



# SERTIFIKAT

3.6.5/UN32.3/DT/2015

Diberikan Kepada  
**YULI NUR AZIZAH**  
Universitas Negeri Jember

Atas partisipasinya sebagai

## PEMAKALAH

Dalam Seminar Nasional Matematika dan Pembelajarannya  
dengan Tema Peranan Matematika dalam Menumbuhkembangkan Daya Saing dan Karakter Bangsa  
yang diselenggarakan oleh Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Negeri Malang Tanggal 5 September 2015

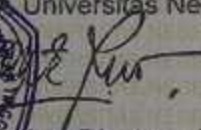
### Judul Makalah

The Application of Super (a,d)-Edge Antimagic Total Decomposition of Shackle of Antiprism Graph  
in Developing a Ciphertext

Malang, 5 September 2015




Universitas Negeri Malang

  
Dr. Markus Diantoro, M.Si  
FMIPA 196612211991031001



Ketua Pelaksana

  
Dr. Erry Hidayanto, M.Si  
NIP. 196609061992031004

# The Application of Super $(a, d)$ –Edge Antimagic Total Decomposition of Shackle of Antiprism Graph in Developing A Ciphertext

Yuli Nur Azizah<sup>1</sup>, Dafik<sup>1,2</sup>, Susi Setiawani<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Department of Mathematics Education-University of Jember

<sup>2</sup> CGANT-University of Jember

e-mail: yuli\_nurazizah@yahoo.com, d.dafik@gmail.com,  
setiawanisusi@gmail.com

## Abstract

All graphs in this paper are finite, simple, and undirected. A graph  $G$  is said to be an super  $(a, d)$ – $H$  antimagic total labeling by  $H$ –decomposition if there exist a bijective function  $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$  such that for all subgraphs  $H'$  isomorphic to  $H$ , the total  $H'$ -weights  $w(H') = \sum_{v \in V(H')} f(v) + \sum_{e \in E(H')} f(e)$  form an arithmetic sequence  $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (s - 1)d\}$ , where  $a$  and  $d$  are positive integers and  $s$  is the number of all subgraphs  $H^i$  isomorphic to  $H$ . Such a labeling is called super if  $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |V(G)|\}$ . In this paper we will study the existence super  $(a, d)$  –  $H$ –antimagic total decomposition of shackle of antiprism graph and use it to develop a polyalphabetic cipher.

**Keywords** : *Application, Ciphertext, Covering, Cryptography, Decomposition, Shackle of Antiprism.*

## Pendahuluan

Teori graf adalah salah satu cabang ilmu matematika. Teori Graf pertama kali dikenalkan oleh seorang matematikawan Swiss yang bernama Leonard Euler pada tahun 1736. Hal ini berawal dari masalah jembatan Königsberg dimana orang-orang Königsberg ingin membuat rute untuk menyebrangi tujuh jembatan itu sekali saja. Pada saat itu, Leonard Euler berhasil menemukan caranya dengan menggunakan aplikasi graf [4].

Selanjutnya salah satu cabang dari graf yang berkembang pesat adalah pewarnaan dan pelabelan. Beberapa jenis pelabelan seperti pelabelan graceful, pelabelan antimagic dan pelabelan irregular. Untuk hasil-hasil terkait pelabelan antimagic lihat [1] dan [2]. Akhir-akhir ini dikembangkan pelabelan antimagic covering (selimut).

Selimut dari  $G$  adalah  $H = H_1, H_2, H_3, \dots, H_k$  keluarga subgraf dari  $G$  dengan sifat setiap sisi di  $G$  termuat pada sekurang-kurangnya satu graf  $H_i$  untuk suatu  $i \in 1, 2, \dots, k$ . Dekomposisi- $H$  adalah bagian dari selimut- $H$  dimana untuk setiap  $i \in 1, 2, \dots, k$  pada  $H_i$  isomorfik dengan suatu subgraf  $H$  [?]. Pelabelan super  $(a, d)$  –  $H$  antimagic total dekomposisi adalah pelabelan pada titik graf, mencari bobot sisi, melabeli sisi dengan melanjutkan dari pelabelan

titik, kemudian mencari total bobot sisi. Pembaca dapat membaca hasil-hasil terkait pada [3], [9], [5], [12], dan [8], juga untuk lebih memahami pengertian dari pelabelan super  $(a, d) - H$  antimagic total dekomposisi.

