

## **Pelabelan Graf dalam Kaitanya Mengurangi Resiko Vulnerabilitas Topologi Jaringan**

Peneliti : Dafik, Slamin, Ika Hesti Agustin  
Mahasiswa Terlibat : Inge Yosanda Arianti dan Agnes Ika Nurvitaningrum,  
Karinda Rizqy Aprilia dan Sih Muhni Yunika  
Sumber Dana : PNBP 2014 Lemlit Universitas Jember

<sup>1</sup> Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember

<sup>2</sup> Program Studi Sistem Informasi Universitas Jember

<sup>3</sup> Jurusan Matematika FKIP Universitas Jember

### **ABSTRAK**

Graf adalah representasi dari sebuah topologi jaringan baik jaringan komunikasi ataupun jaringan transportasi. Elemen dalam jaringan digambarkan sebagai titik dan koneksi antara dua elemen digambarkan sebagai sisi. Jumlah titik yang terkait dalam jaringan dinamakan order, sedangkan jumlah koneksi disebut ukuran graf. Saat ini, kajian dan pengembangan teori graf menjadi bahasan utama dikalangan peneliti, lebih-lebih kaitannya dengan perkembangan teknologi digital dan internet. Hal ini disebabkan tuntutan akan komunikasi yang dinamis, fleksible dan masif (elemen yang terkoneksi sangat banyak) merupakan kebutuhan utama pengembangan teknologi jaringan ini. Namun demikian kompleksitas dalam jaringan akan meningkat secara dramatis apabila jumlah elemen (atau komputer) yang terkait dalam jaringan bertambah, apalagi jika jumlah koneksi yang terhubung ke sebuah titik juga semakin besar, maka terbentuknya jaringan yang aman dan efisien, berkecepatan tinggi, handal dalam modulariti, mempunyai toleransi kegagalan fungsi serta resiko vulnerabiliti yang rendah akan selalu menjadi perhatian utama dalam mendesain topologi jaringan. Salah satu upaya penting yang dapat dikerjakan adalah dengan melakukan pelabelan terhadap model-model topologi jaringan itu. Kongkritnya menentukan pelabelan terhadap graf. Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan melakukan pelabelan atau kodefikasi pada topologi jaringan, baik yang konektif maupun diskonektif. Dalam hal ini, graf yang diberikan adalah graf sederhana dan tanpa loop dan sisi ganda. Sebuah graf  $G$  merupakan pelabelan total super  $(a,d)$ -sisi antimagic jika terdapat pemetaan satu-satu  $f : f(V)=1,2,3,\dots,p \rightarrow f(E)=1,2,\dots,p+q$  sedemikian hingga bobot sisi,  $w(uv)=f(u)+f(v)+f(uv)$ ,  $uv \in E(G)$ , membentuk barisan aritmatika  $a, a+d, a+2d, \dots, a+(q-1)d$ , dimana  $a > 0$  and  $d \geq 0$ ,

dengan suku pertama  $a$  dan selisih tiap suku  $d$ . Suatu graf  $G$  disebut super jika label terkecil yang mungkin muncul pada titik dan yang lain muncul pada sisi. Dalam penelitian ini dikaji pelabelan total super  $(a,d)$ -sisi antimagic untuk graf (1) Rem Cakram tunggal maupun gabungan saling lepasnya; (2) Buah Naga tunggal maupun gabungan saling lepasnya; (3) Graf Daun tunggal maupun gabungan saling lepasnya; dan terakhir (4) pelabelan total super  $(a,d)$ -sisi antimagic pada graf Graf Semi Parasut tunggal maupun gabungan saling lepasnya. Hasilnya menunjukkan bahwa topologi-topologi jaringan di atas mempunyai pelabelan total super sisi antimagic untuk  $d \in 0,1,2$ .

**Kata Kunci:** Pelabelan total super  $(a,d)$ -sisi antimagic, Graf Rem Cakram, Buah Naga, Graf Daun dan Semi Parasut.

## Graph Labeling in Connection with Reducing the Vulnerability Risk of Network Topology

Researcher : Dafik, Slamin, Ika Hesti Agustin  
Students Involved : Inge Yosanda Arianti dan Agnes Ika Nurvitaningrum,  
Karinda Rizqy Aprilia dan Sih Muhni Yunika  
Budget Support : PNBP 2014 Lemlit Universitas Jember

