



**SUPER (a, d) - \mathcal{H} ANTIMAGIC TOTAL DEKOMPOSISI
PADA AMALGAMASI GRAF KIPAS**

SKRIPSI

Oleh

Khuri Faridatun Nafisah

NIM 101810101033

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER**

2015



**SUPER (a, d) - \mathcal{H} ANTIMAGIC TOTAL DEKOMPOSISI
PADA AMALGAMASI GRAF KIPAS**

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Khuri Faridatun Nafisah

NIM 101810101033

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER**

2015

PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang, serta Sholawat dan salam atas Nabi Muhammad S.A.W, kupersembahkan suatu kebahagiaan penggalan bait dalam perjalanan hidupku teriring rasa terima kasih kepada:

1. orang terhebatku ibunda Luluk Aniqoh dan abah H. Muchsin terima kasih yang senantiasa memberikan cinta kasih, dukungan, semangat, do'a dan tetesan keringat serta air mata yang mengiringi setiap langkahku, juga Adik tersayangku Kuni sabilata anjani terima kasih banyak atas do'a, dukungan dan kasih sayangnya;
2. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si selaku Dosen Pembimbing I dan Prof. Drs. Dafik, M.Sc.,Ph.D. selaku Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan tenaga serta perhatian dalam penulisan skripsi ini;
3. pahlawan tanpa tanda jasaku dari taman Kanak-kanak Dewi Masithoh 12, MI Al-Mujahidi, Mts Al-Mujahidi Tembokrejo-Gumukmas, MAN 2 Jember, dan MIPA UNEJ.

MOTTO

"Mawaddatu ash-shodiqi tadzharu waqta adh-dhiqi-(Kecintaan seorang teman itu akan terlihat pada saat kesulitan)."*)

"Hidup adalah suatu tantangan yang harus dihadapi. Perjuangan yang harus dimenangkan. Kesusahan yang harus diatasi. Rahasia yang harus digali. Tragedi yang harus dialami. Kegembiraan yang harus disebarakan. Cinta yang harus dinikmati. Tugas yang harus dilaksanakan. Romantika yang harus dirangkul. Risiko yang harus diambil. Lagu yang harus dinyanyikan. Anugerah yang harus dipergunakan. Impian yang harus diwujudkan. Perjalanan yang harus diselesaikan. Janji yang harus dipenuhi. Keindahan yang harus dikagumi. Pertanyaan yang harus dijawab. Kesempatan yang harus dipakai. Persoalan yang harus dipecahkan. Kesulitan yang harus dikalahkan. Rahmat yang harus dipelihara dan dicintai."

(Merry Riana)**)

"Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan.
Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan."

(terjemahan QS.Al-Insiroh:5-6)***)

*) <http://mahiratun.blogspot.com/2013/05/pepatah-arab.html>

***) <http://katabijakinspirasiku.blogspot.com/2014/05/100-inspirations-from-merry-riana-kata.html>

***) Departemen Agama Republik Indonesia. 2004. *Al-Qur'an* dan terjemahannya. Bandung. CV Penerbit J-ART

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Khuri Faridatun Nafisah

NIM : 101810101033

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: Super (a, d) - \mathcal{H} Antimagic Total Dekomposisi pada Amalgamasi Graf Kipas adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan hasil karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, April 2015

Yang menyatakan,

Khuri Faridatun Nafisah

NIM. 101810101033

SKRIPSI

**SUPER (a, d) - \mathcal{H} ANTIMAGIC TOTAL DEKOMPOSISI
PADA AMALGAMASI GRAF KIPAS**

Oleh

Khuri Faridatun Nafisah

NIM 101810101033

Dosen Pembimbing 1 : Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si

Dosen Pembimbing 2 : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul Super (a, d) - \mathcal{H} -Antimagic Total Dekomposisi pada Amalgamasi Graf Kipas yang telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam pada:

Hari / tanggal :

Tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji :

Ketua,

Sekretaris,

Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

NIP.19840801 200801 2 006

NIP.19680802 199303 1 004

Anggota I,

Anggota 2,

Drs. Rusli Hidayat, M.Sc.

M. Ziaul Arif, S.Si., M.Sc.

NIP.19661012 199303 1 001

NIP. 19850111 200812 1 002

Mengesahkan,

Dekan

Prof. Drs. Kusno, DEA, Ph.D.

NIP. 19610108 198602 1 001

RINGKASAN

Super (a,d) - \mathcal{H} Antimagic Total Dekomposisi pada Amalgamasi Graf Kipas; Khuri Faridatun Nafisah, 101810101033; 2015: 70 halaman; Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Teori graf pertama kali diperkenalkan pada abad ke-18 oleh matematikawan Swiss yang bernama Leonhard Euler. Teori graf digunakan untuk memecahkan masalah jembatan Königsberg. Salah satu topik yang menarik yaitu pelabelan graf yang diperkenalkan oleh sadlacek (1964), stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970). Pengertian dari pelabelan graf adalah pemetaan atau fungsi dari unsur-unsur graf terhadap himpunan bilangan bulat positif. Gutierrez dan Lladó telah menemukan pelabelan selimut ajaib yang dikembangkan dari pelabelan total ajaib. Mereka mendefinisikannya sebagai Sebuah selimut sisi dari G adalah keluarga dari subgraf-subgraf yang berbeda H_1, \dots, H_k sedemikian sehingga sebarang sisi dari G berada dalam paling sedikit satu dari subgraf-subgraf H_i , $1 \leq i \leq k$. Seiring berkembangnya waktu, Inayah dkk menjelaskan bahwa pelabelan selimut \mathcal{H} -anti ajaib pada graf G adalah fungsi bijektif sehingga membentuk barisan aritmatika $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (t - 1)d\}$. Jika sebuah selimut- \mathcal{H} dari graf G dikatakan memiliki sifat dimana setiap sisi dari graf G termuat tepat satu pada graf H_i untuk $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, maka selimut- \mathcal{H} disebut dekomposisi- \mathcal{H} . Setiap pelabelan graf memiliki batas atas d yang berbeda dan tidak tunggal. Nilai $d \leq s$ dimana d adalah bilangan bulat non-negatif dan s adalah bilangan bulat positif yang merupakan nilai terbesar dari d dari suatu graf.

Pada penelitian ini membahas tentang pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas tunggal dan gabungan saling lepas karena belum pernah ada sebelumnya. Amalgamasi graf kipas juga merupakan perkembangan dari graf kipas. Amalgamasi graf kipas secara umum dinotasikan dengan $amal(F_u, v, n)$ dimana F_u suatu keluarga dari graf kipas dengan jumlah titik u , v adalah titik terminal atau titik pusat dan m merupakan banyaknya graf kipas. Penotasian amalgamasi graf kipas juga bisa dituliskan dengan F_3^n .

Amalgamasi graf kipas tunggal adalah F_3^n dengan $3n + 1$ titik $V(F_3^n) = \{p, x_i, y_i, z_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $5n$ sisi himpunan $V(F_3^n) = \{px_i \cup py_i \cup pz_i \cup x_i y_i \cup x_i z_i; 1 \leq i \leq n\}$. Amalgamasi graf kipas gabungan saling lepas adalah (mF_3^n) dengan m salinan serta himpunan titik $V(mF_3^n) = \{p^j, x_i^j, y_i^j, z_i^j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan himpunan sisi $E(mF_3^n) = \{px_i^j \cup py_i^j \cup pz_i^j \cup x_i^j y_i^j \cup x_i^j z_i^j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$.

Metode penelitian yang digunakan adalah Metode deduktif aksiomatik, yaitu dengan menurunkan beberapa aksioma dan teorema yang sudah ada. langkah awal yang dilakukan adalah menentukan atau menghitung nilai d (nilai beda) pada amalgamasi graf kipas. Selanjutnya merumuskan pola pelabelan menggunakan metode pendeteksian pola (*pattern recognition*) yaitu menentukan perumusan pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total dekomposisi. Batas atas pada penelitian ini adalah $d \leq 37$ dengan menggunakan **Lemma 4.1.1** yaitu:

Lemma 4.1.1 *Jika graf F_3^n adalah super $(a, d) - F_3$ antimagic total dekomposisi maka*

$$d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s - 1}$$

untuk $s = |H_i|$, $p_G = |V|$, $q_G = |E|$, $p_H = |V'|$, $q_H = |E'|$

Sehingga di peroleh teorema-teorema baru sebagai berikut:

1. **Teorema 4.1.1** *Ada super $(32n + 13, 0)$ - F_3 antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$;*
2. **Teorema 4.1.2** *Ada super $(31n + 14, 2)$ - F_3 antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$;*
3. **Teorema 4.1.3** *Ada super $(310n + 15, 4)$ - F_3 antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$;*
4. **Teorema 4.1.4** *Ada super $(29n + 16, 6)$ - F_3 antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$;*
5. **Teorema 4.1.5** *Ada super $(28n + 17, 8)$ - F_3 antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$;*
6. **Teorema 4.1.6** *Ada super $(30n + 15, 10)$ - F_3 antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$;*

7. **Teorema 4.1.7** *Ada super $(26n + 19, 12)$ - F_3 antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$;*
8. **Teorema 4.1.8** *Ada super $(25n + 20, 14)$ - F_3 antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$;*
9. **Teorema 4.1.9** *Ada super $(24n + 21, 16)$ - F_3 antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$;*
10. **Teorema 4.1.10** *Ada super $(23n + 22, 18)$ - F_3 antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$;*
11. **Teorema 4.1.11** *Ada super $(22n + 23, 20)$ - F_3 antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$;*
12. **Teorema 4.1.12** *Ada super $(21n + 24, 22)$ - F_3 antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$;*
13. **Teorema 4.1.13** *Ada super $(20n + 25, 24)$ - F_3 antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$;*
14. **Teorema 4.1.14** *Ada super $(19n + 26, 26)$ - F_3 antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$;*
15. **Teorema 4.1.15** *Ada super $(18n + 27, 28)$ - F_3 antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$;*
16. **Teorema 4.1.16** *Ada super $(20n + 25, 30)$ - F_3 antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$;*
17. **Teorema 4.1.17** *Ada super $(15n + 30, 34)$ - F_3 antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$;*
18. **Teorema 4.2.1** *Ada gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas mF_3^n memiliki super $(30nm + \frac{17m+13}{2}, 4)$ - F_3 antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$ dimana m ganjil;*

19. **Teorema 4.2.2** *Ada gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas mF_3^n memiliki super $(29nm + \frac{17m+15}{2}, 6)$ - F_3 antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$ dimana m ganjil.*

Dari kajian diatas ada beberapa pelabelan yang belum ditemukan sehingga dalam penelitian ini diajukan open problem.

1. **Masalah Terbuka 4.5.1** *Super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$ dengan $d \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 32, 33, 35, 36, 37\}$.*
2. **Masalah Terbuka 4.5.2** *Super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total dekomposisi pada gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas mF_3^n , dengan $n \geq 2$, $m \geq 3$ dan m ganjil untuk $d \leq 37$ kecuali $d \in \{4, 6\}$.*
3. **Masalah terbuka 4.5.3** *Super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total dekomposisi pada gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas mF_3^n , dengan $n \geq 2$, $m \geq 2$ dan m genap untuk $d \leq 37$.*

KATA PENGANTAR

Puja dan puji syukur ke hadirat Allah Swt atas segala rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul Super (a, d) - \mathcal{H} Antimagic Total Dekomposisi Pada Amalgamasi Graf Kipas. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan, waktu, bimbingan dan dukungan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing I dan Prof. Drs. Dafik, M.Sc.,Ph.D. selaku Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan tenaga serta perhatian dalam penulisan skripsi ini;
4. Drs. Rusli Hidayat, M.Sc. selaku Dosen Penguji I dan M. Ziaul Arif, S.Si., M.Sc. selaku Dosen Penguji II;
5. segenap dosen dan karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
6. dua orang terhebatku ibunda Luluk Aniqoh dan abah H. Muchsin terima cinta kasih yang senantiasa memberikan cinta kasih, dukungan, semangat, do'a dan tetesan keringat serta air mata yang mengiringi setiap langkahku, juga Adik tersayangku Kuni sabilata anjani terima kasih banyak atas do'a, dukungan dan kasih sayangnya;
7. Nur asia jamil, persahabatan kita adalah selamanya dan kenangan yang tak terlupakan.

8. para pejuang graf: chepa, ica, karin, fia, diana, hendry, putri.HP, sari, nika, anang, ipeh dan semuanya, yang selalu memberi dukungan untuk terus maju dan tetap semangat;
9. keluarga besar MATHGIC 2010, terima kasih telah menjadi keluarga bagiku;
10. Almamater tercinta dari Taman Kanak-kanak Dewi Masithoh 12, MI Al-Mujahidi Tembokrejo-Gumukmas, Mts Al-Mujahidi Tembokrejo-Gumukmas, MAN 2 Jember, dan MIPA UNEJ;
11. semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dorongan dan semua yang beliau-beliau berikan dapat menjadi nilai ibadah dan amal baik oleh dan di ganjar balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, April 2015

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSEMBAHAN	ii
HALAMAN MOTTO	iii
HALAMAN PERNYATAAN	iv
HALAMAN PENGESAHAN	vi
RINGKASAN	vii
PRAKATA	xi
DAFTAR ISI	xiv
DAFTAR GAMBAR	xvi
DAFTAR TABEL	xvii
DAFTAR LAMBANG	xviii
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan Penelitian	4
1.5 Manfaat Penelitian	4
2 TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Definisi Graf dan Terminologi Graf	5
2.2 Amalgamasi	10
2.3 Fungsi dan Barisan Aritmatika	10
2.4 Jenis Graf Khusus	12
2.5 Pelabelan Graf	14
2.5.1 Definisi Pelabelan Graf	14
2.5.2 Pelabelan Selimut \mathcal{H}	15
2.5.3 Pelabelan Dekomposisi- \mathcal{H}	16
2.6 Aplikasi Graf Pada Pembentukan <i>Password</i>	16
2.7 Hasil-hasil Pelabelan Super (a, d) - \mathcal{H} -Antimagic Total Dekomposisi	17
3 METODE PENELITIAN	19

3.1	Metode Penelitian	19
3.2	Definisi Operasional	19
3.2.1	Pelabelan Super $(a, d) - \mathcal{H}$ Total Dekomposisi	19
3.2.2	Amalgamasi Graf Kipas F_3^n	20
3.2.3	Gabungan Saling Lepas Amalgamasi Graf Kipas mF_3^n	20
3.3	Teknik Penelitian	20
4	HASIL DAN PEMBAHASAN	24
4.1	Pelabelan Super $(a, d) - \mathcal{H}$ -Antimagic Total Dekomposisi pada Amalgamasi Graf Kipas Konektif	24
4.2	Pelabelan Super $(a, d) - \mathcal{H}$ Antimagic Total Dekomposisi pada Amalgamasi Graf Kipas Diskonektif	56
4.3	Pembahasan	63
5	KESIMPULAN DAN SARAN	68
5.1	Kesimpulan	68
5.2	Saran	68
	DAFTAR PUSTAKA	69

DAFTAR GAMBAR

2.1	Contoh Graf	5
2.2	(G_1) Graf sederhana dan (G_2) Graf yang memiliki loop dan sisi rangkap	6
2.3	(G_1) Graf tak Berarah dan (G_2) Graf Berarah	6
2.4	Ilustrasi Jalan, Lintasan, Jejak, Sikel	7
2.5	Contoh Graf dan Subgrafnya	8
2.6	Keisomorfisan Graf	9
2.7	Matriks Ketetanggaan	9
2.8	(a) Fungsi Injektif, (b) Fungsi Surjektif, (c) Fungsi Bijektif	11
2.9	Graf Kipas F_3	13
2.10	Amalgamasi Graf kipas $Amal(F_3, v, n)$	13
2.11	Graf Roda W_8	13
2.12	Graf Bintang S_8	14
2.13	Graf Book $B_{3,2}$	14
2.14	(1) Pelabelan Titik, (2) Pelabelan Sisi, (3) Pelabelan Total	16
2.15	Representasi Graf	17
2.16	Pelabelan Dekomposisi pada Amalgamasi Graf Kipas	18
3.1	Amalgamasi Graf Kipas F_3^5 Konektif	20
3.2	Amalgamasi Graf Kipas $3F_3^5$ Disonektif	21
3.3	<i>Flowchart</i> super (a, d) - \mathcal{H} total dekomposisi	23
4.1	Jumlah titik dan sisi pada $F_3^2(a)$, $F_3^3(b)$, $F_3^4(c)$	26
4.2	Super $(32n + 13, 0) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5 . .	31
4.3	Super $(31n + 14, 2) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5 . .	32
4.4	Super $(30n + 15, 4) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5 . .	34
4.5	Super $(29n + 16, 6) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5 . .	35
4.6	Super $(28n + 17, 8) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5 . .	37
4.7	Super $(30n + 15, 10) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5 .	39
4.8	Super $(26n + 19, 12) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5 .	41

4.9	Super $(25n + 20, 14) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5	. 42
4.10	Super $(24n + 21, 16) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5	. 44
4.11	Super $(23n + 22, 18) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5	. 45
4.12	Super $(22n + 23, 20) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5	. 47
4.13	Super $(21n + 24, 22) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5	. 49
4.14	Super $(20n + 25, 24) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5	. 50
4.15	Super $(19n + 26, 26) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5	. 52
4.16	Super $(18n + 27, 28) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5	. 53
4.17	Super $(20n + 25, 30) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5	. 55
4.18	Super $(15n + 30, 34) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5	. 56
4.19	Super $(30nm + \frac{17m+13}{2}, 4) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada gabungan saling lepas $5F_3^5$ 62
4.20	Super $(29nm + \frac{17m+15}{2}, 6) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada gabungan saling lepas $5F_3^5$ 65

DAFTAR TABEL

2.1 Hasil Penelitian super (a, d) - F_3 Antimagic Total Dekomposisi . . . 18



DAFTAR LAMBANG

G	=	Graf G
$G(V, E)$	=	Sebarang graf tak berarah dengan V adalah himpunan tak kosong dari semua titik dan E adalah himpunan sisi
v_n	=	Titik ke- n pada suatu graf
e_n	=	Sisi ke- n dari suatu graf
$ V(G) $	=	Himpunan titik dari graf G yang disebut <i>order</i>
$ E(G) $	=	Himpunan sisi dari graf G yang disebut ukuran (<i>size</i>)
$\mathcal{H}AVD$	=	\mathcal{H} <i>antimagic vertex decomposition</i> atau pelabelan titik \mathcal{H} antiajaib dekomposisi
$\mathcal{S}HATD$	=	<i>Super \mathcal{H} antimagic total decomposition</i> atau super (a, d) - \mathcal{H} antiajaib total dekomposisi
d	=	Nilai beda barisan bobot total dekomposisi pada $\mathcal{S}HATD$
a	=	Bobot total selimut terkecil yang merupakan suku pertama barisan
F_3^n	=	Simbol amalgamasi graf kipas, dimana n adalah banyaknya selimut pada amalgamasi graf kipas
mF_3^n	=	simbol Gabungan amalgamasi graf kipas, dimana m adalah jumlah salinan dari graf, n adalah banyaknya selimut pada graf
p	=	Titik terminal pada amalgamasi graf kipas
x_i	=	Titik ke- i pada bagian kiri amalgamasi graf kipas
y_i	=	Titik ke- i pada bagian tengah amalgamasi graf kipas
z_i	=	Titik ke- i pada bagian kanan amalgamasi graf kipas
p^j	=	Titik terminal dalam komponen ke- j pada amalgamasi graf kipas
x_i^j	=	Titik ke- i dalam komponen ke- j pada bagian kiri amalgamasi graf kipas
y_i^j	=	Titik ke- i dalam komponen ke- j pada bagian tengah amalgamasi graf kipas

- z_i^j = Titik ke- i dalam komponen ke- j pada bagian kanan amalgamasi graf kipas
- $f(p)$ = Fungsi bijektif pelabelan titik p pada amalgamasi graf kipas
- $f(x_i)$ = Fungsi bijektif pelabelan titik x pada amalgamasi graf kipas
- $f(y_i)$ = Fungsi bijektif pelabelan titik y pada amalgamasi graf kipas
- $f(z_i)$ = Fungsi bijektif pelabelan titik z pada amalgamasi graf kipas
- w_f = Bobot dekomposisi pada amalgamasi graf kipas
- $f(px_i)$ = Fungsi bijektif pelabelan sisi p ke- x pada amalgamasi graf kipas
- $f(x_iy_i)$ = Fungsi bijektif pelabelan sisi x ke- y pada amalgamasi graf kipas
- $f(y_iz_i)$ = Fungsi bijektif pelabelan sisi y ke- z pada amalgamasi graf kipas
- $f(pz_i)$ = Fungsi bijektif pelabelan sisi p ke- z pada amalgamasi graf kipas
- $f(py_i)$ = Fungsi bijektif pelabelan sisi p ke- y pada amalgamasi graf kipas
- W_f = Bobot total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Menurut sejarah, teori graf pertama kali diperkenalkan pada abad ke-18 tepatnya pada tahun 1736 oleh ahli matematika asal Swiss yang bernama Leonhard Euler. Teori graf digunakan untuk memecahkan masalah jembatan Königsberg, yang terletak di kota Königsberg sebelah timur Prussia (sekarang bernama Kaliningrad), Jerman. Disana terdapat Pregal yang bercabang menjadi dua anak sungai yang mengalir mengelilingi pulau Kneiphof. Terdapat tujuh jembatan yang menghubungkan antar daratan. Masalah jembatan Königsberg yaitu apakah mungkin seseorang dapat melewati ke-tujuh jembatan yang masing-masing dilalui tepat satu kali, dan kembali lagi ke tempat semula. Dilihat dari sini Euler adalah orang yang berhasil memecahkannya dengan pembuktian sederhana yaitu dengan memodelkan kedalam sebuah graf. Daratan dipresentasikan dengan menggunakan noktah atau titik dan tiap-tiap jembatan dipresentasikan menggunakan garis atau sisi.

Dalam teori graf terdapat banyak topik salah satunya adalah masalah pelabelan graf. Pelabelan graf diperkenalkan pertama kali oleh Sadhana (1964), Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1967). Pengertian dari pelabelan graf adalah pemetaan atau fungsi dari unsur-unsur graf terhadap himpunan bilangan bulat positif. Unsur-unsur graf yang dimaksud adalah titik (*vertex*) dan sisi (*edge*), sedangkan bilangan bulat positif tersebut dinamakan dengan label. Berdasarkan elemen-elemen yang dilabeli, pelabelan graf dibedakan menjadi 3 yaitu jika domainnya adalah himpunan titik maka disebut pelabelan titik (*vertex labeling*), sedangkan jika domainnya adalah himpunan sisi maka disebut pelabelan sisi (*edge labeling*), dan jika himpunan domainnya adalah titik dan sisi maka disebut pelabelan total (*total labeling*). Berdasarkan elemen-elemennya pelabelan berkembang menjadi pelabelan ajaib dan pelabelan anti ajaib. Pelabelan ajaib adalah jika semua sisi mempunyai bobot yang sama. Pelabelan ajaib ini diperkenalkan oleh

Kotzig dan Rosa sebagai M -(*valuation*) pada tahun 1970. Sedangkan pelabelan anti ajaib adalah mempunyai bobot sisi yang berbeda dan membentuk barisan aritmatika dengan a sebagai suku pertama dan d sebagai batas atasnya. Suatu pelabelan dikatakan pelabelan super adalah apabila label-label terkecilnya berada pada label-label titiknya.