Aplikasi dari teori graf semakin meluas. Aplikasi tersebut meliputi penentuan jadwal, optimasi jaringan telepon, jaringan komputer, jaringan listrik, menentukan lintasan terpendek, daerah kekuasaan, saluran irigasi, pemecahan masalah *game* komputer, media pembelajaran matematika, dan lain sebagainya. Salah satu aplikasi yang saat ini sedang berkembang adalah pembuatan *ciphertext* (pesan rahasia) yang merupakan cabang ilmu teori pengkodean, lihat [14]. Fokus penelitian ini adalah menginvestigasi pelabelan super  $(a, d) - H$  antimagic total dekomposisi pada shackle graf antiprisma dan mengaitkannya pada pembuatan *ciphertext*.

## Teorema yang Digunakan

Diberikan  $G$  yaitu Shackle graf antiprisma konektif atau  $\text{Shack}(A_n, v, m)$ , selimut- $H$  adalah graf antiprisma atau  $A_n$  dimana  $G$  terdekomposisi atas  $H$  dengan  $|V(G)| = 2nm - m + 1 = p$ ,  $|E(G)| = 4nm = q$ ,  $|V(H)| = 2n = r$ ,  $|E(H)| = 4n = s$ . Maka  $G \cong \text{shack}(H, m)$  memiliki  $|V(G)| = (r - 1)m + 1$  dan  $|E(G)| = sm$ . Sedangkan himpunan titik pada  $\text{Shack}(A_n, v, m)$  adalah  $V(G) = \{x_{1,2,k}; x_{n,2,m}; x_{i,1,k}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_{i,2,k}; 2 \leq i \leq n - 1; 1 \leq k \leq m\}$ . Himpunan sisi dari  $\text{Shack}(A_n, v, m)$  adalah  $E(G) = \{x_{1,2,k}x_{1,2,k+1}; x_{n-1,2,k}x_{1,2,k+1}; x_{n,1,k}x_{1,2,k+1}; x_{1,1,k}x_{1,2,k+1}; 1 \leq k \leq m-1\} \cup \{x_{1,2,m}x_{n,2,m}; x_{n-1,2,m}x_{n,2,m}; x_{n-1,1,m}x_{n,2,m}; x_{1,1,m}x_{n,2,m}\} \cup \{x_{i,2,k}x_{i+1,2,k}; x_{n-1,1,k}x_{n,1,k}; 1 \leq i \leq n-2; 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_{i,1,k}x_{i+1,1,k}; x_{i,1,k}x_{i,2,k}; x_{i,2,k}x_{i+1,1,k}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq k \leq m\}$ .

**Lemma 1** *Jika sebuah graf  $G(V, E)$  adalah pelabelan selimut  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  anti ajaib super maka  $d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s-1}$  untuk  $s = |\mathcal{H}|$ ,  $H \subseteq G$  yang isomorfik dengan  $\mathcal{H}$   $p_G = |V|$ ,  $q_G = |E|$ ,  $p_H = |V'|$ ,  $q_H = |E'|$ .*

**Bukti.**  $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, p_G\}$  dan  $f(E) = \{p_G + 1, p_G + 2, p_G + 2, \dots, p_G + q_G\}$ . Misalkan graf  $(p_G, q_G)$  mempunyai pelabelan selimut  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  anti ajaib super dengan fungsi total  $f(V \cup E) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, p_G + q_G\}$  maka himpunan bobot selimut sebuah graf adalah  $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a(s - 1)d\}$  dimana  $a$

merupakan bobot selimut terkecil maka berlaku:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + p_H + (p_G + 1) + (p_G + 2) + \dots + (p_G + q_H) &\leq a \\ \frac{p_H}{2}(1 + p_H) + q_H p_G + \frac{q_H}{2}(1 + q_H) &\leq a \\ \frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2} &\leq a \end{aligned}$$