<sup>1</sup> Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember

<sup>2</sup> Program Studi Sistem Informasi Universitas Jember

<sup>3</sup> Jurusan Matematika FKIP Universitas Jember

### ABSTRACT

Graph is a representation of a network topology either a communications network or transport network. Element in the network is represented by a vertex and the connection between the two elements is represented by an edge. The number of available vertices in the network is called an order, while the number of connections is called a size of the graph. Currently, the study and development of graph theory becomes the main discussion among researchers, especially related to the advance of digital technology and internet. This is due to the demands of a dynamic communications, flexible and massive (the existence of huge number of elements involved) is the main requirement in the development of network technology. However, the complexity of the network will increase dramatically when the number of elements (or computer) are linked in a network increases, especially if the number of connections that are connected to a vertex is also getting bigger, then the formation of a safe network, efficient, high-speed, reliable in modular, having a low function of fault-tolerant and a low risk vulnerability will always be a major concern in the design of the network topology. One of the important efforts that can be done is by doing the labeling of the models of the network topology. In other words, determining the labeling to a graph. Therefore, this study aims to label or encode the network topology, both connective and disconnective graphs. In this case, a graph is a simple no loops and multiple edges. A graph  $G$  is said to be a super  $(a, d)$ -edge antimagic total labeling if there is a one-one mapping  $f: f(VUE) \rightarrow 1, 2, 3, \dots, p, p+1, p+2, \dots, p+q$  such that the edge weights,  $w(uv) = f(u) + f(v) + f(uv)$ ,  $uv \in E(G)$ , form the arithmetic sequence  $a, a+d, a+2d, \dots, a+(q-1)d$ , where  $a > 0$  and  $d \geq 0$ ,

the first term  $a$  and the difference of each tribe  $d$ . A graph  $G$  is called super if the smallest possible label appear in the vertices and others appear on the edges. This study examined the super  $(a, d)$ -edge antimagic total labeling of (1) Disc Brake graph for both connected and its disconnected graphs; (2) Dragon Fruit graph for both connected and its disconnected graphs; (3) Leaf graph for both connected and its disconnected graphs; and the last is (4) the super  $(a, d)$ -edge antimagic total labeling of Semi Parachute graph for both connected and its disconnected graphs. The results show that the network topologies of the above graphs admit a super  $(a, d)$ -edge antimagic total labeling for feasible  $d \in 0, 1, 2$ .

**Kata Kunci:** A super  $(a, d)$ -edge antimagic total labeling, Disc Brake graph, Dragon Fruit graph, Leaf graph dan Semi Parachute graph.

## PENDAHULUAN

Kurang lebih setengah abad setelah masa Hamilton, aktivitas dalam bidang teori graf dapat dikatakan relatif kecil. Pada Tahun 1920-an kegiatan tersebut muncul kembali yang dipelopori oleh D. Konig. Konig berupaya mengumpulkan hasil-hasil pemikiran para ahli matematika tentang teori graf termasuk hasil pemikirannya sendiri, kemudian dikemasnya dalam bentuk buku yang diterbitkan pada Tahun 1936. Buku tersebut dianggap sebagai buku pertama tentang teori graf. Sejak itu, dan tiga puluh tahun terakhir ini perkembangan graf sangat pesat. Graf dikaji baik terkait dalam kepentingan *science for science* atau *science for application*. Ribuan bahkan jutaan artikel telah dipublikasikan, dan berbagai macam buku mengenai graf kini dengan mudah dapat ditemukan, dari yang sangat teoritis sampai ke yang praktis. Termasuk banyak research group telah dikembangkan yang terdiri dari peneliti, dosen mahasiswa sarjana dan pascasarjana nasional maupun internasional. Pada skala internasional terdapat Graph Theory Group: <http://graphtheorygroup.com/>, serta Graph Theory and Application (GTA): [http://www.graphtheorygroup.com/newline\\_mirka/index.html](http://www.graphtheorygroup.com/newline_mirka/index.html), untuk skala nasional terdapat InaCombs (Indonesian Combinatorial Society): <http://www.inacombs.-org/>. Tahun 2014 ini, di Universitas Jember dibentuk research group dengan nama CGANT (Combinatoric, Graph Theory and Network Topology). Beberapa site lainnya terkait graph theory dan aplikasinya serta open course ware-nya juga dikembangkan dan dapat ditemukan dengan mudah di: <http://www.graphtheory-group.com/gta/index.html>

Dalam perspektif pemodelan matematika diskrit, model-model topologi jaringan (baik jaringan komunikasi secara umum ataupun jaringan komunikasi dalam komputer) dapat direpresentasikan sebagai bentuk sebuah graf, dimana masing-masing elemen digambarkan sebagai titik dan koneksi antara dua elemen digambarkan sebagai sisi. Jumlah titik yang terkait dalam jaringan dinamakan order, sedangkan jumlah koneksi yang terhubung ke sebuah titik disebut derajat suatu titik. Jarak antara dua titik dalam graf adalah besarnya lintasan terpendek, sedangkan diameter suatu graf adalah jarak yang terpanjang dari dua buah titik. Besarnya diameter dapat mencerminkan besarnya tundaan komunikasi maksimum dalam sebuah jaringan komunikasi komputer.