Gutierrez dan Lladó menemukan pelabelan selimut ajaib (*magic cover labeling*) yang dikembangkan dari pelabelan total ajaib (*magic total labeling*). Mereka mendefinisikan bahwa suatu graf G dikatakan memiliki pelabelan selimut ajaib jika sisi dari graf G termuat paling sedikit satu dari subgraf-subgraf H_i yang isomorfik dengan graf G . Dalam hal ini H_i merupakan subgraf dari graf G . Oleh Inayah(et al.) kemudian dikembangkan suatu pelabelan selimut \mathcal{H} -anti ajaib, dengan penjelasan bahwa suatu pelabelan selimut \mathcal{H} -anti ajaib pada graf G adalah sebuah fungsi bijektif sehingga terdapat jumlahan yang merupakan barisan aritmatika $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (t - 1)d\}$. Jika sebuah selimut- \mathcal{H} dari graf G dikatakan memiliki sifat dimana setiap sisi dari graf G termuat tepat satu pada graf H_i untuk $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ dengan kata lain tidak ada pemakaian sisi secara berulang pada setiap selimut, maka suatu selimut- \mathcal{H} disebut dekomposisi- \mathcal{H} atau disebut graf G terdekomposisi atas \mathcal{H} . Setiap pelabelan graf memiliki batas atas d yang berbeda dan tidak tunggal. Nilai $d \leq s$ dimana d adalah bilangan bulat non-negatif dan s adalah bilangan bulat positif yang merupakan nilai terbesar dari d dari suatu graf. Tujuan menentukan batas atas d yaitu untuk mengetahui nilai d maksimum dalam mencari pelabelan pelabelan $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic total dekomposisi.

Hasil-hasil pelabelan dekomposisi yang sudah ditemukan antara lain oleh Inayah (2013) adalah pelabelan dekomposisi (a, d) - SF_4 -anti ajaib super pada graf belenggu $Shack(F_4, n)$ dan pelabelan dekomposisi (a, d) - P_4 -anti ajaib super pada graf prisma $C_n \times P_m$. Super (a, d) - H Total Dekomposisi dari Graf Helm H_n oleh Rosyidah dan dafik (2014). Am-supermagic decomposition of the Cartesian product of a path and a sun graph oleh Hader(2013). Pada penelitian ini peneliti membahas tentang super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total dekomposisi pada amalgamsi graf kipas tunggal dan gabungan saling lepas karena belum pernah ada se-

belumnya. Amalgamasi graf kipas juga merupakan perkembangan dari graf kipas. Amalgamasi graf kipas secara umum dinotasikan dengan $amal(F_u, v, n)$ dimana F_t suatu keluarga dari graf kipas dengan jumlah titik u , v adalah titik terminal atau titik pusat dan m merupakan banyaknya graf kipas. Penotasian amalgamasi graf kipas juga bisa dituliskan dengan F_3^n . Oleh karena itu, peneliti mengembangkan pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas. Amalgamasi graf kipas merupakan operasi graf dari graf kipas yang saat ini masih belum ditemukan pelabelannya.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang ditulis di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini yaitu.

- a. Berapa batas atas super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total dekomposisi pada Amalgamasi graf kipas konektif dan diskonektif?
- b. Bagaimana fungsi bijektif super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total dekomposisi pada Amalgamasi graf kipas konektif dan diskonektif?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah digunakan karena untuk menghindari terjadinya perluasan masalah. Sehingga batasan yang digunakan pada penelitian ini adalah sebagai berikut.

- a. Graf berhingga yang sederhana, yaitu graf yang tidak mempunyai loop dan sisi ganda (paralel).
- b. Super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas tunggal disimbolkan dengan $amal(F_3, v, n)$ atau F_3^n dengan $n \geq 2$ dan n adalah bilangan asli.
- c. Super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas gabungan saling lepas disimbolkan dengan mF_3^n dengan $n \geq 2$ dan m adalah bilangan ganjil dimana $m \geq 3$.

1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan latar belakang dan rumusan masalah yang telah dikemukakan sebelumnya, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

- a. Menentukan batas atas super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas konektif dan diskonektif.
- b. Menentukan fungsi bijektif super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas konektif dan diskonektif.

1.5 Manfaat Penelitian

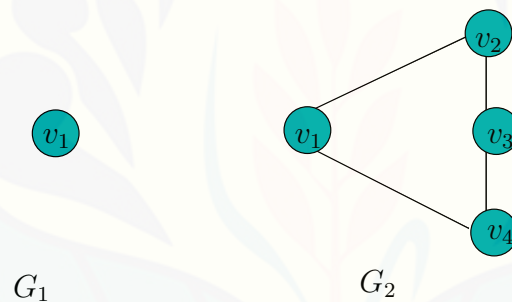
Manfaat yang dapat diambil dari hasil penelitian ini adalah.

- a. Menambah pengetahuan baru dalam ilmu teori graf mengenai dekomposisi pada amalgamasi graf kipas.
- b. Sebagai referensi bagi peneliti lainnya untuk meneliti pada jenis graf yang lainnya.
- c. Hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan atau perluasan ilmu dan aplikasi dalam masalah super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total dekomposisi.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Definisi Graf dan Terminologi Graf

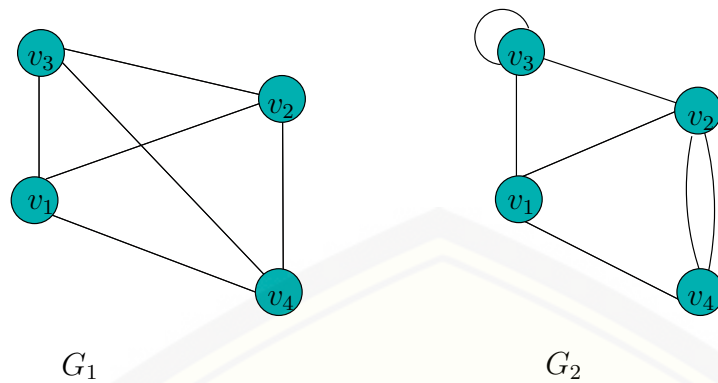
sebuah graf (G) adalah pasangan himpunan (V, E) dimana (V) himpunan tidak kosong, dan (E) himpunan boleh kosong dari pasangan tidak terurut elemen (V) . Elemen (V) disebut (*vertices*) atau titik dari G dan elemen-elemen dari (E) disebut (*edges*) atau sisi dari G (Hartsfield dan Ringel, 1994). Sehingga dalam sebuah graf harus ada titik (*vertex*) minimal satu sedangkan untuk sisi (*edge*) tidak ada jumlah minimal sehingga boleh kosong. Jadi satu titik (*vertex*) saja sudah dapat dikatakan sebagai graf. Sedangkan titik-titik (*vertices*) ini berkelompok dan membentuk suatu himpunan titik tanpa sisi maka disebut graf kosong (*Null Graph*).



Gambar 2.1 Contoh Graf

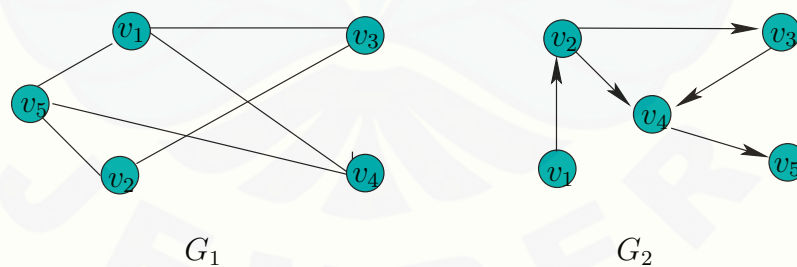
Sebuah graf G dinamakan graf sederhana apabila tidak mempunyai *loop*, yaitu sisi yang menghubungkan titik dengan dirinya sendiri dan sisi rangkap, yaitu dua atau lebih sisi yang menghubungkan dua titik. Dapat dilihat pada gambar 2.2, gambar (G_1) adalah graf sederhana yang tidak memiliki *loop* dan sisi rangkap, sedangkan untuk graf (G_2) adalah graf yang memiliki *loop* dan sisi paralel atau rangkap.

Derajat (*degree*) dari titik v di graf G dinotasikan dengan $d(v)$ atau $deg(v)$ adalah jumlah sisi yang berhubungan dengan v . Derajat total graf G adalah jumlah derajat semua titik dalam G . Jumlah derajat dari graf G selalu berjumlah



Gambar 2.2 (G_1) Graf sederhana dan (G_2) Graf yang memiliki loop dan sisi rangkap

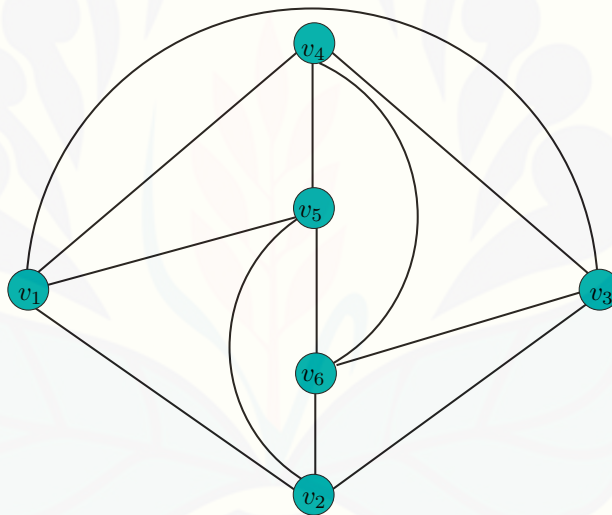
genap. Titik yang berderajat genap sering disebut (*titik Genap*) dan (*titik ganjil*) untuk titik berderajat ganjil. Titik yang berderajat satu disebut titik ujung (Chartrand dan Lesniak, 1986). Jika pada graf G terdapat titik yang mempunyai derajat nol, maka titik tersebut dinamakan titik terasing atau titik terisolasi (*isolated vertex*). Sedangkan jika ada titik yang berderajat 1 disebut titik bandul (*pendant*). Jika setiap titiknya memiliki jumlah derajat yang sama maka dinamakan graf reguler (dafik dkk, 2009). Contoh graf reguler dapat dilihat pada Gambar 2.4. Jika dilihat berdasarkan orientasi arah sisi maka graf dapat dikelompokkan menjadi dua jenis yaitu graf yang sisi-sisinya diberikan orientasi arah (biasanya menggunakan anak panah) dinamakan graf berarah (*directed graph*) dan graf yang tak mempunyai orientasi arah dinamakan graf tak berarah (*undirected graph*). Sebagai contoh, gambar 2.3 merupakan graf tak berarah dan graf berarah.



Gambar 2.3 (G_1) Graf tak Berarah dan (G_2) Graf Berarah

jalan (*walk*) pada graf G adalah barisan berhingga bergantian dari titik dan sisi yang diawali dan diakhiri dengan titik dengan syarat setiap sisi menem-

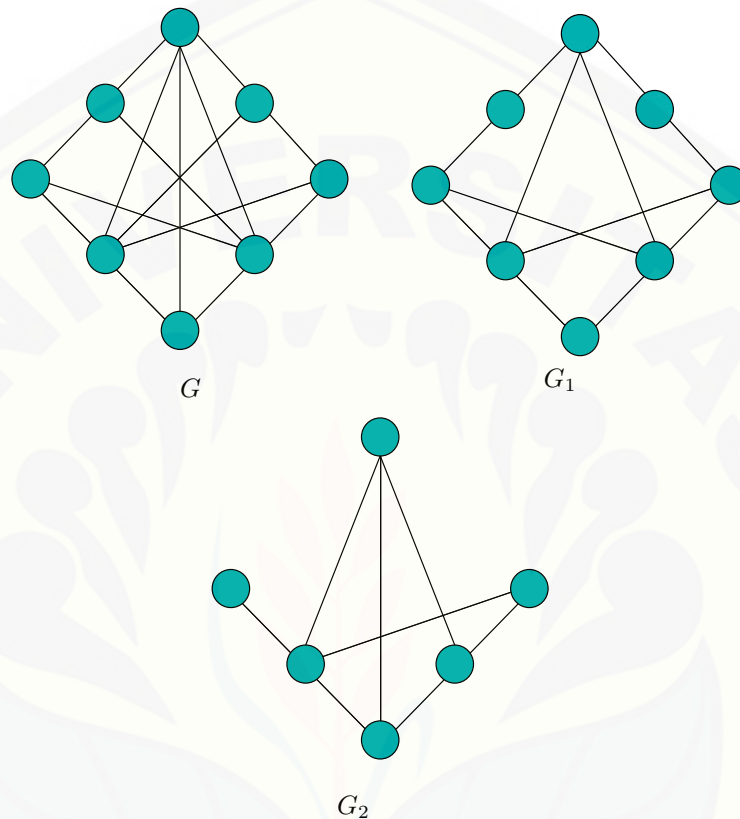
pel pada dua titik yang tidak sama (Hartsfield dan Ringel, 1994). Jalan dibedakan menjadi dua yaitu jika titik awal dan akhirnya berbeda dinamakan jalan terbuka (*open walk*), sedangkan jalan yang titik awal dan akhirnya sama dinamakan jalan tertutup (*closed walk*). Suatu jalan (*walk*) yang semua titik berbeda kecuali pada titik awal dan akhirnya dinamakan lintasan (*path*). Sedangkan jika suatu jalan yang setiap sisinya berbeda disebut jejak (*trail*). Tidak semua (*trail*) merupakan (*path*), tetapi semua (*path*) merupakan (*trail*). Jika suatu jejak yang semua titik-titiknya berbeda dan diawali serta diakhiri dengan titik yang sama maka dinamakan siklus (*cycle*). Diameter dari sebuah graf G adalah jarak terpanjang antara dua titik sembarang. Grith dari graf G adalah panjang siklus terpendek. Gambar 2.4 menunjukkan bahwa $(v_1, v_5, v_6, v_2, v_5, v_4, v_3)$ adalah jalan, $(v_1, v_4, v_3, v_6, v_2)$ adalah jejak, dan $(v_1, v_4, v_3, v_6, v_2, v_5)$ adalah lintasan, serta $(v_1, v_4, v_3, v_2, v_6, v_5, v_1)$ adalah siklus. Mempunyai diameter 2 dan grith 3.



Gambar 2.4 Ilustrasi Jalan, Lintasan, Jejak, Sikel

Sebuah graf G dikatakan bertetangga (*adjacent*) jika terdapat sebuah sisi e yang menghubungkan dua titik v_1 dan v_2 atau dapat dinotasikan dengan $e = (v_1, v_2) \in E(G)$ dan dikatakan bahwa titik v_1 atau v_2 bersisian (*incident*) dengan sisi e jika titik tersebut menempel pada e . Sebuah titik v_1 (*incident*) dengan sebuah sisi e jika v_1 merupakan titik ujung dari sisi e , demikian juga e (*incident*) dengan v_1 ketika v_1 merupakan titik ujung dari e .

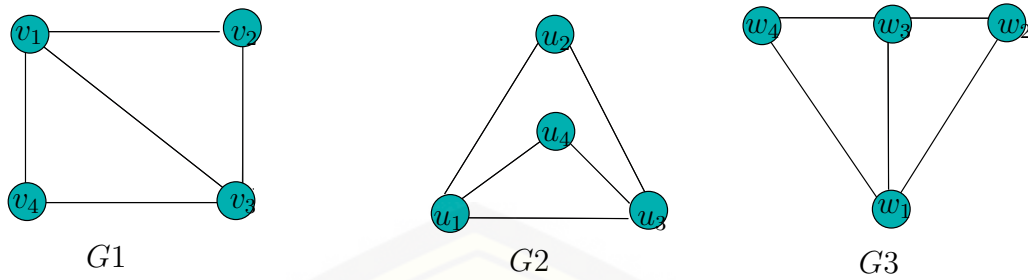
Sebuah graf H dikatakan sebagai subgraf dari G jika setiap titik dan sisi dari graf H adalah titik dan sisi dari graf G . Sehingga dapat dinotasikan dengan $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. *Spanning subgraf* dari graf G adalah subgraf H dari graf G jika H berisi semua titik dari G . Dengan kata lain, $V(H) = V(G)$. Pada ambar 2.5 merupakan contoh graf dengan subgrafnya.



Gambar 2.5 Contoh Graf dan Subgrafnya

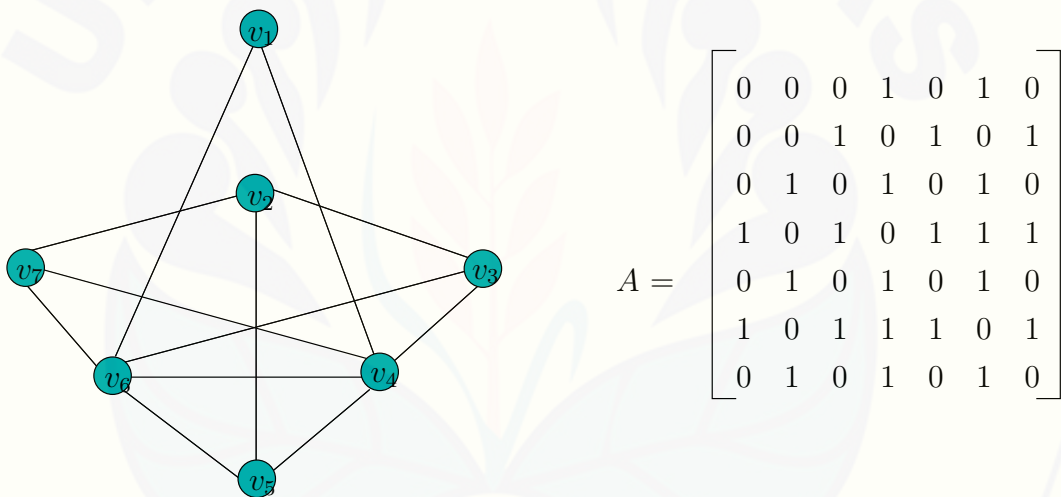
Dua graf G_1 dan G_2 dengan n -titik dikatakan isomorfis jika terdapat pemetaan satu-satu oleh fungsi $f : v(G_1) \rightarrow v(G_2)$ yang menyajikan semua sifat ketetanggaan, yaitu $f(u)$ dan $f(v)$ pada G_2 bertetangga jika dan hanya jika u dan v pada G_1 bertetangga (Hartsfield dan Ringel, 1994). Secara bentuk gambar, G_1 dan G_2 dikatakan isomorfis jika keduanya dapat disusun dengan cara sedemikian rupa sehingga tampak identik atau tidak merubah ketetanggaan. Gambar 2.6 merupakan contoh graf yang isomorfis.

Suatu graf dapat dinyatakan menggunakan bentuk matriks, sehingga perhi-



Gambar 2.6 Keisomorfisan Graf

tungan-perhitungan yang diperlukan dapat dilakukan dengan mudah. Misalkan G adalah sebuah graf dengan titik-titik $v(G) = v_1, v_2, \dots, v_n$ dan sisi-sisi $e(G) = e_1, e_2, \dots, e_n$. Misal $A = [a_{ij}]$ adalah matriks berordo $n \times n$, maka $a_{ij} = 1$ jika titik v_i dan v_j bertetangga, sedangkan $a_{ij} = 0$ jika titik v_i dan v_j tidak bertetangga. Gambar 2.7 adalah contoh graf dan matriks ketetangannya.



Gambar 2.7 Matriks Ketetanggaan

Jika setiap (u, v) dalam himpunan $V(G)$ ada lintasan dari u dan v maka disebut graf terhubung (*connected graph*). Namun sebaliknya, jika tidak ada lintasan dari u dan v maka dinamakan graf tak terhubung (*disconnected graph*). Chartrand dan Oellermann (1993) mendefinisikan Gabungan dari G_1 dan G_2 dinotasikan dengan $G_1 \cup G_2$ adalah graf dengan titik $V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan sisi $E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2)$. Jika graf G merupakan gabungan dari m

komponen graf G yang identik, maka gabungan graf G dapat dinotasikan sebagai mG . Jenis graf tersebut juga dinamakan graf diskonektif dan dikenal dengan graf yang mempunyai m komponen, dimana setiap komponennya adalah graf G .

2.2 Amalgamasi

Carlos mendefinisikan amalgamasi-titik dari graf sebagai berikut. Misalkan H_i adalah suatu keluarga graf berhingga dan setiap H_i mempunyai suatu titik (v_{0i}) yang disebut titik terminal. Amalgamasi-titik dinotasikan dengan (H_i, v_{0i}) dimana dibentuk oleh semua H_i dengan cara merekatkan seluruh titik terminalnya menjadi satu titik. Sehingga Amalgamasi-titik dinotasikan dengan $Amal(H, v, k)$ dimana k adalah suatu bilangan bulat positif. Selanjutnya, dengan cara yang serupa, jika terminalnya berupa suatu sisi, maka amalgamasi tersebut dinamakan amalgamasi-sisi yang dinotasikan dengan $Amal(H, e, k)$. Jika terminalnya adalah suatu subgraf terhubung taktrivial, maka amalgamasi tersebut dinamakan amalgamasi subgraf dinotasikan dengan $Amal(H, S, k)$. Di namakan titik terminal jika salah satu titik dari subgraf H_i direkatkan menjadi satu titik. Selanjutnya penotasian amalgamasi graf kipas juga bisa dituliskan dengan (F_3^n) dimana F_3 adalah \mathcal{H} atau selimutnya dan n adalah banyaknya F_3 .

2.3 Fungsi dan Barisan Aritmatika

Suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B didefinisikan sebagai aturan yang memetakan setiap anggota himpunan A kepada anggota himpunan B . Himpunan A dinamakan sebagai daerah asal (*domain*) dan himpunan B dinamakan sebagai daerah kawan (*kodomain*). Sedangkan daerah hasil pemetaan dinamakan *range*. Pemetaan suatu fungsi dari himpunan A ke himpunan B dinotasikan dengan $f : A \longrightarrow B$.

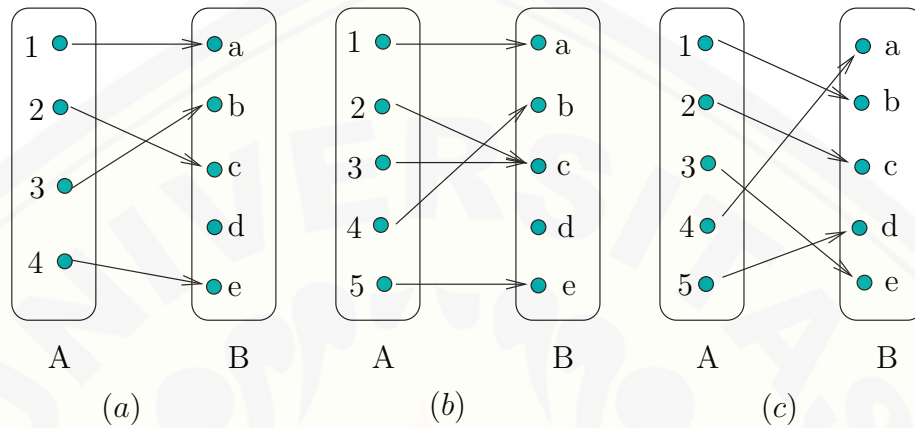
Jenis-jenis fungsi Antara lain sebagai berikut:

1. Fungsi injektif $f: A \rightarrow B$ atau disebut juga fungsi satu-satu jika dan hanya jika untuk setiap a_1 dan $a_2 \in A$ dengan $a_1 \neq a_2$ maka berlaku $f(a_1) \neq f(a_2)$.
2. Fungsi surjektif $f: A \rightarrow B$ atau disebut juga fungsi kepada jika dan hanya jika untuk setiap $b \in B$ terdapat paling tidak satu $a \in A$ maka berlaku

$$f(a) = b.$$

3. Fungsi bijektif $f: A \rightarrow B$ disebut fungsi bijektif jika dan hanya jika fungsi f merupakan fungsi injektif sekaligus surjektif.