Sedangkan untuk nilai terbesar berlaku:

$$\begin{aligned} a + (s - 1)d &\leq p_G + p_G - 1 + p_G - 2 + \dots + (p_G - (p_H - 1)) + (p_G + q_G) \\ &\quad + (p_G + q_G - 1) + (p_G + q_G - 2) + \dots + (p_G + q_G - (q_H - 1)) \\ &= p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(1 + (p_H - 1)) + q_H p_G + q_H p_G \\ &\quad - \frac{q_H - 1}{2}(1 + (q_H - 1)) \\ &= p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (s - 1)d &\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) - a \\ &\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) - \\ &\quad \left(\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}\right) \\ &= p_H p_G - \frac{p_H^2}{2} + \frac{p_H}{2} + q_H p_G - \frac{q_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} - \left(\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}\right) \\ &= p_H p_G + q_H q_G - p_H^2 - q_H^2 \\ &= p_H p_G - p_H^2 + q_H q_G - q_H^2 \\ &= (p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H \\ d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{(s - 1)} \end{aligned}$$

Dari persamaan di atas terbukti bahwa batas atas  $d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s - 1}$  jika graf  $G$  memiliki pelabelan selimut  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  anti ajaib super dari berbagai famili graf (Dafik, 2014).

Adapun batas atas pelabelan selimut  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -anti ajaib super dapat ditentukan dengan menggunakan Lemma 1 (dalam Dafik, 2014). Diketahui jumlah titik  $p_G = 2nm - m + 1$  dan sisi  $q_G = 4nm$ , dan jumlah titik selimut adalah  $p_H = 2n$  serta jumlah sisi selimut adalah  $q_H = 4n$  dengan jumlah selimut  $m$ .

Dengan demikian batas atas nilai beda  $d$  tersebut adalah:

$$\begin{aligned}
 d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s - 1} \\
 &\leq \frac{(2nm - m + 1 - 2n)(2n) + (4nm - 4n)4n}{m - 1} \\
 &\leq \frac{(4n^2m - 2nm + 2n - 4n^2) + (16n^2m - 16n^2)}{m - 1} \\
 &\leq \frac{20n^2m - 2nm - 20n^2 + 2n}{m - 1} \\
 &\leq \frac{20n^2(m - 1) - 2n(m - 1)}{m - 1} \\
 &\leq 20n^2 - 2n
 \end{aligned}$$

## Hasil Penelitian

Penelitian ini menghasilkan beberapa teorema terkait pelabelan super  $(a, d)$ - $H$  antimagic total dekomposisi pada shackle graf antiprisma dan kaitannya dengan *chipertext*.

### Teorema yang Dihasilkan

◇ **Teorema 0.1** *Ada pelabelan super  $(18n^2m - 9nm + 12n + m - 1, 6n) - H$  antimagic total dekomposisi pada graf  $Shack(A_n, v, m)$ .*

**Bukti.** Diberikan  $|V(G)| = p$ ,  $|E(G)| = q$ ,  $|V(H)| = r$ , dan  $|E(H)| = s$ . Sedemikian hingga  $G$  adalah super  $(a, d) - H$ -antimagic total dekomposisi, sedemikian hingga terdapat pelabelan titik yang mengikuti fungsi  $f_1(v)$  berikut:

$$\begin{aligned}
 f_1(x_{1,2,k}) &= k \quad ; 1 \leq k \leq m \\
 f_1(x_{n,2,m}) &= m + 1 \\
 f_1(x_{i,2,k}) &= im - m + k + 1 \quad ; 2 \leq i \leq n - 1; 1 \leq k \leq m \\
 f_1(x_{i,1,k}) &= nm - 2m + im + k + 1 \quad ; 1 \leq i \leq n; 1 \leq k \leq m
 \end{aligned}$$

Dapat dipahami bahwa  $f_1$  adalah fungsi bijektif yang memetakan  $f_1: V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 2nm - m + 1\}$ . Misalkan  $w_1$  adalah bobot sisi super  $(18n^2m - 9nm + 12n + m - 1, 6n) - H$  antimagic total dekomposisi pada graf  $G$  maka dapat diturunkan sebagai berikut:

$$w_1 = 2n^2m - 3nm + 2n + m + 2nk - 1 \quad ; 1 \leq k \leq m$$

Selain itu juga terdapat fungsi sisi yang mengikuti fungsi  $f_1(e)$  berikut:

$$f_1(x_{1,2,k}x_{1,2,k+1}) = 2nm - m + k + 1 \quad ; 1 \leq k \leq m - 1$$

$$f_1(x_{1,2,m}x_{n,2,m}) = 2nm + 1$$

$$f_1(x_{i,2,k}x_{i+1,2,k}) = 2nm - m + im + k + 1 \quad ; 1 \leq i \leq n - 2; 1 \leq k \leq m$$

$$f_1(x_{n-1,2,k}x_{1,2,k+1}) = 3nm - 2m + k + 1 \quad ; 1 \leq k \leq m - 1$$

$$f_1(x_{n-1,2,m}x_{n,2,m}) = 3nm - m + 1$$

$$f_1(x_{i,1,k}x_{i+1,1,k}) = 3nm - 2m + im + k + 1 \quad ; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq k \leq m$$

$$f_1(x_{n-1,1,k}x_{n,1,k}) = 4nm - 2m + k + 1 \quad ; 1 \leq k \leq m$$

$$f_1(x_{i,1,k}x_{i,2,k}) = 4nm - 2m + im + k + 1 \quad ; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq k \leq m$$

$$f_1(x_{n,1,k}x_{1,2,k+1}) = 5nm - 2m + k + 1 \quad ; 1 \leq k \leq m - 1$$

$$f_1(x_{n-1,1,m}x_{n,2,m}) = 5nm - m + 1$$

$$f_1(x_{i,2,k}x_{i+1,1,k}) = 5nm - 2m + im + k + 1 \quad ; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq k \leq m$$

$$f_1(x_{1,1,k}x_{1,2,k+1}) = 6nm - 2m + k + 1 \quad ; 1 \leq k \leq m - 1$$

$$f_1(x_{1,1,m}x_{n,2,m}) = 6nm - m + 1$$

Dapat dipahami bahwa  $f_1(e)$  adalah fungsi bijektif yang memetakan  $f_1(e): E(G) \rightarrow 2nm - m + 2, 2nm - m + 3, 2nm - m + 4, \dots, 6nm - m + 1$ . Misalkan  $W_1$  adalah bobot total sisi super  $(18n^2m - 9nm + 12n + m - 1, 6n) - H$  antimagic total dekomposisi pada graf  $G$  maka dapat diturunkan sebagai berikut:

$$W_1 = 18n^2m - 9nm + m - 1 + (k + 1)6n \quad ; 1 \leq k \leq m$$

Sehingga bila diuraikan untuk masing-masing  $k$  pada interval  $1 \leq k \leq m$  adalah  $W_1 = \{18n^2m - 9nm + 12n + m - 1, 18n^2m - 9nm + 18n + m - 1, 18n^2m - 9nm + 24n + m - 1, \dots, 18n^2m - 3nm + 6n + m - 1\}$ . Terbukti bahwa graf  $\text{shack}(A_n, v, m)$  memiliki super  $(18n^2m - 9nm + 12n + m - 1, 6n) - H$  antimagic total dekomposisi.

◇ **Teorema 0.2** *Ada pelabelan super  $(18n^2m - 7nm + 10n - 2m + 2, 5n - 2) - H$  antimagic total dekomposisi pada graf  $\text{Shack}(A_n, v, m)$ .*

**Bukti.** Diberikan  $|V(G)| = p$ ,  $|E(G)| = q$ ,  $|V(H)| = r$ , dan  $|E(H)| = s$ . Sedemikian hingga  $G$  adalah super  $(a, d) - H$ -antimagic total dekomposisi, sedemikian hingga terdapat pelabelan titik yang mengikuti fungsi  $f_2(v)$  berikut:

$$f_2(x_{i,2,k}) = mn - im - k + 1 \quad ; 2 \leq i \leq n - 1; 1 \leq k \leq m$$

$$f_2(x_{1,2,k}) = mn - 2m + k \quad ; 1 \leq k \leq m$$

$$f_2(x_{n,2,m}) = mn - m + 1$$

$$f_2(x_{i,1,k}) = nm - 2m + im + k + 1 \quad ; 1 \leq i \leq n; 1 \leq k \leq m$$

