Analisa Pelabelan Selimut *(a,d)-ℋ*-Anti Ajaib Super pada Shackle dari Graf Siklus dengan Busur

(*The Analysis of Super (a,d)-ℋ-Antimagic Covering on Shackle of Cycle with Cords*)

Wuria Novitasari, Dafik, Slamin
Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember (UNEJ)
Jln. Kalimantan 37, Jember 68121
e-mail: d.dafik@gmail.com

Abstrak

Inayah et al. (2013) menjelaskan suatu pelabelan selimut (*a,d*)-ℋ-anti ajaib super pada graf *G* adalah pelabelan total *λ* dari *V(G)∪E(G)* ke bilangan bulat *{1,2,3,4,...,|V(G)∪E(G)|}* untuk setiap subgraf *H* dari *G* yang isomorfik dengan ℋ dimana $\Sigma H=\Sigma_{v\in V}\lambda(v)+\Sigma_{e\in E}\lambda(e)$ merupakan barisan aritmatika. Graf *G* dikatakan memiliki pelabelan ℋ anti ajaib super jika $\{\lambda(v)\} v\in V=\{1,2,\dots,V\}$. *λ* dikatakan pelabelan total *(a,d)-ℋ*-anti ajaib super, jika *λ(V(G))={1,2,...,v(G)}*. Dengan begitu graf *G* dikatakan super apabila kemungkinan label terkecil ada pada titiknya. Shackle dari graf siklus dengan busur terdiri dari beberapa graf siklus dengan busur. Shackle dari graf siklus dengan busur merupakan shackle sisi yang dinotasikan dengan $Shack(C_6^{3,}e,n)$. Pada artikel ini, akan dipelajari tentang pelabelan selimut *(a,d)-ℋ*-anti ajaib super tunggal dengan menggunakan deskriptif aksiomatik dan metode pendektesian pola. Hasil penelitian menunjukkan bahwa pada $Shack(C_6^{3,}e,n)$ berlaku pelabelan selimut *(a,d)-ℋ*-anti ajaib super untuk *d* = {96, 80, 64, 48, 33, 32, 31, 29, 27, 25}.

Kata Kunci: Pelabelan Selimut *(a,d)-ℋ*-Anti Ajaib Super, Shackle dari Graf Siklus dengan Busur

Abstract

Inayah et al. (2013) explain super (a,d)-ℋ-antimagic covering on graph G is total labelling λ of V(G)∪E(G) to integers {1,2,3,4,...,|V(G)∪E(G)|} for every subgraph H of *G is isomorphic with ℋ* where $\Sigma H=\Sigma_{v\in V}\lambda(v)+\Sigma_{e\in E}\lambda(e)$ *is an arithmetic sequence. Graph G is called have super ℋ antimagic labelling if* $\{\lambda(v)\} v\in V=\{1,2,\dots,V\}$ *. λ is called super (a,d)-ℋ-antimagic total covering, if λ(V(G))={1,2,...,v(G)}. Such a graph G is called super if the smallest possible labels appear on the vertices. Shackle of cycle with cord consists of several cycle of cord. Shackle of cycle with cord is edge shackle which denoted* $Shack(C_6^{3,}e,n)$ *. In this paper we learn about super (a,d)-ℋ-antimagic covering properties of connective using descriptive axiomatic and the pattern recognition method. The result shows that on* $Shack(C_6^{3,}e,n)$ *admit a super (a,d)-ℋ-antimagic covering for d = {96, 80, 64, 48, 33, 32, 31, 29, 27, 25}.*

Keywords: *Super (a,d) -ℋ-antimagic covering, Shackle of Cycle of Cord*

Pendahuluan

Teori graf adalah salah satu cabang dari ilmu matematika yang penting namun teori-teorinya dapat diterapkan dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu contoh penerapan teori graf adalah pelabelan graf. Pelabelan suatu graf adalah pemetaan bijektif yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan bulat positif. Terdapat banyak jenis pelabelan graf yang telah dikembangkan, salah satunya adalah pelabelan selimut *(a,d)-ℋ*-anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur.

Definisi 1. Shackle dari graf siklus dengan busur adalah graf yang dinotasikan dengan $Shack(C_6^{3,}e,n)$ dimana graf ini memiliki 3 buah busur, e=1 yaitu 1 sisi yang digunakan bersama-sama oleh graf siklus dengan busur yang pertama dan graf siklus dengan busur yang kedua, 1 sisi dari graf siklus dengan busur yang kedua juga digunakan bersama-sama oleh graf siklus dengan busur yang ketiga, dan seterusnya. Shackle ini termasuk kategori shackle sisi karena ada 1 sisi yang digunakan oleh dua buah graf siklus dengan busur. Shackle dari graf siklus dengan busur mempunyai himpunan titik dan himpunan sisi, yaitu:

$V(Shack(C_6^{3,}e,n)) = \{x_{i,j};\ 1\le i\le 4, 1\le j\le n\}$

$E(Shack(C_6^{3,}e,n)) = \{x_{i,j}x_{i+1,j};\ 1\le i\le 3, 1\le j\le n\} \cup \{x_{1,j}x_{3,j};\ 1\le j\le n\} \cup \{x_{1,j}x_{3,j+1};\ 1\le j\le n\} \cup \{x_{2,j}x_{3,j+1};\ 1\le j\le n\} \cup \{x_{1,j}x_{2,j+1};\ 1\le j\le n\} \cup \{x_{4,j}x_{3,j+1};\ 1\le j\le n\}.$

