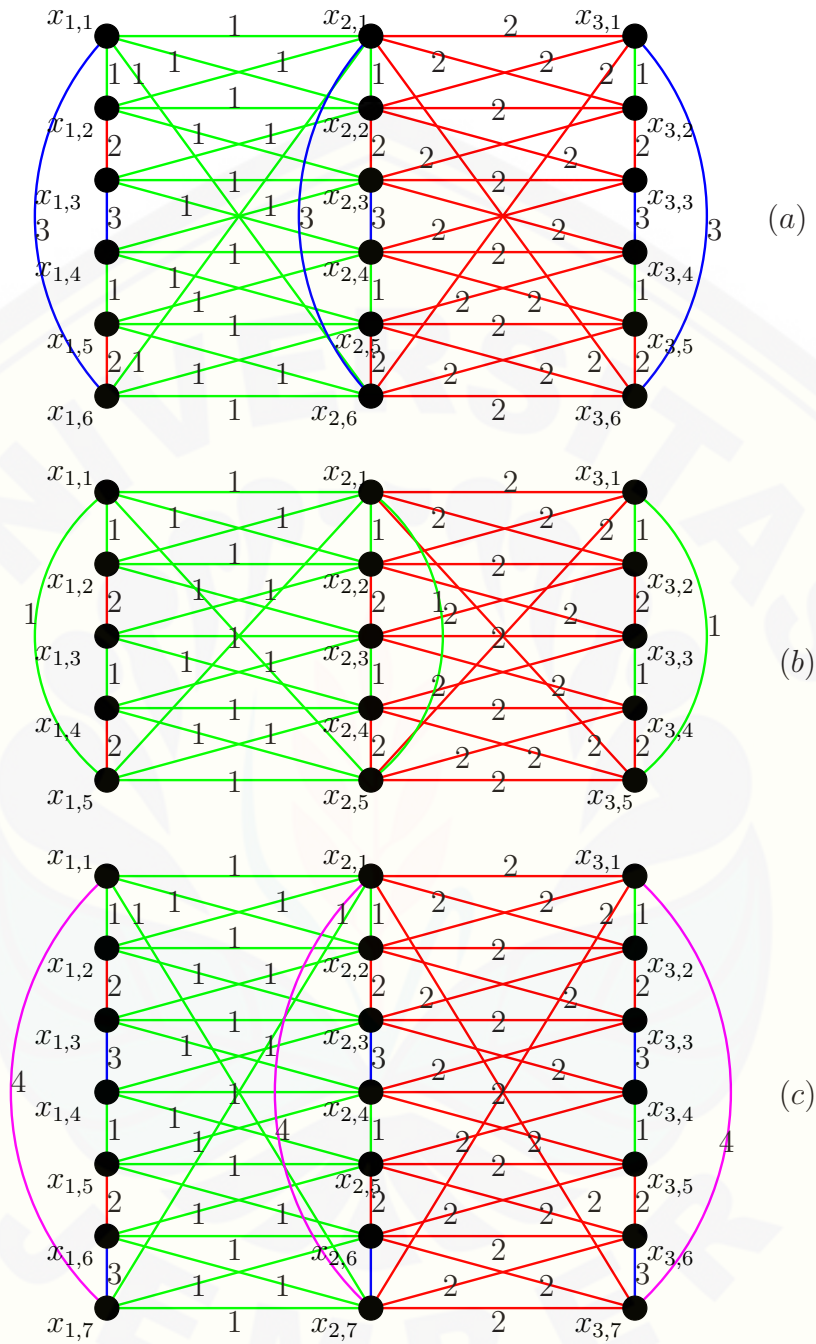
◇ **Teorema 4.1.8.** *Misal G adalah komposisi dari graf lintasan dan graf lingkaran. Untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$, rainbow connection number $G = P_n[C_m]$ adalah:*

$$rc(P_n[C_m]) = \begin{cases} n - 1, & \text{untuk } n - 1 \geq \frac{m}{2} \\ 1, & \text{untuk } n - 1 < \frac{m}{2} \text{ dan } m = 3 \\ \frac{m}{2}, & \text{untuk } n - 1 < \frac{m}{2} \text{ dan } m \text{ genap} \\ \frac{m-1}{2} + 1, & \text{untuk } n - 1 < \frac{m}{2} \text{ dan } m \text{ ganjil } > 3 \end{cases}$$

Bukti. Sesuai dengan Observasi 4.1.8, didapatkan $V = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E = \{x_{i,j}x_{i,j+1}, x_{i,m}x_{i,1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{x_{i,j}x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j}x_{i+1,j+1}, x_{i,m}x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq i \leq m - 1\} \cup \{x_{i,j}x_{i+1,j+1}, x_{i,m}x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq j \leq m - 1\}$, $|V| = nm$, $|E| = 4nm - 3m$. Berdasarkan Teorema 2.2.1 nilai rc berada pada selang $k(P_n[C_m]) \leq rc(P_n[C_m]) \leq k(P_n[C_m]) + 1$.

Untuk $(n - 1) \geq \frac{m}{2}$, $P_n[C_m]$ berdiameter $(n - 1)$ maka $(n - 1) \leq rc(P_n[C_m]) \leq n$. Diberikan pewarnaan sisi $P_n[C_m]$ dengan fungsi berikut.

$$f(e) = \begin{cases} j, & \text{untuk } e = x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq \frac{m}{2} \\ j, & \text{untuk } e = x_{i,j+\frac{m}{2}}x_{i,j+\frac{m}{2}+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq \frac{m}{2} - 1 \\ \frac{m}{2}, & \text{untuk } e = x_{i,m}x_{i,1}; 1 \leq i \leq n \\ i, & \text{untuk } e = x_{i,j}x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq j \leq m \end{cases}$$



Gambar 4.16 Contoh *Rainbow Coloring* $P_n[C_m]$

$$f(e) = \begin{cases} i, & \text{untuk } e = x_{i,j}x_{i+1,j+1}, x_{i,m}x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m-1 \\ i, & \text{untuk } e = x_{i,j}x_{i+1,j+1}, x_{i,m}x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m-1 \end{cases}$$

Jelas bahwa $f : E(P_n[C_m]) \rightarrow \{1, 2, \dots, (n-1)\}$. Sehingga, $rc(P_n[C_m]) = (n-1)$ dan mencapai lower bound.

Untuk $m = 3$ dan $(n-1) \leq \frac{m}{2}$, $P_n[C_m]$ berdiameter 1 maka $1 \leq rc(P_n[C_m]) \leq 2$.

Diberikan pewarnaan sisi $P_n[C_m]$ dengan fungsi berikut.

$$f(e) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } e = x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq \frac{m-1}{2} \\ 1, & \text{untuk } e = x_{i,j+\frac{m-1}{2}}x_{i,j+\frac{m-1}{2}+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq \frac{m-1}{2} - 1 \\ 1, & \text{untuk } e = x_{i,m}x_{i,1}; 1 \leq i \leq n \\ 1, & \text{untuk } e = x_{i,j}x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m \\ 1, & \text{untuk } e = x_{i,j}x_{i+1,j+1}, x_{i,m}x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m-1 \\ 1, & \text{untuk } e = x_{i,j}x_{i+1,j+1}, x_{i,m}x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m-1 \end{cases}$$

Jelas bahwa $f : E(P_n[C_m]) \rightarrow \{1\}$. Sehingga, $rc(P_n[C_m]) = 1$ dan mencapai lower bound.

Untuk m genap dan $(n-1) \leq \frac{m}{2}$, $(P_n[C_m])$ berdiameter $\frac{m}{2}$ maka $\frac{m}{2} \leq rc(P_n[C_m]) \leq \frac{m}{2} + 1$. Diberikan pewarnaan sisi $(P_n[C_m])$ dengan fungsi berikut.

$$f(e) = \begin{cases} j, & \text{untuk } e = x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq \frac{m}{2} \\ j, & \text{untuk } e = x_{i,j+\frac{m}{2}}x_{i,j+\frac{m}{2}+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq \frac{m}{2} - 1 \\ \frac{m}{2}, & \text{untuk } e = x_{i,m}x_{i,1}; 1 \leq i \leq n \\ i, & \text{untuk } e = x_{i,j}x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m \\ i, & \text{untuk } e = x_{i,j}x_{i+1,j+1}, x_{i,m}x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m-1 \\ i, & \text{untuk } e = x_{i,j}x_{i+1,j+1}, x_{i,m}x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m-1 \end{cases}$$

Jelas bahwa $f : E(P_n[C_m]) \rightarrow \{1, 2, \dots, \frac{m}{2}\}$. Sehingga, $rc(P_n[C_m]) = \frac{m}{2}$ dan mencapai lower bound.

Untuk m ganjil dan $(n-1) \leq \frac{m}{2}$, $P_n[C_m]$ berdiameter $\frac{m-1}{2}$ maka $\frac{m-1}{2} \leq rc(P_n[C_m])$

$\leq \frac{m-1}{2} + 1$. Diberikan pewarnaan sisi $P_n[C_m]$ dengan fungsi berikut.

$$f(e) = \begin{cases} j, & \text{untuk } e = x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq \frac{m-1}{2} \\ j, & \text{untuk } e = x_{i,j+\frac{m-1}{2}}x_{i,j+\frac{m-1}{2}+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq \frac{m-1}{2} - 1 \\ \frac{m-1}{2} + 1, & \text{untuk } e = x_{i,m}x_{i,1}; 1 \leq i \leq n \\ i, & \text{untuk } e = x_{i,j}x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m \\ i, & \text{untuk } e = x_{i,j}x_{i+1,j+1}, x_{i,m}x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m-1 \\ i, & \text{untuk } e = x_{i,j}x_{i+1,j+1}, x_{i,m}x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m-1 \end{cases}$$

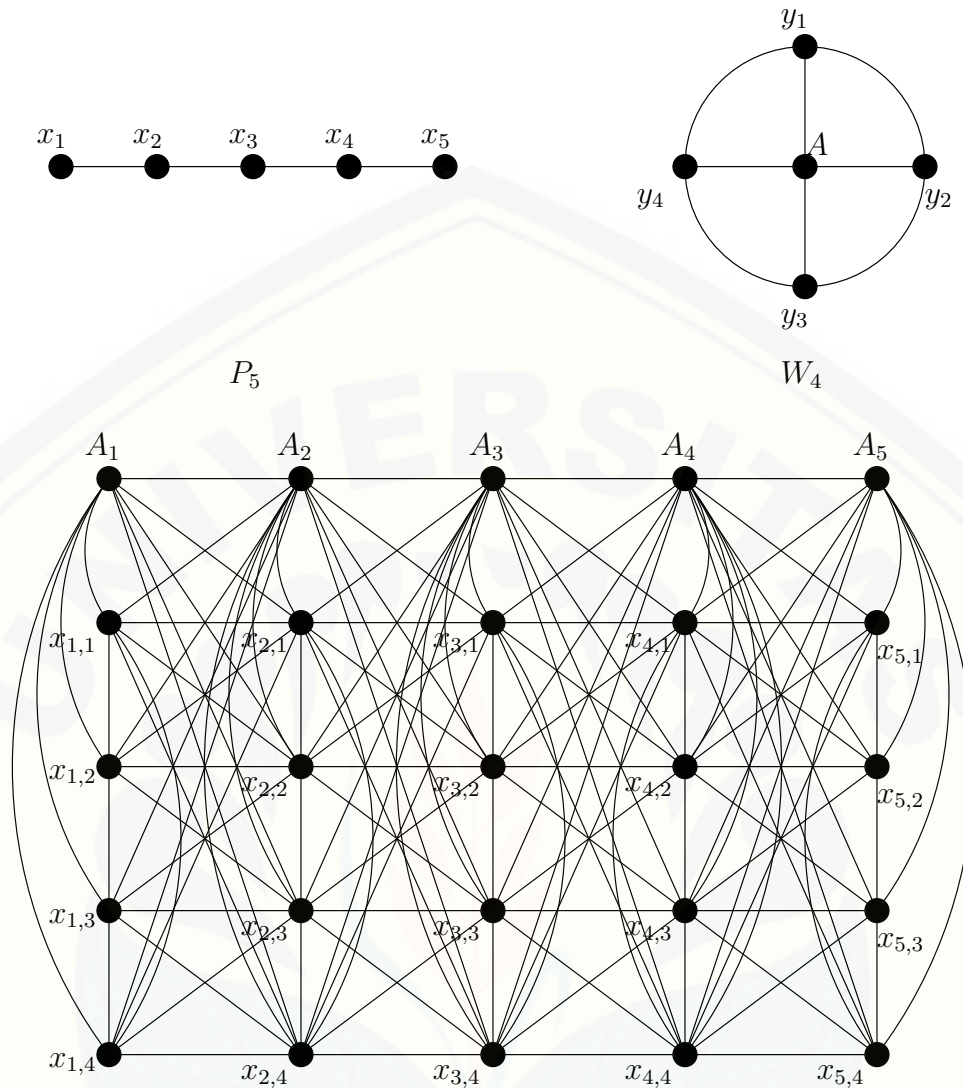
Jelas bahwa $f : E(P_n[C_m]) \rightarrow \{1, 2, \dots, \frac{m-1}{2} + 1\}$. Sehingga, $rc(P_n[C_m]) = \frac{m-1}{2} + 1$.