Hampir diseluruh negara-negara di dunia (baik negara maju atau berkembang), kajian dan pengembangan teori graf ini menjadi bahasan utama dikalangan peneliti dan saintisi, lebih-lebih kaitannya dengan perkembangan teknologi digital dan internet saat ini. Hal ini disebabkan tuntutan akan komunikasi yang dinamis, fleksible dan masif (titik-titik yang terkoneksi sangat banyak dan tak terbatas jumlahnya) telah mencapai point of no return yang terus maju dan berkembang, dan manusia terus dan terus tergantung pada teknologi ini, karena dengan berkembangnya teknologi ini telah membuat batas-batas geografis antara wilayah dan negara di dunia secara perlahan semakin lenyap.

Model-model topologi jaringan komunikasi khususnya jaringan komputer sebagai salah satu contoh topologi yang terus mengalami perkembangan pesat dan dikaji secara mendalam. Seperti halnya jaringan LAN (local area network) yang biasanya dipakai di perkantoran, sekolah, universitas atau perusahaan; MAN (metropolitan area network) yang biasanya dipakai antar perkantoran, sekolah, universitas atau perusahaan di suatu kota; dan WAN (wide area network) yang merupakan jaringan dengan menggunakan satelit ataupun kabel bawah laut sehingga cakupannya sangat fleksibel dan masif. Internet dan teknologi perkembangan mobile phone merupakan salah satu contoh teknologi ini, atau secara riel jaringan bank BNI di Indonesia dan yang ada di negara-negara lainnya juga menggunakan sarana WAN ini. Gambar 1 dan 2 merupakan contoh topologi jaringan komunikasi khususnya jaringan komunikasi komputer.

Permasalahannya sekarang adalah, kompleksitas dalam jaringan akan meningkat secara dramatis apabila jumlah komputer atau elemen (order) yang terkait dalam jaringan bertambah, apalagi jika jumlah koneksi yang terhubung ke sebuah titik (derajad) juga semakin besar, maka terbentuknya jaringan yang efisien dan berkecepatan tinggi, handal dalam modulariti, mempunyai toleransi kegagalan fungsi yang baik serta resiko vulnerabiliti yang rendah akan selalu menjadi perhatian utama dalam mendesain topologi jaringan ini. Oleh karena itu salah satu upaya penting yang dapat dikerjakan adalah dengan melakukan pelabelan terhadap model-model topologi jaringan itu. Kongkritnya menentukan pelabelan terhadap graf sebagai representasi model-model topologi jaringan komunikasi, dengan jenis pelabelan total

antimagic, irregular total, distance and cover labeling of graphs, sedemikian hingga resiko vulnerabilitas komunikasi elemen dalam jaringan dapat ditekan sekecil mungkin. Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan melakukan pelabelan atau kodefikasi pada topologi jaringan, baik yang konektif maupun diskonektif.

Dalam hal ini, graf yang diberikan adalah graf sederhana dan tanpa loop dan sisi ganda. Sebuah graf  $G$  merupakan pelabelan total super  $(a,d)$ -sisi antimagic jika terdapat pemetaan satu-satu  $f: f(V)=1,2,3,\dots,p \rightarrow f(E)=1,2,\dots,p+q$  sedemikian hingga bobot sisi,  $w(uv)=f(u)+f(v)+f(uv)$ ,  $uv \in E(G)$ , membentuk barisan aritmatika  $a, a+d, a+2d, \dots, a+(q-1)d$ , dimana  $a > 0$  and  $d \geq 0$ , dengan suku pertama  $a$  dan selisih tiap suku  $d$ . Suatu graf  $G$  disebut super jika label terkecil yang mungkin muncul pada titik dan yang lain muncul pada sisi. Dalam penelitian ini dikaji pelabelan total super  $(a,d)$ -sisi antimagic untuk graf (1) Rem Cakram tunggal maupun gabungan saling lepasnya; (2) Buah Naga tunggal maupun gabungan saling lepasnya; (3) Graf Daun tunggal maupun gabungan saling lepasnya; dan terakhir (4) pelabelan total super  $(a,d)$ -sisi antimagic pada graf Graf Semi Parasut tunggal maupun gabungan saling lepasnya. Hasilnya menunjukkan bahwa topologi-topologi jaringan di atas mempunyai pelabelan total super sisi antimagic untuk  $d \in 0,1,2$ .

## **METODE PENELITIAN**

Sebagaimana disebutkan di atas, bahwa pelabelan atas model topologi jaringan diskonektif sangat dibutuhkan, mengingat kondisi riel di lapangan bahwa jaringan komputer telah dipakai di setiap instansi atau perusahaan sehingga terbentuklah cluster-cluster workstation. Komunikasi antara cluster ini tidak lagi memakai jaringan LAN namun menggunakan WAN yang mengandalkan teknologi satelit melalui internet. Sehingga secara praktis topologi antara masing-masing cluster adalah diskonektif. Mengingat temuan-temuan yang terkait dengan pelabelan total antimagic untuk graf diskonektif masih relatif sedikit, maka penelitian tentang pelabelan jenis ini perlu terus dilakukan. Sehingga hasil utama yang diharapkan adalah algoritma dan teorema baru pelabelan total antimagic untuk graf diskonektif.