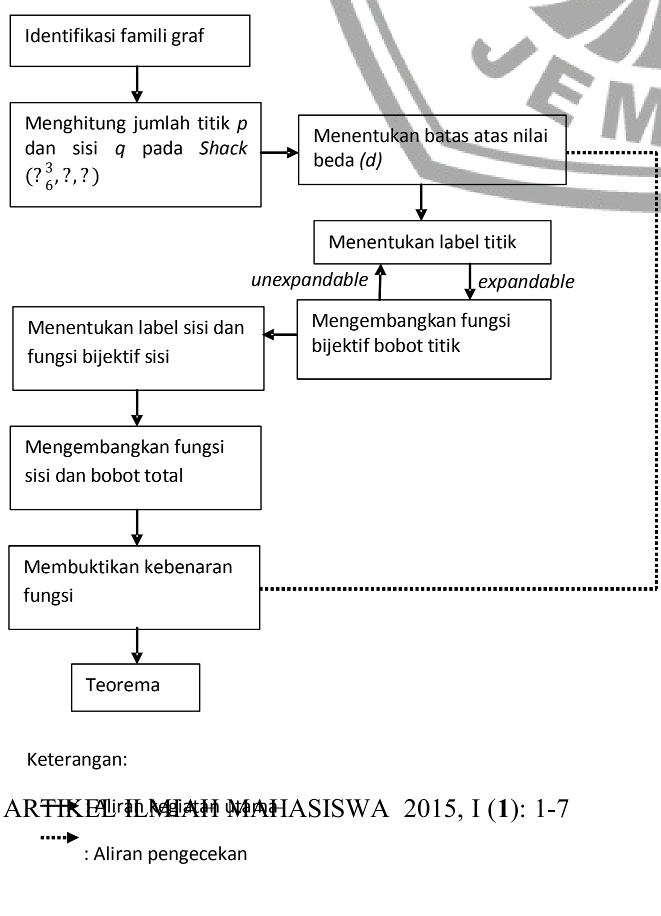
Inayah et al. (2013) mengembangkan suatu pelabelan selimut *(a,d)-ℋ*-anti ajaib dengan penjelasan bahwa suatu pelabelan selimut *(a,d)-ℋ*-anti ajaib pada graf G adalah sebuah fungsi bijektif sehingga terdapat jumlahan yang merupakan barisan aritmatika *{a, a+d, a+2d, ..., a+(t-1)d}*. Pelabelan selimut *(a,d)-ℋ*-anti ajaib dikatakan fungsi bijektif karena label selimut pada suatu graf tersebut selalu berbeda dan berurutan. Penelitian tentang selimut pernah dilakukan oleh Inayah (2013), Rizky et al. (2014), dan Citra et al. (2014).

Pada penelitian ini dibahas tentang pelabelan selimut *(a,d)-ℋ*-anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur karena belum ada penelitian tentang pelabelan selimut *(a,d)-ℋ*-anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur. Setelah dilakukan pelabelan selimut *(a,d)-ℋ*-anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur, akan didapatkan nilai batas atas atas dan teorema baru.

Adapun manfaat yang didapatkan dari penelitian ini adalah menambah pengetahuan baru tentang pelabelan selimut selimut pada shackle dari graf siklus dengan busur. Memberi motivasi untuk meneliti tentang pelabelan selimut *(a,d)-ℋ*-anti ajaib super pada graf jenis lain. Selain itu, hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan atau perluasan ilmu dan aplikasi dalam masalah pelabelan selimut *(a,d)-ℋ*-anti ajaib super.

Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deskriptif aksiomatik yaitu menetapkan pengertian dasar selimut ℋ-anti ajaib, lalu dikenalkan beberapa teorema mengenai pelabelan selimut *(a,d)-ℋ*-anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur baik secara tunggal maupun gabungan saling lepasnya. Selain itu, metode yang digunakan adalah metode pendeteksian pola. Adapun rancangan penelitian tersaji pada diagram alur penelitian pada Gambar 1 berikut:



Gambar 1. Rancangan Penelitian

Hasil Penelitian

Hasil dari penelitian yang akan dibahas terkait dengan pelabelan selimut (*a,d*) -ℋ-anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur yaitu berupa batas atas $d \leq 96$ serta 10 teorema baru tentang pelabean selimut (*a,d*)-ℋ-anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur yaitu:

1. Ada pelabelan selimut $\left(36n+84,96\right)-C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur untuk $n \geq 2$.
2. Ada pelabelan selimut $\left(44n+76,80\right)-C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur untuk $n \geq 2$.
3. Ada pelabelan selimut $\left(52n+68,64\right)-C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur untuk $n \geq 2$.
4. Ada pelabelan selimut $\left(60n+60,48\right)-C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur untuk $n \geq 2$.
5. Ada pelabelan selimut $\left(57n+77,33\right)-C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur untuk $n \geq 2$.
6. Ada pelabelan selimut $\left(68n+52,32\right)-C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur untuk $n \geq 2$.
7. Ada pelabelan selimut $\left(58n+76,31\right)-C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur untuk $n \geq 2$.
8. Ada pelabelan selimut $\left(59n+75,29\right)-C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur untuk $n \geq 2$.
9. Ada pelabelan selimut $\left(60n+74,27\right)-C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur untuk $n \geq 2$.
10. Ada pelabelan selimut $\left(61n+73,25\right)-C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur untuk $n \geq 2$.

Pembahasan

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan batas atas pelabelan selimut (*a,d*)-ℋ-nanti ajaib super tunggal dan untuk menentukan pelabelan selimut *(a,d)-ℋ*-anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur tunggal. Adapun batas atas pelabelan selimut *(a,d)-ℋ*-anti ajaib super dapat ditentukan dengan menggunakan Lemma 1 berikut (Dafik, 2014):

Lemma 1. Jika sebuah graf *G(V,E)* adalah pelabelan selimut *(a,d)-ℋ*-anti ajaib super, maka $d \leq \frac{(p_G-p_H)p_H+(q_G-q_H)q_H}{s-1}$ untuk, $s=|\mathcal{H}_i|$, *H* subgraf *G* yang isomorfik dengan ℋ, $p_G=|V(G)|$, $q_G=|E(G)|$, $p_H=|V(H)|$, $q_H=|E(H)|$.

Hasil penelitian untuk pelabelan selimut (a,d)-ℋ-anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur yaitu:

Batas Atas *d*. Diketahui jumlah titik $p_G = 4n+2$ dan jumlah sisi $q_G = 8n+1$, jumlah titik selimut adalah $p_H = 6$ serta jumlah sisi selimut adalah $q_H = 9$ dengan jumlah selimut n, maka batas atas nilai beda d tersebut adalah:

$$\begin{aligned} d &\le \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s-1} \\ &\le \frac{(4\text{n}+2-6)6+(8\text{n}+1-9)9}{n-1} \\ &\le \frac{(4\text{n}-4)6+(8\text{n}-8)9}{n-1} \\ &\le \frac{96\text{n}-96}{n-1} \\ &\le \frac{96(n-1)}{n-1} \\ &\le 96 \end{aligned}$$

Pelabelan selimut *(a,d)-ℋ*-anti ajaib super selalu menggunakan bilangan bulat positif, maka nilai $d \ge 0$ dan d adalah bilangan bulat, sehingga $d \in \{0,1,2,\ldots,96\}$. Selanjutnya penentuan fungsi bijektif pelabelan selimut *(a,d)-ℋ*-anti ajaib super akan disesuaikan dengan nilai d yang telah ditetapkan. Adapun teorema-teorema yang telah ditemukan sebagai berikut:

Teorema 1. Ada pelabelan selimut $(36\text{n}+84,96)-C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur yang dinotasikan dengan $Shack(C_6^{3,}e,n)$ untuk $n \ge 2$.