Untuk membuktikan bahwa $rc(P_n[C_m]) = \frac{m-1}{2} + 1$ adalah yang minimal. Dari Gambar 4.16 (b) menunjukkan bahwa apabila menggunakan $\frac{m-1}{2}$ warna maka ada lintasan yang warnanya sama yaitu $x_{i,m} - x_{i,2}$. Sehingga, $rc(P_n[C_m]) = \frac{m-1}{2} + 1$.

Berdasarkan tiga kasus diatas maka nilai rainbow connection numbernya adalah:

$$rc(P_n[C_m]) = \begin{cases} n-1, & \text{untuk } \frac{m+1}{2} < n-1 \\ \frac{m}{2}, & \text{untuk } n-1 < \frac{m}{2} \text{ dan } m \text{ genap} \\ \frac{m-1}{2} + 1, & \text{untuk } n-1 < \frac{m}{2} \text{ dan } m \text{ ganjil} \end{cases}$$

◇ **Observasi 4.1.9.** Misal diketahui graf lintasan P_n dengan $V(P_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(P_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$ dan graf roda W_m dengan $V(W_m) = \{A, y_j; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(W_m) = \{A y_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j y_{j+1}, y_m y_1; 1 \leq j \leq m-1\}$. Composition graf G yang dinotasikan dengan $G = P_n[W_m]$, maka untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$, himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam $V(P_n[W_m]) = \{A_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\}$ dan $E(P_n[W_m]) = \{A_i A_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{i,j} x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m\} \cup \{A_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j} x_{i,j+1}, x_{i,m} x_{i,1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{A_i x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m\} \cup \{A_{i+1} x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j} x_{i+1,j+1}, x_{i,m} x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{i+1,j} x_{i,j+1}, x_{i+1,m} x_{i,1}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m-1\}$, $|V(P_n[W_m])| = nm + n$, $|E(P_n[W_m])| = 7nm + n - 5m - 1$.



Gambar 4.17 Contoh Operasi $P_5[W_4]$

Bukti. Definisi 2.4.4 menjelaskan bahwa $G = P_n[W_m]$, G_1 dan G_2 dengan *disjoint* himpunan titik V_1 dan V_2 dan himpunan sisi X_1 dan X_2 adalah graf dengan titik $V_1 \times V_2$ dan $u = (u_1, u_2)$ yang *adjacent* dengan $v = (v_1, v_2)$ ketika $[u_1 \text{ adj } v_1]$ atau $[u_1 = v_1 \text{ dan } u_2 \text{ adj } v_2]$. Dari Gambar 4.17 didapatkan $V(P_n[W_m]) = \{A_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\}$ dan $E(P_n[W_m]) = \{A_i A_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{i,j} x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m\} \cup \{A_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup$

$$\{x_{i,j}x_{i,j+1}, x_{i,m}x_{i,1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{A_i x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m\} \cup \{A_{i+1} x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j} x_{i+1,j+1}, x_{i,m} x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{i+1,j} x_{i,j+1}, x_{i+1,m} x_{i,1}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m-1\},$$

$$|V(P_n[W_m])| = nm + n, |E(P_n[W_m])| = 7nm + n - 5m - 1. \quad \square$$

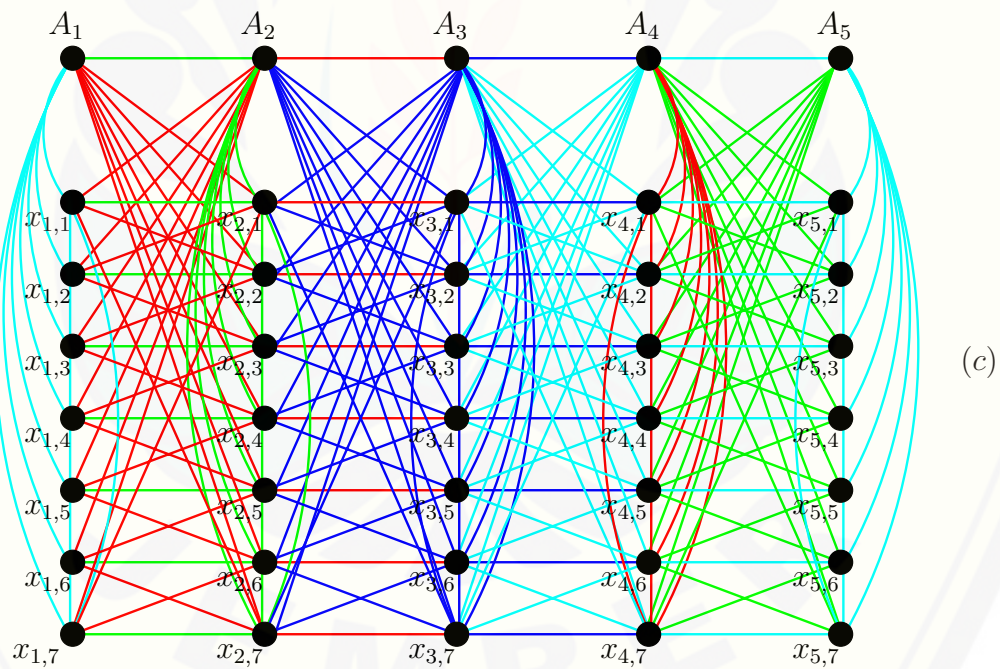
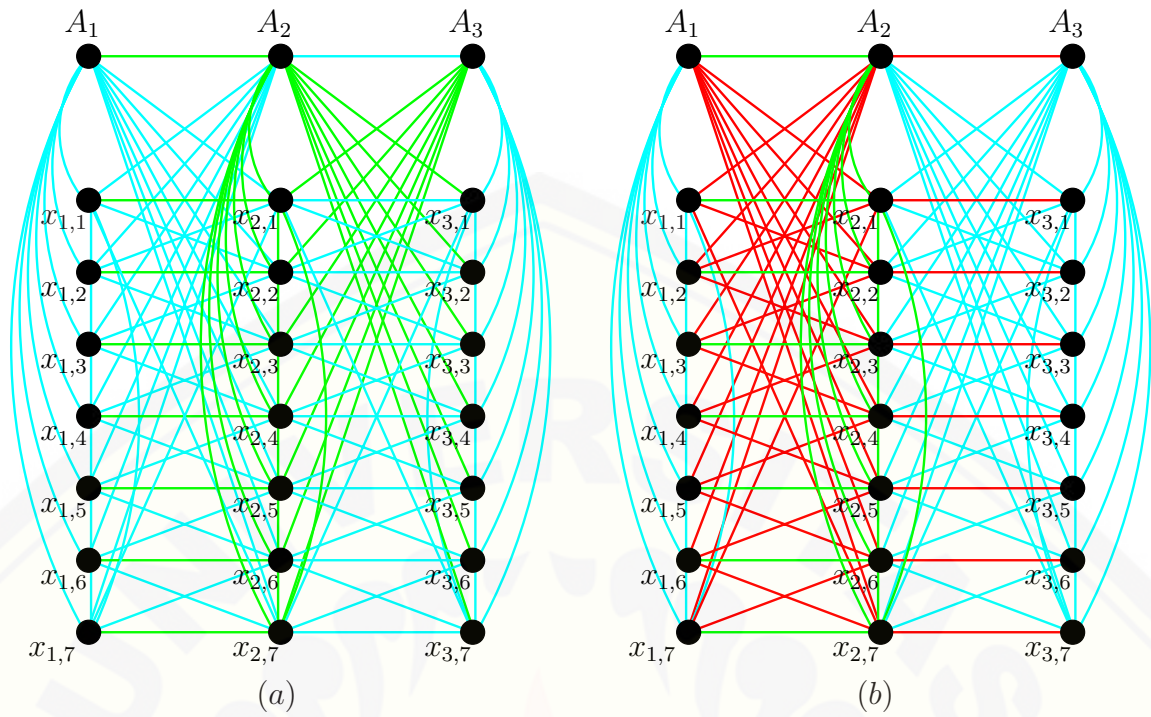
Operasi *composition* merupakan kombinasi dari operasi *cartesian product* dengan operasi *tensor product*. Gambar 4.11 mengilustrasikan bahwa untuk menggambar graf $P_n[W_m]$ diawali dengan menggambar titik-titik graf roda dengan titik A ditarik ke atas, kemudian diduplikasi sebanyak n kali. Setelah titik-titik pada graf lintasan dan graf roda dikalikan seperti operasi *cartesian product* atau operasi *tensor product*, kemudian titik-titiknya dihubungkan sesuai dengan graf lintasan dan graf roda seperti operasi *cartesian product* dan hasil perkalian titik-titik tersebut yang *adjacent* dihubungkan seperti operasi *tensor product*. Untuk mengekspannya tinggal menambah jumlah titik dan sisi pada kedua graf tersebut, sedangkan ketetanggaannya dilakukan melalui cara yang sama.

Dari Observasi 4.1.9, ditentukan *rainbow connection number* dan fungsi *rainbow coloring* pada graf $G = P_n[W_m]$ yang disajikan dalam teorema berikut.

◇ **Teorema 4.1.9.** *Misal G adalah komposisi dari graf lintasan dan graf roda. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, rainbow connection number $G = P_n[W_m]$ adalah:*

$$rc(P_n[W_m]) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } n = 3 \\ n - 1, & \text{untuk } n \geq 4 \end{cases}$$

Bukti. Sesuai dengan Observasi 4.1.9, didapatkan $V = \{A_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\}$ dan $E = \{A_i A_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{i,j} x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m\} \cup \{A_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j} x_{i,j+1}, x_{i,m} x_{i,1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{A_i x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m\} \cup \{A_{i+1} x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j} x_{i+1,j+1}, x_{i,m} x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{i+1,j} x_{i,j+1}, x_{i+1,m} x_{i,1}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m-1\}$.



Keterangan :

● = warna 1 ● = warna 2 ● = warna 3 ● = warna 4

Gambar 4.18 Contoh *Rainbow Coloring* $P_n[W_m]$

$n - 1; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{x_{i+1,j}x_{i,j+1}, x_{i+1,m}x_{i,1}; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq j \leq m - 1\}$,
 $|V| = nm + n$, $|E| = 7nm + n - 5m - 1$. Berdasarkan Teorema 2.2.1 nilai rc berada
 pada selang $k(P_n[W_m]) \leq rc(P_n[W_m]) \leq k(P_n[W_m]) + 1$.

Untuk $n = 3$ dan $m \geq 3$, $P_n[W_m]$ berdiameter 2 maka $2 \leq rc(P_n[W_m]) \leq 3$.