Gambar 2.8 adalah (a) Fungsi injektif, (b) Fungsi surjektif, (c) Fungsi bijektif



Gambar 2.8 (a) Fungsi Injektif, (b) Fungsi Surjektif, (c) Fungsi Bijektif

Barisan bilangan dengan selisih antara suku-suku yang berurutan tetap disebut barisan aritmatika. Barisan ini dibentuk dengan cara menambah atau mengurangi suku sebelumnya dengan suatu bilangan tetap. Selisih bilangan tersebut aritmatika tersebut dinamakan dengan beda yang dinotasikan dengan d .

Berdasarkan beda d pada barisan aritmatika dapat dibedakan menjadi dua yaitu barisan aritmatika naik dan barisan aritmatika turun. Suatu barisan dapat dikatakan barisan aritmatika jika selisih setiap suku-suku yang berurutan selalu konstan atau tetap. $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n, U_{n+1}$ disebut Barisan aritmatika jika $U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = \dots = U_n - U_{n-1} = U_{n+1} - U_n = \text{konstanta} = d$.

Pasangan suku-suku berurutan pada barisan aritmetika memiliki beda yang sama, sehingga akan mendapatkan kondisi sebagai berikut :

$$U_1 = U_1$$

$$U_2 = U_1 + d$$

$$U_3 = U_1 + 2d$$

$$U_4 = U_1 + 3d$$

$$\vdots$$

$$U_n = U_1 + d(n - 1)$$

Contoh barisan aritmatika adalah sebagai berikut:

1. 3, 6, 9, 12, ...
2. 100, 95, 90, 85, ...

Contoh barisan aritmatika yang pertama mempunyai beda $d = 3$ dan suku awal $a = 3$ sedangkan untuk contoh barisan yang kedua mempunyai beda $d = -5$ dan suku awal $a = 100$.

2.4 Jenis Graf Khusus

Graf khusus adalah graf yang tidak isomorfis dengan graf lain dan bentuknya dapat diperluas sampai orde n tetapi simetris. Berikut terdapat definisi beberapa graf sederhana khusus, diantaranya:

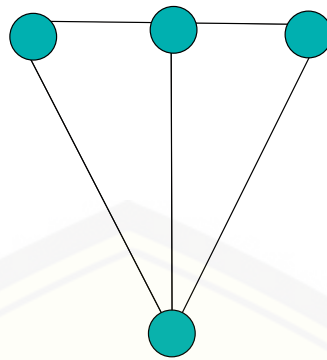
1. Graf kipas (*Fan Graph*)

Graf kipas dinotasikan dengan F_n dimana $n \geq 2$ adalah graf yang didapat dengan menghubungkan semua titik dari graf lintasan P_n pada suatu titik yang disebut pusat (Baca dkk., 2007:1235). Jadi, F_n terdiri dari $n + 1$ titik dan $2n - 1$ sisi. Contoh gambar dari graf kipas dapat dilihat pada Gambar 2.9.

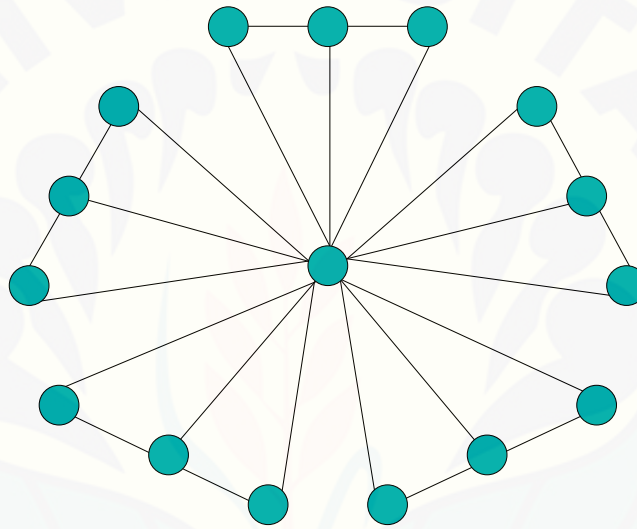
Amalgamasi graf Kipas dinotasikan dengan F_3^n dimana $n \geq 2$ adalah sebuah graf yang diperoleh dari suatu graf kipas F_t berhingga yang setiap F_t mempunyai suatu titik pusat. Gambar 2.10 merupakan amalgamasi graf kipas.

2. Graf Roda (*wheel Graph*)

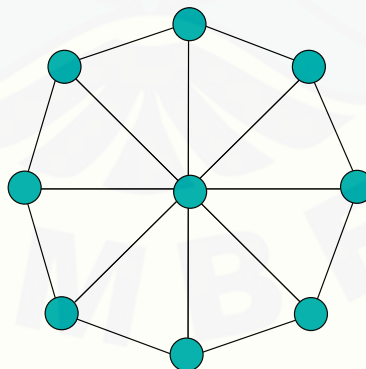
Graf roda dinotasikan dengan W_n dimana $n \geq 3$ adalah graf yang dibentuk dari graf siklus C_n dan satu titik yang disebut titik pusat yang bertetangga dengan semua titik di siklus C_n (Galian, 2009). Jadi, W_n terdiri dari $n+1$ titik dan $2n$ sisi. Dapat dilihat pada Gambar 2.11 yang merupakan contoh graf roda.



Gambar 2.9 Graf Kipas F_3



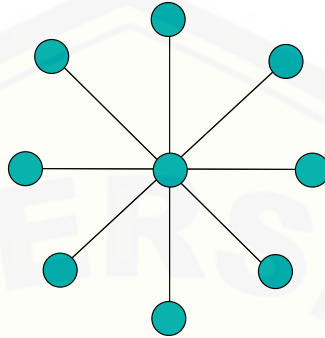
Gambar 2.10 Amalgamasi Graf kipas $Amal(F_3, v, n)$



Gambar 2.11 Graf Roda W_8

3. graf Bintang (*star Graph*)

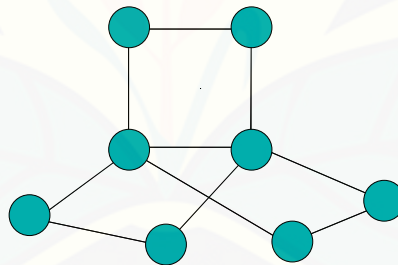
Graf bintang dinotasikan dengan S_n dimana $n \geq 3$ adalah graf yang terdiri dari satu titik pusat yang berderajat n dengan n titik dan $n - 1$ sisi. Dapat dilihat pada Gambar 2.12 yang merupakan contoh graf bintang.



Gambar 2.12 Graf Bintang S_8

4. Graf Timbunan Buku (*Stacked Book Graph*)

Graf timbunan buku dinotasikan $B_{(m,n)}$ adalah suatu graf bintang dan graf lintasan pada n titik. Graf timbunan buku digambarkan seperti graf Cartesian $S_{(m+1)}P_n$. Dapat dilihat pada Gambar 2.13 yang merupakan graf timbunan buku.



Gambar 2.13 Graf Book $B_{3,2}$

2.5 Pelabelan Graf

2.5.1 Definisi Pelabelan Graf

Menurut Baca dkk. (2007), Pelabelan dari suatu graf merupakan suatu fungsi yang memasangkan unsur-unsur graf (titik, sisi, atau titik dan sisi) ke

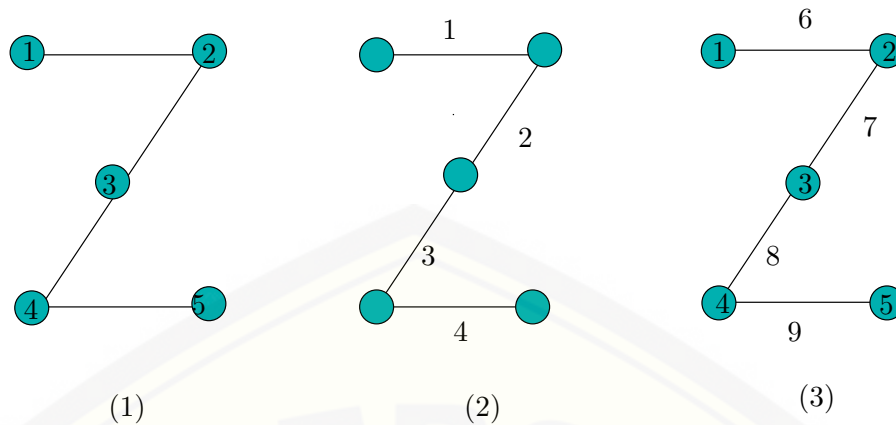
suatu (bilangan bulat) yang disebut label. Secara umum, fungsi f disebut fungsi satu-satu jika fungsi $f : A \rightarrow B$ untuk setiap elemen A mempunyai bayangan yang berbeda pada B dan dinamakan fungsi bijektif jika dan hanya jika $Rf = B$. menurut wallis (2002) Jika daerah asal (*domain*) dari pemetaan adalah titik maka dinamakan pelabelan titik (*vertex labeling*), jika *domain* dari pemetaan adalah sisi maka disebut pelabelan sisi (*edge labeling*), sedangkan *domain* pemetaan adalah titik dan sisi maka disebut pelabelan titik dan sisi atau pelabelan total (*total labeling*). Semua elemen-elemen pada graf dinomori dengan bilangan bulat positif yang berbeda. Contoh pelabelan dapat dilihat pada gambar 2.14.

Pada pelabelan titik, jika semua sisi memiliki bobot sisi yang sama maka dinamakan pelabelan titik sisi ajaib. Jika semua sisi mempunyai bobot sisinya berbeda dan himpunan bobot sisi membentuk barisan aritmatika maka dinamakan pelabelan titik sisi anti ajaib (*edge antimagic vertex labeling(EAVL)*) dan jika bobot sisinya berbeda dan himpunan bobot sisi membentuk barisan aritmatika maka pelabelannya disebut pelabelan titik sisi anti ajaib. Bobot sisi dalam pelabelan titik diartikan sebagai jumlah dari label dua titik yang menempel pada sisi.

Sedangkan dalam pelabelan total, bobot sisi adalah jumlah label sisi dan label dua titik yang menempel pada suatu sisi. Jika sisi yang mempunyai bobot sisi yang sama maka dinamakan pelabelan-total-sisi-ajaib. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi berbeda dan himpunan bobot sisi membentuk barisan aritmatika maka disebut pelabelan total sisi anti ajaib (*edge antimagic total labeling*).

2.5.2 Pelabelan Selimut \mathcal{H}

Sebuah graf G dikatakan memuat selimut $\mathcal{H}=\{H_1, H_2, \dots, H_k\}$ dengan sifat setiap sisi di G termuat sekurang-kurangnya satu graf H_i yang isomorfik dengan subgraf H untuk suatu $i \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$. Menurut Gutierrez dan Lladó(2005) Pelabelan selimut- \mathcal{H} pada graf G didefinisikan bahwa $G = (V, E)$ memuat sebuah selimut \mathcal{H} maka sebuah fungsi bijektif $f:V \cup E \rightarrow 1, 2, \dots, |V| + |E|$ adalah sebuah pelabelan ajaib- \mathcal{H} dari G jika terdapat bilangan bulat positif yang disebut jumlah-ajaib sedemikian sehingga untuk setiap subgraf $H' = (V', E')$ dari G isomorfik terhadap H yang mempunyai total label $\omega(H)$ konstan dimana diperoleh:



Gambar 2.14 (1) Pelabelan Titik, (2) Pelabelan Sisi, (3) Pelabelan Total

$$\omega(H) = \sum_{v \in V(H)} f(v) + \sum_{e \in E(H)} f(e)$$

Jika himpunan titik merupakan pemetaan bijektif f ke himpunan $1, 2, \dots, |G|$ maka dinamakan pelabelan \mathcal{H} -ajaib super.

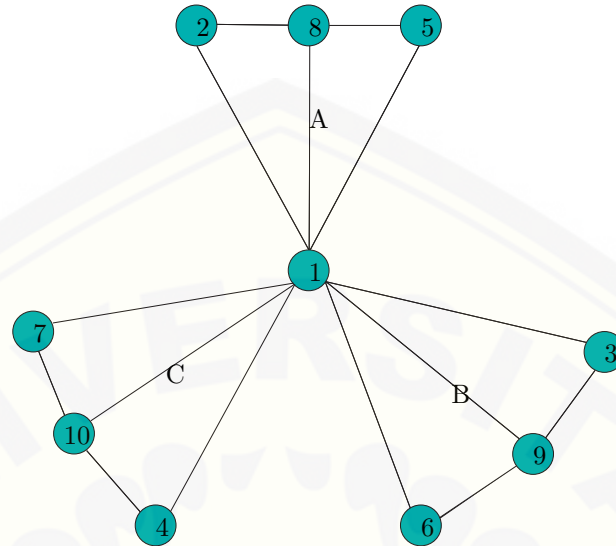
2.5.3 Pelabelan Dekomposisi- \mathcal{H}

Jika selimut- \mathcal{H} dari G dikatakan memiliki sifat dimana setiap sisi dari graf G termuat tepat satu pada graf H_i untuk $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, maka suatu selimut- \mathcal{H} disebut dekomposisi- \mathcal{H} . Dalam hal ini, graf G dikatakan memuat dekomposisi- \mathcal{H} atau graf G terdekomposisi atas H (Hader dkk, 2013). Dengan kata lain, dekomposisi dari graf G didefinisikan dengan jumlah dari subgraf H_i pada graf G yang merupakan suatu dekomposisi jika dan hanya jika tidak ada penggunaan sisi secara bersama dalam dua subgraf H_i .

2.6 Aplikasi Graf Pada Pembentukan *Password*

Teori graf dalam kehidupan sehari-hari memiliki peran penting dan dapat diaplikasikan dalam berbagai bidang. Salah satunya adalah pembuatan sandi atau *password* mahasiswa dalam sebuah perguruan tinggi. Pembuatan sandi ini bertujuan untuk login mahasiswa dalam pemograman studi ataupun kegiatan yang lainnya dalam suatu sistem. Sandi-sandi tersebut dapat dibangun dengan mengembangkan pelabelan selimut pada suatu graf. Sebagai contoh graf yang

digunakan adalah amalgamasi graf kipas. Gambar 2.15 adalah representasi graf dalam pembuatan sandi atau *password* mahasiswa.



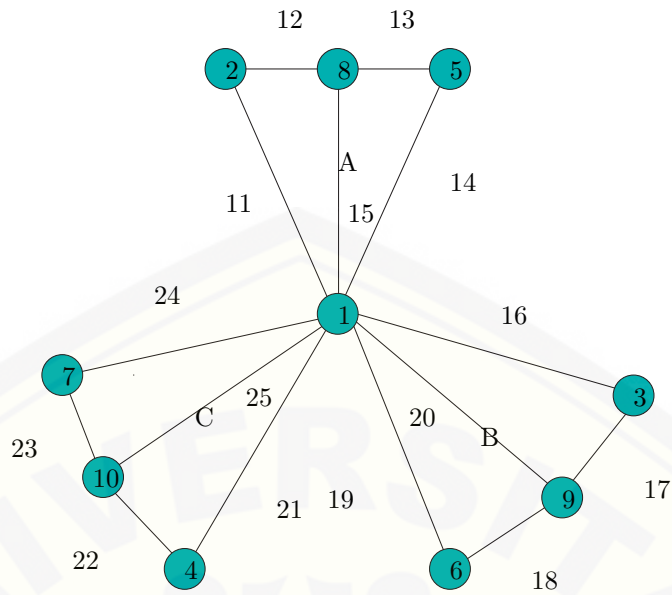
Gambar 2.15 Representasi Graf

Misalkan A,B dan C adalah mahasiswa dan dari pelabelan dekomposisi pada gambar 2.16 dapat dibangun dengan masing-masing dekomposisinya terdapat 2 sandi yang dapat dibentuk. Maka *password – password* yang dibangun dari dekomposisi pada amalgamasi graf kipas adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 A_1 : 1 - 2 - 8 - 5 - 15 & \quad B_1 : 1 - 3 - 9 - 6 - 20 & \quad C_1 : 1 - 4 - 10 - 7 - 21 \\
 A_2 : 2 - 8 - 5 - 11 - 14 & \quad B_2 : 3 - 9 - 6 - 16 - 19 & \quad C_2 : 4 - 10 - 7 - 21 - 24 \\
 A_3 : 5 - 13 - 8 - 12 - 2 & \quad B_3 : 6 - 18 - 9 - 17 - 3 & \quad C_3 : 7 - 23 - 10 - 22 - 4
 \end{aligned}$$

2.7 Hasil-hasil Pelabelan Super (a, d) - \mathcal{H} -Antimagic Total Dekomposisi

Beberapa rangkuman hasil pelabelan selimut super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic pada graf konektif dan diskonektif yang dapat digunakan sebagai rujukan penelitian ini. Rangkuman yang tersedia pada bagian ini merupakan hasil penelitian yang diterbitkan sejak tahun 2013.



Gambar 2.16 Pelabelan Dekomposisi pada Amalgamasi Graf Kipas

Tabel 2.1: Hasil Penelitian super (a, d) - F_3 Antimagic Total Dekomposisi .

Graf	a	d	Hasil
$C_n \times P_n$ (Graf Prisma)	$10k + 8$	9	(a, d) - P_4
		(Inayah, 2013)	-
SF_4, n (Graf Belunggu)	1189	1	(a, d) - SF_4
	1186	3	(a, d) - SF_4
		(Inayah, 2013)	-
H_n (Graf Helm)	$\frac{25n+11}{2}$	1	(a, d) - S_3
	$\frac{29n+17}{2}$	3	(a, d) - S_3
	$\frac{31n+15}{2}$	5	(a, d) - S_3
		(Rosyidah dan dafik, 2013)	-
(cartesian of path and sun graph)	$13n + 4$	1	(a, d) - S_3
	$12n + 5 + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	2	(a, d) - S_3
		(hader dan salman, 2013)	-

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan adalah Metode deduktif aksiomatik, yaitu dengan menurunkan beberapa aksioma dan teorema yang sudah ada, kemudian menerapkan pengertian dasar dekomposisi- \mathcal{H} -antimagic dalam super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas. Dalam penelitian ini, langkah awal yang dilakukan adalah menentukan atau menghitung nilai d (nilai beda) pada amalgamasi graf kipas dan menerapkannya dalam super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total dekomposisi. Selanjutnya jika didapatkan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total dekomposisi, maka dirumuskan pola pelabelan menggunakan metode pendeksian pola (*pattern recognition*) yaitu menentukan perumusan pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total dekomposisi untuk menentukan pola umumnya.

3.2 Definisi Operasional

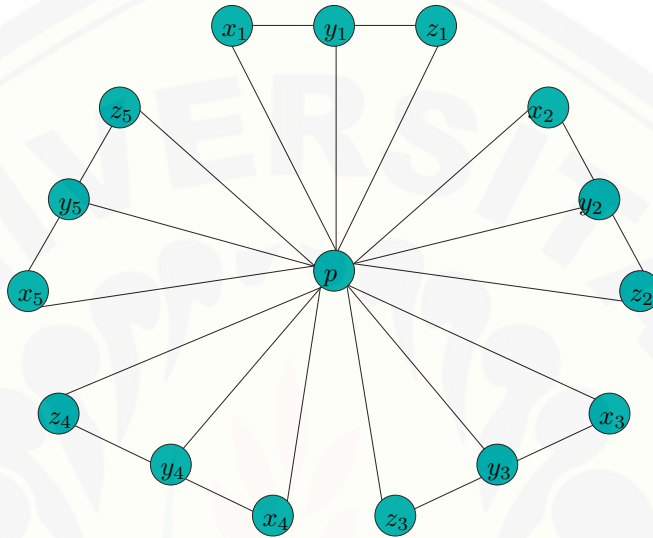
Kegunaan definisi operasional variabel dalam rancangan penelitian ini adalah untuk memberikan gambaran secara sistematis dan untuk menghindari terjadinya perbedaan pengertian makna. Definisi operasional variabel yang dimaksud adalah sebagai berikut:

3.2.1 Pelabelan Super $(a, d) - \mathcal{H}$ Total Dekomposisi

Pelabelan selimut dari G adalah $H = \{H_1, H_2, H_3, \dots, H_k\}$ keluarga subgraf dari G dengan sifat setiap sisi di G termuat pada sekurang-kurangnya satu graf H_i untuk suatu $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Jika untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, H_i isomorfik dengan suatu subgraf \mathcal{H} , maka \mathcal{H} dikatakan selimut- \mathcal{H} dari G . Selanjutnya, jika selimut- \mathcal{H} dari G memiliki sifat yaitu setiap sisi G termuat dalam tepat satu graf H_i untuk suatu $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, maka selimut- \mathcal{H} disebut dekomposisi- \mathcal{H} .

3.2.2 Amalgamasi Graf Kipas F_3^n

Amalgamasi graf kipas adalah graf yang dinotasikan dengan $amal(F_3, v, n)$ atau dapat ditulis dengan F_3^n dengan $3n + 1$ titik $V(F_3^n) = \{p, x_i, y_i, z_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $5n$ sisi himpunan $V(F_3^n) = \{px_i \cup py_i \cup pz_i \cup x_iy_i \cup x_iz_i; 1 \leq i \leq n\}$. Gambar 3.3 merupakan contoh amalgamasi graf kipas tunggal.