Bukti. Labeli titik $Shack(C_6^{3,}e,n)$ dengan fungsi bijektif f_1 dengan label sebagai berikut:

$$f_1(x_{i,j}) = 4\text{j}+i-5 \quad \text{untuk} \quad i=2,3,\ 1\le j\le n$$

$$f_1(x_{i,j}) = 4\text{j}+\frac{i+2}{3}-2 \quad \text{untuk} \quad i=1,4,\ 1\le j\le n$$

f_1 adalah fungsi bijektif yang memetakan *Shack* $(C_6^{3,}e,n)$, ke himpunan bilangan bulat {1, 2, ..., $4n+2$}. Jika w_{f1} didefinisikan sebagai bobot titik selimut dari pelabelan selimut total pada $Shack(C_6^{3,}e,n)$, dimana bobot titik selimut tersebut diperoleh dari penjumlahan 6 label titik dari graf siklus dengan busur yang menjadi selimut pada $Shack(C_6^{3,}e,n)$, maka fungsi bijektif w_{f1} dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{f_1} &= \cup_{i=2,3}(f_1(x_{i,j})) + \cup_{i=1,4}(f_1(x_{i,j})) + \cup_{i=2,3}(f_1(x_{i,j+1})) \\ &= \cup_{i=1,4}(4\text{j}+\frac{i+2}{3}-2) + \cup_{i=2,3}(4\text{j}+i-5+4(j+1)+i-5) \\ &= \cup_{i=1,4}(4\text{j}+\frac{i+2}{3}-2) + \cup_{i=2,3}(8\text{j}+2\text{i}-6) \end{aligned}$$

Himpunan bobot titik selimut di atas adalah w_{f1} = {21, 45, 69, ..., $24n$-3} membentuk barisan aritmatika dengan d = 24. Karena $U_n = a+(n-1)b$ = 21+(n-1)24 = 24n-3 maka terbukti bahwa fungsi bobot selimut w_{f1} =24i-3. Selanjutnya untuk membentuk selimut total, diperlukan label sisi. Labeli sisi $Shack(C_6^{3,}e,n)$ dengan fungsi bijektif f_1 yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f_1(x_{i,j}x_{i+1,j}) = 4\text{n}-i+8\text{j}-3 \quad \text{untuk} \quad i=1,2,\ 1\le j\le n$$

$$f_1(x_{1,j}x_{3,j}) = 4\text{n}+8\text{j}-3 \quad \text{untuk} \quad 1\le j\le n$$

$$f_1(x_{3,j}x_{4,j}) = 4\text{n}+8\text{j}-2 \quad \text{untuk} \quad 1\le j\le n$$

$$f_1(x_{2,j}x_{3,j+1}) = 4\text{n}+8\text{j}-1 \quad \text{untuk} \quad 1\le j\le n$$

$$f_1(x_{1,j}x_{2,j+1}) = 4\text{n}+8\text{j} \quad \text{untuk} \quad 1\le j\le n$$

$$f_1(x_{1,j}x_{3,j+1}) = 4\text{n}+8\text{j}+1 \quad \text{untuk} \quad 1\le j\le n$$

$$f_1(x_{4,j}x_{3,j+1}) = 4\text{n}+8\text{j}+2 \quad \text{untuk} \quad 1\le j\le n$$

Jika W_{f1} didefinisikan sebagai bobot selimut total pada $Shack(C_6^{3,}e,n)$ berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka W_{f1} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik selimut w_{f1} dan rumus label sisi f_1 dengan syarat batas i dan j yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_1} = {} & w_{f_1} + \cup_{i=1,2}(f_1(x_{i,j}x_{i+1,j})) + f_1(x_{1,j}x_{3,j}) + \\ & f_1(x_{3,j}x_{4,j}) + f_1(x_{2,j}x_{3,j+1}) + f_1(x_{1,j}x_{2,j+1}) + \\ & f_1(x_{1,j}x_{3,j+1}) + f_1(x_{4,j}x_{3,j+1}) + f_1(x_{2,j}x_{3,j}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{f_1} = {} & \cup_{i=1,4}(4\text{j}+\frac{i+2}{3}-2) + \cup_{i=2,3}(8\text{j}+2\text{i}-6) + \\ & \cup_{i=1,2}(4\text{n}-i+8\text{j}-3) + (4\text{n}+8\text{j}-3) + (4\text{n}+8\text{j}-2) + \\ & (4\text{n}+8\text{j}-1) + (4\text{n}+8\text{j}) + (4\text{n}+8\text{j}+1) + (4\text{n}+8\text{j}+2) + \\ & (4\text{n}-2+8(j+1)-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{f_1} = {} & \cup_{i=1,4}(4\text{j}+\frac{i+2}{3}-2) + \cup_{i=2,3}(8\text{j}+2\text{i}-6) + \\ & \cup_{i=1,2}(4\text{n}-i+8\text{j}-3) + (28\text{n}+56\text{j}) \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari W_{f1} = {36n+84, 36n+180, ..., 132n-12}. Karena $U_n = a + (n-1)b$= 36n+84+ (n-1)96 = 132n-12 maka terbuktilah bahwa ada pelabelan selimut $(36\text{n}+84,96)-C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur yang dinotasikan dengan $Shack(C_6^{3,}e,n)$ untuk $n \ge 2$.

Teorema 2. Ada pelabelan selimut $(44\text{n}+76,80)-C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur yang dinotasikan dengan $Shack(C_6^{3,}e,n)$ untuk $n \ge 2$.

Bukti. Labeli titik $Shack(C_6^{3,}e,n)$ yang terdapat pada teorema 1 ke dalam teorema 2 dengan fungsi bijektif $f_1(x_{i,j})$ untuk i = 2,3 dan i = 1,4 maka $f_2(x_{i,j}) = f_1(x_{i,j})$ sehingga w_{f2} = w_{f1} = $\cup_{i=1,4}(4\text{j}+\frac{i+2}{3}-2)+\cup_{i=2,3}(8\text{j}+2\text{i}-6)$, untuk 1 ≤ j ≤ n. Labeli sisi $Shack(C_6^{3,}e,n)$ yang terdapat pada teorema 1 ke dalam teorema 2 dimana $f_2 = f_1$, maka label sisinya: $f_2(x_{i,j}x_{i+1,j}) = f_1(x_{i,j}x_{i+1,j})$, $f_2(x_{2,j}x_{3,j+1}) = f_1(x_{2,j}x_{3,j+1})$, $f_2(x_{2,j}x_{3,j+1}) = f_1(x_{2,j}x_{3,j+1})$, $f_2(x_{1,j}x_{2,j+1}) = f_1(x_{1,j}x_{2,j+1})$, $f_2(x_{1,j}x_{3,j+1}) = f_1(x_{1,j}x_{3,j+1})$, $f_2(x_{4,j}x_{3,j+1}) = f_1(x_{4,j}x_{3,j+1})$, $f_2(x_{3,j}x_{4,j})$ = 12n-8j+5 untuk 1 ≤ j ≤ n, $f_2(x_{1,j}x_{3,j})$ = 4n+8j-2 untuk 1 ≤ j ≤ n.