Diberikan pewarnaan sisi $P_n[W_m]$ dengan fungsi berikut.

$$f(e) = \begin{cases} i, & \text{untuk } e = A_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq j \leq m \\ 1, & \text{untuk } e = A_n x_{n,j}; 1 \leq j \leq m \\ i, & \text{untuk } e = x_{i,j} x_{i,j+1}, x_{i,m} x_{i,1}; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq j \leq m - 1 \\ 1, & \text{untuk } e = x_{n,j} x_{n,j+1}, x_{n,m} x_{n,1}; 1 \leq j \leq m - 1 \\ i + 1, & \text{untuk } e = A_i A_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1 \\ i + 1, & \text{untuk } e = x_{i,j} x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq j \leq m \\ 3, & \text{untuk } e = A_1 x_{2,j}; 1 \leq j \leq m \\ 3, & \text{untuk } e = A_2 x_{1,j}; 1 \leq j \leq m \\ 3, & \text{untuk } e = x_{1,j} x_{2,j+1}, x_{1,m} x_{2,1}; 1 \leq j \leq m \\ 3, & \text{untuk } e = x_{2,j} x_{1,j+1}, x_{2,m} x_{1,1}; 1 \leq j \leq m \\ 1, & \text{untuk } e = A_2 x_{3,j}; 1 \leq i \leq n - 3; 1 \leq j \leq m \\ 1, & \text{untuk } e = A_3 x_{2,j}; 1 \leq i \leq n - 3; 1 \leq j \leq m \\ 1, & \text{untuk } e = x_{2,j} x_{3,j+1}, x_{2,m} x_{3,1}; 1 \leq j \leq m \\ 1, & \text{untuk } e = x_{3,j} x_{2,j+1}, x_{3,m} x_{2,1}; 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

Jelas bahwa $f : E(P_n[W_m]) \rightarrow \{1, 2, 3\}$. Sehingga, $rc(P_n[W_m]) = 3$. Untuk membuktikan bahwa $rc(P_n[W_m]) = 3$ adalah yang minimal. Dari Gambar 4.18 (a) menunjukkan bahwa apabila menggunakan 2 warna maka ada lintasan yang warnanya sama yaitu $x_{i,j} - x_{i,j+1}$. Sehingga, $rc(P_n[W_m]) = 3$.

Untuk $n \geq 4$ dan $m \geq 3$, $P_n[W_m]$ berdiameter $(n-1)$ maka $(n-1) \leq rc(P_n[W_m]) \leq n$. Diberikan pewarnaan sisi $P_n[W_m]$ dengan fungsi berikut.

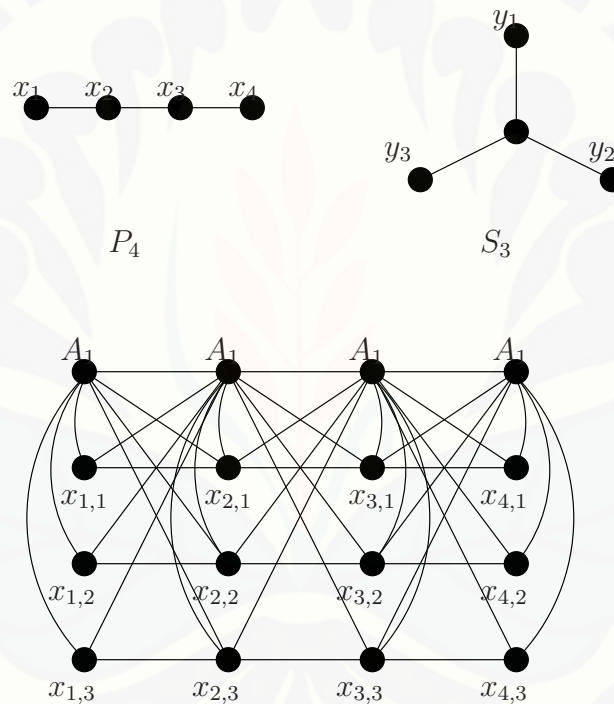
$$f(e) = \left\{ \begin{array}{l} i, \text{ untuk } e = A_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m \\ 1, \text{ untuk } e = A_n x_{n,j}; 1 \leq j \leq m \\ i, \text{ untuk } e = x_{i,j} x_{i,j+1}, x_{i,m} x_{i,1}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m-1 \\ 1, \text{ untuk } e = x_{n,j} x_{n,j+1}, x_{n,m} x_{n,1}; 1 \leq j \leq m-1 \\ 1+i, \text{ untuk } e = A_i A_{i+1}; 1 \leq i \leq n-2 \\ 1, \text{ untuk } e = A_{n-1} A_n \\ 1+i, \text{ untuk } e = x_{i,j} x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-2; 1 \leq j \leq m \\ 1, \text{ untuk } e = x_{n-1,j} x_{n,j}; 1 \leq j \leq m \\ i+2, \text{ untuk } e = A_i x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-3; 1 \leq j \leq m \\ i+2, \text{ untuk } e = A_{i+1} x_{i,j}; 1 \leq i \leq n-3; 1 \leq j \leq m \\ i+2, \text{ untuk } e = x_{i,j} x_{i+1,j+1}, x_{i,m} x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n-3; 1 \leq j \leq m \\ i+2, \text{ untuk } e = x_{i+1,j} x_{i,j+1}, x_{i+1,m} x_{i,1}; 1 \leq i \leq n-3; 1 \leq j \leq m \\ 1, \text{ untuk } e = A_{n-2} x_{n-1,j}; 1 \leq i \leq n-3; 1 \leq j \leq m \\ 1, \text{ untuk } e = A_{n-1} x_{n-2,j}; 1 \leq i \leq n-3; 1 \leq j \leq m \\ 1, \text{ untuk } e = x_{n-2,j} x_{n-1,j+1}, x_{n-2,m} x_{n-1,1}; 1 \leq i \leq n-3; 1 \leq j \leq m \\ 1, \text{ untuk } e = x_{n-1,j} x_{n-2,j+1}, x_{n-1,m} x_{n-2,1}; 1 \leq i \leq n-3; 1 \leq j \leq m \\ 2, \text{ untuk } e = A_{n-1} x_{n,j}; 1 \leq i \leq n-3; 1 \leq j \leq m \\ 2, \text{ untuk } e = A_n x_{n-1,j}; 1 \leq i \leq n-3; 1 \leq j \leq m \\ 2, \text{ untuk } e = x_{n-1,j} x_{n,j+1}, x_{n-1,m} x_{n,1}; 1 \leq i \leq n-3; 1 \leq j \leq m \\ 2, \text{ untuk } e = x_{n,j} x_{n-1,j+1}, x_{n,m} x_{n-1,1}; 1 \leq i \leq n-3; 1 \leq j \leq m \end{array} \right.$$

Jelas bahwa $f : E(P_n[W_m]) \rightarrow \{1, i+1, i+2, \dots, n-1\}$. Sehingga, $rc(P_n[W_m]) = n-1$ dan mencapai lower bound.

Berdasarkan dua kasus diatas maka nilai rainbow connection numbernya adalah:

$$rc(P_n[W_m]) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } n = 3 \\ n-1, & \text{untuk } n \geq 4 \end{cases}$$

◇ **Observasi 4.1.10.** Misal diketahui graf lintasan P_n dengan $V(P_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(P_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\}$ dan graf bintang S_n dengan $V(S_n) = \{A, x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(C_n) = \{Ax_i; 1 \leq i \leq n\}$. Composition graf G yang dinotasikan dengan $G = P_n[S_m]$, maka untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$, himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam $V(P_n[S_m]) = \{A_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(P_n[S_m]) = \{A_i A_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_{i,j} x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq j \leq m\} \cup \{A_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{A_i x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq j \leq m\} \cup \{A_{i+1} x_{i,j}; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq j \leq m\}$, $|V(P_n[S_m])| = nm + n$, $|E(P_n[S_m])| = 4nm + n - 3m - 1$.



Gambar 4.19 Contoh Operasi $P_4[S_3]$

Bukti. Definisi 2.4.4 menjelaskan bahwa $G = P_n[S_m]$, G_1 dan G_2 dengan *disjoint* himpunan titik V_1 dan V_2 dan himpunan sisi X_1 dan X_2 adalah graf dengan titik $V_1 \times V_2$ dan $u = (u_1, u_2)$ yang *adjacent* dengan $v = (v_1, v_2)$ ketika $[u_1 \text{ adj } v_1]$ atau

$[u_1 = v_1$ dan u_2 adj $v_2]$. Dari Gambar 4.19 didapatkan $V(P_n[S_m]) = \{A_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(P_n[S_m]) = \{A_i A_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{i,j} x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m\} \cup \{A_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{A_i x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m\} \cup \{A_{i+1} x_{i,j}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m\}$, $|V(P_n[S_m])| = nm + n$, $|E(P_n[S_m])| = 4nm + n - 3m - 1$. \square

Operasi *composition* merupakan kombinasi dari operasi *cartesian product* dengan operasi *tensor product*. Gambar 4.11 mengilustrasikan bahwa untuk menggambar graf $P_n[S_m]$ diawali dengan menggambar titik-titik graf bintang dengan titik A ditarik ke atas, kemudian diduplikasi sebanyak n kali. Setelah titik-titik pada graf lintasan dan graf bintang dikalikan seperti operasi *cartesian product* atau operasi *tensor product*, kemudian titik-titiknya dihubungkan sesuai dengan graf lintasan dan graf bintang seperti operasi *cartesian product* dan hasil perkalian titik-titik tersebut yang *adjacent* dihubungkan seperti operasi *tensor product*. Untuk mengekspannya tinggal menambah jumlah titik dan sisi pada kedua graf tersebut, sedangkan ketetanggaannya dilakukan melalui cara yang sama.

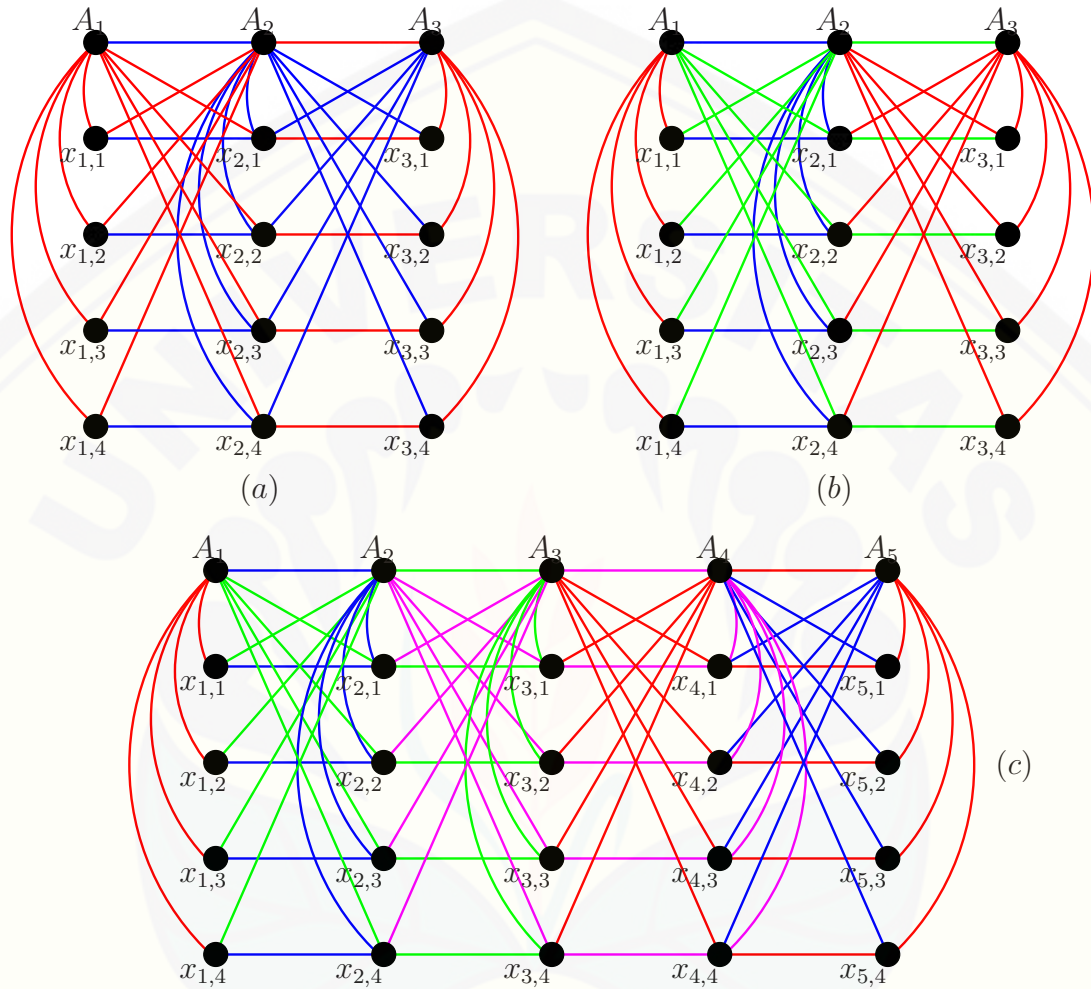
Dari Observasi 4.1.10, ditentukan *rainbow connection number* dan fungsi *rainbow coloring* pada graf $G = P_n[S_m]$ yang disajikan dalam teorema berikut.