Langkah-langkah untuk melakukan penelitian ini sehingga menghasilkan adalah algoritma dan teorema baru dibagi kedalam empat tahap kegiatan, yaitu

1. **Penentuan model topologi jaringan.** Dengan menggunakan teknik web searching, visualisasi bentuk gabungan saling lepas model topologi jaringan akan diperoleh secara ekspolaratif, yang polanya direpresentasikan dalam sebuah famili graf. Kemudian dengan metode induktif berbantuan komputasi komputer, sampel famili graf diskonektif yang beorder kecil diberi label  $1, 2, \dots, |V|$  untuk melihat fisibilitinya dalam pelabelan selanjutnya.
2. **Algoritma pelabelan total super antimagic.** Dengan menerapkan teknik pelabelan EAVL (Edge Antimagic Vertex) terhadap famili graf diskonektif beorder kecil kemudian digeneralisasi untuk memperoleh algoritme dasar. Dengan menerapkan teorema Ba\|vca, selanjutnya dikembangkan algoritme pelabelan \itSEATL (Super Edge Antimagic Total).
3. **Penurunan teorema, aksioma/lemma serta korollari baru.** Dengan metoda deduktif dan induktif dalam kosep matematika diskrit dan pemodelan matematik, teorema, aksioma/lemma serta korollari baru diturunkan dan dibuktikan. Pembuktian dilakukan dengan prosedural formal sesuai dengan prinsip-prinsip logika matematik.
4. **Skema aplikasi teorema, aksioma/lemma serta korollari baru.** Dengan menggunakan metoda diskriptif akan dijelaskan koherensi dari teorema, aksioma/lemma serta korollari kemudian digambarkan skenario aplikasi riilnya dalam perspektif topologi jaringan komunikasi.

## HASIL PENELITIAN

Pada bagian ini berturut-turut akan dijelaskan hasil penelitian yang dikembangkan oleh CGANT research group tahun 2014. Terdapat beberapa mahasiswa yang dilibatkan dalam penelitian, namun yang sudah dinyatakan lulus diantaranya dari FKIP adalah Inge Yosanda Arianti dan Agnes Ika Nurvitaningrum, sedangkan dari FMIPA adalah Karinda Rizqy Aprilia dan Sih Muhni Yunika. Melalui kolaborasi yang intensif dalam CGANT reserach group keempat mahasiswa ini telah dinyatakan lulus dan hasil-hail penelitiannya telah dituangkan dalam joint paper dan telah dipublikasikan dalam prosiding pendidikan matematika dan matematika FMIPA Universitas Jember dan Universitas Ahmad Dahlan Yogyakarta. Telah dihasilkan delapan publikasi dari hasil penelitian research group CGANT 2014

ini dan keberadaan artikel-artikel itu dapat ditelusuri melalui <http://scholar.google.com/citations?user=ZSboGXkAAAAJ&hl=en&oi=ao>; <http://scholar.google.com/citations?user=O5XiwWIAAAAAJ&hl=en>; <http://scholar.google.com/citations?user=iikwzpQAAAAJ&hl=en> dan <http://scholar.google.com/citations?user=iQdPdiMAAAAAJ&hl=en>. Apabila alamat tersebut ditelusuri maka pembaca secara berurutan akan dirujuk ke database google scholar Dafik (FKIP), Slamir (PSSI), Ika Hesti A (FMIPA) dan Susi Setiawani (FKIP).

Topologi jaringan yang dihasilkan dalam kegiatan penelitian pelabelan total super  $(a,d)$ -sisi antimagic untuk kegiatan research group CGANT tahun 2014 ini, difokuskan pada empat famili graf khusus yaitu: (1) pelabelan total super  $(a,d)$ -sisi antimagic pada graf Rem Cakram tunggal maupun gabungan saling lepasnya; (2) pelabelan total super  $(a,d)$ -sisi antimagic pada graf Buah Naga tunggal maupun gabungan saling lepasnya; (3) pelabelan total super  $(a,d)$ -sisi antimagic pada graf Graf Daun tunggal maupun gabungan saling lepasnya; dan (4) pelabelan total super  $(a,d)$ -sisi antimagic pada graf Graf Semi Parasut tunggal maupun gabungan saling lepasnya.

Penelitian ini diawali dengan menentukan batas atas  $d$ , menentukan EAVL dan bobot sisi EAV, menentukan SEATL dan menentukan bobot total SEATL pada masing-masing famili graf khusus di atas tunggal maupun gabungan saling lepasnya. Hasil utama penelitian pelabelan total super  $(a,d)$ -sisi antimagic adalah berupa lemma dan teorema, yang urutan penyajiannya adalah dengan menuliskan lemma ataupun teorema terlebih dahulu, dilanjutkan dengan bukti mengenai lemma dan teorema tersebut kemudian beberapa contoh gambar atau ilustrasi sebagai visualisasi kebenaran pembuktian lemma dan teorema tersebut.