Jika W_{f2} didefinisikan sebagai bobot selimut total pada $Shack(C_6^{3,}e,n)$ berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka W_{f2} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik selimut w_{f2} dan rumus label sisi f_2 dengan syarat batas i dan j yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_2} = {} & w_{f_2} + \cup_{i=1,2}(f_2(x_{i,j}x_{i+1,j})) + f_2(x_{3,j}x_{4,j}) + \\ & f_2(x_{1,j}x_{3,j}) + f_2(x_{2,j}x_{3,j+1}) + f_2(x_{1,j}x_{2,j+1}) + \\ & f_2(x_{1,j}x_{3,j+1}) + f_2(x_{4,j}x_{3,j+1}) + f_2(x_{2,j}x_{3,j}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{f_2} = {} & \cup_{i=1,4}(4\text{j}+\frac{i+2}{3}-2) + \cup_{i=2,3}(8\text{j}+2\text{i}-6) + \\ & \cup_{i=1,2}(4\text{n}-i+8\text{j}-3) + (12\text{n}-8\text{j}+5) + (4\text{n}+8\text{j}-2) + \\ & (4\text{n}+8\text{j}-1) + (4\text{n}+8\text{j}) + (4\text{n}+8\text{j}+1) + (4\text{n}+8\text{j}+2) + \end{aligned}$$

$$(4n-2+8(j+1)-3)$$

$$W_{f_2}=\cup_{i=1,4}\left(4j+\frac{i+2}{3}-2\right)+\cup_{i=2,3}(8j+2i-6)+$$
$$\cup_{i=1,2}(4n-i+8j-3)+(36n+40j+8)$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari W_{f2} = {44n+76, 44n+156, ..., 124n-4}. Karena $U_n = a+(n-1)b$ = 44n+76+(n-1)80 = 124n-4 maka terbuktilah bahwa ada pelabelan selimut $(44n+76,80)-C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur yang dinotasikan dengan $Shack(C_6^{3,}e,n)$ untuk $n \geq 2$.

Teorema 3. Ada pelabelan selimut $(52n+68,64)-C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur yang dinotasikan dengan $Shack(C_6^{3,}e,n)$ untuk $n \geq 2$.

Bukti. Labeli titik $Shack(C_6^{3,}e,n)$ yang terdapat pada teorema 1 ke dalam teorema 3 dengan fungsi bijektif $f_1(x_{i,j})$ untuk i = 2,3 dan i = 1,4 maka $f_3(x_{i,j}) = f_1(x_{i,j})$ sehingga $w_{f3} = w_{f1} = \cup_{i=1,4}(4j+\frac{i+2}{3}-2)+\cup_{i=2,3}(8j+2i-6)$, untuk $1 \leq j \leq n$. Labeli sisi $Shack(C_6^{3,}e,n)$ yang terdapat pada teorema 1 ke dalam teorema 3 dan teorema 2 ke dalam teorema 3 dimana $f_3 = f_1$ dan $f_3 = f_2$, maka label sisinya: $f_3(x_{i,j}x_{i+1,j}) = f_1(x_{i,j}x_{i+1,j})$, $f_3(x_{3,j}x_{4,j}) = f_2(x_{3,j}x_{4,j})$, $f_3(x_{1,j}x_{3,j}) = f_2(x_{1,j}x_{3,j})$, $f_3(x_{1,j}x_{3,j+1}) = f_1(x_{1,j}x_{3,j+1})$, $f_3(x_{4,j}x_{3,j+1}) = f_1(x_{4,j}x_{3,j+1})$, $f_3(x_{1,j}x_{2,j+1})$ = 12n-8j+7 untuk $1 \leq j \leq n$, $f_3(x_{2,j}x_{3,j+1})$ = 4n+8j untuk $1 \leq j \leq n$.

Jika W_{f3} didefinisikan sebagai bobot selimut total pada $Shack(C_6^{3,}e,n)$ berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka W_{f3} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik selimut w_{f3} dan rumus label sisi f_3 dengan syarat batas i dan j yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$W_{f_3}=w_{f_3}+\cup_{i=1,2}(f_3(x_{i,j}x_{i+1,j}))+f_3(x_{3,j}x_{4,j})+$$
$$f_3(x_{1,j}x_{3,j})+f_3(x_{1,j}x_{2,j+1})+f_3(x_{2,j}x_{3,j+1})+$$
$$f_3(x_{1,j}x_{3,j+1})+f_3(x_{4,j}x_{3,j+1})+f_3(x_{2,j}x_{3,j})$$

$$W_{f_3}=\cup_{i=1,4}\left(4j+\frac{i+2}{3}-2\right)+\cup_{i=2,3}(8j+2i-6)+$$
$$\cup_{i=1,2}(4n-i+8j-3)+(12n-8j+5)+(4n+8j-2)+$$
$$(12n-8j+7)+(4n+8j)+(4n+8j+1)+(4n+8j+2)+$$
$$(4n-2+8(j+1)-3)$$

$$W_{f_3}=\cup_{i=1,4}\left(4j+\frac{i+2}{3}-2\right)+\cup_{i=2,3}(8j+2i-6)+$$
$$\cup_{i=1,2}(4n-i+8j-3)+(44n+24j+16)$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari W_{f3} = {52n+68, 52n+132, ..., 116n+4}. Karena $U_n = a+(n-1)b$ = 52n+68+(n-1)64 = 116n+4 maka terbuktilah bahwa ada pelabelan selimut $(52n+68,64)-C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur yang dinotasikan dengan $Shack(C_6^{3,}e,n)$ untuk $n \geq 2$.

Teorema 4. Ada pelabelan selimut $(60n+60,48)-C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur yang dinotasikan dengan $Shack(C_6^{3,}e,n)$ untuk $n \geq 2$.

Bukti. Labeli titik $Shack(C_6^{3,}e,n)$ yang terdapat pada teorema 1 ke dalam teorema 4 dengan fungsi bijektif $f_1(x_{i,j})$ untuk i = 2,3 dan i = 1,4 maka $f_4(x_{i,j}) = f_1(x_{i,j})$ sehingga $w_{f4} = w_{f1} = \cup_{i=1,4}(4j+\frac{i+2}{3}-2)+\cup_{i=2,3}(8j+2i-6)$, untuk $1 \leq j \leq n$. Labeli sisi $Shack(C_6^{3,}e,n)$ yang terdapat pada teorema 1, teorema 2 juga teorema 3 ke dalam teorema 4 dimana $f_4 = f_1$, $f_4 = f_2$ dan $f_4 = f_3$, maka label sisinya: $f_4(x_{i,j}x_{i+1,j}) = f_1(x_{i,j}x_{i+1,j})$, $f_4(x_{3,j}x_{4,j}) = f_1(x_{3,j}x_{4,j})$, $f_4(x_{1,j}x_{3,j}) = f_2(x_{1,j}x_{3,j})$, $f_4(x_{1,j}x_{2,j+1}) = f_3(x_{1,j}x_{2,j+1})$, $f_4(x_{2,j}x_{3,j+1}) = f_3(x_{2,j}x_{3,j+1})$, $f_4(x_{4,j}x_{3,j+1})$ = 4n+8j+1 untuk $1 \leq j \leq n$, $f_4(x_{1,j}x_{3,j+1})$ = 12n-8j+10 untuk $1 \leq j \leq n$.