\diamond **Teorema 4.1.10.** *Misal G adalah komposisi dari graf lintasan dan graf bintang. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, rainbow connection number $G = P_n[S_m]$ adalah:*

$$rc(P_n[S_m]) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } n = 3 \\ n - 1, & \text{untuk } n \geq 4 \end{cases}$$

Bukti. Sesuai dengan Observasi 4.1.10, didapatkan $V = \{A_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ dan $E = \{A_i A_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{i,j} x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m\} \cup \{A_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{A_i x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m\} \cup \{A_{i+1} x_{i,j}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m\}$, $|V| = nm + n$,

$|E| = 4nm + n - 3m - 1$. Berdasarkan Teorema 2.2.1 nilai rc berada pada selang $k(P_n[S_m]) \leq rc(P_n[S_m]) \leq k(P_n[S_m]) + 1$.



Keterangan :

● = warna 1 ● = warna 2 ● = warna 3 ● = warna 4

Gambar 4.20 Contoh *Rainbow Coloring* $P_n[S_m]$

Untuk $n = 3$ dan $m \geq 3$, $P_n[S_m]$ berdiameter 2 maka $2 \leq rc(P_n[S_m]) \leq 3$.
 Diberikan pewarnaan sisi $P_n[S_m]$ dengan fungsi berikut.

$$f(e) = \begin{cases} i, & \text{untuk } e = A_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m \\ 1, & \text{untuk } e = A_n x_{n,j}; 1 \leq j \leq m \\ i+1, & \text{untuk } e = A_i A_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1 \\ i+1, & \text{untuk } e = x_{i,j} x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m \\ 3, & \text{untuk } e = A_1 x_{2,j}; 1 \leq j \leq m \\ 3, & \text{untuk } e = A_2 x_{1,j}; 1 \leq j \leq m \\ 3, & \text{untuk } e = x_{1,j} x_{2,j+1}, x_{1,m} x_{2,1}; 1 \leq j \leq m \\ 3, & \text{untuk } e = x_{2,j} x_{1,j+1}, x_{2,m} x_{1,1}; 1 \leq j \leq m \\ 1, & \text{untuk } e = A_2 x_{3,j}; 1 \leq i \leq n-3; 1 \leq j \leq m \\ 1, & \text{untuk } e = A_3 x_{2,j}; 1 \leq i \leq n-3; 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

Jelas bahwa $f : E(P_n[S_m]) \rightarrow \{1, 2, 3\}$. Sehingga, $rc(P_n[S_m]) = 3$. Untuk membuktikan bahwa $rc(P_n[S_m]) = 3$ adalah yang minimal. Dari Gambar 4.20 (a) menunjukkan bahwa apabila menggunakan 2 warna maka ada lintasan yang warnanya sama yaitu $x_{i,j} - x_{i,j+1}$. Sehingga, $rc(P_n[S_m]) = 3$.

Untuk $n \geq 4$ dan $m \geq 3$, $P_n[S_m]$ berdiameter $(n-1)$ maka $(n-1) \leq rc(P_n[S_m]) \leq n$. Diberikan pewarnaan sisi $P_n[S_m]$ dengan fungsi berikut.

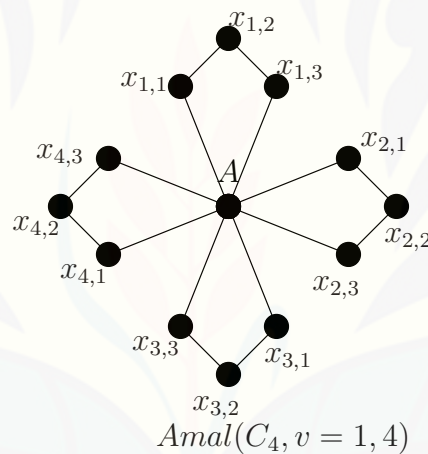
$$f(e) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } e = A_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m \\ 1+i, & \text{untuk } e = A_i A_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1 \\ 1+i, & \text{untuk } e = x_{i,j} x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m \\ i+2, & \text{untuk } e = A_i x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-2; 1 \leq j \leq m \\ 2, & \text{untuk } e = A_{n-1} x_{n,j}; 1 \leq j \leq m \\ i+2, & \text{untuk } e = A_{i+1} x_{i,j}; 1 \leq i \leq n-2; 1 \leq j \leq m \\ 2, & \text{untuk } e = A_n x_{n-1,j}; 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

Jelas bahwa $f : E(P_n[S_m]) \rightarrow \{1, i+1, i+2, \dots, n\}$. Sehingga, $rc(P_n[S_m]) = n$ dan mencapai lower bound.

Berdasarkan dua kasus diatas maka nilai rainbow connection numbernya adalah:

$$rc(P_n[S_m]) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } n = 3 \\ n - 1, & \text{untuk } n \geq 4 \end{cases}$$

◇ **Observasi 4.1.11.** Misal diketahui graf lingkaran C_n dengan $V(C_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(C_n) = \{x_i x_{i+1}, x_n x_1; 1 \leq i \leq n - 1\}$. Amalgamation graf G yang dinotasikan dengan $Amal(C_n, v = 1, r)$, maka untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam $V(Amal(C_n, v = 1, r)) = \{A\} \cup \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n - 2\}$ dan $E(Amal(C_n, v = 1, r)) = \{Ax_{i,1}; 1 \leq i \leq r\} \cup \{Ax_{i,n-1}; 1 \leq i \leq r\} \cup \{x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n - 2\}$, $|V(Amal(C_n, v = 1, r))| = nr - r + 1$, $|E(Amal(C_n, v = 1, r))| = nr$.



Gambar 4.21 Contoh Operasi $Amal(C_4, v = 1, 4)$

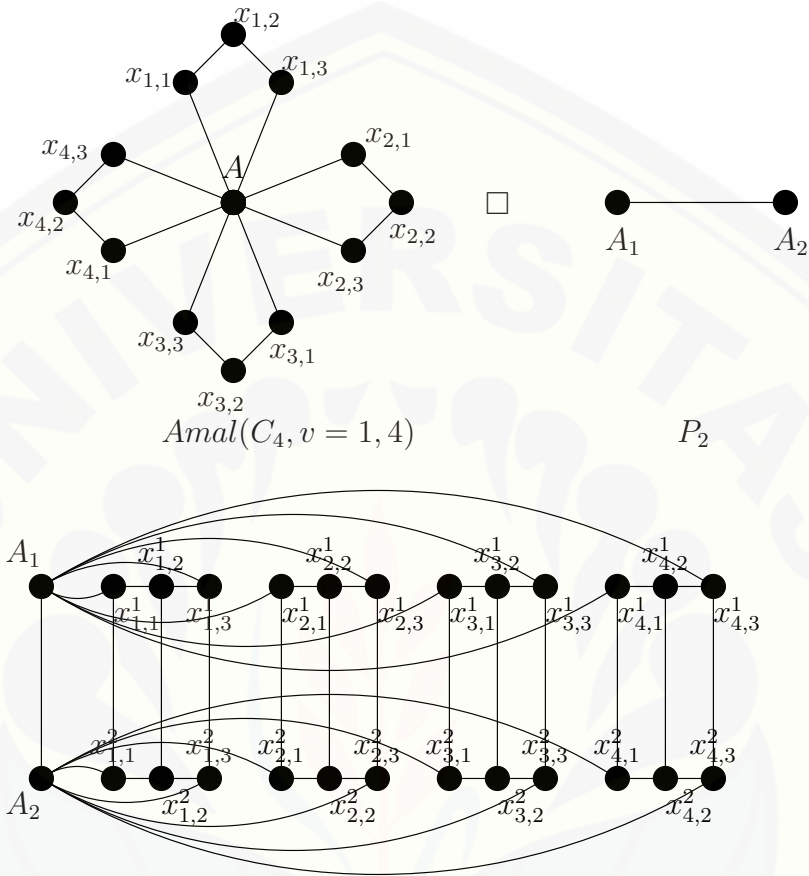
Bukti. Definisi 2.4.5 menjelaskan bahwa $G = Amal(C_n, v = 1, r)$. Misalkan G adalah suatu keluarga graf berhingga dan setiap C_n mempunyai suatu titik v_i yang disebut titik terminal. Dari Gambar 4.21 didapatkan $V(Amal(C_n, v = 1, r)) = \{A\} \cup \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n - 2\}$ dan $E(Amal(C_n, v = 1, r)) = \{Ax_{i,1}; 1 \leq i \leq r\} \cup \{Ax_{i,n-1}; 1 \leq i \leq r\} \cup \{x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n - 2\}$, $|V(Amal(C_n, v = 1, r))| = nr - r + 1$, $|E(Amal(C_n, v = 1, r))| = nr$. □

Gambar 4.21 mengilustrasikan bahwa untuk menggambar graf $Amal(C_n, v = 1, r)$ diawali dengan menggambar menggambar graf lingkaran C_n dan diduplikasi sebanyak r , kemudian semua duplikasi tersebut dilekatkan pada suatu titik yang menjadi titik terminalnya. Untuk mengekspannya tinggal menambah jumlah titik dan sisi pada graf tersebut atau menambah duplikasi dari graf lingkaran dan melekatkan satu titiknya di titik terminal.

◇ **Observasi 4.1.12.** Misal diketahui graf $Amal(C_n, v = 1, r)$ dari Observasi 4.1.11 didapatkan $V(Amal(C_n, v = 1, r)) = \{A, x_{i,j}; 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n - 2\}$ dan $E(Amal(C_n, v = 1, r)) = \{Ax_{i,1}; 1 \leq i \leq r\} \cup \{Ax_{i,n-1}; 1 \leq i \leq r\} \cup \{x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n - 2\}$ dan graf lintasan P_2 dengan $V(P_2) = \{P_1, P_2\}$ dan $E(P_2) = \{P_1P_2\}$. Cartesian product graf G yang dinotasikan dengan $G = (Amal(C_n, v = 1, r)) \square P_2$, maka untuk $n \geq 3$ dan $r \geq 3$, himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam $V((Amal(C_n, v = 1, r)) \square P_2) = \{A_1, A_2\} \cup \{x_{i,j}^1; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n - 1\} \cup \{x_{i,j}^2; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n - 1\}$ dan $E((Amal(C_n, v = 1, r)) \square P_2) = \{A_1A_2\} \cup \{x_{i,j}^1x_{i,j}^2; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n - 1\} \cup \{A_1x_{i,1}^1; 1 \leq i \leq r\} \cup \{A_1x_{i,n-1}^1; 1 \leq i \leq r\} \cup \{A_2x_{i,1}^2; 1 \leq i \leq r\} \cup \{A_2x_{i,n-1}^2; 1 \leq i \leq m\} \cup \{x_{i,j}^1x_{i,j+1}^1; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n - 2\} \cup \{x_{i,j}^2x_{i,j+1}^2; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n - 2\}$, $|V((Amal(C_n, v = 1, r)) \square P_2)| = 3nr - 2r + 2$, $|E((Amal(C_n, v = 1, r)) \square P_2)| = 3nr - r + 1$.