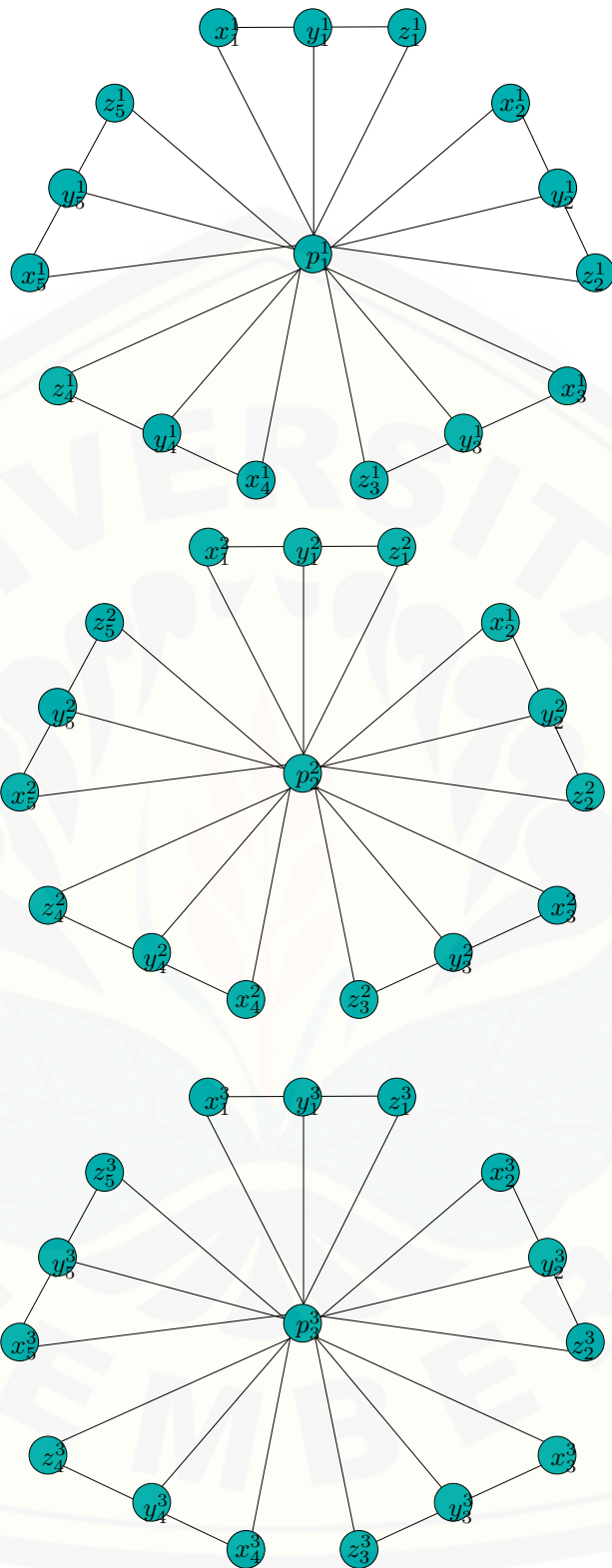
Gambar 3.1 Amalgamasi Graf Kipas F_3^5 Konektif

3.2.3 Gabungan Saling Lepas Amalgamasi Graf Kipas mF_3^n

Didefinisikan sebagai gabungan saling lepas sebanyak m salinan amalgamasi graf kipas yang mempunyai himpunan titik $V(mF_3^n) = \{p^j, x_i^j, y_i^j, z_i^j; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(mF_3^n) = \{px_i^j \cup py_i^j \cup pz_i^j \cup x_i^jy_i^j \cup x_i^jz_i^j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$. Dalam hal ini graf-graf tersebut diletakkan dalam posisi sejajar kebawah seperti pada Gambar 3.2.

3.3 Teknik Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada amalgamasi graf kipas baik yang tunggal maupun gabungan saling lepasnya. Jika pada graf tersebut ditemukan pelabelan

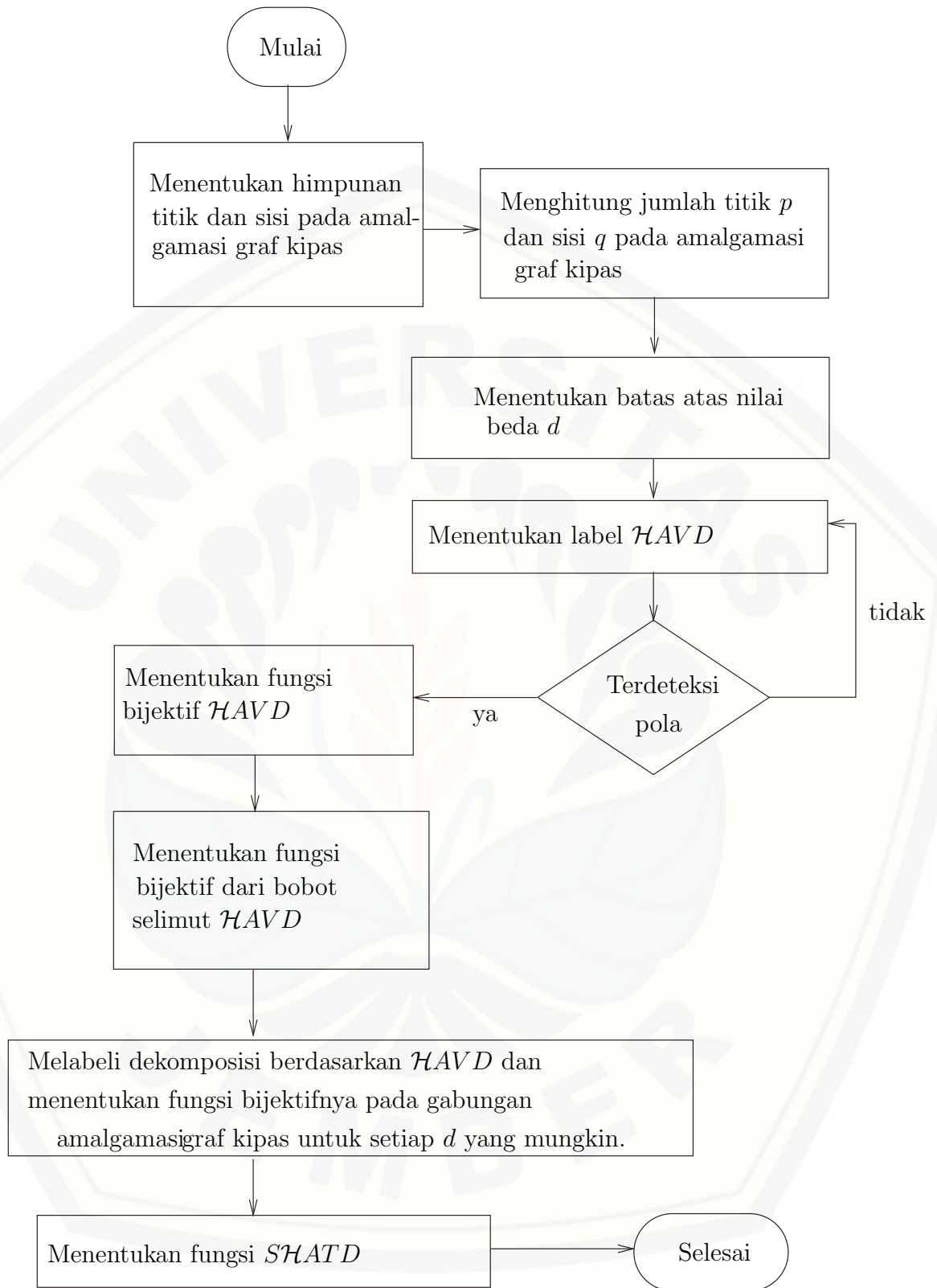


Gambar 3.2 Amalgamasi Graf Kipas $3F_3^5$ Disonektif

total super (a, d) - \mathcal{H} -total dekomposisi maka dilanjutkan dengan pendeteksian pola (*pattern recognition*). Adapun teknik penelitian adalah sebagai berikut:

1. menghitung jumlah titik p dan sisi q pada amalgamasi graf kipas F_3^n .
2. menentukan batas atas nilai beda d pada amalgamasi graf kipas F_3^n menggunakan Lemma 4.1.1.
3. menentukan label $\mathcal{H}AVD$ (\mathcal{H} Antimagic Vertex Decomposition) atau pelabelan titik (a, d) -antimagic dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n .
4. apabila label $\mathcal{H}AVD$ berlaku untuk beberapa graf baik secara *heuristik* maupun *deterministik* maka dikatakan pelabelan itu *expandable* sehingga dilanjutkan menentukan algoritma $\mathcal{H}AVD$ pada amalgamasi graf kipas F_3^n .
5. menentukan fungsi bijektif $\mathcal{H}AVD$ pada amalgamasi graf Kipas F_3^n .
6. menentukan label gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas mF_3^n dengan $\mathcal{H}AVD$ (\mathcal{H} Antimagic Vertex Decomposition) atau pelabelan titik (a, d) -antimagic dekomposisi dengan nilai beda d yang *feasibel*.
7. menentukan fungsi bijektif pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total dekomposisi pada gabungan saling lepas amalgamasi graf Kipas mF_3^n .

penelitian ini akan dilakukan dengan menemukan berbagai pola pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -total dekomposisi dengan banyak jenis nilai awal a serta nilai beda d yang ditentukan berdasarkan Lemma 4.1.1 sehingga penelitian juga dapat dinyatakan dalam pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas. Teknik penelitian yang dilakukan pada pelabelan tunggal juga dapat dilakukan pada gabungan saling lepas pada amalgamsi graf kipas. Secara umum, langkah-langkah penelitian diatas dapat dilihat dalam flowchart pada gambar 3.3.



Gambar 3.3 Flowchart super (a, d) - \mathcal{H} total dekomposisi

BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dijelaskan hasil penelitian tentang pelabelan super \mathcal{H} -antimagic total dekomposisi pada amalgamsi graf kipas tunggal maupun yang gabungan saling lepas dengan hasil akhir berupa teorema baru pelabelan super \mathcal{H} antimagic total dekomposisi pada amalgamsi graf kipas. Penelitian ini diawali dengan menentukan nilai batas atas d , menentukan $\mathcal{H}AV$ dan bobot dekomposisi $\mathcal{H}AV$ kemudian menentukan \mathcal{SHATD} dan selanjutnya bobot total dekomposisi \mathcal{SHATD} untuk membuktikan bahwa gabungan graf ini merupakan \mathcal{SHATD} .

Hasil utama dari penelitian yang akan dibahas tentang pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total dekomposisi pada amalgamsi graf kipas F_3^n adalah lemma dan teorema yang diberi tanda \diamond . Terdapat 1 (satu) lemma dan 19 (sembilan belas) teorema baru yang ditemukan secara eksperimental dalam penelitian ini. Format penyajian temuan penelitian dalam bab ini diawali dengan pernyataan lemma atau teorema kemudian dilanjutkan dengan bukti dan contoh gambar atau ilustrasi sebagai visualisasi kebenaran pembuktian teorema. Berikut ini akan dijelaskan tahap-tahap bagaimana teorema tersebut ditemukan sekaligus menjawab rumusan masalah yang telah disajikan pada BAB sebelumnya.

4.1 Pelabelan Super (a, d) - \mathcal{H} -Antimagic Total Dekomposisi pada Amalgamsi Graf Kipas Konektif

Penentuan batas atas d merupakan hal yang penting dalam penelitian ini. Batas atas ini adalah titik penting yang mengisyaratkan seberapa banyak nilai beda yang mungkin dimiliki oleh amalgamsi graf kipas tunggal maupun gabungan saling lepasnya dalam pelabelan super antimagic dekomposisi. Untuk menentukan nilai-nilai d tersebut, perlu diketahui jumlah titik (p_G) dan jumlah sisi (q_G) pada amalgamsi graf kipas tunggal maupun gabungannya, serta perlu diketahui jumlah titik (p_H) dan jumlah sisi (q_H) pada subgraf atau selimut amalgamsi graf kipas tunggal maupun gabungannya beserta jumlah selimutnya (s).

Amalgamasi graf kipas merupakan sebuah graf yang dinotasikan dengan F_3^n dengan $V(F_3^n) = \{p, x_i, y_i, z_i : 1 \leq i \leq n\}$ dan sisi $E(F_3^n) = \{px_i, py_i, pz_i, x_iy_i, y_iz_i : 1 \leq i \leq n\}$. Untuk jumlah titik $|V| = (p_G)$ dan sisinya $|E| = (q_G)$ serta jumlah titik (p_H) dan jumlah sisi (q_H) pada subgraf atau selimut amalgamasi graf kipas tunggal. Nilai n yang dimaksudkan adalah banyaknya *expand* graf kipas F_3 yang terdapat pada amalgamasi graf kipas. Gambar 4.1 merupakan sebuah ilustrasi untuk menentukan jumlah titik dan jumlah sisi pada amalgamasi graf kipas.

Berdasarkan pola pada Gambar 4.1 dan setelah memperhatikan pada amalgamasi graf kipas F_3^n dengan n yang berbeda, didapatkan rumusan jumlah titik pada graf amalgamasi kipas adalah $(p_G)=3n + 1$. Sedangkan jumlah sisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n merupakan jumlah seluruh sisi yang menghubungkan sebuah titik dengan titik yang lainnya pada graf tersebut sesuai definisi yang diberikan adalah $(q_G)=5n$.

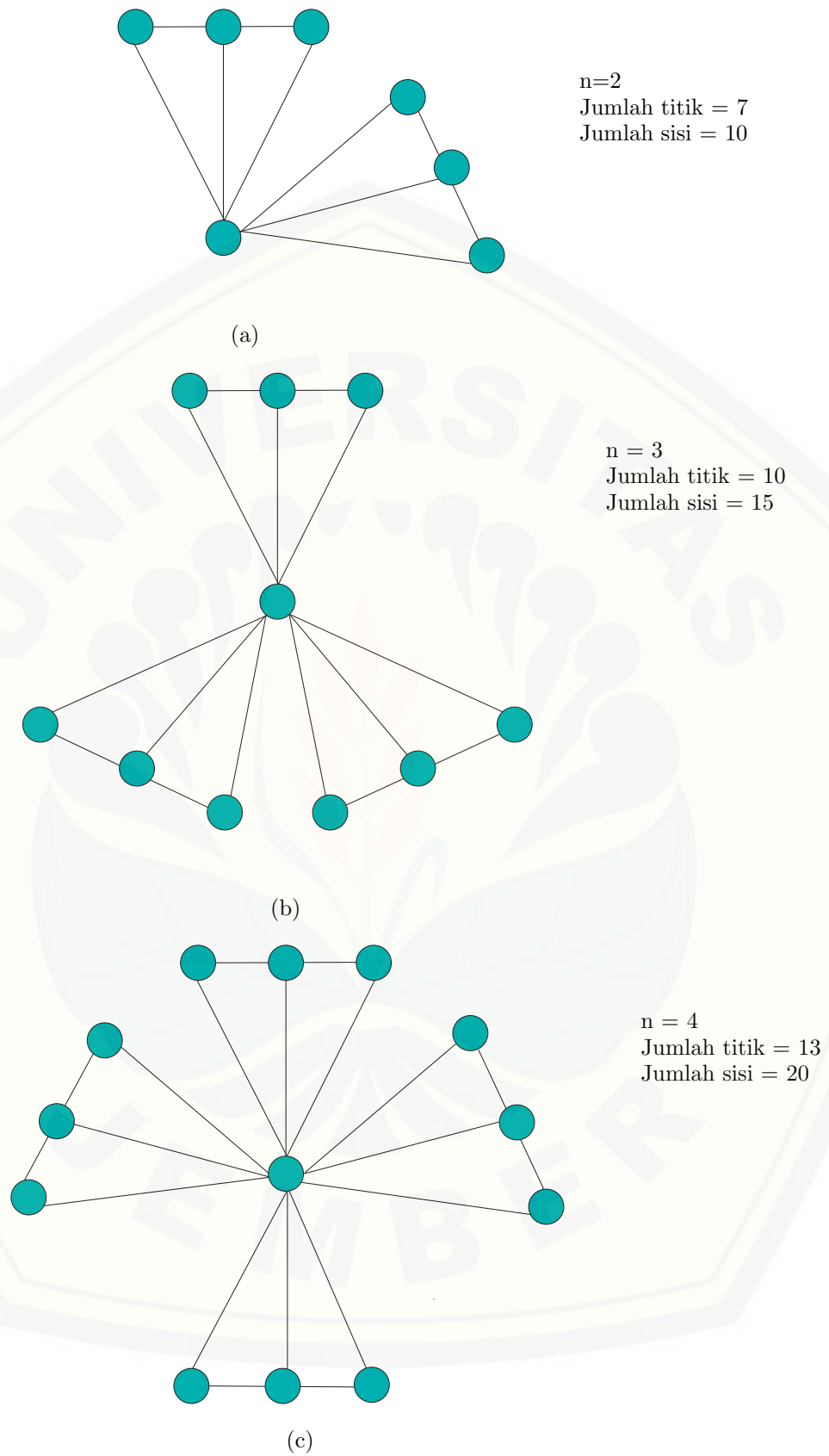
Dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n berupa subgraf dari amalgamasi graf kipas yang berupa graf kipas F_3 , maka jumlah titik yang merupakan dekomposisi adalah $p_H = 4$, sedangkan jumlah sisi dekomposisi adalah $q_H = 5$ dan rumusan jumlah dekomposisi pada F_3^n adalah n . Untuk menentukan batas atas nilai beda d super $(a, d)-\mathcal{H}$ antimagic total dekomposisi dapat ditentukan dengan lemma berikut ini.

Lemma 4.1.1. *Jika graf (F_3^n) adalah super $(a, d)-F_3$ antimagic total dekomposisi maka*

$$d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s - 1}$$

untuk $s = |H_i|$, $p_G = |V|$, $q_G = |E|$, $p_H = |V'|$, $q_H = |E'|$

Bukti. $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, p_G\}$ dan $f(E) = \{p_G + 1, p_G + 2, p_G + 2, \dots, p_G + q_G\}$. Misalkan graf (p_G, q_G) mempunyai pelabelan super $(a, d)-\mathcal{H}$ antimagic total dekomposisi dengan fungsi total $f(\text{total}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, p_G + q_G\}$ maka himpunan bobot dekomposisi sebuah graf adalah $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a(t - 1)d\}$ dimana a



Gambar 4.1 Jumlah titik dan sisi pada $F_3^2(a)$, $F_3^3(b)$, $F_3^4(c)$

merupakan bobot dekomposisi terkecil maka berlaku:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + p_H + (p_G + 1) + (p_G + 2) + \dots + (p_G + q_H) &\leq a \\ \frac{p_H}{2}(1 + p_H) + q_H p_G + \frac{q_H}{2}(1 + q_H) &= \\ \frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2} &\leq a \end{aligned}$$

Sedangkan untuk nilai terbesar berlaku:

$$\begin{aligned} a + (s - 1)d &\leq p_G + p_G - 1 + p_G - 2 + \dots + (p_G - (p_H - 1)) + (p_G + q_G) \\ &\quad + (p_G + q_G - 1) + (p_G + q_G - 2) + \dots + (p_G + q_G - (q_H - 1)) \\ &= p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(1 + (p_H - 1)) + q_H p_G + q_H p_G \\ &\quad - \frac{q_H - 1}{2}(1 + (q_H - 1)) \\ &= p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (s - 1)d &\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) - a \\ &\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) - \\ &\quad \left(\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}\right) \\ &= p_H p_G - \frac{p_H^2}{2} + \frac{p_H}{2} + q_H p_G - \frac{q_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} - \left(\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}\right) \\ &= p_H p_G + q_H q_G - p_H^2 - q_H^2 \\ &= p_H p_G - p_H^2 + q_H q_G - q_H^2 \\ &= (p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H \\ d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{(s - 1)} \end{aligned}$$

Dari persamaan diatas terbukti bahwa batas atas $d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s - 1}$ jika graf G memiliki pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total dekomposisi dari berbagai famili graf (Dafik. 2007). \square

Diketahui dengan jumlah titik $p_G = 3n + 1$ dan sisi $q_G = 5n$, sedangkan jumlah titik selimut adalah $p_H = 4$ dan jumlah sisi selimut adalah $q_H = 5$ dengan jumlah selimut $s = n$. Batas atas nilai beda d tersebut adalah :

$$\begin{aligned}
 d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s - 1} \\
 &= \frac{(3n + 1 - 4)4 + (5n - 5)5}{n - 1} \\
 &= \frac{(3n - 3)4 + (5n - 5)5}{n - 1} \\
 &= \frac{12n - 12 + 25n - 25}{n - 1} \\
 &= \frac{37n - 37}{n - 1} \\
 &= \frac{37(n - 1)}{n - 1} \\
 &\leq 37
 \end{aligned}$$

Karena pelabelan \mathcal{SHAT} selalu menggunakan bilangan bulat positif, maka nilai $d \geq 0$ dan d adalah bilangan bulat, sehingga $d \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 37\}$. Selanjutnya penentuan fungsi bijektif pelabelan selimut super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic akan disesuaikan dengan nilai d yang telah ditetapkan.

Untuk menentukan pelabelan selimut super \mathcal{H} antimagic pada amalgamasi graf kipas digunakan metode yang terdiri dari beberapa langkah. Metode ini diawali dengan menggunakan pendeteksian pola (*pattern recognition*) untuk menentukan pelabelan yang berlaku pada batas i yang telah ditemukan. Untuk penentuan pola secara umum digunakan fungsi-fungsi barisan aritmatika, fungsi ini pada akhirnya merupakan fungsi bijektif pada graf yang diteliti. Setelah fungsi bijektif diketahui selanjutnya dilakukan pembuktian secara deduktif matematik untuk membuktikan kebenaran dari teorema yang didapat. Sebagai catatan, teorema dalam penelitian ini adalah bukan teorema yang *biimplikatif* atau karakteristik sehingga pembuktiannya hanya dilakukan satu arah.

Berdasarkan hasil penggabungan pola melalui pedektesian pola (*pattern recognition*) dan konsep barisan aritmatika, maka diperoleh beberapa teorema dan akibat sebagai berikut. Teorema yang ditemukan dalam penelitian ini tidak

bersifat tunggal (berkenaan dengan sifat ketunggalan) melainkan hanya bersifat keberadaan (*existence but not unique*).

Setelah mengetahui batas atas nilai d , langkah selanjutnya adalah menentukan pelabelan super \mathcal{H} antimagic total dekomposisi dengan terlebih dahulu menentukan fungsi bijektif melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika dari titik dan sisi pada amalgamasi graf kipas $amal(F_3, v, n)$, dimana $V(F_3^n) = \{p, x_i, y_i, z_i : 1 \leq i \leq n\}$ dan sisi $E(F_3^n) = \{px_i, py_i, pz_i, x_iy_i, y_iz_i : 1 \leq i \leq n\}$ untuk $n \geq 2$.