Jika W_{f4} didefinisikan sebagai bobot selimut total pada $Shack(C_6^{3,}e,n)$ berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka W_{f4} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik selimut w_{f4} dan rumus label sisi f_4 dengan syarat batas i dan j yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$W_{f_4}=w_{f_4}+\cup_{i=1,2}(f_4(x_{i,j}x_{i+1,j}))+f_4(x_{3,j}x_{4,j})+$$
$$f_4(x_{1,j}x_{3,j})+f_4(x_{1,j}x_{2,j+1})+f_4(x_{2,j}x_{3,j+1})+$$
$$f_4(x_{4,j}x_{3,j+1})+f_4(x_{1,j}x_{3,j+1})+f_4(x_{2,j}x_{3,j})$$

$$W_{f_4}=\cup_{i=1,4}\left(4j+\frac{i+2}{3}-2\right)+\cup_{i=2,3}(8j+2i-6)+$$
$$\cup_{i=1,2}(4n-i+8j-3)+(12n-8j+5)+(4n+8j-2)+$$
$$(12n-8j+7)+(4n+8j)+(4n+8j+1)+(12n-8j+10)+$$
$$(4n-2+8(j+1)-3)$$

$$W_{f_4}=\cup_{i=1,4}\left(4j+\frac{i+2}{3}-2\right)+\cup_{i=2,3}(8j+2i-6)+$$
$$\cup_{i=1,2}(4n-i+8j-3)+(52n+8j+24)$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari W_{f4} = {60n+60, 60n+108, ..., 108n+12}. Karena $U_n = a+(n-1)b$ = 60n+60+(n-1)48 = 108n+12 maka terbuktilah bahwa ada pelabelan selimut $(60n+60,48)-C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur yang dinotasikan dengan $Shack(C_6^{3,}e,n)$ untuk $n \geq 2$.

Teorema 5. Ada pelabelan selimut $(57n+77,33)-C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur yang dinotasikan dengan $Shack(C_6^{3,}e,n)$ untuk $n \geq 2$.

Bukti. Labeli titik $Shack(C_6^{3,}e,n)$ yang terdapat pada teorema 1 ke dalam teorema 5 dengan fungsi bijektif $f_1(x_{i,j})$ untuk i=2,3 dan i=1,4 maka $f_5(x_{i,j}) = f_1(x_{i,j})$ sehingga $w_{f5} = w_{f1} = \cup_{i=1,4}(4j+\frac{i+2}{3}-2)+\cup_{i=2,3}(8j+2i-6)$, untuk $1 \leq j \leq n$. Labeli sisi $Shack(C_6^{3,}e,n)$ dengan fungsi bijektif f_5 yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f_5(x_{i,j}x_{i+1,j})=4n-4i+j+10, untuk\ i=1,2, 1\leq j\leq n$$
$$f_5(x_{1,j}x_{3,j})=5n+j+6, untuk\ 1\leq j\leq n$$
$$f_5(x_{3,j}x_{4,j})=6n+j+6, untuk\ 1\leq j\leq n$$
$$f_5(x_{2,j}x_{3,j+1})=7n+j+6, untuk\ 1\leq j\leq n$$
$$f_5(x_{1,j}x_{2,j+1})=8n+j+6, untuk\ 1\leq j\leq n$$
$$f_5(x_{1,j}x_{3,j+1})=9n+j+6, untuk\ 1\leq j\leq n$$
$$f_5(x_{4,j}x_{3,j+1})=10n+j+6, untuk\ 1\leq j\leq n$$

Jika W_{f5} didefinisikan sebagai bobot selimut total pada $Shack(C_6^{3,}e,n)$ berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka W_{f5} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik selimut w_{f5} dan rumus label sisi f_5 dengan syarat batas i dan j yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$W_{f_5}=w_{f_5}+\cup_{i=1,2}(f_5(x_{i,j}x_{i+1,j}))+f_5(x_{1,j}x_{3,j})+$$
$$f_5(x_{3,j}x_{4,j})+f_5(x_{2,j}x_{3,j+1})+f_5(x_{1,j}x_{2,j+1})+$$

$$f_5(x_{1,j}x_{3,j+1})+f_5(x_{4,j}x_{3,j+1})+f_5(x_{2,j}x_{3,j})$$
$$W_{f_5}=\cup_{i=1,4}(4j+\frac{i+2}{3}-2)+\cup_{i=2,3}(8j+2i-6)+$$
$$\cup_{i=1,2}(4n-4i+j+10)+(5n+j+6)+(6n+j+6)+$$
$$(7n+j+6)+(8n+j+6)+(9n+j+6)+(10n+j+6)+$$
$$(4n-8+(j+1)+10)$$
$$W_{f_5}=\cup_{i=1,4}(4j+\frac{i+2}{3}-2)+\cup_{i=2,3}(8j+2i-6)+$$
$$\cup_{i=1,2}(4n-4i+j+10)+(49n+7j+39)$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari W_{f5} = {57*n*+77, 57*n*+110, ..., 90*n*+44}. Karena $U_n = a+(n-1)b$ = 57*n*+77+ (*n*-1)33 = 90*n*+44 maka terbuktilah bahwa ada pelabelan selimut $(57n+77,33)-C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur yang dinotasikan dengan $Shack(C_6^{3,}e,n)$ untuk $n \geq 2$.

Teorema 6. Ada pelabelan selimut $(68n+52,32)-C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur yang dinotasikan dengan $Shack(C_6^{3,}e,n)$ untuk $n \geq 2$.