Bukti. Definisi 2.4.2 menjelaskan bahwa $G = (Amal(C_n, v = 1, r)) \square P_2$ jika $V = V_1 \times V_2$, dan dua titik $\langle u_1, u_2 \rangle$ dan $\langle v_1, v_2 \rangle$ di G bertetangga jika dan hanya jika salah satu dari dua hal berikut berlaku: $u_1 = v_1$ dan $(u_2, v_2) \in E_2$ atau $u_2 = v_2$ dan $(u_1, v_1) \in E_1$. Dari Gambar 4.22 didapatkan $V((Amal(C_n, v = 1, r)) \square P_2) = \{A_1, A_2\} \cup \{x_{i,j}^1; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n - 1\} \cup \{x_{i,j}^2; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n - 1\}$ dan $E((Amal(C_n, v = 1, r)) \square P_2) = \{A_1A_2\} \cup \{x_{i,j}^1x_{i,j}^2; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n - 1\} \cup \{A_1x_{i,1}^1; 1 \leq i \leq r\} \cup \{A_1x_{i,n-1}^1; 1 \leq i \leq r\} \cup \{A_2x_{i,1}^2; 1 \leq i \leq r\} \cup \{A_2x_{i,n-1}^2; 1 \leq i \leq m\} \cup \{x_{i,j}^1x_{i,j+1}^1; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n - 2\} \cup \{x_{i,j}^2x_{i,j+1}^2; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n -$

$2\}$, $|V((Amal(C_n, v = 1, r)) \square P_2)| = 3nr - 2r + 2$, $|E((Amal(C_n, v = 1, r)) \square P_2)| = 3nr - r + 1$. □



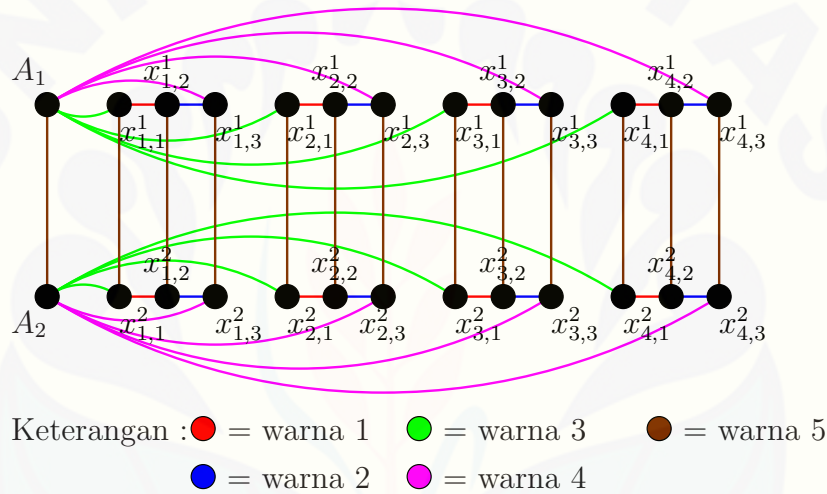
Gambar 4.22 Contoh Operasi $Amal(C_4, v = 1, 4) \square P_2$

Operasi *cartesian product* merupakan operasi perkalian, titik-titik pada graf $Amal(C_n, v = 1, r)$ dikalikan sebanyak titik-titik pada graf lintasan atau sebaliknya. Kemudian titik-titiknya dihubungkan sesuai dengan bentuk graf lintasan dan graf $Amal(C_n, v = 1, r)$. Gambar 4.22 mengilustrasikan bahwa untuk menggambar graf $Amal(C_n, v = 1, r) \square P_2$ diawali dengan menggambar graf $Amal(C_n, v = 1, r)$ dengan A ditarik ke kiri, kemudian diduplikasi sebanyak 2 kali, dan titik-titik yang bersesuaian dihubungkan. Untuk mengekspannya ting-

gal menambah jumlah titik dan sisi pada graf $Amal(C_n, v = 1, r)$, sedangkan ketetanggaannya dilakukan melalui cara yang sama.

Dari Observasi 4.1.12, ditentukan *rainbow connection number* dan fungsi *rainbow coloring* pada graf $G = (Amal(C_n, v = 1, r)) \square P_2$ yang disajikan dalam teorema berikut.

◇ **Teorema 4.1.11.** *Misal G adalah cartesian product dari $Amal(C_n, v = 1, r)$ dan P_2 . Untuk $n \geq 3$ dan $r \geq 3$, rainbow connection number $G = (Amal(C_n, v = 1, r)) \square P_2$ adalah $rc(Amal(C_n, v = 1, r)) \square P_2 = n + 1$.*



Gambar 4.23 Contoh *Rainbow Coloring* $(Amal(C_n, v = 1, r)) \square P_2$

Bukti. Sesuai dengan Observasi 4.1.12, didapatkan $V = \{A_1, A_2\} \cup \{x_{i,j}^1; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n - 1\} \cup \{x_{i,j}^2; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n - 1\}$ dan $E = \{A_1A_2\} \cup \{x_{i,j}^1x_{i,j}^2; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n - 1\} \cup \{A_1x_{i,1}^1; 1 \leq i \leq r\} \cup \{A_1x_{i,n-1}^1; 1 \leq i \leq r\} \cup \{A_2x_{i,1}^2; 1 \leq i \leq r\} \cup \{A_2x_{i,n-1}^2; 1 \leq i \leq m\} \cup \{x_{i,j}^1x_{i,j+1}^1; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n - 2\} \cup \{x_{i,j}^2x_{i,j+1}^2; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n - 2\}$, $|V| = 3nr - 2r + 2$, $|E| = 3nr - r + 1$. Berdasarkan Teorema 2.2.1 nilai rc berada pada selang $k(Amal(C_n, v = 1, r)) \square P_2 \leq rc(Amal(C_n, v = 1, r)) \square P_2 \leq k(Amal(C_n, v = 1, r)) \square P_2 + 1$.

Untuk $n \geq 3$ dan $r \geq 3$, $(Amal(C_n, v = 1, r)) \square P_2$ berdiameter $(n + 1)$ maka $(n + 1) \leq rc(Amal(C_n, v = 1, r) \square P_2) \leq n + 2$. Diberikan pewarnaan sisi $(Amal(C_n, v = 1, r) \square P_2)$ dengan fungsi berikut.

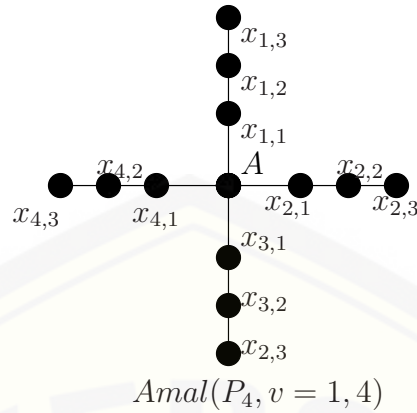
$$f(e) = \begin{cases} j, & \text{untuk } e = x_{i,j}^1 x_{i,j+1}^1; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n - 2 \\ j, & \text{untuk } e = x_{i,j}^2 x_{i,j+1}^2; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n - 2 \\ n - 1, & \text{untuk } e = A_1 x_{i,1}^1; 1 \leq i \leq r \\ n, & \text{untuk } e = A_1 x_{i,n-1}^1; 1 \leq i \leq r \\ n - 1, & \text{untuk } e = A_2 x_{i,1}^2; 1 \leq i \leq r \\ n, & \text{untuk } e = A_2 x_{i,n-1}^2; 1 \leq i \leq r \\ n + 1, & \text{untuk } e = A_1 A_2 \\ n + 1, & \text{untuk } e = x_{i,j}^1 x_{i,j}^2; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n - 1 \end{cases}$$

Jelas bahwa $f : E(Amal(C_n, v = 1, r) \square P_2) \rightarrow \{j, \dots, n - 1, n, n + 1\}$. Sehingga, $rc(Amal(C_n, v = 1, r) \square P_2) = n + 1$ dan mencapai lower bound.

Observasi 4.1.13. Misal diketahui graf lintasan P_n dengan $V(P_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(P_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\}$. Amalgamation graf G yang dinotasikan dengan $Amal(P_n, v = 1, r)$, maka untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam $V(Amal(P_n, v = 1, r)) = \{A\} \cup \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq r \ 1 \leq j \leq n - 2\}$ dan $E = \{Ax_{i,1}; 1 \leq i \leq r\} \cup \{x_{i,j} x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n - 2\}$ $|V| = nr - r + 1$, $|E| = nr - r$.

Bukti. Definisi 2.4.5 menjelaskan bahwa $G = Amal(P_n, v = 1, r)$. Misalkan G adalah suatu keluarga graf berhingga dan setiap P_n mempunyai suatu titik v_i yang disebut titik terminal. Dari Gambar 4.24 didapatkan $V(Amal(P_n, v = 1, r)) = \{A\} \cup \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq r \ 1 \leq j \leq n - 2\}$ dan $E = \{Ax_{i,1}; 1 \leq i \leq r\} \cup \{x_{i,j} x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n - 2\}$, $|V| = nr - r + 1$, $|E| = nr - r$. \square

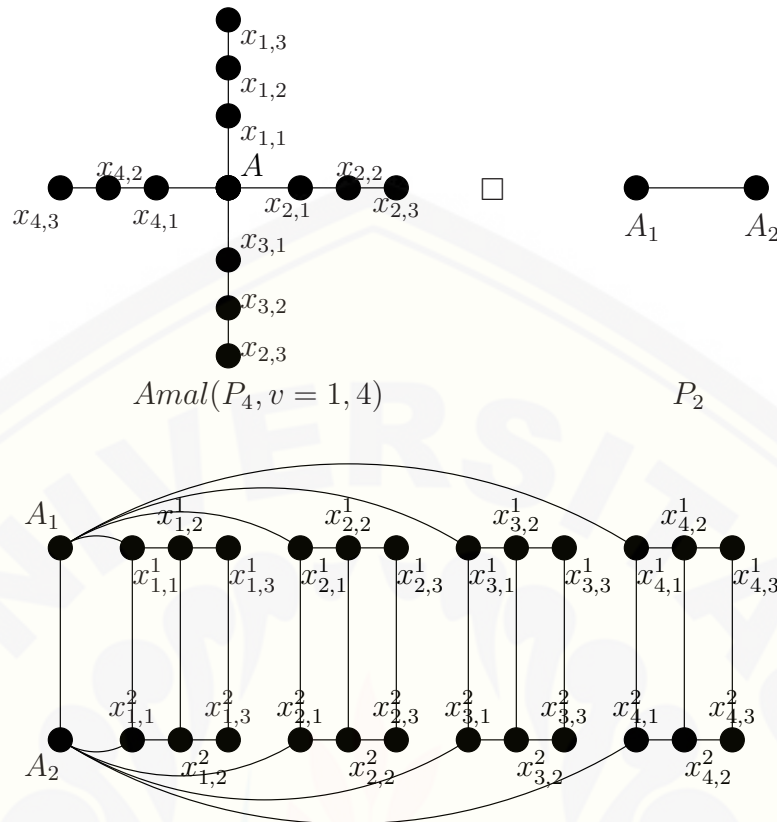
Gambar 4.24 mengilustrasikan bahwa untuk menggambar graf $Amal(P_n, v = 1, r)$ diawali dengan menggambar menggambar graf lintasan P_n dan diduplikasi



Gambar 4.24 Contoh Operasi $Amal(P_4, v = 1, 4)$

sebanyak r , kemudian semua duplikasi tersebut dilekatkan pada satu titik di ujung dari graf lintasan dan menjadi titik terminalnya. Untuk mengekspannya tinggal menambah jumlah titik dan sisi pada graf tersebut atau menambah duplikasi dari graf lintasan dan melekatkan titik ujungnya di titik terminal.

◇ **Observasi 4.1.14.** Misal diketahui graf $Amal(P_n, v = 1, r)$ dari Observasi 4.1.13 didapatkan $V(Amal(P_n, v = 1, r)) = \{A, x_{i,j}; 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n - 2\}$ dan $E(Amal(P_n, v = 1, r)) = \{Ax_{i,1}; 1 \leq i \leq r\} \cup \{x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n - 2\}$ dan graf lintasan P_2 dengan $V(P_2) = \{P_1, P_2\}$ dan $E(P_2) = \{P_1P_2\}$. Cartesian product graf G yang dinotasikan dengan $G = ((Amal(P_n, v = 1, r)) \square P_2)$, maka untuk $n \geq 3$ dan $r \geq 3$, himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam $V((Amal(P_n, v = 1, r)) \square P_2) = \{A_1, A_2\} \cup \{x_{i,j}^1; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n - 1\} \cup \{x_{i,j}^2; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n - 1\}$ dan $E((Amal(P_n, v = 1, r)) \square P_2) = \{A_1A_2\} \cup \{x_{i,j}^1x_{i,j}^2; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n - 1\} \cup \{A_1x_{i,1}^1; 1 \leq i \leq r\} \cup \{A_2x_{i,1}^2; 1 \leq i \leq r\} \cup \{x_{i,j}^1x_{i,j+1}^1; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n - 2\} \cup \{x_{i,j}^2x_{i,j+1}^2; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n - 2\}$, $|V((Amal(P_n, v = 1, r)) \square P_2)| = 3nr - 2r + 2$, $|E((Amal(P_n, v = 1, r)) \square P_2)| = 3nr - 3r + 1$.