◇ **Teorema 4.1.1.** *Ada super $(32n + 13, 0)$ - F_3 antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Labeli titik amalgamasi graf kipas F_3^n dengan fungsi bijektif f_1 dengan label sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_1(p) &= 1 \\ f_1(x_i) &= i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_1(y_i) &= 2n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_1(z_i) &= 3n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa f_1 adalah fungsi bijektif yang memetakan F_3^n ke himpunan bilangan bulat $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, 3n + 1\}$. Jika w_{f_1} didefinisikan sebagai bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas dimana bobot dekomposisi tersebut adalah $\mathcal{H}=F_3$ sebagai dekomposisinya, Maka fungsi bijektif w_{f_1} dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{f_1} &= f_1(p) + f_1(x_i) + f_1(y_i) + f_1(z_i) \\ &= (1) + (i + 1) + (2n - i + 2) + (3n - i + 2) \\ &= 5n - i + 6, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Labeli sisi amalgamasi graf kipas F_3^n dengan fungsi bijektif f_1 dengan label

sebagai berikut:

$$f_1(px_i) = 3n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_1(x_iy_i) = 5n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_1(y_iz_i) = 5n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_1(pz_i) = 7n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_1(py_i) = 7n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

Jika W_{f_1} didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka w_{f_1} dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

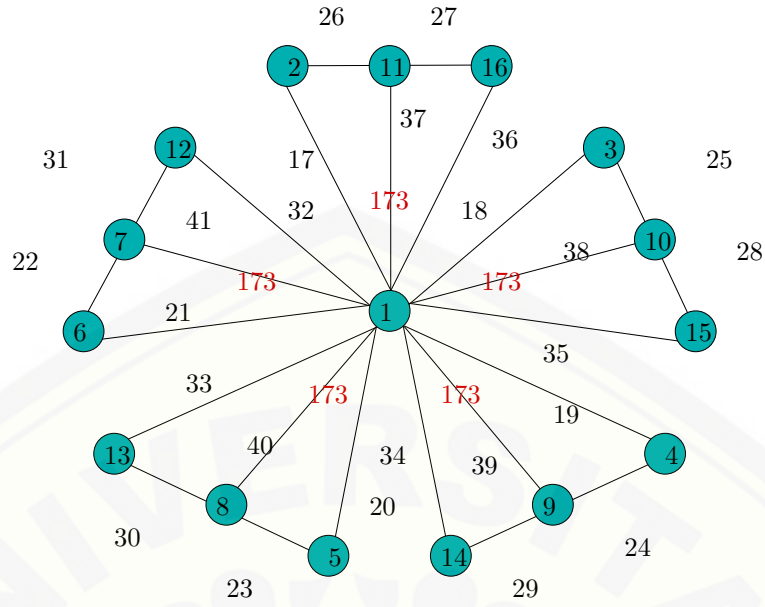
$$\begin{aligned} W_{f_1} &= w_{f_1} + f_1(px_i) + f_1(x_iy_i) + f_1(y_iz_i) + f_1(pz_i) + f_1(py_i) \\ &= 32n + 13, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_1} = \{32n + 13, 32n + 13, \dots, 32n + 13\}$. Sehingga terbukti bahwa amalgamasi pada graf kipas F_3^n memiliki super $(32n + 13, 0) - F_3$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.2 merupakan contoh super $(32n + 13, 0) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^5

Pada teorema berikutnya akan dibuktikan super $(a, d) - \mathcal{H}$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n dengan nilai $d=2$ yang berlaku untuk $n \geq 2$.

\diamond **Teorema 4.1.2.** *Ada super $(31n + 14, 2) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$.*



Gambar 4.2 Super $(32n + 13, 0) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5

Bukti. Labeli titik amalgamasi graf kipas F_3^n dengan fungsi f_2 sebagai berikut:

$$f_2(p) = 1$$

$$f_2(x_i) = i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_2(y_i) = 2n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_2(z_i) = 2n + 1 + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

Dapat dilihat bahwa f_2 adalah fungsi bijektif yang memetakan F_3^n ke himpunan bilangan bulat $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, 3n + 1\}$. Jika w_{f_2} didefinisikan sebagai bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas dimana bobot dekomposisi tersebut adalah $\mathcal{H}=F_3$ sebagai dekomposisinya, maka fungsi bijektif w_{f_2} dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{f_2} &= f_2(p) + f_2(x_i) + f_2(y_i) + f_2(z_i) \\ &= (1) + (i + 1) + (2n - i + 2) + (2n + i + 1) \\ &= 4n + i + 5, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

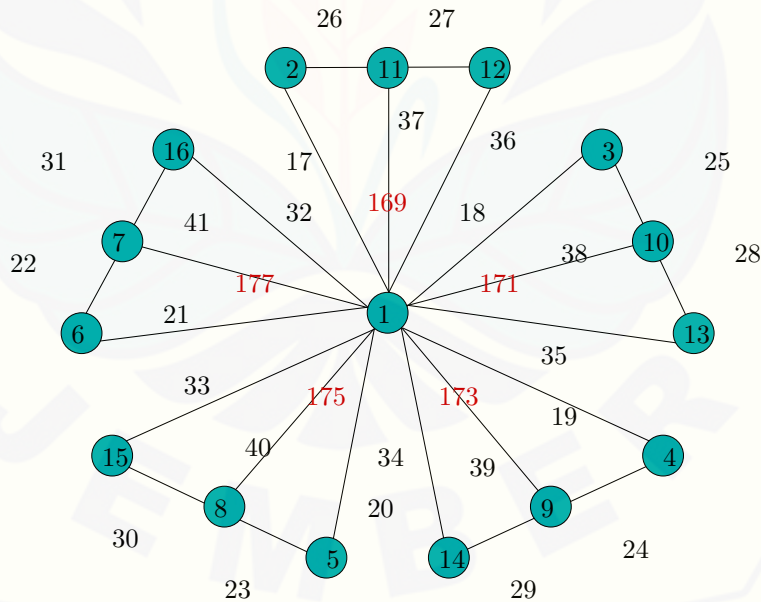
Untuk melabeli sisi amalgamasi graf kipas F_3^n gunakan label sisi yang terdapat pada teorema 4.1.1 ke dalam teorema 4.1.2 dimana $f_2=f_1$. Sehingga $f_2(px_i)=f_1(px_i)$, $f_2(x_iy_i)=f_1(x_iy_i)$, $f_2(y_iz_i)=f_1(y_iz_i)$, $f_2(pz_i)=f_1(pz_i)$, $f_2(py_i)=f_1(py_i)$.

Jika W_{f_2} didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka w_{f_2} dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_2} &= w_{f_2} + f_1(px_i) + f_1(x_iy_i) + f_1(y_iz_i) + f_1(pz_i) + f_1(py_i) \\ &= 31n + 2i + 12, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_2} = \{31n + 14, 31n + 16, \dots, 33n + 12\}$. Sehingga terbukti bahwa amalgamasi pada graf kipas F_3^n memiliki super $(31n + 14, 2) - F_3$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.3 merupakan contoh super $(31n + 14, 2) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^5



Gambar 4.3 Super $(31n + 14, 2) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5

Pada teorema berikutnya akan dibuktikan super $(a, d)\mathcal{H}$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n dengan nilai $d=4$ dengan syarat berlaku untuk $n \geq 2$. Teorema dibawah ini menggunakan label titik yang sama seperti pada teorema 4.1.1 sehingga hanya ditulis $f_3=f_1$.

◇ **Teorema 4.1.3.** *Ada super $(30n + 15, 4)\text{-}F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Untuk melabeli titik amalgamasi graf kipas F_3^n gunakan label titik yang terdapat pada teorema 4.1.1 ke dalam teorema 4.1.3 dimana $f_3=f_1$. Sehingga $f_3(p)=f_1(p)$, $f_3(x_i)=f_1(x_i)$, $f_3(y_i)=f_1(y_i)$, $f_3(z_i)=f_1(z_i)$. Dengan demikian maka bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas yang didefinisikan dengan $w_{f_3}=w_{f_1}=5n - i + 6$.

Labeli sisi dan amalgamasi graf kipas F_3^n dengan fungsi f_3 sebagai berikut:

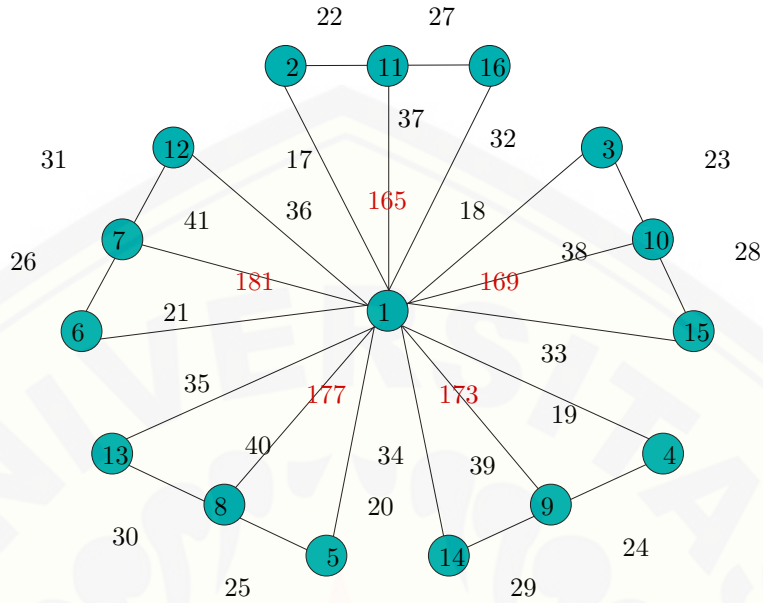
$$\begin{aligned} f_3(px_i) &= 3n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_3(x_iy_i) &= 4n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_3(y_iz_i) &= 5n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_3(pz_i) &= 6n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_3(py_i) &= 7n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Jika W_{f_3} didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka w_{f_3} dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_3} &= w_{f_3} + f_3(px_i) + f_3(x_iy_i) + f_3(y_iz_i) + f_3(pz_i) + f_3(py_i) \\ &= 30n + 4i + 11, \text{ jika } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_3} = \{30n + 15, 30n + 19, \dots, 34n + 11\}$. Sehingga terbukti bahwa amalgamasi pada graf kipas F_3^n memiliki super $(30n + 15, 4)\text{-}F_3$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. □

Gambar 4.4 merupakan contoh super $(30n + 15, 4) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^5



Gambar 4.4 Super $(30n + 15, 4) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5

Pada teorema berikutnya akan dibuktikan super $(a, d)\mathcal{H}$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n dengan nilai $d=6$ dengan syarat berlaku untuk $n \geq 2$. Teorema dibawah ini menggunakan label titik yang sama seperti pada teorema 4.1.2 $f_4=f_2$ dan label sisi yang sama seperti teorema 4.1.3 $f_4=f_3$.

◇ **Teorema 4.1.4.** *Ada super $(29n + 16, 6)\text{-}F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Untuk melabeli titik amalgamasi graf kipas F_3^n gunakan label titik yang terdapat pada teorema 4.1.2 ke dalam teorema 4.1.4 dimana $f_4=f_2$. Sehingga $f_4(p)=f_2(p)$, $f_4(x_i)=f_2(x_i)$, $f_4(y_i)=f_2(y_i)$, $f_4(z_i)=f_2(z_i)$. Dengan demikian maka bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas yang didefinisikan dengan $w_{f_4}=w_{f_2}=4n + i + 5$.

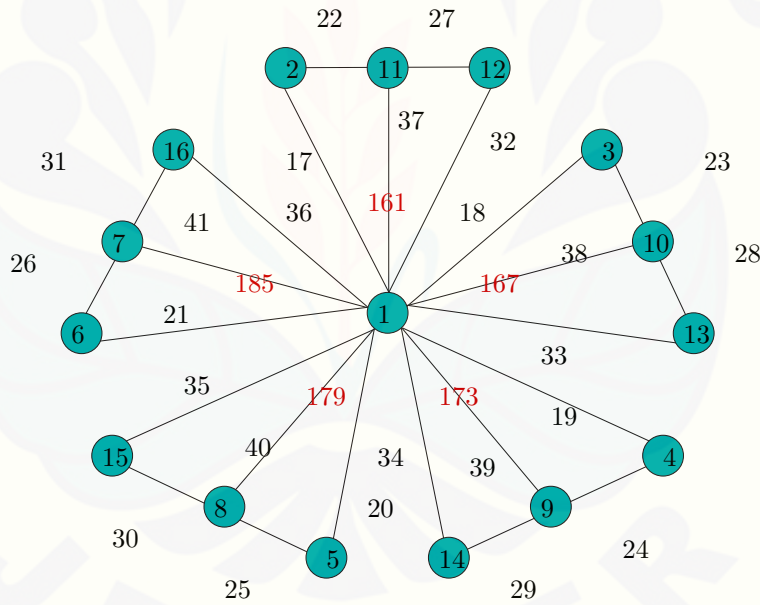
Untuk melabeli sisi amalgamasi graf kipas F_3^n gunakan label sisi yang terdapat pada teorema 4.1.3 ke dalam teorema 4.1.4 dimana $f_4=f_3$. Sehingga $f_4(px_i)=f_3(px_i)$, $f_4(x_iy_i)=f_3(x_iy_i)$, $f_4(y_iz_i)=f_3(y_iz_i)$, $f_4(pz_i)=f_3(pz_i)$, $f_4(py_i)=f_3(py_i)$.

Jika W_{f_4} didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka w_{f_4} dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_4} &= w_{f_4} + f_4(px_i) + f_4(x_iy_i) + f_4(y_iz_i) + f_4(pz_i) + f_4(py_i) \\ &= 29n + 6i + 10, \text{ jika } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_4} = \{29n + 16, 29n + 22, \dots, 35n + 10\}$. Sehingga terbukti bahwa amalgamasi pada graf kipas F_3^n memiliki super $(29n + 16, 6) - F_3$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.5 merupakan contoh super $(29n + 16, 6) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^5



Gambar 4.5 Super $(29n + 16, 6) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5

Pada teorema berikutnya akan dibuktikan super $(a, d)\mathcal{H}$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n dengan nilai $d=8$ dengan syarat berlaku untuk $n \geq 2$. Teorema dibawah ini menggunakan label sisi yang sama

seperti teorema 4.1.3 $f_5=f_3$.

◇ **Teorema 4.1.5.** *Ada super $(28n + 17, 8)$ - F_3 antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Labeli titik amalgamasi graf kipas F_3^n dengan fungsi f_5 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_5(p) &= 1 \\ f_5(x_i) &= i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_5(y_i) &= n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_5(z_i) &= 2n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa f_5 adalah fungsi bijektif yang memetakan F_3^n ke himpunan bilangan bulat $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, 3n + 1\}$. Jika w_{f_5} didefinisikan sebagai bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas dimana bobot dekomposisi tersebut adalah $\mathcal{H}=F_3$ sebagai dekomposisinya, maka fungsi bijektif w_{f_5} dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{f_5} &= f_5(p) + f_5(x_i) + f_5(y_i) + f_5(z_i) \\ &= (1) + (i + 1) + (n + i + 1) + (2n + i + 1) \\ &= 3n + 3i + 4, \text{ jika } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

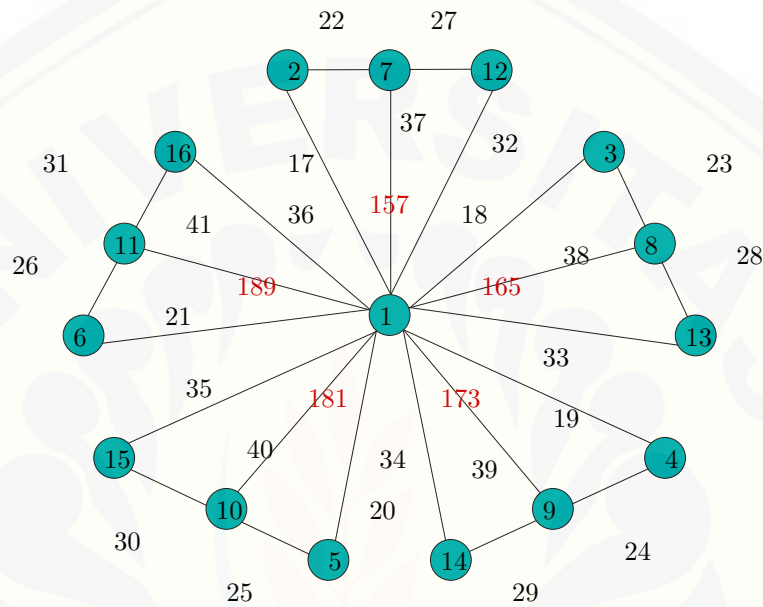
Untuk melabeli sisi amalgamasi graf kipas F_3^n gunakan label sisi yang terdapat pada teorema 4.1.3 ke dalam teorema 4.1.5 dimana $f_5=f_3$. Sehingga $f_5(px_i) = f_3(px_i)$, $f_5(x_iy_i)=f_3(x_iy_i)$, $f_5(y_iz_i)=f_3(y_iz_i)$, $f_5(pz_i)=f_3(pz_i)$, $f_5(py_i)=f_3(py_i)$.

Jika W_{f_5} didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka w_{f_5} dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_5} &= w_{f_5} + f_5(px_i) + f_5(x_iy_i) + f_5(y_iz_i) + f_5(pz_i) + f_5(py_i) \\ &= 28n + 8i + 9, \text{ jika } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_5} = \{28n + 17, 28n + 25, \dots, 36n + 9\}$. Sehingga terbukti bahwa amalgamasi pada graf kipas F_3^n memiliki super $(28n + 17, 8) - F_3$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.6 merupakan contoh super $(28n + 17, 8) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^5



Gambar 4.6 Super $(28n + 17, 8) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5

Pada teorema berikutnya akan dibuktikan super $(a, d) - \mathcal{H}$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n dengan nilai $d=10$ dengan syarat berlaku untuk $n \geq 2$. Teorema dibawah ini menggunakan label sisi yang sama seperti teorema 4.1.3 $f_6=f_3$.

\diamond **Teorema 4.1.6.** *Ada super $(30n + 15, 10) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Labeli titik amalgamasi graf kipas F_3^n dengan fungsi f_6 sebagai berikut:

$$f_6(p) = 3n + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_6(x_i) = 2i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_6(y_i) = 2i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_6(z_i) = 2n + i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

Dapat dilihat bahwa f_6 adalah fungsi bijektif yang memetakan (F_3^n) ke himpunan bilangan bulat $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, 3n + 1\}$. Jika w_{f_6} didefinisikan sebagai bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas dimana bobot dekomposisi tersebut adalah $\mathcal{H}=F_3$ sebagai dekomposisinya, maka fungsi bijektif w_{f_6} dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{f_6} &= f_6(p) + f_6(x_i) + f_6(y_i) + f_6(z_i) \\ &= (3n + 1) + (2i - 1) + (2i) + (2n + 1) \\ &= 5n + 5i, \text{ jika } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

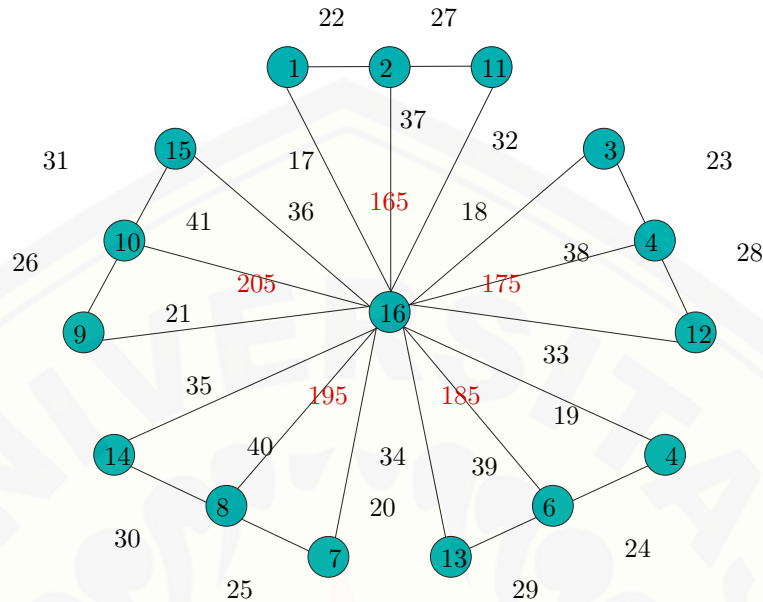
Untuk melabeli sisi amalgamasi graf kipas F_3^n gunakan label sisi yang terdapat pada teorema 4.1.3 ke dalam teorema 4.1.6 dimana $f_6=f_3$. Sehingga $f_6(px_i)=f_3(px_i)$, $f_6(x_iy_i)=f_3(x_iy_i)$, $f_6(y_iz_i)=f_3(y_iz_i)$, $f_6(pz_i)=f_3(pz_i)$, $f_6(py_i)=f_3(py_i)$.

Jika W_{f_6} didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka w_{f_6} dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_6} &= w_{f_6} + f_6(px_i) + f_6(x_iy_i) + f_6(y_iz_i) + f_6(pz_i) + f_6(py_i) \\ &= 30n + 10i + 5, \text{ jika } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_6} = \{30n + 15, 30n + 25, \dots, 40n + 5\}$. Sehingga terbukti bahwa amalgamasi pada graf kipas (F_3^n) memiliki super $(30n + 15, 10) - F_3$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. □

Gambar 4.7 merupakan contoh super $(30n + 15, 10) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^5



Gambar 4.7 Super $(30n + 15, 10) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5

Pada teorema berikutnya akan dibuktikan super $(a, d)\mathcal{H}$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n dengan nilai $d=12$ dengan syarat berlaku untuk $n \geq 2$. Teorema dibawah ini menggunakan label titik yang sama seperti pada teorema 4.1.5 $f_7=f_5$.

◇ **Teorema 4.1.7.** *Ada super $(26n + 19, 12)\text{-}F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Untuk melabeli titik amalgamasi graf kipas F_3^n gunakan label titik yang terdapat pada teorema 4.1.5 ke dalam teorema 4.1.7 dimana $f_7=f_5$. Sehingga $f_7(p)=f_5(p)$, $f_7(x_i)=f_5(x_i)$, $f_7(y_i)=f_5(y_i)$, $f_7(z_i)=f_5(z_i)$. Dengan demikian maka bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas yang didefinisikan dengan $w_{f_7}=w_{f_5}=3n + 3i + 4$.

Labeli sisi amalgamasi graf kipas F_3^n dengan fungsi f_7 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_7(px_i) &= 3n + 2i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_7(x_iy_i) &= 3n + 2i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_7(y_iz_i) &= 5n + 2i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_7(pz_i) &= 5n + 2i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_7(py_i) &= 7n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Jika W_{f_7} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka w_{f_7} dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

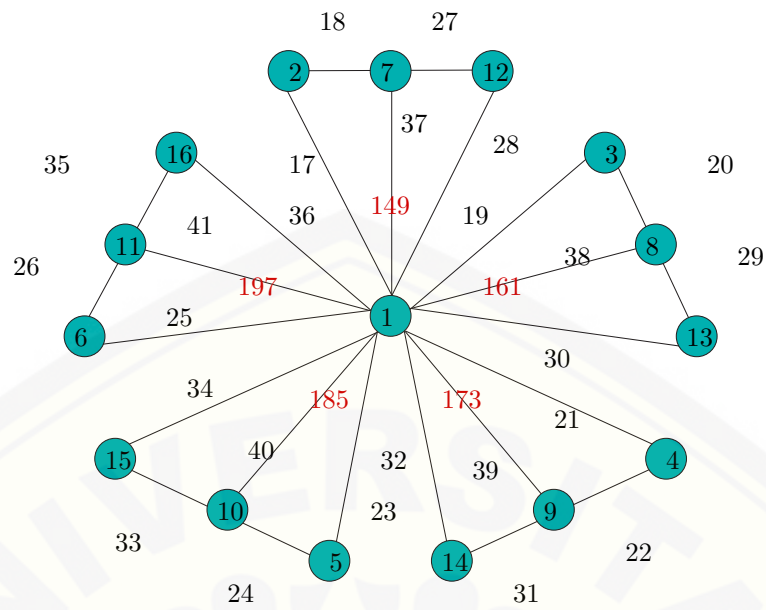
$$\begin{aligned} W_{f_7} &= w_{f_7} + f_7(px_i) + f_7(x_iy_i) + f_7(y_iz_i) + f_7(pz_i) + f_7(py_i) \\ &= 26n + 12i + 7, \text{ jika } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot selimut total $W_{f_7} = \{26n + 19, 26n + 31, \dots, 38n + 7\}$. Sehingga terbukti bahwa amalgamasi pada graf kipas F_3^n memiliki super $(26n + 19, 12) - F_3$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.8 merupakan contoh super $(26n + 19, 12) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^5

Pada teorema berikutnya akan dibuktikan super $(a, d)\mathcal{H}$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas (F_3^n) dengan nilai $d=14$ dengan syarat berlaku untuk $n \geq 2$. Teorema dibawah ini menggunakan label sisi yang sama seperti teorema 4.1.3 $f_8=f_3$.