Bukti. Labeli titik $Shack(C_6^{3,}e,n)$ yang terdapat pada teorema 1 ke dalam teorema 6 dengan fungsi bijektif $f_1(x_{i,j})$ untuk *i* = 2,3 dan *i* = 1,4 maka $f_6(x_{i,j}) = f_1(x_{i,j})$ sehingga $w_{f6} = w_{f1} = \cup_{i=1,4}(4j+\frac{i+2}{3}-2)+\cup_{i=2,3}(8j+2i-6)$, untuk $1 \leq j \leq n$. Labeli sisi $Shack(C_6^{3,}e,n)$ yang terdapat pada teorema 1, teorema 2, teorema 3 juga teorema 4 ke dalam teorema 6 dimana $f_6 = f_1$, $f_6 = f_2$, $f_6 = f_3$ dan $f_6 = f_4$, maka label sisinya: $f_6(x_{i,j}x_{i+1,j}) = f_1(x_{i,j}x_{i+1,j})$, $f_6(x_{3,j}x_{4,j}) = f_2(x_{3,j}x_{4,j})$, $f_6(x_{1,j}x_{3,j}) = f_2(x_{1,j}x_{3,j})$, $f_6(x_{1,j}x_{2,j+1}) = f_3(x_{1,j}x_{2,j+1})$, $f_6(x_{2,j}x_{3,j+1}) = f_3(x_{2,j}x_{3,j+1})$, $f_6(x_{1,j}x_{3,j+1}) = f_4(x_{1,j}x_{3,j+1})$, $f_6(x_{4,j}x_{3,j+1})$ = 12*n*-8j+9 untuk $1 \leq j \leq n$.

Jika W_{f6} didefinisikan sebagai bobot selimut total pada $Shack(C_6^{3,}e,n)$ berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka W_{f6} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik selimut w_{f6} dan rumus label sisi f_6 dengan syarat batas *i* dan *j* yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$W_{f_6}=w_{f_6}+\cup_{i=1,2}(f_4(x_{i,j}x_{i+1,j}))+f_6(x_{3,j}x_{4,j})+$$
$$f_6(x_{1,j}x_{3,j})+f_6(x_{1,j}x_{2,j+1})+f_6(x_{2,j}x_{3,j+1})+$$
$$f_6(x_{4,j}x_{3,j+1})+f_6(x_{1,j}x_{3,j+1})+f_6(x_{2,j}x_{3,j})$$
$$W_{f_6}=\cup_{i=1,4}(4j+\frac{i+2}{3}-2)+\cup_{i=2,3}(8j+2i-6)+$$
$$\cup_{i=1,2}(4n-i+8j-3)+(12n-8j+5)+(4n+8j-2)+$$
$$(12n-8j+7)+(4n+8j)+(12n-8j+9)+(12n-8j+10)+$$
$$(4n-2+8(j+1)-3)$$
$$W_{f_6}=\cup_{i=1,4}(4j+\frac{i+2}{3}-2)+\cup_{i=2,3}(8j+2i-6)+$$
$$\cup_{i=1,2}(4n-i+8j-3)+(60n-8j+32)$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari W_{f6} = *{68n+52, 68n+84,..., 100n+20}*. Karena *Un=a+(n-1)b= 68n+52+(n-1)32=100n+20* maka terbuktilah bahwa ada pelabelan selimut $(68n+52,32)-C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur yang dinotasikan dengan $Shack(C_6^{3,}e,n)$ untuk $n \geq 2$.

Teorema 7. Ada pelabelan selimut $(58n+76,31)-C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur yang dinotasikan dengan $Shack(C_6^{3,}e,n)$ untuk $n \geq 2$.

Bukti. Labeli titik $Shack(C_6^{3,}e,n)$ yang terdapat pada teorema 1 ke dalam teorema 7 dengan fungsi bijektif $f_1(x_{i,j})$ untuk i = 2,3 dan i = 1,4 maka $f_7(x_{i,j}) = f_1(x_{i,j})$ sehingga $w_{f7} = w_{f1} = \cup_{i=1,4}(4j+\frac{i+2}{3}-2)+\cup_{i=2,3}(8j+2i-6)$, untuk $1 \leq j \leq n$. Labeli sisi $Shack(C_6^{3,}e,n)$ yang terdapat pada teorema 5 ke dalam teorema 7 dimana $f_7 = f_5$, maka label sisinya: $f_7(x_{i,j}x_{i+1,j}) = f_5(x_{i,j}x_{i+1,j})$, $f_7(x_{2,j}x_{3,j+1}) = f_5(x_{2,j}x_{3,j+1})$, $f_7(x_{1,j}x_{2,j+1}) = f_5(x_{1,j}x_{2,j+1})$, $f_7(x_{1,j}x_{3,j+1}) = f_5(x_{1,j}x_{3,j+1})$, $f_7(x_{4,j}x_{3,j+1}) = f_5(x_{4,j}x_{3,j+1})$, $f_7(x_{3,j}x_{4,j})$ = 6*n*-j+7 untuk $1 \leq j \leq n$, dan $f_7(x_{1,j}x_{3,j})$ = 6*n*+j+6 untuk $1 \leq j \leq n$.

Jika W_{f7} didefinisikan sebagai bobot selimut total pada $Shack(C_6^{3,}e,n)$ berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka W_{f7} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik selimut w_{f7} dan rumus label sisi f_7 dengan syarat batas *i* dan *j* yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$W_{f_7}=w_{f_7}+\cup_{i=1,2}(f_7(x_{i,j}x_{i+1,j}))+f_7(x_{3,j}x_{4,j})+$$
$$f_7(x_{1,j}x_{3,j})+f_7(x_{2,j}x_{3,j+1})+f_7(x_{1,j}x_{2,j+1})+$$
$$f_7(x_{1,j}x_{3,j+1})+f_7(x_{4,j}x_{3,j+1})+f_7(x_{2,j}x_{3,j})$$
$$W_{f_7}=\cup_{i=1,4}(4j+\frac{i+2}{3}-2)+\cup_{i=2,3}(8j+2i-6)+$$
$$\cup_{i=1,2}(4n-4i+j+10)+(6n-j+7)+(6n+j+6)+$$
$$(7n+j+6)+(8n+j+6)+(9n+j+6)+(10n+j+6)+$$
$$(4n-8+(j+1)+10)$$
$$W_{f_7}=\cup_{i=1,4}(4j+\frac{i+2}{3}-2)+\cup_{i=2,3}(8j+2i-6)+$$
$$\cup_{i=1,2}(4n-4i+j+10)+(50n+5j+40)$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari W_{f7} = {58*n*+76, 58*n*+107, ..., 89*n*+45}. Karena $U_n = a+(n-1)b$ = 58*n*+76+ (*n*-1)31 = 89*n*+45 maka terbuktilah bahwa ada pelabelan selimut $(58n+76,31)-C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur yang dinotasikan dengan $Shack(C_6^{3,}e,n)$ untuk $n \geq 2$.

Teorema 8. Ada pelabelan selimut $(59n+75,29)-C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur yang dinotasikan dengan $Shack(C_6^{3,}e,n)$ untuk $n \geq 2$.