Dapat dipahami bahwa  $f_2(v)$  adalah fungsi bijektif yang memetakan  $f_2(v): V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 2nm - m + 1\}$ . Misalkan  $w_2$  adalah bobot sisi super  $(18n^2m - 7nm + 10n - 2m + 2, 5n - 2) - H$  antimagic total dekomposisi pada graf  $G$  maka dapat diturunkan sebagai berikut:

$$w_2 = 2n^2m - nm + n - 3m + 3 + nk \quad ; 1 \leq k \leq m$$

Selain itu juga terdapat fungsi sisi yang mengikuti fungsi  $f_2(e)$  berikut:

$$f_2(x_{1,2,m}x_{n,2,m}) = 2nm - m + 2 \quad ; 1 \leq k \leq m$$

$$f_2(x_{1,2,k}x_{1,2,k+1}) = 2nm - k + 2 \quad ; 1 \leq k \leq m - 1$$

$$f_2(x_{i,2,k}x_{i+1,2,k}) = 2nm - m + im + k + 1 \quad ; 1 \leq i \leq n - 2; 1 \leq k \leq m$$

$$f_2(x_{n-1,2,k}x_{1,2,k+1}) = 3nm - 2m + k + 1 \quad ; 1 \leq k \leq m - 1$$

$$f_2(x_{n-1,2,m}x_{n,2,m}) = 3nm - m + 1$$

$$f_2(x_{i,1,k}x_{i+1,1,k}) = 3nm - 2m + im + k + 1 \quad ; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq k \leq m$$

$$f_2(x_{n-1,1,k}x_{n,1,k}) = 4nm - 2m + k + 1 \quad ; 1 \leq k \leq m$$

$$f_2(x_{i,1,k}x_{i,2,k}) = 4nm - 2m + im + k + 1 \quad ; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq k \leq m$$

$$f_2(x_{n,1,k}x_{1,2,k+1}) = 5nm - 2m + k + 1 \quad ; 1 \leq k \leq m - 1$$

$$f_2(x_{n-1,1,m}x_{n,2,m}) = 5nm - m + 1$$

$$f_2(x_{i,2,k}x_{i+1,1,k}) = 5nm - 2m + im + k + 1 \quad ; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq k \leq m$$

$$f_2(x_{1,1,k}x_{1,2,k+1}) = 6nm - 2m + k + 1 \quad ; 1 \leq k \leq m - 1$$

$$f_1(x_{1,1,m}x_{n,2,m}) = 6nm - m + 1$$

Dapat dipahami bahwa  $f_2(e)$  adalah fungsi bijektif yang memetakan  $f_2(e): E(G) \rightarrow \{2nm - m + 2, 2nm - m + 3, 2nm - m + 4, \dots, 6nm - m + 1\}$ . Misalkan  $W_2$

adalah bobot total sisi super  $(18n^2m - 7nm + 10n - 2m + 2, 5n - 2) - H$  antimagic total dekomposisi pada graf  $G$  maka dapat diturunkan sebagai berikut:

$$W_2 = 18n^2m - 7nm + 5n - 2m + 5nk - 2k + 4 \quad ; 1 \leq k \leq m$$

Sehingga bila diuraikan untuk masing-masing  $k$  pada interval  $1 \leq k \leq m$  adalah  $W_2 = \{18n^2m - 7nm + 10n - 2m + 2, 18n^2m - 7nm + 15n - 2m, \dots, 18n^2m - 2nm + 5n - 4m + 4\}$ . Terbukti bahwa graf  $Shack(A_n, v, m)$  memiliki super  $(18n^2m - 7nm + 10n - 2m + 2, 5n - 2) - H$  antimagic total dekomposisi.

◇ **Teorema 0.3** *Ada pelabelan super  $((\frac{35n^2m - 15nm + 21n + n^2}{2} + 4m - 4), n^2 + n - 2) - H$  antimagic total dekomposisi pada graf  $Shack(A_n, v, m)$ .*

**Bukti.** Diberikan  $|V(G)| = p$ ,  $|E(G)| = q$ ,  $|V(H)| = r$ , dan  $|E(H)| = s$ . Sedemikian hingga  $G$  adalah super  $(a, d) - H$ -antimagic total dekomposisi, sedemikian hingga terdapat pelabelan titik yang mengikuti fungsi  $f_3(v)$  berikut:

$$f_3(x_{n,2,m}) = 1$$

$$f_3(x_{1,2,k}) = m + k \quad ; 1 \leq k \leq m$$

$$f_3(x_{i,2,k}) = im - m + k + 1 \quad ; 2 \leq i \leq n - 1; 1 \leq k \leq m$$

$$f_3(x_{i,1,k}) = nm - m - n + i + kn + 1 \quad ; 1 \leq i \leq n; 1 \leq k \leq m$$