Berikut ini berturut akan disajikan hasil penelitian terkait empat famili graf khusus di atas. Pertama adalah Graf Rem Cakram, dinotasikan dengan  $Db_{n,p}$ . Penelitian ini dituangkan dalam skripsi Inge Yosanda Arianti.

### **Graf Rem Cakram $Db_{n,p}$**

Graf Rem Cakram yang dinotasikan dengan  $Db_{n,p}$  mempunyai himpunan  $V$  dan  $E$  sebagai berikut:

$$V(Db_{n,p}) = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p\} \cup \{y_{k,l}; 1 \leq k \leq 2n, 1 \leq l \leq p-1\}.$$

$$E(Db_{n,p}) = \{x_{i,j}x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p\} \cup \{x_{n,j}x_{1,j}\} \cup \{y_{k,l}y_{k+1,l}; k \text{ ganjil}; 1 \leq l \leq p-1\} \cup \{x_{i,j}y_{2i-2,j}; 2 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p-1\} \cup \{x_{1,j}y_{2n,j}; 1 \leq j \leq p-1\} \cup \{x_{i,j}y_{2i-1,j}; 2 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p-1\} \cup \{x_{1,j}y_{1,j}; 1 \leq j \leq p-1\} \cup \{x_{i,j}y_{2i-2,j}; 2 \leq i \leq n, 2 \leq j \leq p-1\} \cup \{x_{1,j}y_{2n,j-1}; 2 \leq j \leq p-1\} \cup \{x_{i,j}y_{2i-1,j}; 2 \leq i \leq n, 2 \leq j \leq p-1\} \cup \{x_{1,j}y_{1,j-1}; 2 \leq j \leq p-1\}.$$

Berdasarkan pola pada gambar graf Rem Cakram didapatkan rumusan jumlah titik pada graf Rem Cakram  $Db_{n,p}$  adalah  $|V|=3np-2n$ . Sedangkan jumlah sisi pada graf Rem Cakram  $Db_{n,p}$  adalah  $|E|=6np-5n$ . Batas atas  $d$  graf Rem Cakram tunggal  $Db_{n,p}$  dapat ditentukan dengan menggunakan lemma yang ada, yaitu  $d \in 0,1,2$ .

Setelah mengetahui batas atas nilai  $d$  maka diawali dengan menentukan pelabelan titik  $(a,1)$ -sisi antimagic pada graf Rem Cakram  $Db_{n,p}$  dan sekaligus menentukan fungsi bijektifnya melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika. Lemma berikut adalah lemma yang berkaitan dengan pelabelan titik  $(a,1)$ -sisi Antimagic pada Graf Rem Cakram  $Db_{n,p}$ .

**Lemma 1** Ada pelabelan titik  $(3,1)$ -sisi antimagic pada graf Rem Cakram  $Db_{n,p}$  jika  $n \geq 3$ ,  $n$  ganjil dan  $p \geq 2$ .

Berdasarkan Lemma ini maka diperoleh teorema tentang pelabelan super sisi antimagic total dengan  $d \in 0,1,2$  dengan cara memanfaatkan posisi dari bobot sisi EAVL.

**Theorem 1** Ada pelabelan total super  $(9np-7n+\frac{n+32}{2},0)$ -sisi antimagic, dan total super  $(\frac{n+3}{2}+3np-2n+1,2)$ -sisi antimagic pada graf Rem Cakram  $Db_{n,p}$  untuk  $n \geq 3$ ,  $n$  ganjil dan  $p \geq 2$ .

**Theorem 2** Ada pelabelan total super  $(6np-4n+2,1)$ -sisi antimagic pada graf Rem Cakram  $Db_{n,p}$  jika  $n \geq 3$ ,  $n$  ganjil dan  $p \geq 2$ .

Dengan cara yang sama juga dikembangkan pelabelan untuk gabungan gabungan graf Rem Cakram  $mDb_{n,p}$ .

### **Graf Buah Naga $Df_{m,n}$**

Graf Buah Naga yang dinotasikan dengan  $Df_{m,n}$  mempunyai himpunan  $V$  dan  $E$  sebagai berikut:

$$V(Df_{m,n}) = \{x_i, x_{i,j}, y_{i,k}, z_i; 1 \leq i \leq n; 2 \leq j \leq m, 2 \leq k \leq m+2; m, n \in \mathbb{N}\}$$

**dan**  $E(Df_{m,n}) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 2 \leq j \leq m\} \cup \{x_i y_{i,k}, z_i y_{i,k}; 1 \leq i \leq n, 2 \leq k \leq m+2\} \cup \{y_{i, \frac{m+2}{2}} y_{i, \frac{m+4}{2}}; 1 \leq i \leq n\}$ ,  $m$  genap.