Bukti. Labeli titik $Shack(C_6^{3,}e,n)$ yang terdapat pada teorema 1 ke dalam teorema 8 dengan fungsi bijektif $f_1(x_{i,j})$ untuk *i* = 2,3 dan *i* = 1,4 maka $f_8(x_{i,j}) = f_1(x_{i,j})$ sehingga $w_{f8} = w_{f1} = \cup_{i=1,4}(4j+\frac{i+2}{3}-2)+\cup_{i=2,3}(8j+2i-6)$, untuk $1 \leq j \leq n$. Labeli sisi $Shack(C_6^{3,}e,n)$ yang terdapat pada teorema 5 dan teorema 7 ke dalam teorema 8 dimana $f_8 = f_5$ dan $f_8 = f_7$ maka label sisinya: $f_8(x_{i,j}x_{i+1,j}) = f_5(x_{i,j}x_{i+1,j})$, $f_8(x_{3,j}x_{4,j}) = f_7(x_{3,j}x_{4,j})$, $f_8(x_{1,j}x_{3,j}) = f_7(x_{1,j}x_{3,j})$, $f_8(x_{1,j}x_{3,j+1}) = f_5(x_{1,j}x_{3,j+1})$, $f_8(x_{4,j}x_{3,j+1}) = f_5(x_{4,j}x_{3,j+1})$, $f_8(x_{1,j}x_{2,j+1})$ = 8*n*-j+7 untuk $1 \leq j \leq n$, dan $f_8(x_{2,j}x_{3,j+1})$ = 8*n*+j+6 untuk $1 \leq j \leq n$.

Jika W_{f8} didefinisikan sebagai bobot selimut total pada $Shack(C_6^{3,}e,n)$ berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka W_{f8} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik selimut w_{f8} dan rumus label sisi f_8 dengan syarat batas *i* dan *j* yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$W_{f_8}=w_{f_8}+\cup_{i=1,2}(f_8(x_{i,j}x_{i+1,j}))+f_8(x_{3,j}x_{4,j})+$$
$$f_8(x_{1,j}x_{3,j})+f_8(x_{1,j}x_{2,j+1})+f_8(x_{2,j}x_{3,j+1})+$$

$f_8(x_{1,j}x_{3,j+1})+f_8(x_{4,j}x_{3,j+1})+f_8(x_{2,j}x_{3,j})$

$W_{f_8}=\cup_{i=1,4}(4j+\frac{i+2}{3}-2)+\cup_{i=2,3}(8j+2i-6)+$
$\cup_{i=1,2}(4n-4i+j+10)+(6n-j+7)+(6n+j+6)+$
$(8n-j+7)+(8n+j+6)+(9n+j+6)+(10n+j+6)+$
$(4n-8+(j+1)+10)$

$W_{f_8}=\cup_{i=1,4}(4j+\frac{i+2}{3}-2)+\cup_{i=2,3}(8j+2i-6)+$
$\cup_{i=1,2}(4n-4i+j+10)+(51n+3j+41)$

Dengan demikian barisan aritmatika dari W_{f8} = {59*n*+75, 59*n*+104, ..., 88*n*+46}. Karena $U_n = a+(n-1)b$ = 59*n*+75+ (*n*-1)29 = 88*n*+46 maka terbuktilah bahwa ada pelabelan selimut $(59n+75,29)-C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf $C_6^{3,}$ yang dinotasikan dengan $Shack(C_6^{3,}e,n)$ untuk *n ≥ 2.*

Teorema 9. Ada pelabelan selimut $(60n+74,27)-C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur yang dinotasikan dengan $Shack(C_6^{3,}e,n)$ untuk *n ≥ 2.*

Bukti. Labeli titik $Shack(C_6^{3,}e,n)$ yang terdapat pada teorema 1 ke dalam teorema 9 dengan fungsi bijektif f_1 ($x_{i,j}$) untuk *i* = 2,3 dan *i* = 1,4 maka f_9 ($x_{i,j}$) = f_1 ($x_{i,j}$) sehingga w_{f10} = w_{f1} = $\cup_{i=1,4}(4j+\frac{i+2}{3}-2)+\cup_{i=2,3}(8j+2i-6)$, untuk 1 ≤ j ≤ n. Labeli sisi $Shack(C_6^{3,}e,n)$ yang terdapat pada teorema 5, teorema 7 juga teorema 8 ke dalam teorema 9 dimana $f_9 = f_5$, $f_9 = f_7$ dan $f_9 = f_8$ maka label sisinya: $f_9(x_{i,j}x_{i+1,j}) = f_5(x_{i,j}x_{i+1,j})$, $f_9(x_{3,j}x_{4,j}) = f_7(x_{3,j}x_{4,j})$, $f_9(x_{1,j}x_{3,j}) = f_7(x_{1,j}x_{3,j})$, $f_9(x_{1,j}x_{2,j+1}) = f_8(x_{1,j}x_{2,j+1})$, $f_9(x_{2,j}x_{3,j+1}) = f_8(x_{2,j}x_{3,j+1})$, $f_9(x_{4,j}x_{3,j+1})$ = 9*n*+j+6 untuk 1 ≤ j ≤ *n*, dan $f_9(x_{1,j}x_{3,j+1})$ = 11*n*-j+7 untuk 1 ≤ j ≤ *n*.

Jika W_{f9} didefinisikan sebagai bobot selimut total pada $Shack(C_6^{3,}e,n)$ berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka W_{f9} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik selimut w_{f9} dan rumus label sisi f_9 dengan syarat batas *i* dan *j* yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$W_{f_9}=w_{f_9}+\cup_{i=1,2}(f_9(x_{i,j}x_{i+1,j}))+f_9(x_{3,j}x_{4,j})+$
$f_9(x_{1,j}x_{3,j})+f_9(x_{1,j}x_{2,j+1})+f_9(x_{2,j}x_{3,j+1})+$
$f_9(x_{4,j}x_{3,j+1})+f_9(x_{1,j}x_{3,j+1})+f_9(x_{2,j}x_{3,j})$

$W_{f_9}=\cup_{i=1,4}(4j+\frac{i+2}{3}-2)+\cup_{i=2,3}(8j+2i-6)+$
$\cup_{i=1,2}(4n-4i+j+10)+(6n-j+7)+(6n+j+6)+$
$(8n-j+7)+(8n+j+6)+(9n+j+6)+(11n-j+7)+$
$(4n-8+(j+1)+10)$

$W_{f_9}=\cup_{i=1,4}(4j+\frac{i+2}{3}-2)+\cup_{i=2,3}(8j+2i-6)+$
$\cup_{i=1,2}(4n-4i+j+10)+(52n+j+42)$

Dengan demikian barisan aritmatika dari W_{f9} = {60*n*+74, 60*n*+101, ..., 87*n*+47}. Karena $U_n = a+(n-1)b$ = 60*n*+74+ (*n*-1)27 = 87*n*+47 maka terbuktilah bahwa ada pelabelan selimut $(60n+74,27)-C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur yang dinotasikan dengan $Shack(C_6^{3,}e,n)$ untuk *n ≥ 2.*