Gambar 4.25 Contoh Operasi $Amal(P_4, v = 1, 4) \square P_2$

Bukti. Definisi 2.4.2 menjelaskan bahwa $G = (Amal(P_n, v = 1, r)) \square P_2$ jika $V = V_1 \times V_2$, dan dua titik $\langle u_1, u_2 \rangle$ dan $\langle v_1, v_2 \rangle$ di G bertetangga jika dan hanya jika salah satu dari dua hal berikut berlaku: $u_1 = v_1$ dan $(u_2, v_2) \in E_2$ atau $u_2 = v_2$ dan $(u_1, v_1) \in E_1$. Dari Gambar 4.25 didapatkan $V((Amal(P_n, v = 1, r)) \square P_2) = \{A_1, A_2\} \cup \{x_{i,j}^1; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n - 1\} \cup \{x_{i,j}^2; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n - 1\}$ dan $E((Amal(P_n, v = 1, r)) \square P_2) = \{A_1 A_2\} \cup \{x_{i,j}^1 x_{i,j}^2; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n - 1\} \cup \{A_1 x_{i,1}^1; 1 \leq i \leq r\} \cup \{A_2 x_{i,1}^2; 1 \leq i \leq r\} \cup \{x_{i,j}^1 x_{i,j+1}^1; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n - 2\} \cup \{x_{i,j}^2 x_{i,j+1}^2; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n - 2\}$, $|V((Amal(P_n, v = 1, r)) \square P_2)| = 3nr - 2r + 2$, $|E((Amal(P_n, v = 1, r)) \square P_2)| = 3nr - 3r + 1$. \square

Operasi *cartesian product* merupakan operasi perkalian, titik-titik pada graf $Amal(P_n, v = 1, r)$ dikalikan sebanyak titik-titik pada graf lintasan atau sebaliknya. Kemudian titik-titiknya dihubungkan sesuai dengan bentuk graf lintasan dan graf $Amal(P_n, v = 1, r)$. Gambar 4.25 mengilustrasikan bahwa untuk menggambar graf $Amal(P_n, v = 1, r) \square P_2$ diawali dengan menggambar graf $Amal(P_n, v = 1, r)$ dengan A ditarik ke kiri, kemudian diduplikasi sebanyak 2 kali, dan titik-titik yang bersesuaian dihubungkan. Untuk mengekspannya tinggal menambah jumlah titik dan sisi pada graf $Amal(P_n, v = 1, r)$, sedangkan ketetanggaannya dilakukan melalui cara yang sama.

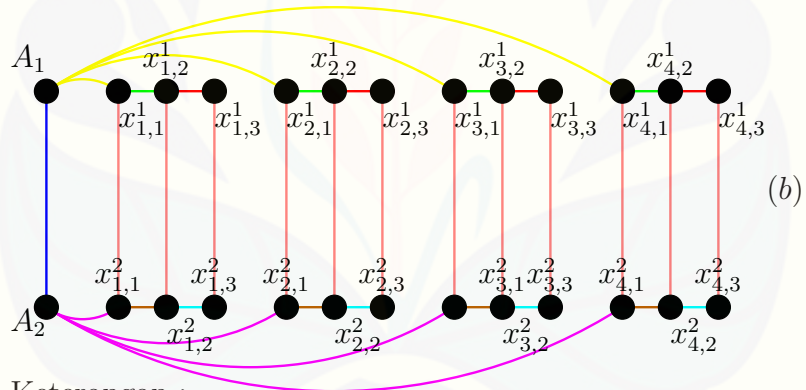
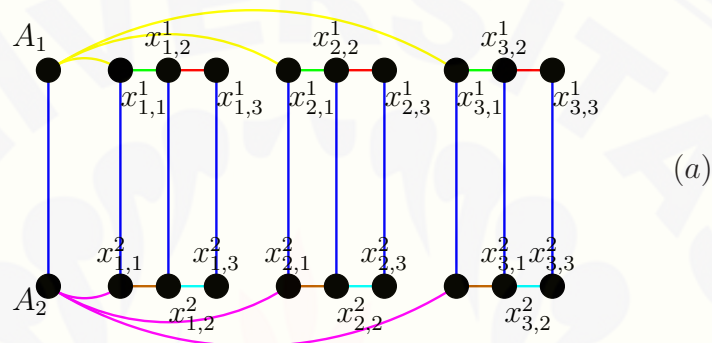
Dari Observasi 4.1.14, ditentukan *rainbow connection number* dan fungsi *rainbow coloring* pada graf $G = (Amal(P_n, v = 1, r)) \square P_2$ yang disajikan dalam teorema berikut.

◇ **Teorema 4.1.12.** *Misal G adalah cartesian product dari $Amal(P_n, v = 1, r)$ dan P_2 . Untuk $n \geq 3$ dan $r \geq 3$, rainbow connection number $G = Amal(P_n, v = 1, r) \square P_2$ adalah $rc(Amal(P_n, v = 1, r) \square P_2) = 2n$.*

Bukti. Sesuai dengan Observasi 4.1.14, didapatkan $V = \{A_1, A_2\} \cup \{x_{i,j}^1; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n - 1\} \cup \{x_{i,j}^2; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n - 1\}$ dan $E = \{A_1 A_2\} \cup \{x_{i,j}^1 x_{i,j}^2; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n - 1\} \cup \{A_1 x_{i,1}^1; 1 \leq i \leq r\} \cup \{A_2 x_{i,1}^2; 1 \leq i \leq r\} \cup \{x_{i,j}^1 x_{i,j+1}^1; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n - 2\} \cup \{x_{i,j}^2 x_{i,j+1}^2; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n - 2\}$, $|V| = 3nr - 2r + 2$, $|E| = 3nr - 3r + 1$. Berdasarkan Teorema 2.2.1 nilai rc berada pada selang $k(Amal(P_n, v = 1, r) \square P_2) \leq rc(Amal(P_n, v = 1, r) \square P_2) \leq k(Amal(P_n, v = 1, r) \square P_2) + 1$.

Untuk $n \geq 3$ dan $r \geq 3$, $(Amal(C_n, v = 1, r)) \square P_2$ berdiameter $(2n - 1)$ maka $(2n - 1) \leq rc(Amal(P_n, v = 1, r) \square P_2) \leq 2n$. Diberikan pewarnaan sisi $(Amal(P_n, v = 1, r)) \square P_2$ dengan fungsi berikut.

$$f(e) = \begin{cases} j, & \text{untuk } e = x_{i,j}^1 x_{i,j+1}^1; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n-2 \\ (n-2) + j, & \text{untuk } e = x_{i,j}^2 x_{i,j+1}^2; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n-2 \\ 2n-3, & \text{untuk } e = A_1 x_{i,1}^1; 1 \leq i \leq r \\ 2n-2, & \text{untuk } e = A_2 x_{i,1}^2; 1 \leq i \leq r \\ 2n-1, & \text{untuk } e = A_1 A_2 \\ 2n, & \text{untuk } e = x_{i,j}^1 x_{i,j}^2; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n-1 \end{cases}$$



Keterangan :

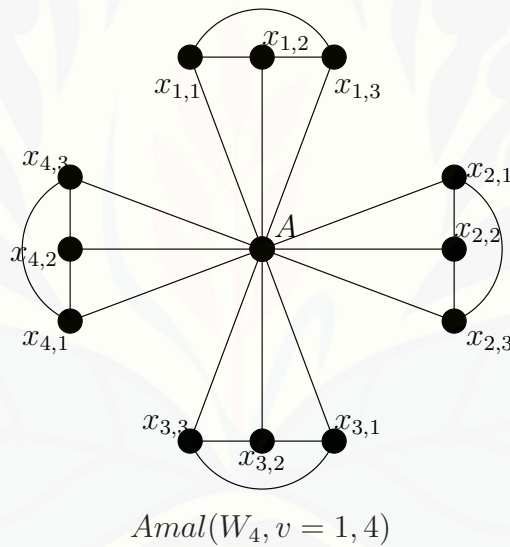
- = warna 1
- = warna 3
- = warna 5
- = warna 7
- = warna 2
- = warna 4
- = warna 6
- = warna 8

Gambar 4.26 Contoh *Rainbow Coloring* ($Amal(P_n, v = 1, r) \square P_2$)

Jelas bahwa $f : E(Amal(P_n, v = 1, r) \square P_2) \rightarrow \{j, \dots, (n-2) + j, \dots, 2n-2, 2n-1, 2n\}$. Sehingga, $rc(Amal(P_n, v = 1, r) \square P_2) = 2n$. Untuk membuktikan bahwa $rc(Amal(P_n, v = 1, r) \square P_2) = 2n$ adalah yang minimal. Dari

Gambar 4.26 (a) menunjukkan bahwa apabila menggunakan $2n - 1$ warna maka ada lintasan yang warnanya sama yaitu $x_{i,j}^1 - x_{i+1,j}^1, x_{i,j}^2 - x_{i+1,j}^2$. Sehingga, $rc(\text{Amal}(P_n, v = 1, r) \square P_2) = 2n$.

◇ **Observasi 4.1.15.** Misal diketahui graf roda W_n dengan $V(W_n) = \{A, x_j; 1 \leq j \leq n\}$ dan $E(W_n) = \{Ax_j; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_jx_{j+1}, x_nx_1; 1 \leq j \leq n - 1\}$. Amalgamation graf G yang dinotasikan dengan $\text{Amal}(W_n, v = 1, r)$, maka untuk $n \geq 3$ dan $r \geq 3$, himpunan titik dan sisi dapat disajikan $V(\text{Amal}(W_n, v = 1, r)) = \{A\} \cup \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n\}$ dan $E(\text{Amal}(W_n, v = 1, r)) = \{Ax_{i,j}; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n - 1\} \cup \{x_{i,n}x_{i,1}; 1 \leq i \leq r\}$, $|V(\text{Amal}(W_n, v = 1, r))| = nr + 1$, $|E(\text{Amal}(W_n, v = 1, r))| = 2nr$.



Gambar 4.27 Contoh Operasi $\text{Amal}(W_4, v = 1, 4)$

Bukti. Definisi 2.4.5 menjelaskan bahwa $G = \text{Amal}(W_n, v = 1, r)$. Misalkan G adalah suatu keluarga graf berhingga dan setiap W_n mempunyai suatu titik v_i yang disebut titik terminal. Dari Gambar 4.24 didapatkan $V(\text{Amal}(W_n, v = 1, r)) = \{A\} \cup \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n\}$ dan $E(\text{Amal}(W_n, v = 1, r)) = \{Ax_{i,j}; 1 \leq i \leq$