\diamond **Teorema 4.1.8.** *Ada super $(25n + 20, 14) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$.*



Gambar 4.8 Super $(26n + 19, 12) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5

Bukti. Labeli titik amalgamasi graf kipas F_3^n dengan fungsi f_8 sebagai berikut:

$$f_8(p) = 1$$

$$f_8(x_i) = 3i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_8(y_i) = 3i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_8(z_i) = 3i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

Dapat dilihat bahwa f_8 adalah fungsi bijektif yang memetakan F_3^n ke himpunan bilangan bulat $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, 3n + 1\}$. Jika w_{f_8} didefinisikan sebagai bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas dimana bobot dekomposisi tersebut adalah $\mathcal{H} = F_3$ sebagai dekomposisinya, maka fungsi bijektif w_{f_8} dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{f_8} &= f_8(p) + f_8(x_i) + f_8(y_i) + f_8(z_i) \\ &= (1) + (3i - 1) + (3i) + (3i + 1) \\ &= 9i + 1, \text{ jika } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

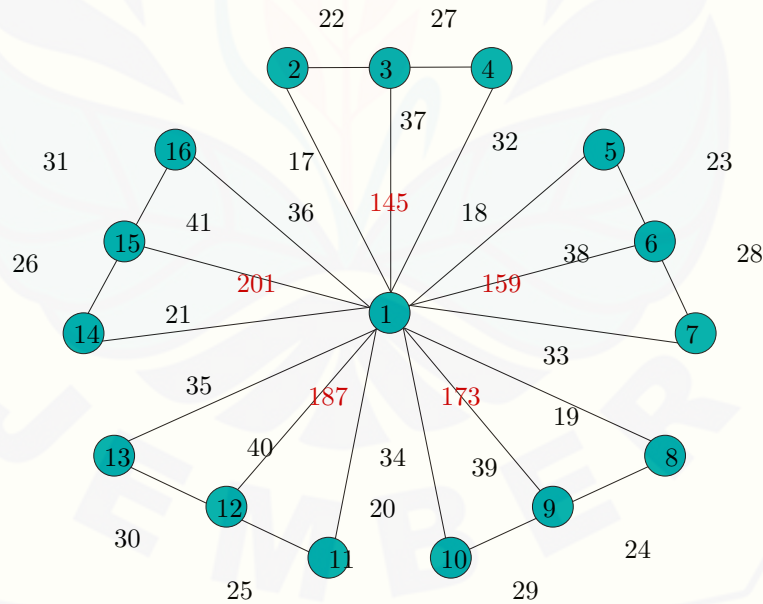
Untuk melabeli sisi amalgamasi graf kipas F_3^n gunakan label sisi yang terdapat pada teorema 4.1.3 ke dalam teorema 4.1.8 dimana $f_8=f_3$. Sehingga $f_8(px_i)=f_3(px_i)$, $f_8(x_iy_i)=f_3(x_iy_i)$, $f_8(y_iz_i)=f_3(y_iz_i)$, $f_8(pz_i)=f_3(pz_i)$, $f_8(py_i)=f_3(py_i)$.

Jika W_{f_8} didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka w_{f_8} dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_8} &= w_{f_8} + f_8(px_i) + f_8(x_iy_i) + f_8(y_iz_i) + f_8(pz_i) + f_8(py_i) \\ &= 25n + 14i + 6, \text{ jika } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_8} = \{25n + 20, 25n + 34, \dots, 39n + 6\}$. Sehingga terbukti bahwa amalgamasi pada graf kipas (F_3^n) memiliki super $(25n + 20, 14) - F_3$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.9 merupakan contoh super $(25n + 20, 14) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas (F_3^5)



Gambar 4.9 Super $(25n + 20, 14) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5

Pada teorema berikutnya akan dibuktikan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n dengan nilai $d=16$ dengan syarat berlaku untuk $n \geq 2$. Teorema dibawah ini menggunakan label titik yang sama seperti pada teorema 4.1.8 $f_9=f_8$.

◇ **Teorema 4.1.9.** *Ada super $(24n + 21, 16)$ - F_3 antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Untuk melabeli titik amalgamasi graf kipas F_3^n gunakan label titik yang terdapat pada teorema 4.1.8 ke dalam teorema 4.1.9 dimana $f_9=f_8$. Sehingga $f_9(p)=f_8(p)$, $f_9(x_i)=f_8(x_i)$, $f_9(y_i)=f_8(y_i)$, $f_9(z_i)=f_8(z_i)$. Dengan demikian maka bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas yang didefinisikan dengan $w_{f_9}=w_{f_8}=9i + 1$.

Labeli sisi amalgamasi graf kipas F_3^n dengan fungsi f_9 sebagai berikut:

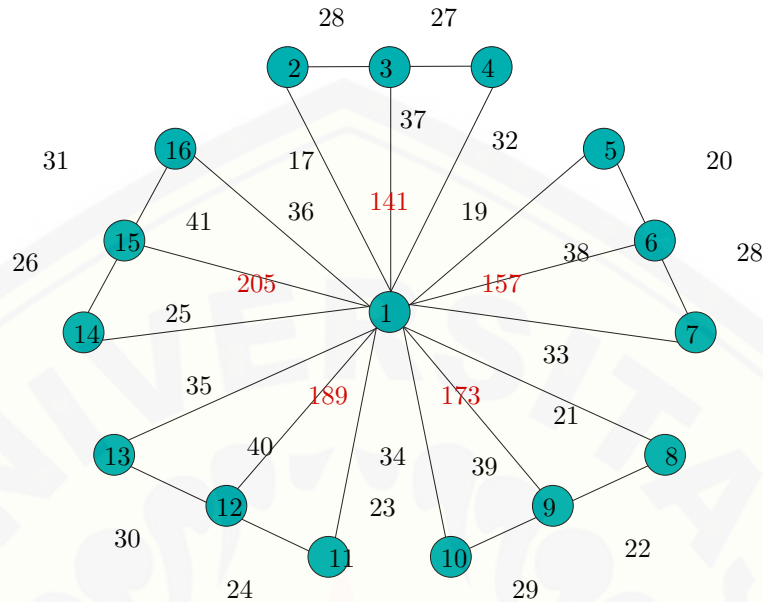
$$\begin{aligned} f_9(px_i) &= 3n + 2i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_9(x_iy_i) &= 3n + 2i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_9(y_iz_i) &= 5n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_9(pz_i) &= 6n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_9(py_i) &= 7n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Jika W_{f_9} didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka w_{f_9} dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_9} &= w_{f_9} + f_9(px_i) + f_9(x_iy_i) + f_9(y_iz_i) + f_9(pz_i) + f_9(py_i) \\ &= 24n + 16i + 5, \text{ jika } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_9} = \{24n + 21, 24n + 37, \dots, 40n + 5\}$. Sehingga terbukti bahwa amalgamasi pada graf kipas (F_3^n) memiliki super $(24n + 21, 16) - F_3$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. □

Gambar 4.10 merupakan contoh super $(24n + 21, 16) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^5



Gambar 4.10 Super $(24n + 21, 16) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5

Pada teorema berikutnya akan dibuktikan super $(a, d)\mathcal{H}$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n dengan nilai $d=18$ dengan syarat berlaku untuk $n \geq 2$. Teorema dibawah ini menggunakan label titik yang sama seperti pada teorema 4.1.8 $f_{10}=f_8$ dan label sisi yang sama seperti teorema 4.1.7 $f_{10}=f_7$.

◇ **Teorema 4.1.10.** *Ada super $(23n+22, 18)\text{-}F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Untuk melabeli titik amalgamasi graf kipas (F_3^n) gunakan label titik yang terdapat pada teorema 4.1.8 ke dalam teorema 4.1.10 dimana $f_{10}=f_8$. Sehingga $f_{10}(p)=f_8(p)$, $f_{10}(x_i)=f_8(x_i)$, $f_{10}(y_i)=f_8(y_i)$, $f_{10}(z_i)=f_8(z_i)$. Dengan demikian maka bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas yang didefinisikan dengan $w_{f_{10}}=w_{f_8}=9i + 1$.

Untuk melabeli sisi amalgamasi graf kipas (F_3^n) gunakan label sisi yang terdapat pada teorema 4.1.7 ke dalam teorema 4.1.10 dimana $f_{10}=f_7$. Sehingga

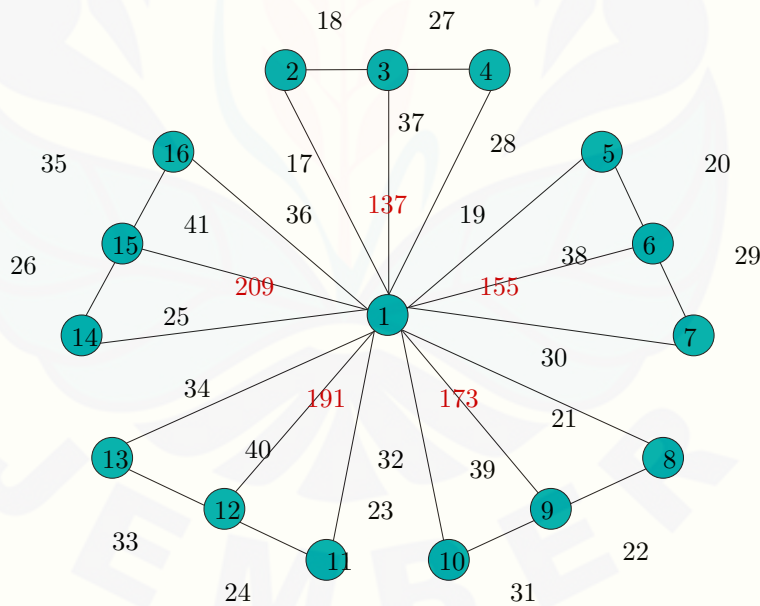
$f_{10}(px_i) = f_7(px_i), f_{10}(x_iy_i) = f_7(x_iy_i), f_{10}(y_iz_i) = f_7(y_iz_i), f_{10}(pz_i) = f_7(pz_i), f_{10}(py_i) = f_7(py_i)$.

Jika $W_{f_{10}}$ didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka $w_{f_{10}}$ dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_{10}} &= w_{f_{10}} + f_{10}(px_i) + f_{10}(x_iy_i) + f_{10}(y_iz_i) + f_{10}(pz_i) + f_{10}(py_i) \\ &= 23n + 18i + 4, \text{ jika } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_{10}} = \{23n + 22, 23n + 40, \dots, 41n + 4\}$. Sehingga terbukti bahwa amalgamasi pada graf kipas F_3^n memiliki super $(23n+22, 18) - F_3$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.11 merupakan contoh super $(23n + 22, 18) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^5



Gambar 4.11 Super $(23n + 22, 18) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5

Pada teorema berikutnya akan dibuktikan super $(a, d) - \mathcal{H}$ antimagic total

dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n dengan nilai $d=20$ dengan syarat berlaku untuk $n \geq 2$. Teorema dibawah ini menggunakan label titik yang sama seperti pada teorema 4.1.8 $f_{11}=f_8$.

◇ **Teorema 4.1.11.** *Ada super $(22n+23, 20)$ - F_3 antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Untuk melabeli titik amalgamasi graf kipas F_3^n gunakan label titik yang terdapat pada teorema 4.1.8 ke dalam teorema 4.1.11 dimana $f_{11}=f_8$. Sehingga $f_{11}(p)=f_8(p)$, $f_{11}(x_i)=f_8(x_i)$, $f_{11}(y_i)=f_8(y_i)$, $f_{11}(z_i)=f_8(z_i)$. Dengan demikian maka bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas yang didefinisikan dengan $w_{f_{11}}=w_{f_8}=9i + 1$.

Labeli sisi amalgamasi graf kipas F_3^n dengan fungsi f_{11} sebagai berikut:

$$f_{11}(px_i) = 3n + 3i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_{11}(x_iy_i) = 3n + 3i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_{11}(y_iz_i) = 3n + 3i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_{11}(pz_i) = 6n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

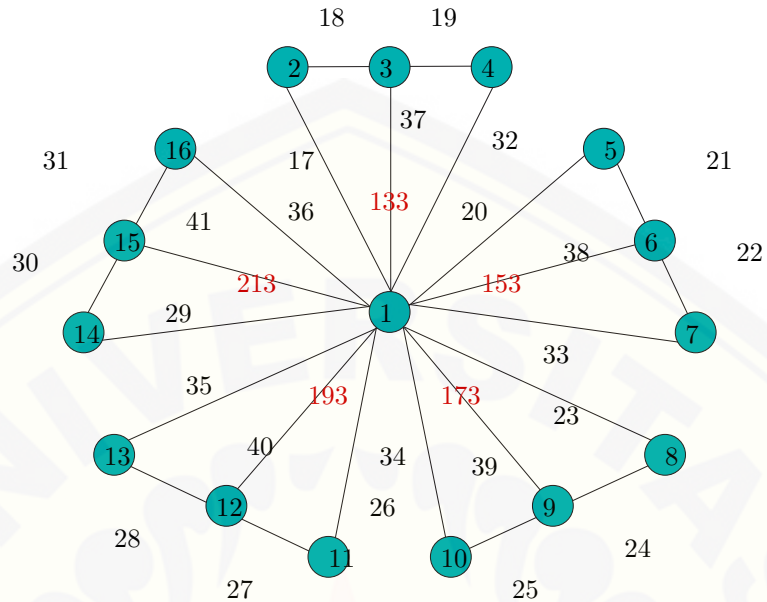
$$f_{11}(py_i) = 7n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

Jika $W_{f_{11}}$ didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka $w_{f_{11}}$ dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_{11}} &= w_{f_{11}} + f_{11}(px_i) + f_{11}(x_iy_i) + f_{11}(y_iz_i) + f_{11}(pz_i) + f_{11}(py_i) \\ &= 22n + 20i + 3, \text{ jika } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_{11}} = \{22n + 23, 22n + 43, \dots, 42n + 3\}$. Sehingga terbukti bahwa amalgamasi pada graf kipas F_3^n memiliki super $(22n+23, 20) - F_3$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. □

Gambar 4.12 merupakan contoh super $(22n + 23, 20) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^5



Gambar 4.12 Super $(22n + 23, 20) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5

Pada teorema berikutnya akan dibuktikan super $(a, d)\mathcal{H}$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n dengan nilai $d=22$ dengan syarat berlaku untuk $n \geq 2$. Teorema dibawah ini menggunakan label titik yang sama seperti pada teorema 4.1.8 $f_{12}=f_8$.

◇ **Teorema 4.1.12.** *Ada super $(21n + 24, 22)\text{-}F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Untuk melabeli titik amalgamasi graf kipas F_3^n gunakan label titik yang terdapat pada teorema 4.1.8 ke dalam teorema 4.1.12 dimana $f_{12}=f_8$. Sehingga $f_{12}(p)=f_8(p)$, $f_{12}(x_i)=f_8(x_i)$, $f_{12}(y_i)=f_8(y_i)$, $f_{12}(z_i)=f_8(z_i)$. Dengan demikian maka bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas yang didefinisikan dengan $w_{f_{12}}=w_{f_8}=9i + 1$.

Labeli sisi amalgamasi graf kipas F_3^n dengan fungsi f_{12} sebagai berikut:

$$f_{12}(px_i) = 3n + 3i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_{12}(x_iy_i) = 3n + 3i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_{12}(y_iz_i) = 3n + 3i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_{12}(pz_i) = 6n + 2i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_{12}(py_i) = 6n + 2i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

Jika $W_{f_{12}}$ didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka $w_{f_{12}}$ dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_{12}} &= w_{f_{12}} + f_{12}(px_i) + f_{12}(x_iy_i) + f_{12}(y_iz_i) + f_{12}(pz_i) + f_{12}(py_i) \\ &= 21n + 22i + 2, \text{ jika } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

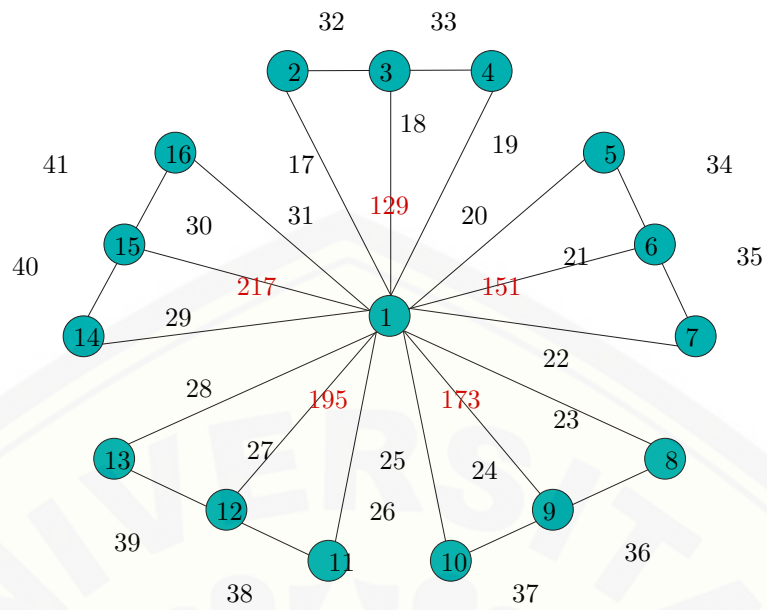
Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_{12}} = \{21n + 24, 21n + 46, \dots, 43n + 2\}$. Sehingga terbukti bahwa amalgamasi pada graf kipas F_3^n memiliki super $(21n + 24, 22) - F_3$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.14 merupakan contoh super $(21n + 24, 22) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^5

Pada teorema berikutnya akan dibuktikan super $(a, d) - \mathcal{H}$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n dengan nilai $d=24$ dengan syarat berlaku untuk $n \geq 2$. Teorema dibawah ini menggunakan label titik yang sama seperti pada teorema 4.1.1 $f_{13}=f_1$.

\diamond **Teorema 4.1.13.** *Ada super $(20n + 25, 24) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Untuk melabeli titik amalgamasi graf kipas F_3^n gunakan label titik yang



Gambar 4.13 Super $(21n + 24, 22) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5

terdapat pada teorema 4.1.1 ke dalam teorema 4.1.13 dimana $f_{13}=f_1$. Sehingga $f_{13}(p)=f_1(p)$, $f_{13}(x_i)=f_1(x_i)$, $f_{13}(y_i)=f_1(y_i)$, $f_{13}(z_i)=f_1(z_i)$. Dengan demikian maka bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas yang didefinisikan dengan $w_{f_{13}}=w_{f_1}=5n - i + 6$.

Labeli sisi amalgamasi graf kipas F_3^n dengan fungsi f_{13} sebagai berikut:

$$f_{13}(px_i) = 3n + 5i - 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_{13}(x_iy_i) = 3n + 5i - 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_{13}(y_iz_i) = 3n + 5i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_{13}(pz_i) = 3n + 5i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_{13}(py_i) = 3n + 5i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

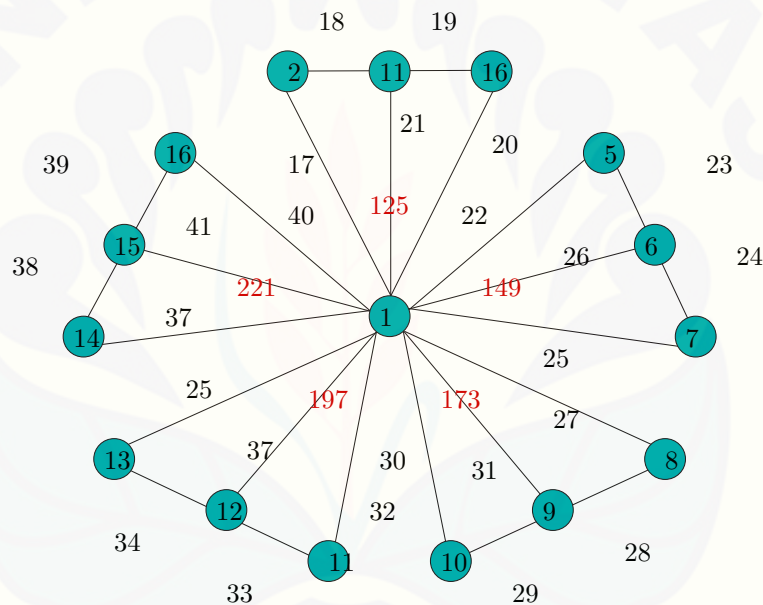
Jika $W_{f_{13}}$ didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka $w_{f_{13}}$ dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat

dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_{13}} &= w_{f_{13}} + f_{13}(px_i) + f_{13}(x_iy_i) + f_{13}(y_iz_i) + f_{13}(pz_i) + f_{13}(py_i) \\ &= 20n + 24i + 1, \text{ jika } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_{13}} = \{20n + 25, 20n + 49, \dots, 44n + 1\}$. Sehingga terbukti bahwa amalgamasi pada graf kipas F_3^n memiliki super $(20n+25, 24) - F_3$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.14 merupakan contoh super $(44n + 1, 24) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^5



Gambar 4.14 Super $(20n + 25, 24) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5

Pada teorema berikutnya akan dibuktikan super $(a, d) - \mathcal{H}$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas (F_3^n) dengan nilai $d=26$ dengan syarat berlaku untuk $n \geq 2$. Teorema dibawah ini menggunakan label titik yang sama seperti pada teorema 4.1.2 $f_{14}=f_2$ dan label sisi yang sama seperti teorema 4.1.13 $f_{14}=f_{13}$.

◇ **Teorema 4.1.14.** *Ada super $(19n+26, 26)$ - F_3 antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Untuk melabeli titik amalgamasi graf kipas F_3^n gunakan label titik yang terdapat pada teorema 4.1.2 ke dalam teorema 4.1.14 dimana $f_{14}=f_2$. Sehingga $f_{14}(p)=f_2(p)$, $f_{14}(x_i)=f_2(x_i)$, $f_{14}(y_i)=f_2(y_i)$, $f_{14}(z_i)=f_2(z_i)$. Dengan demikian maka bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas yang didefinisikan dengan $w_{f_{14}}=w_{f_2}=4n + i + 5$.

Untuk melabeli sisi amalgamasi graf kipas F_3^n gunakan label sisi yang terdapat pada teorema 4.1.13 ke dalam teorema 4.1.14 dimana $f_{14}=f_{13}$. Sehingga $f_{14}(px_i)=f_{13}(px_i)$, $f_{14}(x_iy_i)=f_{13}(x_iy_i)$, $f_{14}(y_iz_i)=f_{13}(y_iz_i)$, $f_{14}(pz_i)=f_{13}(pz_i)$, $f_{14}(py_i)=f_{13}(py_i)$.