Dapat dipahami bahwa  $f_3(v)$  adalah fungsi bijektif yang memetakan  $f_3(v): V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 2nm - m + 1\}$ . Misalkan  $w_3$  adalah bobot sisi super  $((\frac{35n^2m - 15nm + 21n + n^2}{2} + 4m - 4), n^2 + n - 2) - H$  antimagic total dekomposisi pada graf  $G$  maka dapat diturunkan sebagai berikut:

$$w_3 = \left( \frac{3n^2m - 5nm + 7n + n^2}{2} + 3m - 3 \right) + (k - 1)(n^2) \quad ; 1 \leq k \leq m$$

Selain itu juga terdapat fungsi sisi yang mengikuti fungsi  $f_3(e)$  berikut:

$$f_3(x_{1,2,m}x_{n,2,m}) = 2nm - m + 2 \quad ; 1 \leq k \leq m$$

$$f_3(x_{1,2,k}x_{1,2,k+1}) = 2nm - k + 2 \quad ; 1 \leq k \leq m - 1$$

$$f_3(x_{n-1,2,m}x_{n,2,m}) = 2nm + 2$$

$$f_3(x_{n-1,2,k}x_{1,2,k+1}) = 2nm + m - k + 2 \quad ; 1 \leq k \leq m - 1$$

$$f_3(x_{i,2,k}x_{i+1,2,k}) = 3nm - im - k + 2 \quad ; 1 \leq i \leq n - 2; 1 \leq k \leq m$$



$$f_3(x_{i,1,k}x_{i+1,1,k}) = 3nm - 2m + im + k + 1 \quad ; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq k \leq m$$

$$f_3(x_{n-1,1,k}x_{n,1,k}) = 4nm - 2m + k + 1 \quad ; 1 \leq k \leq m$$

$$f_3(x_{i,1,k}x_{i,2,k}) = 4nm - 2m + im + k + 1 \quad ; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq k \leq m$$

$$f_3(x_{n,1,k}x_{1,2,k+1}) = 5nm - 2m + k + 1 \quad ; 1 \leq k \leq m - 1$$

$$f_3(x_{n-1,1,m}x_{n,2,m}) = 5nm - m + 1$$

$$f_3(x_{i,2,k}x_{i+1,1,k}) = 5nm - 2m + im + k + 1 \quad ; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq k \leq m$$

$$f_1(x_{1,1,m}x_{n,2,m}) = 6nm - 2m + 1$$

$$f_3(x_{1,1,k}x_{1,2,k+1}) = 6nm - m - k + 3 \quad ; 1 \leq k \leq m - 1$$

Dapat dipahami bahwa  $f_1(e)$  adalah fungsi bijektif yang memetakan  $f_1(e): E(G) \rightarrow \{2nm - m + 2, 2nm - m + 3, 2nm - m + 4, \dots, 6nm - m + 1\}$ . Misalkan  $W_1$  adalah bobot total sisi super  $((\frac{35n^2m - 15nm + 21n + n^2}{2} + 4m - 4), n^2 + n - 2, 6n) - H$  antimagic total dekomposisi pada graf  $G$  maka dapat diturunkan sebagai berikut:

$$W_3 = (\frac{35n^2m - 15nm + 21n + n^2}{2} + 4m - 4) + (k - 1)(n^2 + n - 2) \quad ; 1 \leq k \leq m$$

Sehingga bila diuraikan untuk masing-masing  $k$  pada interval  $1 \leq k \leq m$  adalah  $W_3 = \{(\frac{35n^2m - 15nm + 21n + n^2}{2} + 4m - 4); (\frac{35n^2m - 15nm + 21n + n^2}{2} + 4m - 4) + (n^2 + n - 2); (\frac{35n^2m - 15nm + 21n + n^2}{2} + 4m - 4) + (k - 1)(n^2 + n - 2)\}$ . Terbukti bahwa graf  $shack(A_n, v, m)$  memiliki super  $((\frac{35n^2m - 15nm + 21n + n^2}{2} + 4m - 4), n^2 + n - 2) - H$  antimagic total dekomposisi.