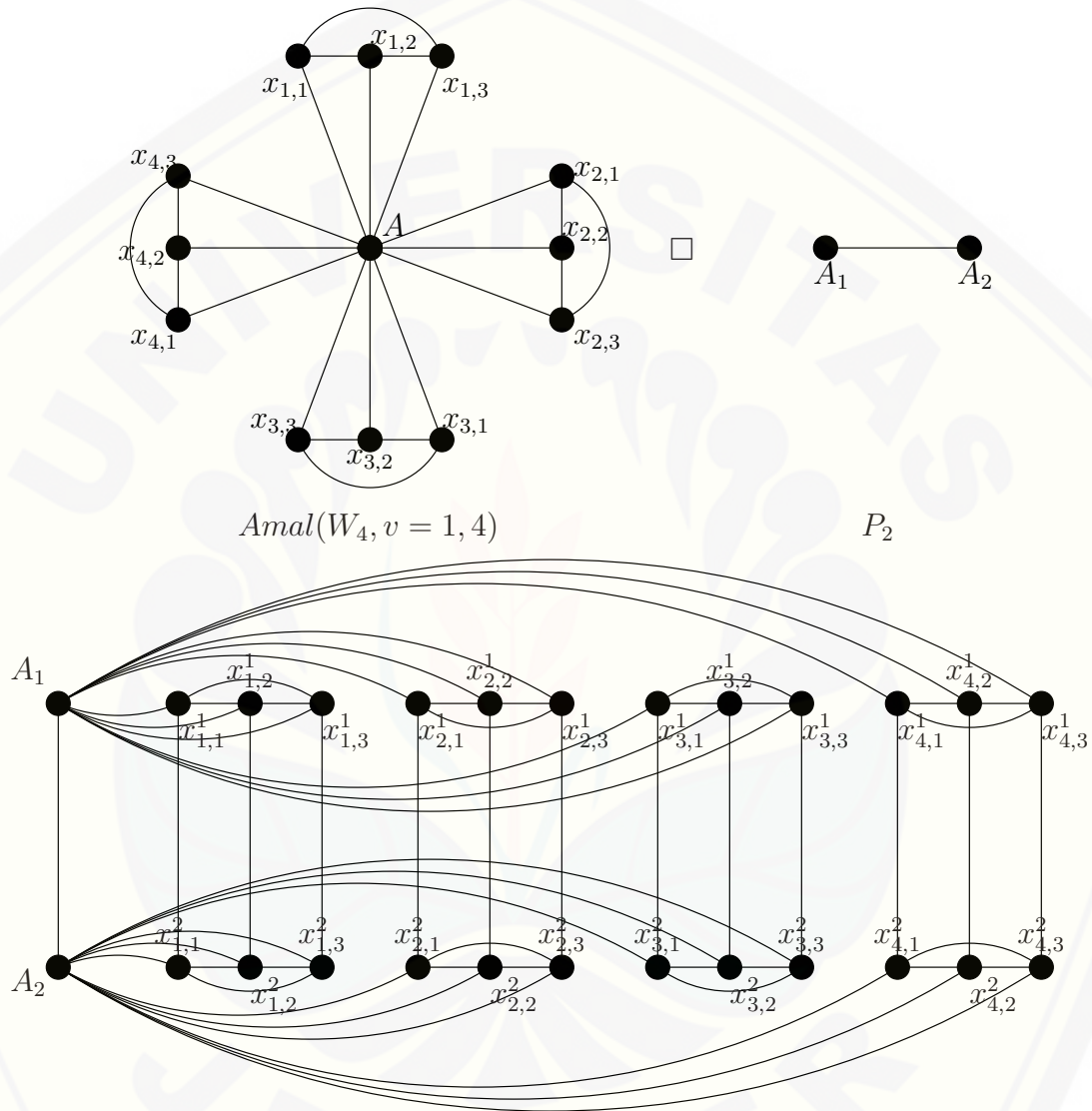
$$r; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{x_{i,n}x_{i,1}; 1 \leq i \leq r\}, \\ |V(\text{Amal}(W_n, v=1, r))| = nr + 1, |E(\text{Amal}(W_n, v=1, r))| = 2nr. \quad \square$$

Gambar 4.27 mengilustrasikan bahwa untuk menggambar graf $\text{Amal}(W_n, v=1, r)$ diawali dengan menggambar graf roda C_n dan diduplikasi sebanyak r , kemudian semua duplikasi tersebut dilekatkan pada titik A dan menjadi titik terminalnya. Untuk mengekspannya tinggal menambah jumlah titik dan sisi pada graf tersebut atau menambah duplikasi dari graf roda dan melekatkan titik A di titik terminal.

Observasi 4.1.16. Misal diketahui graf $\text{Amal}(W_n, v=1, r)$ dari Observasi 4.1.15 didapatkan $V(\text{Amal}(W_n, v=1, r)) = \{A\} \cup \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n\}$ dan $E(\text{Amal}(W_n, v=1, r)) = \{Ax_{i,j}; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{x_{i,n}x_{i,1}; 1 \leq i \leq r\}$ dan graf lintasan P_2 dengan $V(P_2) = \{P_1, P_2\}$ dan $E(P_2) = \{P_1P_2\}$. Cartesian product graf G yang dinotasikan dengan $G = ((\text{Amal}(W_n, v=1, r)) \square P_2)$, maka untuk $n \geq 3$ dan $r \geq 3$, himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam $V((\text{Amal}(W_n, v=1, r)) \square P_2) = \{A_1, A_2\} \cup \{x_{i,j}^1; 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{i,j}^2; 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n\}$ dan $E((\text{Amal}(W_n, v=1, r)) \square P_2) = \{A_1A_2\} \cup \{x_{i,j}^1x_{i,j}^2; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n\} \cup \{A_1x_{i,j}^1; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n\} \cup \{A_2x_{i,j}^2; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{i,j}^1x_{i,j+1}^1; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{x_{i,n}^1x_{i,1}^1; 1 \leq i \leq r\} \cup \{x_{i,j}^2x_{i,j+1}^2; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{x_{i,n}^2x_{i,1}^2; 1 \leq i \leq r\}, \\ |V((\text{Amal}(W_n, v=1, r)) \square P_2)| = 2nr + 2, |E((\text{Amal}(W_n, v=1, r)) \square P_2)| = 5nr + 1.$

Bukti. Definisi 2.4.2 menjelaskan bahwa $G = (\text{Amal}(W_n, v=1, r)) \square P_2$ jika $V = V_1 \times V_2$, dan dua titik $\langle u_1, u_2 \rangle$ dan $\langle v_1, v_2 \rangle$ di G bertetangga jika dan hanya jika salah satu dari dua hal berikut berlaku: $u_1 = v_1$ dan $(u_2, v_2) \in E_2$ atau $u_2 = v_2$ dan $(u_1, v_1) \in E_1$. Dari Gambar 4.28 didapatkan $V((\text{Amal}(W_n, v=1, r)) \square P_2) = \{A_1, A_2\} \cup \{x_{i,j}^1; 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{i,j}^2; 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n\}$ dan $E((\text{Amal}(W_n, v=1, r)) \square P_2) = \{A_1A_2\} \cup \{x_{i,j}^1x_{i,j}^2; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n\} \cup \{A_1x_{i,j}^1; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n\} \cup \{A_2x_{i,j}^2; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{i,j}^1x_{i,j+1}^1; 1 \leq$

$i \leq r; 1 \leq j \leq n - 1 \} \cup \{x_{i,n}^1 x_{i,1}^1; 1 \leq i \leq r\} \cup \{x_{i,j}^2 x_{i,j+1}^2; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n - 1\} \cup \{x_{i,n}^2 x_{i,1}^2; 1 \leq i \leq r\}$, $|V((Amal(W_n, v = 1, r)) \square P_2)| = 2nr + 2$,
 $|E((Amal(W_n, v = 1, r)) \square P_2)| = 5nr + 1$. □



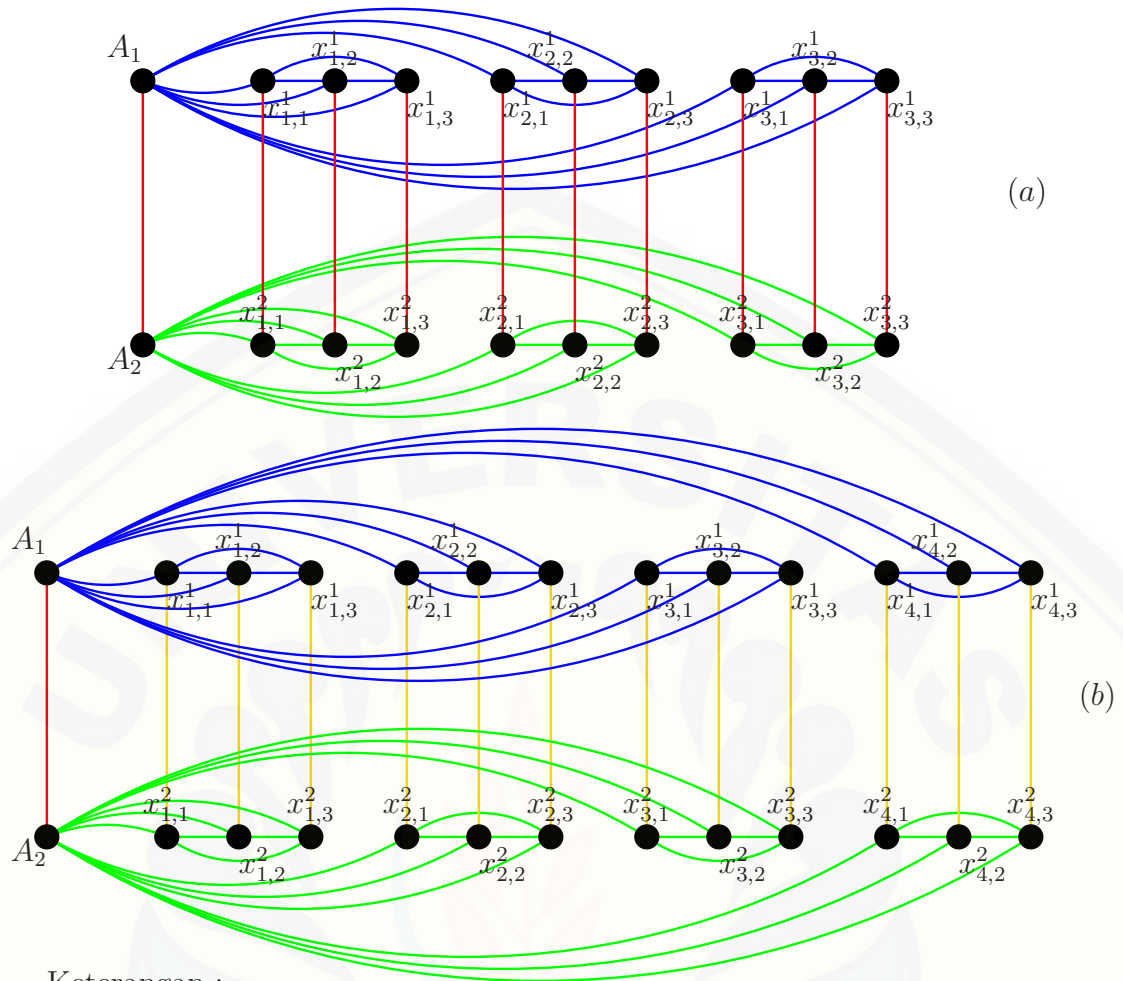
Gambar 4.28 Contoh Operasi $Amal(W_4, v = 1, 4) \square P_2$

Operasi *cartesian product* merupakan operasi perkalian, titik-titik pada graf $Amal(W_n, v = 1, r)$ dikalikan sebanyak titik-titik pada graf lintasan atau sebaliknya. Kemudian titik-titiknya dihubungkan sesuai dengan bentuk graf lintasan dan graf $Amal(W_n, v = 1, r)$. Gambar 4.28 mengilustrasikan bahwa untuk menggambar graf $Amal(W_n, v = 1, r) \square P_2$ diawali dengan menggambar graf $Amal(W_n, v = 1, r)$ dengan A ditarik ke kiri, kemudian diduplikasi sebanyak 2 kali, dan titik-titik yang bersesuaian dihubungkan. Untuk mengekspannya tinggal menambah jumlah titik dan sisi pada graf $Amal(W_n, v = 1, r)$, sedangkan ketetanggaannya dilakukan melalui cara yang sama.

Dari Observasi 4.1.16, ditentukan *rainbow connection number* dan fungsi *rainbow coloring* pada graf $G = (Amal(W_n, v = 1, r)) \square P_2$ yang disajikan dalam teorema berikut.