Berdasarkan pola pada gambar graf Buah Naga didapatkan rumusan jumlah titik pada graf Buah Naga  $Df_{m,n}$  adalah  $|V|=4n+2mn$ . Sedangkan jumlah sisi pada graf Buah Naga  $Df_{m,n}$  adalah  $|E|=6n+3mn-1$ . Batas atas  $d$  graf Buah Naga tunggal  $Df_{m,n}$  dapat ditentukan dengan menggunakan lemma yang ada, yaitu  $d \in 0,1,2$ .

Setelah mengetahui batas atas nilai  $d$  maka diawali dengan menentukan pelabelan titik  $(a,1)$ -sisi antimagic pada graf Buah Naga  $Df_{m,n}$  dan sekaligus menentukan fungsi bijektifnya melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika. Lemma berikut adalah lemma yang berkaitan dengan pelabelan titik  $(a,1)$ -sisi Antimagic pada Graf Buah Naga  $Df_{m,n}$ .

**Lemma 2** Ada pelabelan titik  $(\frac{n+32+1}{2},1)$ -sisi antimagic pada graf Buah Naga  $Df_{m,n}$  untuk  $m \geq 2$ ,  $m$  genap dan  $n \geq 1$ ,  $n$  ganjil.

Berdasarkan Lemma ini maka diperoleh teorema tentang pelabelan super sisi antimagic total dengan  $d \in 0,1,2$  dengan cara memanfaatkan posisi dari bobot sisi EAVL.

**Theorem 3** Ada pelabelan total super  $(\frac{n(10m+21)+32}{2},0)$ -sisi antimagic, dan total super  $(4mn+9n+7,2)$ -sisi antimagic pada graf Buah Naga  $Df_{m,n}$  untuk  $m \geq 2$ ,  $m$  genap dan  $n \geq 1$ ,  $n$  ganjil.

**Theorem 4** Ada pelabelan total super  $(\frac{7mn+15n+52}{2},1)$ -sisi antimagic pada graf buah naga  $Df_{m,n}$  untuk  $m \geq 2$ ,  $m$  genap dan  $n \geq 1$ ,  $n$  ganjil.

Dengan cara yang sama juga dikembangkan pelabelan untuk gabungan gabungan graf Buah Naga  $Df_{m,n}$ .

### **Graf Daun $Lg_n$**

Graf Daun yang dinotasikan dengan  $Lg_n$  mempunyai himpunan  $V$  dan  $E$  sebagai berikut:

$$V(Lg_n) = \{l, e, a, f, x_i, z_i, y_j ; 1 \leq i \leq n ; 1 \leq j \leq 2n + 1\} \text{ dan } E(Lg_n) \\ = \{le, lf, fa, ea, fy_1, ey_1, ay_{2n+1}\} \cup \{x_i y_{2i-1}, x_i y_{2i}, x_i y_{2i+1} ; 1 \leq i \leq n\} \cup \\ \{z_i y_{2i-1}, z_i y_{2i}, z_i y_{2i+1} ; 1 \leq i \leq n\}.$$

Berdasarkan pola pada gambar graf Daun didapatkan rumusan jumlah titik pada graf Daun  $Df_{m,n}$  adalah  $|V|= 4n+5$ . Sedangkan jumlah sisi pada graf Daun  $Df_{m,n}$  adalah  $|E|= 6n+7$ . Batas atas  $d$  graf Daun tunggal  $Lg_n$  dapat ditentukan dengan menggunakan lemma yang ada, yaitu  $d \in 0,1,2$ .

Setelah mengetahui batas atas nilai  $d$  maka diawali dengan menentukan pelabelan titik  $(a,1)$ -sisi antimagic pada graf Daun  $Lg_n$  dan sekaligus menentukan fungsi bijektifnya melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika. Lemma berikut adalah lemma yang berkaitan dengan pelabelan titik  $(a,1)$ -sisi Antimagic pada Graf Daun  $Lg_n$ .

**Lemma 3** *Ada pelabelan titik  $(n+3,1)$ -sisi antimagic pada graf Daun  $Lg_n$  untuk  $n \geq 1$ ,  $n$  ganjil.*

Berdasarkan Lemma ini maka diperoleh teorema tentang pelabelan super sisi antimagic total dengan  $d \in 0,1,2$  dengan cara memanfaatkan posisi dari bobot sisi EAVL.

**Theorem 5** *Ada pelabelan total super  $(11n+15,0)$ -sisi antimagic, dan total super  $(5n+9,2)$ -sisi antimagic pada graf Daun  $Lg_n$  untuk  $n \geq 1$ ,  $n$  ganjil.*

**Theorem 6** *Ada pelabelan total super  $(8n+12,1)$ -sisi antimagic pada graf Daun  $Lg_n$  untuk  $n \geq 1$ ,  $n$  ganjil.*

Dengan cara yang sama juga dikembangkan pelabelan untuk gabungan gabungan graf Daun  $Lg_n$ .