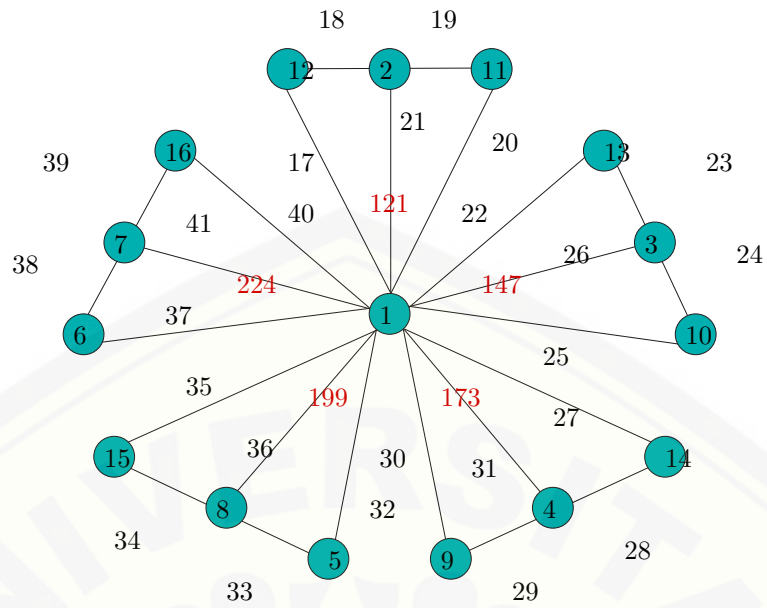
Jika $W_{f_{14}}$ didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka $w_{f_{14}}$ dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_{14}} &= w_{f_{14}} + f_{14}(px_i) + f_{14}(x_iy_i) + f_{14}(y_iz_i) + f_{14}(pz_i) + f_{14}(py_i) \\ &= 19n + 26i, \text{ jika } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_{14}} = \{19n + 26, 19n + 52, \dots, 45n\}$. Sehingga terbukti bahwa amalgamasi pada graf kipas F_3^n memiliki super $(19n + 26, 26) - F_3$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. □

Gambar 4.15 merupakan contoh super $(19n + 26, 26) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^5

Pada teorema berikutnya akan dibuktikan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n dengan nilai $d=28$ dengan syarat berlaku untuk $n \geq 2$. Teorema dibawah ini menggunakan label titik yang sama seperti pada teorema 4.1.5 $f_{15}=f_5$ dan label sisi yang sama seperti teorema 4.1.13 $f_{15}=f_{13}$.



Gambar 4.15 Super $(19n + 26, 26) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5

◇ **Teorema 4.1.15.** *Ada super $(18n + 27, 28) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Untuk melabeli titik amalgamasi graf kipas (F_3^n) gunakan label titik yang terdapat pada teorema 4.1.5 ke dalam teorema 4.1.15 dimana $f_{15} = f_5$. Sehingga $f_{15}(p) = f_5(p)$, $f_{15}(x_i) = f_5(x_i)$, $f_{15}(y_i) = f_5(y_i)$, $f_{15}(z_i) = f_5(z_i)$. Dengan demikian maka bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas yang didefinisikan dengan $w_{f_{15}} = w_{f_5} = 3n + 3i + 4$.

Untuk melabeli sisi amalgamasi graf kipas F_3^n gunakan label sisi yang terdapat pada teorema 4.1.13 ke dalam teorema 4.1.15 dimana $f_{15} = f_{13}$. Sehingga $f_{15}(px_i) = f_{13}(px_i)$, $f_{15}(x_iy_i) = f_{13}(x_iy_i)$, $f_{15}(y_iz_i) = f_{13}(y_iz_i)$, $f_{15}(pz_i) = f_{13}(pz_i)$, $f_{15}(py_i) = f_{13}(py_i)$.

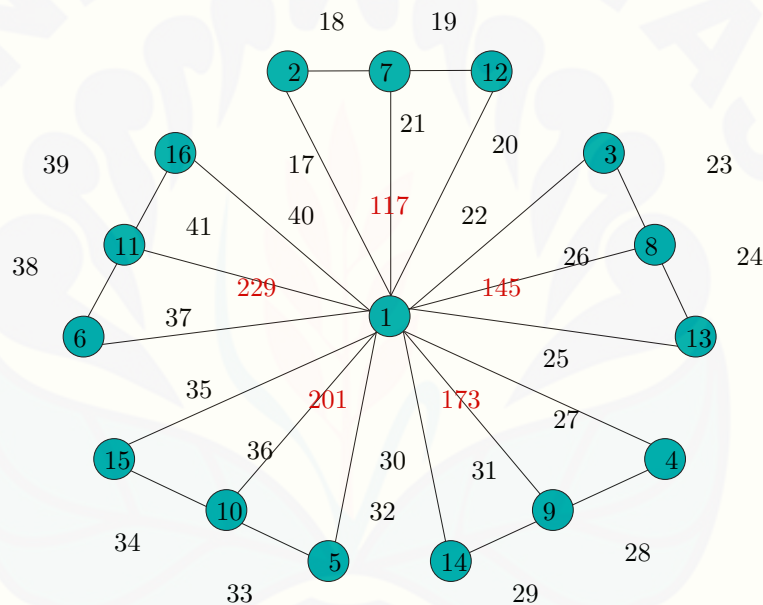
Jika $W_{f_{15}}$ didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka $w_{f_{15}}$ dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat

dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_{15}} &= w_{f_{15}} + f_{15}(px_i) + f_{15}(x_iy_i) + f_{15}(y_iz_i) + f_{15}(pz_i) + f_{15}(py_i) \\ &= 18n + 28i - 1, \text{ jika } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_{15}} = \{18n + 27, 18n + 55, \dots, 46n - 1\}$. Sehingga terbukti bahwa amalgamasi pada graf kipas F_3^n memiliki super $(18n+27, 28) - F_3$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.16 merupakan contoh super $(18n + 27, 28) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^5



Gambar 4.16 Super $(18n + 27, 28) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5

Pada teorema berikutnya akan dibuktikan super $(a, d) - \mathcal{H}$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n dengan nilai $d=30$ dengan syarat berlaku untuk $n \geq 2$. Teorema dibawah ini menggunakan label titik yang sama seperti pada teorema 4.1.6 $f_{16}=f_6$ dan label sisi yang sama seperti teorema 4.1.13 $f_{16}=f_{13}$.

◇ **Teorema 4.1.16.** *Ada super $(20n-25, 30)$ - F_3 antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Untuk melabeli titik amalgamasi graf kipas (F_3^n) gunakan label titik yang terdapat pada teorema 4.1.6 ke dalam teorema 4.1.16 dimana $f_{16}=f_6$. Sehingga $f_{16}(p)=f_6(p)$, $f_{16}(x_i)=f_6(x_i)$, $f_{16}(y_i)=f_6(y_i)$, $f_{16}(z_i)=f_6(z_i)$. Dengan demikian maka bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas yang didefinisikan dengan $w_{f_{16}}=w_{f_6}=5n + 5i$.

Untuk melabeli sisi amalgamasi graf kipas F_3^n gunakan label sisi yang terdapat pada teorema 4.1.13 ke dalam teorema 4.1.16 dimana $f_{16}=f_{13}$. Sehingga $f_{16}(px_i)=f_{13}(px_i)$, $f_{16}(x_iy_i)=f_{13}(x_iy_i)$, $f_{16}(y_iz_i)=f_{13}(y_iz_i)$, $f_{16}(pz_i)=f_{13}(pz_i)$, $f_{16}(py_i)=f_{13}(py_i)$.

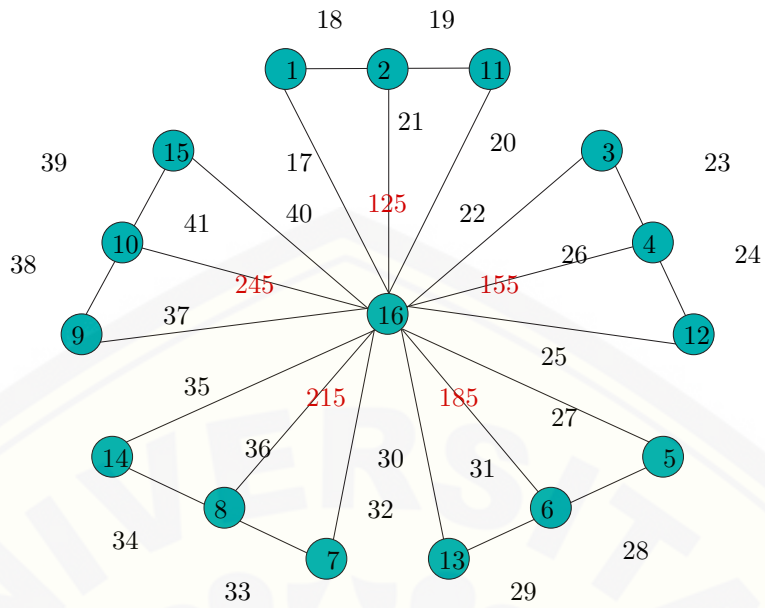
Jika $W_{f_{16}}$ didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka $w_{f_{16}}$ dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_{16}} &= w_{f_{16}} + f_{16}(px_i) + f_{16}(x_iy_i) + f_{16}(y_iz_i) + f_{16}(pz_i) + f_{16}(py_i) \\ &= 20n + 30i - 5, \text{ jika } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_{16}} = \{20n + 25, 20n + 55, \dots, 50n - 5\}$. Sehingga terbukti bahwa amalgamasi pada graf kipas F_3^n memiliki super $(20n+25, 30) - F_3$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. □

Gambar 4.17 merupakan contoh super $(20n + 25, 30) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^5

Pada teorema berikutnya akan dibuktikan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n dengan nilai $d=34$ dengan syarat berlaku untuk $n \geq 2$. Teorema dibawah ini menggunakan label titik yang sama seperti pada teorema 4.1.8 $f_{17}=f_8$ dan label sisi yang sama seperti teorema 4.1.13 $f_{17}=f_{13}$.



Gambar 4.17 Super $(20n + 25, 30) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5

◇ **Teorema 4.1.17.** *Ada super $(15n+30, 34)-F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n untuk $n \geq 2$.*

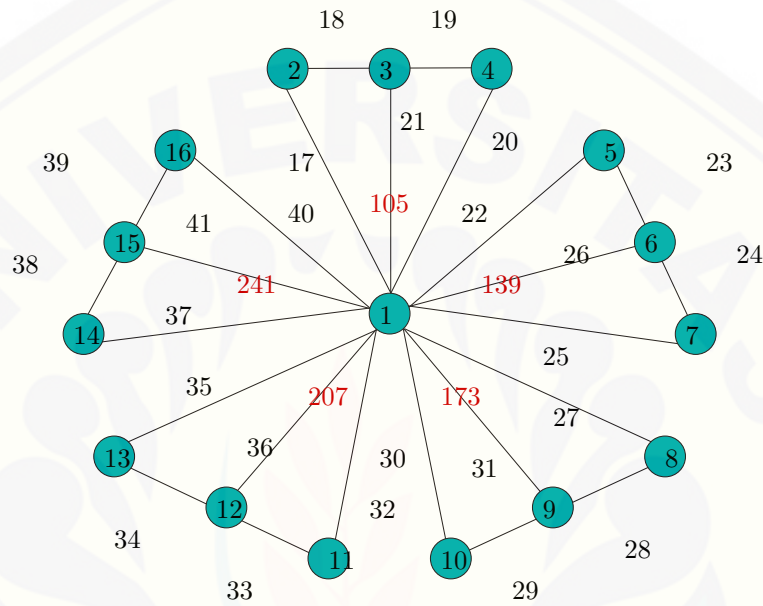
Bukti. Untuk melabeli titik amalgamasi graf kipas F_3^n gunakan label titik yang terdapat pada teorema 4.1.8 ke dalam teorema 4.1.17 dimana $f_{17}=f_8$. Sehingga $f_{17}(p)=f_8(p)$, $f_{17}(x_i)=f_8(x_i)$, $f_{17}(y_i)=f_8(y_i)$, $f_{17}(z_i)=f_8(z_i)$. Dengan demikian maka bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas yang didefinisikan dengan $w_{f_{17}}=w_{f_8}=9i + 1$.

Untuk melabeli sisi amalgamasi graf kipas F_3^n gunakan label sisi yang terdapat pada teorema 4.1.13 ke dalam teorema 4.1.17 dimana $f_{17}=f_{13}$. Sehingga $f_{17}(px_i)=f_{13}(px_i)$, $f_{17}(x_iy_i)=f_{13}(x_iy_i)$, $f_{17}(y_iz_i)=f_{13}(y_iz_i)$, $f_{17}(pz_i)=f_{13}(pz_i)$, $f_{17}(py_i)=f_{13}(py_i)$. Jika $W_{f_{17}}$ didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka $w_{f_{17}}$ dan fungsi label sisi dengan syarat batas i yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_{17}} &= w_{f_{17}} + f_{17}(px_i) + f_{17}(x_iy_i) + f_{17}(y_iz_i) + f_{17}(pz_i) + f_{17}(py_i) \\ &= 15n + 34i - 4, \text{ jika } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_{17}} = \{15n + 30, 15n + 64, \dots, 49n - 4\}$. Sehingga terbukti bahwa amalgamasi pada graf kipas F_3^n memiliki super $(15n + 30, 34) - F_3$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.18 merupakan contoh super $(15n + 30, 34) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^5



Gambar 4.18 Super $(15n + 30, 34) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada F_3^5

4.2 Pelabelan Super $(a, d) - \mathcal{H}$ Antimagic Total Dekomposisi pada Amalgamasi Graf Kipas Diskonektif

Selanjutnya peneliti melakukan penelitian untuk gabungan saling lepas pada amalgamasi graf kipas. Penelitian ini merupakan pengembangan dari pada amalgamasi graf kipas tunggal. Gabungan pada Amalgamasi Graf Kipas didefinisikan sebagai pada amalgamasi graf kipas dengan salinan sebanyak m . Gabungan pada amalgamasi graf kipas mF_3^n didefinisikan sebagai $V(mF_3^n) = \{p^j, x_i^j, y_i^j, z_i^j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ dan sisi $E(mF_3^n) = \{p^j x_i^j, p^j y_i^j, p^j z_i^j, x_i^j y_i^j, y_i^j z_i^j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$.

Sama seperti pada amalgamasi graf kipas tunggal, untuk menentukan batas atas d pada gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas, perlu diketahui pula kardinalitas jumlah titik (p_G) dan jumlah sisi (q_G) pada gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas. Jumlah titik dan jumlah sisi pada (mF_3^n) dapat ditentukan terlebih dahulu dengan mencermati definisi gabungan saling lepas pada suatu graf. Gabungan saling lepas pada amalgamasi graf kipas yang dinotasikan dengan mF_3^n dan didefinisikan sebagai gabungan saling lepas dari m buah salinan amalgamasi graf kipas dengan $1 \leq j \leq m$, ditulis : $1F_3^n \cup 2F_3^n \cup 3F_3^n \cup \dots \cup mF_3^n$. Sehingga jumlah titik amalgamasi graf kipas mF_3^n adalah m kali jumlah titik graf F_3^n dapat dituliskan dengan $p_G = m(3n + 1) = 3nm + m$ dan jumlah sisi graf F_3^n adalah m kali jumlah sisi graf F_3^n dapat dituliskan dengan $q_G = m(5n) = 5nm$. Sedangkan jumlah titik pada dekomposisi amalgamasi graf kipas mF_3^n adalah m kali jumlah titik pada dekomposisi amalgamasi graf kipas F_3^n , yaitu $p_H = m(4) = 4m$ dan jumlah sisi pada dekomposisi amalgamasi graf kipas mF_3^n adalah m kali jumlah sisi pada dekomposisi amalgamasi graf kipas F_3^n , dapat ditulis dengan $q_H = m(5) = 5m$. Jumlah dekomposisi amalgamasi graf kipas mF_3^n adalah m kali jumlah dekomposisi amalgamasi graf kipas tunggal F_3^n , dapat dituliskan $s = m(n) = nm$.

Batas atas d gabungan saling lepas pada amalgamasi graf kipas mF_3^n juga dapat ditentukan dengan menggunakan Lemma 4.1.1. Diketahui jumlah titik pada graf mF_3^n adalah $p_G = 3nm + m$ dan jumlah sisi $q_G = 5nm$. Sedangkan jumlah titik pada dekomposisi amalgamsi graf kipas mF_3^n adalah $p_H = 4m$ dan jumlah sisi pada dekomposisi amalgamsi graf kipas $q_H = 5m$ dengan jumlah selimut mF_3^n adalah $s = nm$ untuk m adalah jumlah salinan amalgamasi graf kipas dari atas ke bawah dan n adalah banyaknya *expand* graf amalgamasi kipas. Dengan demikian

batas atas nilai beda d tersebut adalah:

$$\begin{aligned}
 d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s - m} \\
 &= \frac{(3nm + m - 4m)4m + (5nm - 5m)5m}{(n - 1)m} \\
 &= \frac{(3nm - 3)4m + (5nm - 5m)5m}{nm - m} \\
 &= \frac{12nm^2 - 12m^2 + 25nm^2 - 25m^2}{nm - m} \\
 &= \frac{37nm^2 - 37m^2}{nm - m} \\
 &= \frac{37m(nm - m)}{nm - m} \\
 &\leq 37m
 \end{aligned}$$

Sesuai dengan pelabelan $SHATD$ pada amalgamasi graf kipas tunggal, gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas juga menggunakan bilangan bulat positif, sehingga nilai $d \geq 0$ dan d adalah bilangan bulat. Sehingga dapat disimpulkan $d \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 37m\}$. Selanjutnya akan ditentukan fungsi bijektif super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total dekomposisi sesuai dengan nilai d yang telah ditetapkan.

Sama seperti pada amalgamasi graf kipas tunggal, metode yang digunakan dalam menemukan pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total dekomposisi pada gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas mF_3^n terdiri dari beberapa langkah yang diawali dengan menggunakan pendeteksian pola (*pattern recognition*) untuk menentukan pelabelan yang berlaku sampai dengan batas i, j yang telah ditemukan. Kemudian untuk menentukan pola secara umum digunakan fungsi-fungsi dalam barisan aritmatika untuk menentukan fungsi bijektifnya. Setelah fungsi bijektif diketahui maka harus dibuktikan secara deduktif matematik untuk membuktikan kebenaran dari teorema-teorema tersebut.

Perlu diketahui bahwa teorema dalam penelitian ini adalah bukan teorema yang biimplikatif atau karakteristik sehingga pembuktiannya hanya dilakukan satu arah. Dari hasil penggabungan pola melalui *pattern recognition* dan kon-

sep barisan aritmatika, maka diperoleh teorema dan akibat sebagai berikut. Teorema yang ditemukan dalam penelitian ini tidak bersifat tunggal (berkenaan sifat ketunggalan) melainkan hanya bersifat keberadaan (*existence but not unique*).

Untuk menentukan pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total dekomposisi pada gabungan amalgamasi graf kipas mF_3^n . Terlebih dahulu harus diketahui batas atas nilai d untuk gabungan graf sebanyak m amalgamasi graf kipas, dengan menggunakan rumus yang telah ada.

◇ **Teorema 4.2.1.** *Ada gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas mF_3^n memiliki super $(30nm + \frac{17m+13}{2}, 4) - F_3$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$ dimana m ganjil.*

Bukti. Labeli titik gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas mF_3^n dengan fungsi bijektif f_{18} sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_{18}(p) &= j, \text{ untuk } 1 \leq j \leq m, j \text{ sebarang} \\ f_{18}(x_i^j) &= 3mi + j - 2m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{18}(y_i^j) &= 3mi - 2j + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq \frac{m-1}{2} \\ f_{18}(y_i^j) &= m + 3mi - 2j + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, \frac{m+1}{2} \leq j \leq m \\ f_{18}(z_i^j) &= \frac{7m+1}{2} + j + 3mi - 3m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq \frac{m-1}{2} \\ f_{18}(z_i^j) &= \frac{5m+1}{2} + j + 3mi - 3m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, \frac{m+1}{2} \leq j \leq m \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa f_{18} adalah fungsi bijektif yang memetakan mF_3^n ke himpunan bilangan bulat $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, 3nm + m\}$. Jika $w_{f_{18}}$ didefinisikan sebagai bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas dimana bobot dekomposisi tersebut adalah $\mathcal{H}=F_3$ sebagai dekomposisinya, maka fungsi bijektif $w_{f_{18}}$ dapat ditentukan sebagai berikut:

$$w_{f_{18}} = j + 9mi + \left(\frac{-3m+3}{2}\right); 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

Labeli sisi gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas (mF_3^n) dengan fungsi

bijektif f_{18} sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_{18}(p^j y_i^j) &= 4nm + j - mi + m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{18}(p^j z_i^j) &= 5nm + j - mi + m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{18}(p^j x_i^j) &= 6nm + j - mi + m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{18}(x_i^j y_i^j) &= 7nm + j - mi + m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{18}(y_i^j z_i^j) &= 8nm + 2m - mi - j + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

Misalkan $W_{f_{18}}$ didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka $w_{f_{18}}$ dan fungsi label sisi dengan syarat batas i dan j yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$W_{f_{18}} = 30nm + 4j + 4mi + \frac{9m+5}{2}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

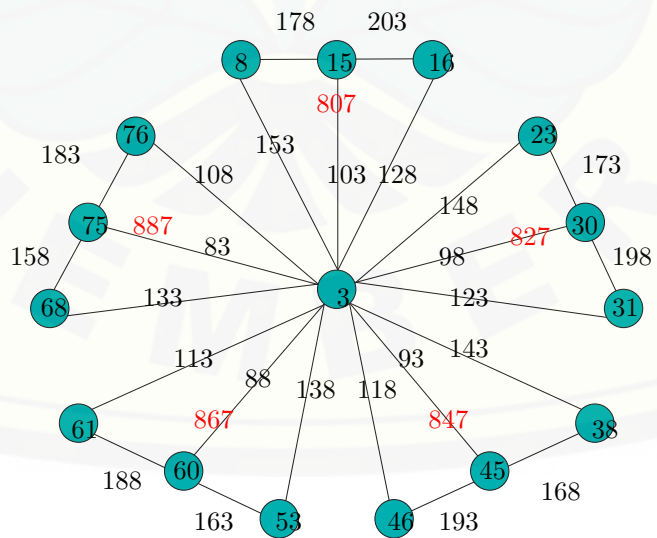
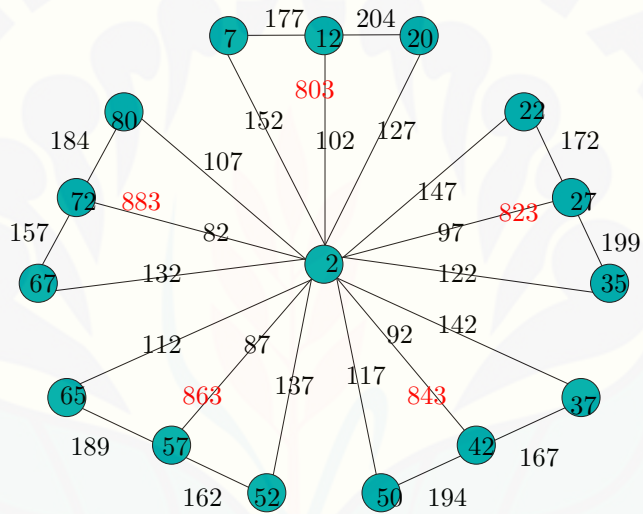
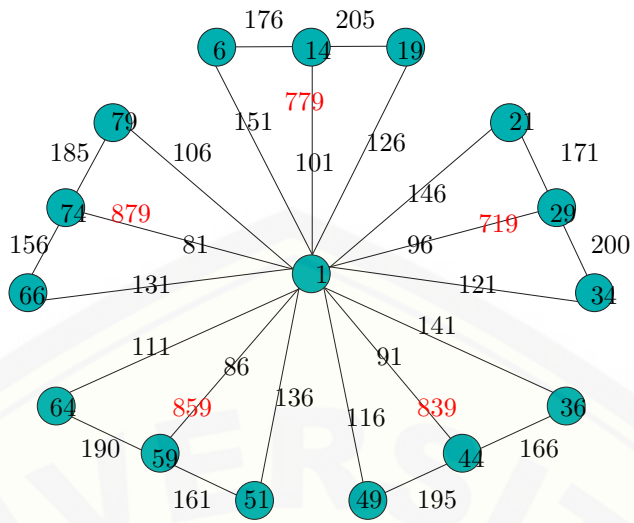
Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_{18}} = \{30nm + \frac{17m+13}{2}, 30nm + \frac{17m+21}{2}, \dots, 34nm + \frac{17m+5}{2}\}$. Sehingga terbukti bahwa gabungan saling lepas amalgamasi pada graf kipas (mF_3^n) memiliki super $(30nm + \frac{17m+13}{2}, 4) - F_3$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$, $m \geq 3$ dan m ganjil. \square