◇ **Teorema 4.1.13.** *Misal G adalah cartesian product dari $Amal(W_n, v = 1, r)$ dan P_2 . Untuk $n \geq 3$ dan $r \geq 3$, rainbow connection number $G = (Amal(W_n, v = 1, r)) \square P_2$ adalah $rc(Amal(W_n, v = 1, r) \square P_2) = 4$.*

Bukti. Sesuai dengan Observasi 4.1.16, didapatkan $V = \{A_1, A_2\} \cup \{x_{i,j}^1; 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{i,j}^2; 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n\}$ dan $E = \{A_1 A_2\} \cup \{x_{i,j}^1 x_{i,j}^2; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n\} \cup \{A_1 x_{i,j}^1; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n\} \cup \{A_2 x_{i,j}^2; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{i,j}^1 x_{i,j+1}^1; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{x_{i,n}^1 x_{i,1}^1; 1 \leq i \leq r\} \cup \{x_{i,j}^2 x_{i,j+1}^2; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{x_{i,n}^2 x_{i,1}^2; 1 \leq i \leq r\}$, $|V| = 2nr + 2$, $|E| = 5nr + 1$. Berdasarkan Teorema 2.2.1 nilai rc berada pada selang $k(Amal(W_n, v = 1, r) \square P_2) \leq rc(Amal(W_n, v = 1, r) \square P_2) \leq k(Amal(W_n, v = 1, r) \square P_2) + 1$. Untuk $n \geq 3$ dan $r \geq 3$, $(Amal(W_n, v = 1, r)) \square W_2$ berdiameter 3 maka $3 \leq rc(Amal(W_n, v = 1, r) \square W_2) \leq 4$. Diberikan pewarnaan sisi $(Amal(W_n, v = 1, r) \square P_2)$ dengan fungsi berikut.



Keterangan :

- = warna 1
- = warna 2
- = warna 3
- = warna 4

Gambar 4.29 Contoh *Rainbow Coloring* $Amal(W_n, v = 1, r) \square P_2$

$$f(e) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } e = x_{i,j}^1 x_{i,j+1}^1, x_{i,n}^1 x_{i,1}^1; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n-1 \\ 1, & \text{untuk } e = A_1 x_{i,j}^1; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n \\ 2, & \text{untuk } e = x_{i,j}^2 x_{i,j+1}^2, x_{i,n}^2 x_{i,1}^2; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n-1 \\ 2, & \text{untuk } e = A_2 x_{i,j}^2; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n \\ 3, & \text{untuk } e = A_1 A_2 \\ 4, & \text{untuk } e = x_{i,j}^1 x_{i,j}^2; 1 \leq i \leq r; 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

Jelas bahwa $f : E(\text{Amal}(W_n, v = 1, r) \square P_2) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$. Sehingga, $rc(\text{Amal}(W_n, v = 1, r) \square P_2) = 4$. Untuk membuktikan bahwa $rc(\text{Amal}(W_n, v = 1, r) \square P_2) = 4$ adalah yang minimal. Dari Gambar 4.29 (a) menunjukkan bahwa apabila menggunakan 3 warna maka ada lintasan yang warnanya sama yaitu $x_{i,j}^1 - x_{i+1,j}^1, x_{i,j}^2 - x_{i+1,j}^2$. Sehingga, $rc(\text{Amal}(W_n, v = 1, r) \square P_2) = 4$.

4.2 Pembahasan

Dari hasil penelitian tentang penerapan *rainbow connection* pada graf-graf hasil operasi, diperoleh 13 teorema baru mengenai *rainbow connection*, diantaranya 5 teorema dari operasi *Joint*, 1 teorema dari operasi *Cartesian Product*, 1 teorema dari operasi *Tensor Product*, 3 teorema dari operasi *Composition* dan 3 teorema dari hasil *Amalgamation* yang dioperasikan lagi dengan *Cartesian Product*.

Pada operasi $(P_n + C_n, C_n + S_n, P_n + W_n, C_n + W_n, S_n + W_n)$ didapatkan *rainbow connection number* $rc(G) = 2$. Dalam operasi *Joint*, pengoperasiannya diperoleh dengan cara menghubungkan setiap titik pada graf pertama ke setiap titik pada graf kedua. Sehingga diperoleh diameter dari graf hasil operasi *Joint* adalah 2 dan didapatkan $rc(G)$ dari operasi *Joint* $(P_n + C_n, C_n + S_n, P_n + W_n, C_n + W_n, S_n + W_n)$ adalah 2.

Pada operasi $(P_n \square W_m)$ didapatkan *rainbow connection number*:

$$rc(P_n \square W_m) = \begin{cases} n, & \text{untuk } m = 3 \\ n + 1, & \text{untuk } 4 \leq m \leq 6 \\ n + 2, & \text{untuk } m \geq 7 \end{cases}$$

Dalam operasi *Cartesian Product*, pengoperasiannya diperoleh dengan cara membentuk sesuai dengan graf pertama dan graf kedua. Sehingga diperoleh diameter dari graf hasil operasi *Cartesian Product* adalah diameter pada G_1 ditambah diameter pada G_2 dan didapatkan $rc(G)$ juga dari $rc(G_1) + rc(G_2)$.

Pada operasi $(P_n \otimes C_n)$ didapatkan *rainbow connection number* $rc(P_n \otimes C_n) = n$. Dalam operasi *Tensor Product*, dioperasikan dengan cara menghubungkan titik yang sama-sama bertetangga pada graf pertama dan kedua. Sehingga, jika salah satu graf yang dioperasikan dari graf lingkaran, maka hanya berlaku untuk n ganjil, karena untuk n genap graf menjadi tidak konektif.

Pada operasi $(P_n[C_m], P_n[W_m], P_n[S_m])$ didapatkan *rainbow connection number*:

$$rc(P_n[C_m]) = \begin{cases} n - 1, & \text{untuk } n - 1 \geq \frac{m}{2} \\ 1, & \text{untuk } n - 1 < \frac{m}{2} \text{ dan } m = 3 \\ \frac{m}{2}, & \text{untuk } n - 1 < \frac{m}{2} \text{ dan } m \text{ genap} \\ \frac{m-1}{2} + 1, & \text{untuk } n - 1 < \frac{m}{2} \text{ dan } m \text{ ganjil } > 3 \end{cases}$$

$$rc(P_n[W_m]) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } n = 3 \\ n - 1, & \text{untuk } n \geq 4 \end{cases}$$

$$rc(P_n[S_m]) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } n = 3 \\ n - 1, & \text{untuk } n \geq 4 \end{cases}$$

Karena operasi *Composition* ini adalah gabungan dari operasi *Cartesian Product* dan operasi *Tensor Product*, maka diperoleh diameternya adalah diameter maksimal dari graf pertama dan graf kedua, Sehingga $rc(G)$ juga dari $\max(rc(G_1), rc(G_2))$. Kecuali pada graf bintang, karena $rc(S_m) = m$, maka pengembangan pada graf bintang tidak mempengaruhi $rc(P_n[S_m])$.

Pada operasi $(Amal(C_n, r) \square P_2, Amal(P_n, r) \square P_2, Amal(C_n, r) \square P_2)$ didapatkan *rainbow connection number* $rc(Amal(C_n, r) \square P_2) = n+1$, $rc(Amal(P_n, r) \square P_2) = 2n$, $rc(Amal(W_n, r) \square P_2) = 4$. Untuk $Amal(C_n, r) \square P_2$ didapatkan diameter dari diameter graf pertama ditambah diameter graf kedua dan $rc(G)$ juga $rc(G_1) + rc(G_2)$. Untuk $Amal(P_n, r) \square P_2$ didapatkan diameter dari dia-

meter graf pertama ditambah diameter graf kedua dan $rc(G) = rc(G_1) + rc(G_2) + 1$ karena jika $rc(G)$ sama dengan diameter maka ada lintasan yang berwarna sama, sehingga diberi warna diameter ditambah satu. Untuk $Amal(W_n, r) \square P_2$ didapatkan diameternya adalah 3 dan $rc(G) = 4$, karena jika $rc(G) = 3$ maka ada lintasan yang berwarna sama, sehingga diberi empat warna.



BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa *Rainbow Connection Number* pada graf hasil operasi $P_n + C_n$, $C_n + S_n$, $P_n + W_n$, $C_n + W_n$, $S_n + W_n$ adalah 2. Pada graf hasil operasi $(P_n \square W_m)$ adalah n untuk $m = 3$, $n + 1$ untuk $4 \leq m \leq 6$, $n + 2$ untuk $m \geq 7$. Pada graf hasil operasi $(P_n \otimes C_n)$ adalah n . Pada graf hasil operasi $(P_n[C_m])$ adalah $n - 1$ untuk $n - 1 \geq \frac{m}{2}$, 1 untuk $n - 1 < \frac{m}{2}$ dan $m = 3$, $\frac{m}{2}$ untuk $n - 1 < \frac{m}{2}$ dan m genap, $\frac{m-1}{2} + 1$ untuk $n - 1 < \frac{m}{2}$ dan m ganjil > 3 . Pada graf hasil operasi $(P_n[W_m])$ adalah 3 untuk $n = 3$, $n - 1$ untuk $n \geq 4$. Pada graf hasil operasi $(P_n[S_m])$ adalah 3 untuk $n = 3$, $n - 1$ untuk $n \geq 4$. Pada graf hasil operasi $(Amal(C_n, r) \square P_2)$ adalah $n + 1$. Pada graf hasil operasi $(Amal(P_n, r) \square P_2)$ adalah $2n$. Pada graf hasil operasi $(Amal(W_n, r) \square P_2)$ adalah 4.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai *rainbow connection* pada operasi graf khusus yaitu dari graf lintasan, lingkaran, bintang dan roda, maka peneliti memberikan saran kepada pembaca agar melakukan penelitian tentang *rainbow connection* pada operasi *Joint* $(P_n + C_m, C_n + S_m, P_n + W_m, C_n + W_m, S_n + W_m)$, *Tensor Product* $(P_n \otimes C_m)$, $Amal(C_n, r) \square P_m$, $Amal(P_n, r) \square P_m$, $Amal(C_n, r) \square P_m$ dan graf-graf hasil operasi yang lainnya.

DAFTAR SUMBER RUJUKAN

- Alfarisi, R. and Dafik. (2014). The rainbow connection number of special graphs. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematik FMIPA UNEJ*, **1** No.1:457–461.
- Bloom, G. and Golomb, S. (1977). Applications of numbered undirected graphs. *Proc. IEEE*, 65:562–570.
- Chartrand, G., Kalamazoo, G., Johns, S., Valley, K. A., and McKeon. (2006). Rainbow connection in graphs. *London*, pages 85–98.
- Dafik. (2007). Structural properties and labeling of graphs. *School of Information Technology and Mathematical Sciences University of Ballarat, Australia*, Ph.D Thesis, November:1–140.
- Damayanti, R. T. (2011). Automorfisme graf bintang dan graf lintasan. *Pascasarjana Jurusan Matematika Universitas Brawijaya*, pages 1–97.
- Darmawan, R. N. and Dafik. (2014). Rainbow connection number of prism and product of two graphs. *Seminar Nasional Pendidikan Matematika SENDIK-MAD UAD*, **1** No.1:449–456.
- Figuerola-Centeno, R., Ichishima, R., and Muntaner-Batle, F. (2002). On super edge-magic graph. *Ars Combin.*, 64:81–95.
- Harary, F. (2007). *Graph Theory*. New London: Wesley.
- Harsya, A. Y., Agustin, I. H., and Dafik. (2014). Pewarnaan titik pada operasi graf lintasan, graf sikel dan graf bintang. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematik FMIPA UNEJ*, **1** No.1:498–505.

- Hartsfield, N. and Ringel, G. (1994). Pearls in graph theory. *United Kingdom: Academic Press Limited*, pages 49–60.
- Histamedika, G. (2012). Rainbow connection pada beberapa graf. *Matematika UNAND*, **2**:17–25.
- Kemnitz, A. (2011). Graph with rainbow connection number two. *Technische Universitat Braunschweig*, **31**:313–320.
- Li, X. and Sun, Y. (2012). *Rainbow Connection of Graphs*. Tianjin: Springer Science.
- Nasser, R., Sabar, Ayob, M., Kendall, G., and Qu, R. (2009). Roulette wheel graph colouring for solving examination timetabling problems. *ASAP Research Group, School of Computer Science, The University of Nottingham*, pages 189–205.
- Schiermeyer. (2008). Rainbow connection in graph with minimum degree three. *Matematika Universitas Brawijaya*, 16:432–437.
- Slamin. (2009). *Desain Jaringan: Pendekatan Teori Graf*. Jember: Universitas Jember.
- Syafrizal. (2013). On the rainbow connection for some corona graphs. *Applied Mathematical Sciences*, **7** No.100:4975–4979.
- Wijaya, R. (2013). Bilangan rainbow connection untuk graf komplemen. *Matematika UNAND*, **2**:9–12.
- Yulianti, A. and Dafik. (2014). Rainbow connection number pada operasi graf. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematik FMIPA UNEJ*, **1** No.1:521–525.