### **Graf Semi Parasut $SP_{2n-1}$**

Graf Semi Parasut yang dinotasikan dengan  $Lg_n$  mempunyai himpunan  $V$  dan  $E$  sebagai berikut:

$$V(SP_{2n-1}) = \{x_i, y_j, z; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n-1\} \text{ dan } E(SP_{2n-1}) = \{zx_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_1x_n\} \cup \{x_iy_i; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_ix_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}.$$

Berdasarkan pola pada gambar graf Semi Parasut didapatkan rumusan jumlah titik pada graf Semi Parasut  $Df_{m,n}$  adalah  $|V|= 2n$ . Sedangkan jumlah sisi pada graf Semi Parasut  $Df_{m,n}$  adalah  $|E|= 3n-1$ . Batas atas  $d$  graf Semi Parasut tunggal  $Lg_n$  dapat ditentukan dengan menggunakan lemma yang ada, yaitu  $d \in 0,1,2$ .

Setelah mengetahui batas atas nilai  $d$  maka diawali dengan menentukan pelabelan titik  $(a,1)$ -sisi antimagic pada graf Semi Parasut  $Lg_n$  dan sekaligus menentukan fungsi bijektifnya melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika. Lemma berikut adalah lemma yang berkaitan dengan pelabelan titik  $(a,1)$ -sisi Antimagic pada Graf Semi Parasut  $Lg_n$ .

**Lemma 4** Ada pelabelan titik  $(3,1)$ -sisi antimagic pada graf Semi Parasut  $Lg_n$  untuk  $n \geq 2$ .

Berdasarkan Lemma ini maka diperoleh teorema tentang pelabelan super sisi antimagic total dengan  $d \in 0,1,2$  dengan cara memanfaatkan posisi dari bobot sisi EAVL.

**Theorem 7** Ada pelabelan total super  $(5n+2,0)$ -sisi antimagic, dan total super  $(2n+4,2)$ -sisi antimagic pada graf Semi Parasut  $Lg_n$  untuk  $n \geq 2$ .

**Theorem 8** Ada pelabelan total super  $(\frac{7n+62}{2},1)$ -sisi antimagic pada graf Semi Parasut  $Lg_n$  untuk  $n \geq 2$ ,  $n$  genap.

Dengan cara yang sama juga dikembangkan pelabelan untuk gabungan gabungan graf Semi Parasut  $Lg_n$ .

### **PENUTUP**

Beberapa temuan dalam penelitian yang dilakukan dalam CGANT research group diantaranya oleh Inge Yosanda Arianti dan Agnes Ika Nurvitaningrum, sedangkan dari FMIPA adalah Karinda Rizqy Aprilia dan Sih Muhni Yunika, tidak mengcover semua nilai  $d$  untuk semua parameter  $m, n$  atau  $s$ . Dengan demikian saran untuk peneliti lainnya adalah memecahkan masalah terbuka berikut ini.

#### **Graf Rem Cakram $Db_{n,p}$**

*Masalah Terbuka 1* Pelabelan total super  $(a,d)$ -sisi antimagic pada konektif graf Rem Cakram  $Db_{n,p}$ , dengan  $n$  genap untuk  $d=0,1,2$  dan pelabelan total super  $(a,d)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Rem Cakram  $mDb_{n,p}$ , dengan  $n \geq 3; 1 \leq s \leq m; m$  genap untuk  $d=0,1,2$ .

#### **Graf Buah Naga $Df_{m,n}$**

*Masalah Terbuka 2* Pelabelan total super  $(a,d)$ -sisi antimagic pada graf buah naga  $Df_{m,n}$ , dengan  $m \geq 2; n \geq 1; n$  genap untuk  $d=0, d=1$ , dan  $d=2$ .

*Masalah Terbuka 3* Pelabelan total super  $(a,d)$ -sisi antimagic pada gabungan graf buah  $cDf_{m,n}$  untuk  $d=0, d=1$ , dan  $d=2$  dengan  $m \geq 2; n \geq 1 1 \leq s \leq c$ ; untuk  $c$  dan  $n$  genap.

#### **Graf Daun $Lg_n$**

*Masalah Terbuka 4* Pelabelan super  $(a,d)$ -sisi antimagic total pada gabungan saling lepas graf Daun  $mLg_n$  jika  $n \geq 1$  dan  $m \equiv 3 \pmod{4}$ .

*Masalah Terbuka 5* Pelabelan super  $(a,d)$ -sisi antimagic total pada graf Daun  $mLg_n$ , untuk  $d=1$  dengan  $n$  genap dan  $m$  ganjil ( $n \geq 2, m \geq 3$ ).