Teorema 10. Ada pelabelan selimut $(61n+73,25)-C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur yang dinotasikan dengan $Shack(C_6^{3,}e,n)$ untuk *n ≥ 2.*

Bukti. Labeli titik $Shack(C_6^{3,}e,n)$ yang terdapat pada teorema 1 ke dalam teorema 10 dengan fungsi bijektif f_1 ($x_{i,j}$) untuk *i* = 2,3 dan *i* = 1,4 maka f_{10} ($x_{i,j}$) = f_1 ($x_{i,j}$) sehingga w_{f10} = w_{f1} = $\cup_{i=1,4}(4j+\frac{i+2}{3}-2)+\cup_{i=2,3}(8j+2i-6)$, untuk 1 ≤ j ≤ n. Labeli sisi $Shack(C_6^{3,}e,n)$ yang terdapat pada teorema 5, teorema 7, teorema 8 juga teorema 9 ke dalam teorema 10 dimana $f_{10} = f_5$, $f_{10} = f_7$, $f_{10} = f_8$ dan $f_{10} = f_9$ maka label sisinya: $f_{10}(x_{i,j}x_{i+1,j}) = f_5(x_{i,j}x_{i+1,j})$, $f_{10}(x_{3,j}x_{4,j}) = f_7(x_{3,j}x_{4,j})$, $f_{10}(x_{1,j}x_{3,j}) = f_7(x_{1,j}x_{3,j})$, $f_{10}(x_{1,j}x_{2,j+1}) = f_8(x_{1,j}x_{2,j+1})$, $f_{10}(x_{2,j}x_{3,j+1}) = f_8(x_{2,j}x_{3,j+1})$, $f_{10}(x_{1,j}x_{3,j+1}) = f_9(x_{1,j}x_{3,j+1})$, $f_{10}(x_{4,j}x_{3,j+1})$ = 10*n*-j+7 untuk 1 ≤ j ≤ *n*.

Jika W_{f10} didefinisikan sebagai bobot selimut total pada $Shack(C_6^{3,}e,n)$ berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka W_{f10} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik selimut w_{f9} dan rumus label sisi f_{10} dengan syarat batas *i* dan *j* yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$W_{f_{10}}=w_{f_{10}}+\cup_{i=1,2}(f_{10}(x_{i,j}x_{i+1,j}))+f_{10}(x_{3,j}x_{4,j})+$
$f_{10}(x_{1,j}x_{3,j})+f_{10}(x_{1,j}x_{2,j+1})+f_{10}(x_{2,j}x_{3,j+1})+$
$f_{10}(x_{4,j}x_{3,j+1})+f_{10}(x_{1,j}x_{3,j+1})+f_{10}(x_{2,j}x_{3,j})$

$W_{f_{10}}=\cup_{i=1,4}(4j+\frac{i+2}{3}-2)+\cup_{i=2,3}(8j+2i-6)+$
$\cup_{i=1,2}(4n-4i+j+10)+(6n-j+7)+(6n+j+6)+$
$(8n-j+7)+(8n+j+6)+(10n-j+7)+(11n-j+7)+$
$(4n-8+(j+1)+10)$

$W_{f_{10}}=\cup_{i=1,4}(4j+\frac{i+2}{3}-2)+\cup_{i=2,3}(8j+2i-6)+$
$\cup_{i=1,2}(4n-4i+j+10)+(53n-j+43)$

Dengan demikian barisan aritmatika dari W_{f10} = {61*n*+73, 61*n*+98, ..., 86*n*+48}. Karena $U_n = a+(n-1)b$ = 61*n*+73+(*n*-1)25 = 86*n*+48 maka terbuktilah bahwa ada pelabelan selimut $(61n+73,25)-C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur yang dinotasikan dengan $Shack(C_6^{3,}e,n)$ untuk *n ≥ 2.*

Kesimpulan dan Saran

Pelabelan Selimut *(a,d)-ℋ* Anti Ajaib Super pada shackle dari graf siklus dengan busur memiliki batas atas *d ≤ 96*. Shackle dari graf siklus dengan busur memiliki pelabelan selimut *(a,d)-* C_6^3 -anti ajaib super untuk *d* = {96, 80, 64, 48, 33, 32, 31, 29, 27, 25}. Hasil penelitian ini dibuktikan pada teorema bahwa $Shack(C_6^{3,}e,n)$ terdapat fungsi bijektif pelabelan selimut yaitu (36n+84,96), (44n+76,80), (52n+68, 64), (60n+60,48), (57n+77,33), (68n+52,32), (58n+76,31), (59n+75,29), (60n+74,27), (61n+73,25)- C_6^3 -anti ajaib super untuk *n ≥ 2.* Berdasarkan hasil penelitian mengenai pelabelan selimut (*a,d*)-ℋ-anti ajaib super pada $Shack(C_6^{3,}e,n)$ serta mengacu pada *open problem* dari hasil penelitian yang telah ditemukan, maka peneliti memberikan saran kepada pembaca agar dapat melakukan penelitian pada pelabelan selimut *(a,d)*- C_6^3 -anti ajaib super pada $Shack(C_6^3, e, n)$ dengan $n \geq 2$ untuk $d \leq 96$ selain d = {96, 80, 64, 48, 33, 32, 31, 29, 27, 25}.

Ucapan Terima Kasih

Paper disusun untuk memenuhi syarat memperoleh gelar sarjana (S1) pada Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Jember. Penulis W.N mengucapkan terima kasih kepada dosen pembimbing yang telah membantu dalam penyelesaian tugas akhir ini.

Daftar Pustaka

[1] Citra, S., Hesti, Ika, dan Dafik. 2014. Super (*a,d*)-*ℋ-Antimagic Total Covering pada Graf Semi Windmill. CGANT-Universitas Jember.* Vol. 1(1): 1-8.

[2] Dafik. 2014. *Batas Atas d dari Sebuah Graf yang Memiliki Super* (*a,d*)*-ℋ-Antimagic Covering.* Working Paper, FKIP UNEJ.

[3] Inayah, N., A.N.M. Salman and R. Simanjutak. 2013. *Australian Journal of Combinatorics*. Vol. 57: 127-138.

[4] Inayah, N. 2013. *Pelabelan (a,d)-ℋ-Anti Ajaib pada Beberapa Kelas Graf*. Tidak dipublikasikan (Disertasi). Bandung: Institut Teknologi Bandung.

[5] Rizky, P., Hesti, Ika, dan Dafik. 2014. Super (*a,d*)-*ℋ-Antimagic Total Covering pada Shackle Graf Triangular Book*. *CGANT-Universitas Jember.* Vol. 1(1): 1-10.