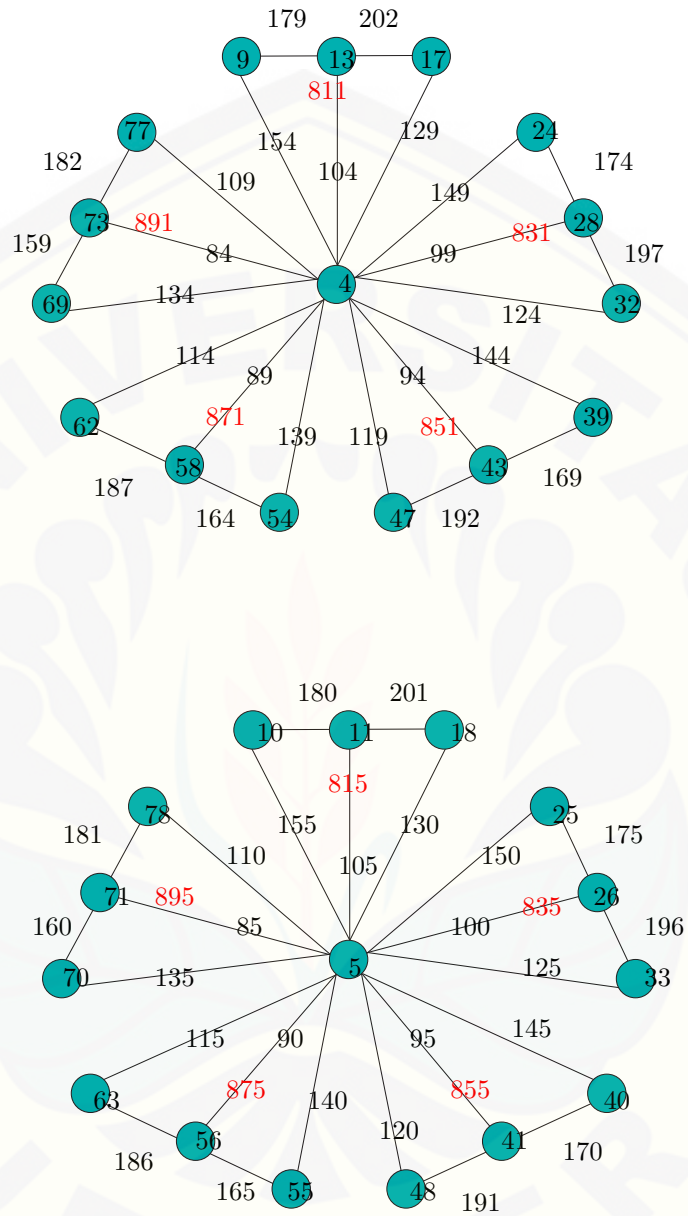
Gambar 4.19 merupakan contoh super $(30nm + \frac{17m+13}{2}, 4) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada gabungan amalgamasi graf kipas $5F_3^5$.

Pada teorema diatas hanya berlaku untuk m salinan bernilai ganjil dimana $m=3, 5, 7$ dan seterusnya. Pembuktian teorema selanjutnya juga berlaku syarat yang sama yaitu $n \geq 2$ dan m salinan bernilai ganjil dimulai dari 3.

\diamond **Teorema 4.2.2.** *Ada gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas (mF_3^n) memiliki super $(29nm + \frac{17m+15}{2}, 6) - F_3$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$ dimana m salinan bernilai ganjil.*

Bukti. Untuk melabeli titik gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas mF_3^n gunakan label titik yang terdapat pada teorema 4.2.1 ke dalam teorema 4.2.2 dimana $f_{19}=f_{18}$. Sehingga $f_{19}(p^j)=f_{18}(p^j)$, $f_{19}(x_i^j)=f_{18}(x_i^j)$, $f_{19}(y_i^j)=f_{18}(y_i^j)$,





Gambar 4.19 Super $(30nm + \frac{17m+13}{2}, 4) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada gabungan saling lepas $5F_3^5$

$f_{19}(z_i^j) = f_{18}(z_i^j)$. Dengan demikian maka bobot dekomposisi dari pelabelan total dekomposisi pada gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas yang didefinisikan dengan $w_{f_{19}} = w_{f_{18}} = j + 9mi + (\frac{-3m+3}{2})$.

Labeli sisi gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas (mF_3^n) dengan fungsi bijektif f_{19} sebagai berikut:

$$f_{19}(p^j y_i^j) = 4nm + j - mi + m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

$$f_{19}(p^j z_i^j) = 5nm + j - mi + m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

$$f_{19}(p^j x_i^j) = 6nm + j - mi + m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

$$f_{19}(x_i^j y_i^j) = 7nm + j - mi + m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

$$f_{19}(y_i^j z_i^j) = 7nm + j - mi, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

Misalkan $W_{f_{19}}$ didefinisikan sebagai bobot total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot dekomposisi dengan label sisinya maka $w_{f_{19}}$ dan fungsi label sisi dengan syarat batas i dan j yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

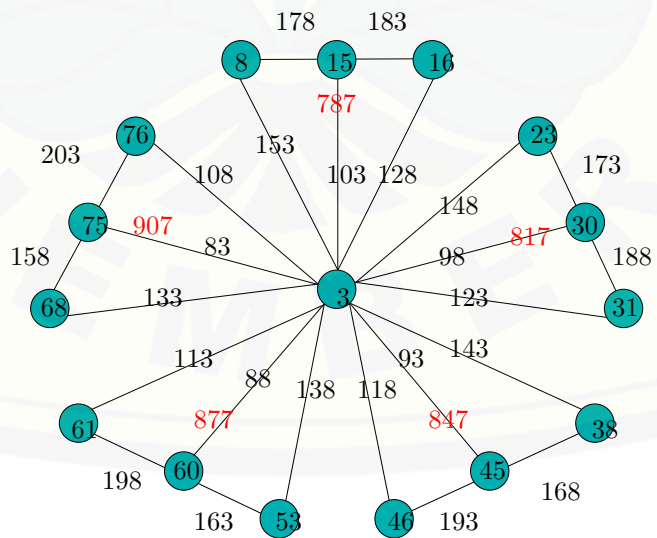
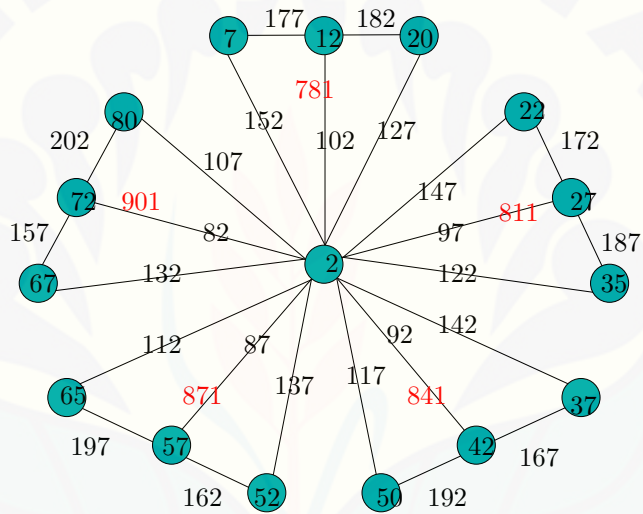
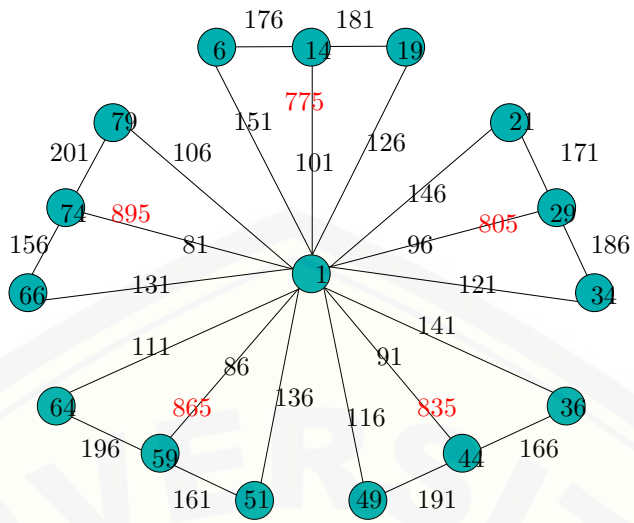
$$W_{f_{19}} = 29nm + 6mi + 6j \frac{+5m+3}{2}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

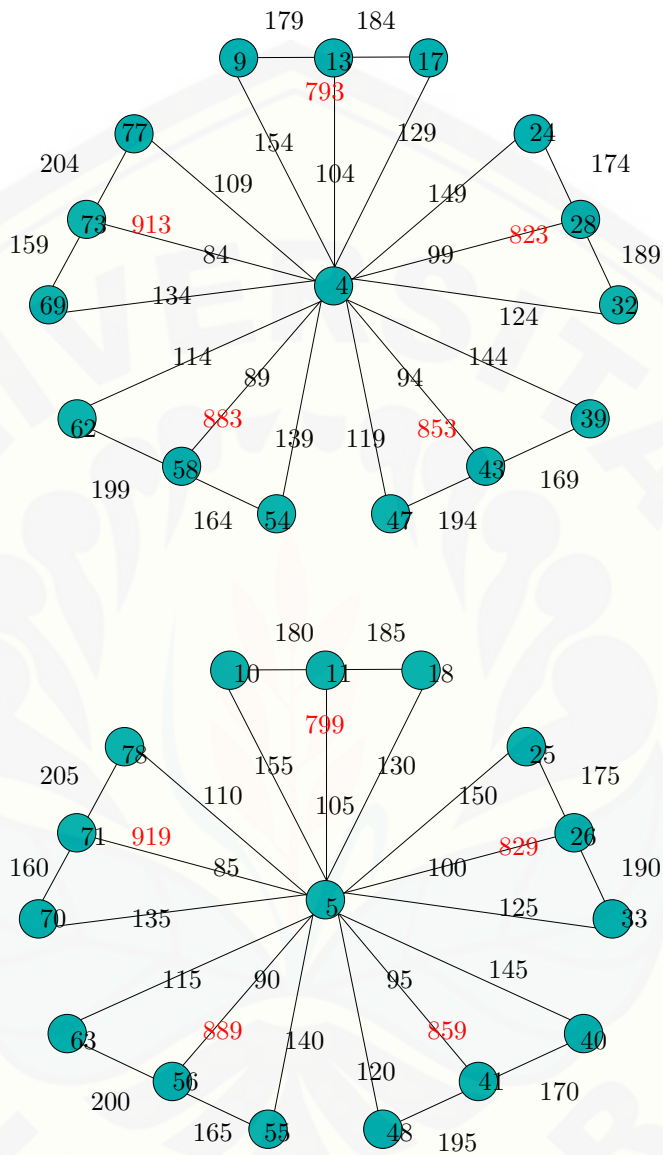
Dengan demikian maka didapatkan himpunan bobot total dekomposisi $W_{f_{19}} = \{29nm \frac{+17m+15}{2}, 29nm \frac{+17m+27}{2}, \dots, 35nm + \frac{17m+3}{2}\}$. Sehingga terbukti bahwa gabungan saling lepas amalgamasi pada graf kipas mF_3^n memiliki super $(29nm + \frac{17m+15}{2}, 6) - F_3$ antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2, m \geq 3$ dan m ganjil. \square

Gambar 4.20 merupakan contoh super $(29nm + \frac{17m+15}{2}, 6) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada gabungan amalgamasi graf kipas $5F_3^5$.

4.3 Pembahasan

Metode penelitian ini digunakan untuk menentukan kardinalitas, menentukan batas atas nilai d , menentukan fungsi titik, fungsi bobot dekomposisi, fungsi sisi, dan fungsi bobot total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas tunggal F_3^n





Gambar 4.20 Super $(29nm + \frac{17m+15}{2}, 6) - F_3$ antimagic total dekomposisi pada gabungan saling lepas $5F_3^5$

maupun gabungan saling lepasnya mF_3^n . Berdasarkan hasil perhitungan diperoleh nilai d yang mungkin untuk super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas tunggal F_3^n maupun gabungan saling lepasnya mF_3^n adalah $d \in \{0, 1, 2, \dots, 37\}$. Hasil dari penelitian ini adalah didapatkan beberapa nilai d tersebut diatas, dan teorema-teorema baru beserta pembuktiannya terkait dekomposisi pada amalgamasi graf kipas tunggal maupun gabungan saling lepasnya.

Beberapa nilai d diatas dicari dengan mengkombinasikan label titik yang sama dengan label sisi yang berbeda dan juga label titik yang berbeda dengan label sisi yang sama. Hasil dari mengkombinasikan label titik dan sisi tersebut maka didapatkan 17 (tujuh belas) teorema untuk yang konektif dan 2 (dua) teorema untuk gabungan saling lepasnya. Penggunaan dari label titik yang sama akan menghasilkan bobot dekomposisi yang sama pula. Teorema-teorema yang didapatkan dari penggunaan label titik yang sama dengan sisi yang berbeda terbagi beberapa kelompok yaitu pada teorema 4.1.1, teorema 4.1.3 dan teorema 4.1.13; teorema 4.1.2, teorema 4.1.4 dan teorema 4.1.14; teorema 4.1.5, teorema 4.1.7 dan teorema 4.1.15; teorema 4.1.6 dan teorema 4.1.16 serta pada teorema 4.1.8, teorema 4.1.9, teorema 4.1.10, teorema 4.1.11, teorema 4.1.12 dan teorema 4.1.17.

Sedangkan untuk teorema-teorema yang didapatkan dari penggunaan label titik yang berbeda dengan label sisi yang sama juga terbagi atas beberapa kelompok yaitu pada teorema 4.1.1 dan teorema 4.1.2; teorema 4.1.3, 4.1.4, 4.1.5, 4.1.6 dan 4.1.8; teorema 4.1.7 dan 4.1.10; teorema 4.1.9; teorema 4.1.11; teorema 4.1.12; dan juga teorema 4.1.13, teorema 4.1.14, teorema 4.1.15, teorema 4.1.16 dan teorema 4.1.17.

Selanjutnya untuk hasil penelitian amalgamasi graf kipas gabungan saling lepasnya diperoleh 2 (dua) nilai d yaitu $d = 4$ dan $d = 6$. Nilai d keduanya didapat dengan cara menggunakan label titik yang sama dengan hanya ada satu label sisi yang berbeda yaitu label sisi dari y_i^j ke z_i^j atau $y_i^j z_i^j$.

Nilai batas atas d yang sudah diketahui berbeda dan nilai awal a juga berbeda namun pada penelitian ini terdapat nilai a yang sama yaitu pada teorema 4.1.3 dan teorema 4.1.6. Namun demikian seluruh label titik dan seluruh label sisi yang digunakan sama baik untuk semua nilai beda d , label titik yang digunakan

adalah dari 1 hingga p_G dimana p_G adalah jumlah titik pada graf sedangkan label untuk sisi yang digunakan adalah dimulai dari $p_G + 1$ hingga $p_G + q_G$ dimana q_G merupakan jumlah sisi, sehingga $p_G + q_G$ merupakan jumlah titik dan sisi pada graf. Jika kedua label tersebut digunakan untuk melabeli sebuah graf dengan aturan yang diberikan diatas maka pelabelan tersebut disebut sebagai pelabelan total. Pada amalgamasi graf kipas tunggal (F_3^n) dan gabungan amalgamasi graf kipas ketiga puluh tujuh nilai d tersebut berlaku pada syarat yang sama yaitu $n \geq 2$.

Menurut hasil penelitian yang telah dilakukan, peneliti telah mendapatkan Super \mathcal{H} -antimagic total dekomposisi amalgamasi graf kipas tunggal untuk $d \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 34\}$ dan Super \mathcal{H} -antimagic total dekomposisi untuk gabungan saling lepas pada amalgamasi graf kipas $d \in \{4, 6\}$.

Berdasarkan hasil penelitian dan perhitungan yang telah dilakukan sebelumnya, terdapat beberapa pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n dan gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas mF_3^n yang belum ditemukan oleh peneliti. Berdasarkan visualisasi contoh-contoh pelabelan dan penerapan fungsi bijektif hasil penelitian yang telah ditemukan, diharapkan dapat membantu peneliti lain yang akan melakukan penelitian sejenis. Beberapa pelabelan dan penerapan fungsi bijektif yang belum ditemukan oleh penulis diberikan pada masalah terbuka berikut:

Masalah terbuka. Super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas (F_3^n) untuk $n \geq 2$ dengan $d \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 32, 33, 35, 36, 37\}$

Masalah terbuka. Super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total dekomposisi pada gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas (mF_3^n), dengan $n \geq 2$, $m \geq 3$ dan m ganjil untuk $d \leq 37$ kecuali $d \in \{4, 6\}$

Masalah terbuka. Super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total dekomposisi pada gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas (mF_3^n), dengan $n \geq 2$, $m \geq 2$ dan m genap untuk $d \leq 37$

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

1. Pada amalgamasi graf kipas F_3^n memiliki pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total dekomposisi untuk $d = \{0, 1, 2, \dots, 36, 37\}$. Hasil penelitian ini dibuktikan pada teorema bahwa amalgamasi graf kipas F_3^n terdapat fungsi bijektif pelabelan super $(32n + 13, 0)$, $(31n + 14, 2)$, $(310n + 15, 4)$, $(29n + 16, 6)$, $(28n + 17, 8)$, $(30n + 15, 10)$, $(26n + 19, 12)$, $(25n + 20, 14)$, $(24n + 21, 16)$, $(23n + 22, 18)$, $(22n + 23, 20)$, $(21n + 24, 22)$, $(20n + 25, 24)$, $(19n + 26, 26)$, $(18n + 27, 28)$, $(20n + 25, 30)$, $(15n + 30, 34)$ - F_3 antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$.
2. Gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas mF_3^n memiliki pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} total dekomposisi untuk $d = \{0, 1, 2, \dots, 37m\}$. Hasil penelitian ini dibuktikan bahwa Gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas terdapat fungsi bijektif pelabelan super $(30nm + \frac{17m+13}{2}, 4)$, $(29nm + \frac{17m+15}{2}, 6)$ - F_3 antimagic total dekomposisi untuk $n \geq 2$, $m \geq 3$ dan m ganjil.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n serta mengacu pada masalah terbuka (*open problem*) dari hasil penelitian yang telah ditemukan, maka peneliti memberikan saran kepada pembaca agar dapat melakukan penelitian pada pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total dekomposisi pada amalgamasi graf kipas F_3^n , dengan $n \geq 2$ untuk $d \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 32, 33, 35, 36, 37\}$. Serta untuk pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total dekomposisi pada gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas, dengan $n \geq 2$ dan $m \geq 3$ dimana m bilangan ganjil untuk $d \leq 37$ kecuali $d \in \{4, 6\}$.

DAFTAR PUSTAKA

Baca, M., Jendrol., Miller, M dan Ryan, J. 2007. On Irregular Total Labeling. *Discrete Mathematics* 307(1),1378-1388.

Baca, M., Lin, Y., Miller, M., Youssef, MZ. 2007. Edge-antimagic graphs. *Discrete Mathematics* 307,1232-1244.

Chartrand, G. dan Lesniak, L. 1986. Graphs and Digraphs. *California: Wadsworth, Inc.*

Chartrand, Gray, and Ortrud R. Oellermann. 1993. Applied and algorithmic graph theory. *McGraw-Hill, Inc.,*

Carlos, K. 2006. Generalized book and c_m snakes and prime graphs. *ARS COMBINATORIA* 80,215-221.

Dafik. 2007. *Structural Properties and Labeling of Graph*. Australia : Tidak dipublikasikan (Tesis).

Dafik, Miller, M., Ryan, J., Baca, M. 2009. On Super (a,d)-Edge Antimagic Total Labeling of Disconnected Graph. *Discrete Math* 309(15), 4909-4915.

Gutierrez, A. dan Lladó, A. 2005. Magic Coverings. *Of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*. Vol.55: 451-461.

Gallian, J.A . 2009. Dinamyc Survey of Graph Labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics* .

Hader,A.E. dan Salman,N. M .2013. An A_M -Supermagic Decomposition Of The Cartesian Product Of a Path and Sun. *Artikel*.

Hartsfield, N. dan Ringel, G. 1994. *Pearls in Graph Theory*. London: Accademic Press Limited.

Inayah, N. 2013. *Pelabelan (a, d) – H-Anti Ajaib Pada Beberapa Kelas Graf*. Institut Tekhnologi Bandung : Tidak dipublikasikan (Disertasi).

Inayah, N., Simanjutak, R., Salman, A. 2009. On (a,d)-H-Antimagic Covering of Graphs. *The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial*

Computing 71,273-281.

Kotzig, A dan Rosa, A. 1970. Magic valuations of finite graphs. *Canad. Math. Bull.* 13,451-461.

Maryati, T. K., Salman, A. N. M., Baskoro, E. T., Ryan, J. F., Miller, M. 2010. On H-supermagic labelings for certain shackles and amalgamations of a connected graph. *Utilitas Mathematica Vol. 83*, 333-342.

Rosyidah, K. dan Dafik, D. 2014. Super (a, d)-H Total Decomposition of Graf Helm. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika Vol.1*, 1-6.

WD Wallis, ET Baskoro, M Miller, Slamini. 2002. Edge-magic total labelings. *Australasian Journal of Combinatorics*. 177-190.

Universitas Jember. 2013. *Pedoman Penulisan Karya Ilmiah*. Jember: Badan Penerbit Universitas Jember.