*Masalah Terbuka 6* Pelabelan super  $(a,d)$ -sisi antimagic total pada graf Daun  $Lg_n$ , untuk  $d=1$  dengan  $n$  ganjil dan  $m$  genap ( $n \geq 1, m \geq 2$ ).

#### **Graf Semi Parasut $SP_{2n-1}$**

*Masalah Terbuka 7* Pelabelan total super  $(a,d)$ -sisi antimagic pada graf semi parasut  $SP_{2n-1}$ , dengan  $n \geq 2$   $n$  ganjil untuk  $d=1$ .

**Masalah Terbuka 8** Pelabelan total super  $(a,d)$ -sisi antimagic pada gabungan graf semi parasut  $mSP_{2n-1}$ , dengan  $n \geq 2$ ;  $m \equiv 3 \pmod{4}$ , untuk  $d=1$ .

**Masalah Terbuka 9** Pelabelan total super  $(a,d)$ -sisi antimagic pada gabungan graf semi parasut  $mSP_{2n-1}$ , dengan  $n \geq 2$ ;  $m$  genap untuk  $d=0$ ,  $d=1$  dan  $d=2$ .

## DAFTAR PUSTAKA

- Acharya, B.D. dan Hegde, S.M., Strongly indexable graphs, *Discrete Math.*, 93 (1991) 275--299.
- Baca, M. dan Barrientos, C., On super edge-antimagic total labelings of  $mK_n$ , (2007), to appear
- Baca, M. dan Brankovic, L., Edge-antimagicness for a class of disconnected graphs, *Ars Combin.*, (2007), to appear.
- Baca, M., Lin, Y., Miller, M. dan Simanjuntak, R., New constructions of magic dan antimagic graph labelings, *Utilitas Math.*, 60 (2001) 229--239.
- Bloom, G.S. dan Golomb, S.W., Applications of numbered undirected graphs, *Proc. IEEE*, 65 (1977) 562--570.
- Bloom, G.S. dan Golomb, S.W., Numbered complete graphs, unusual rules dan assorted applications, In: *Theory dan Applications of Graphs, Lecture Notes in Math.*, 642, Springer-Verlag, New York (1978) 53--65.
- Bodendiek, R. dan Walther, G., On number theoretical methods in graph labelings, *Res. Exp. Math.*, 21 (1995) 3-25.
- Dafik, Miller, M., Ryan, J. and Baca, M., On super  $(a,d)$ -edge antimagic total labeling of disconnected graphs, *Discrete Math.*, (2014), in press.
- Dafik, Miller, M., Ryan, J. and Baca, M., Super edge-antimagic total labelings of  $mK_{n,n,n}$ , *Ars Combin.*, (2014), in press.
- Figuerola-Centeno, R.M., Ichishima, R. dan Muntaner-Batle, F.A., The place of super edge-magic labelings among other classes of labelings, *Discrete Math.*, 231 (2001), 153--168.
- Gallian, J., A dynamic survey of graph labeling, *Electronic J. of Combin.*, 14 (2014) #DS6.
- Hartsfield, N. dan Ringel, G., Supermagic dan antimagic graphs, *J. Rec. Math.*, 21 (1989) 107-115.

- Kotzig, A. dan Rosa, A., Magic valuations of finite graphs, *Canad. Math. Bull.*, 13 (1970) 451-461.
- Kotzig, A. dan Rosa, A., Magic valuations of complete graphs, *Publ. CRM*, 175 (1972).
- Nicholas, T., Somasundaram, S. dan Vilfred, V., On (a,d)-antimagic special trees, unicyclic graphs dan complete bipartite graphs, *Ars Combin.*, 70 (2004) 207-220.
- Rosa, A., On certain valuations of the vertices of a graph, *Theory of Graphs (Internat. Symposium, Rome, July 1966)*, Gordon dan Breach, N.Y. dan Dunod Paris, (1967) 349--355.
- Sedlavcek, J., Problem 27, In: *Theory dan Its Applications*, Proc. Symp. Smolenice, June (1963) 163--169.
- Simanjuntak, R., Bertault, F. dan Miller, M., Two new (a,d)-antimagic graph labelings, *Proc. of Eleventh Australian Workshop of Combinatorial Algorithm*, (2000) 179--189.
- Sudarsana, I.W., Ismailmuza, D., Baskoro, E. T. dan Assiyatun, H., On super (a,d)-edge antimagic total labeling of disconnected graphs, *J. Combin. Mathematics Combin. Comput.*, 55 (2005) 149-158.
- Sugeng, K.A., Magic dan antimagic labeling of graphs, PhD Thesis, ITMS-University of Ballarat, Australia (2005).
- Sugeng, K.A. dan Miller, M., Relationships between adjacency matrices dan super (a, d)-edge-antimagic total graphs, *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 55 (2005) 71--82.