## Aplikasi

Teori graf memiliki banyak kaitan dengan cabang ilmu lain salah satunya dengan teori pengkodean atau *Chriptography*. Teori graf khususnya pelabelan dapat diaplikasikan dalam pembuatan *ciphertext* (pesan rahasia). Penelitian ini mengaplikasikan pelabelan super  $(806, 24) - A_4$  antimagic total dekomposisi pada graf  $shack(A_4, v, 3)$  terhadap pembuatan *ciphertext alphabetic*. *Ciphertext* yang dibuat adalah *Prefix Code*. Untuk lebih memahami tentang *Chriptography* pembaca dapat membaca [?], [?], [?], [14], [?].

Graf yang telah dilabeli berdasarkan pada Teorema 0.1 dimanfaatkan untuk menyusun *ciphertext*. Membentuk diagram pohon yang berakar di label 1, dengan catatan setiap sisi maksimal digunakan satu kali, dan mendahulukan label titik yang lebih kecil, karena hanya menggunakan huruf yang jumlahnya 26 maka pastikan ujung diagram pohon sebanyak 26. Setiap ujung pada diagram pohon diberi abjad dari a sampai z secara berurutan darikiri ke kanan. Cantumkan

label sisi pada setiap sisi diagram pohon. Langkah pertama jadikan rangkaian label sisi dari atas ke bawah sebagai rangkaian sandi untuk huruf diujungnya sehingga menghasilkan A=23242831, B=23242852, C=23242864, D=23243354, E=23243366, F=232425, G=232469, H=232449, I=232461, J=232457, K=2327-30, L=232751, M=232763, N=233253, O=233265, P=2368, Q=234836, R=2348-45, S=236039, T=235641, U=2629, V=2650, W=2662, X=4735, Y=4744, dan Z=5938. Setelah itu jadikan angka tersebut dalam  $mod\ 26$  sehingga terbentuk A=1  $mod\ 26$ , B=22  $mod\ 26$ , C=8  $mod\ 26$ , D=4  $mod\ 26$ , E=16  $mod\ 26$ , F=11  $mod\ 26$ , G=3  $mod\ 26$ , H=10  $mod\ 26$ , I=21  $mod\ 26$ , J=17  $mod\ 26$ , K=4  $mod\ 26$ , L=25  $mod\ 26$ , M=11  $mod\ 26$ , N=7  $mod\ 26$ , O=19  $mod\ 26$ , P=2  $mod\ 26$ , Q=4  $mod\ 26$ , R=13  $mod\ 26$ , S=11  $mod\ 26$ , T=3  $mod\ 26$ , U=3  $mod\ 26$ , V=24  $mod\ 26$ , W=10  $mod\ 26$ , X=3  $mod\ 26$ , Y=12  $mod\ 26$ , Z=10  $mod\ 26$ .

Bila terdapat kode yang sama maka tambahkan label titik ,sesuai diagraf pohon tapi tidak termasuk label titik pada ujung, pada kode yang sudah di  $mod\ 26$  kemudian rubah kembali dalam  $mod\ 26$ . Bila ada angka yang sama, tapi tetap hasil yang terakhir ini yang digunakan sebagai kode. A=11234 = 2  $mod\ 26$ , B=221234 = 0  $mod\ 26$ , C=81234 = 10  $mod\ 26$ , D=41239 = 3  $mod\ 26$ , E=161239 = 13  $mod\ 26$ , F=11123 = 21  $mod\ 26$ , G=3123 = 3  $mod\ 26$ , H=10123 = 9  $mod\ 26$ , I=21123 = 11  $mod\ 26$ , J=17123 = 15  $mod\ 26$ , K=4126 = 18  $mod\ 26$ , L=25126 = 10  $mod\ 26$ , M=11126 = 24  $mod\ 26$ , N=7128 = 4  $mod\ 26$ , O=19128 = 18  $mod\ 26$ , P=212 = 4  $mod\ 26$ , Q=41212 = 2  $mod\ 26$ , R=131212 = 16  $mod\ 26$ , S=111215 = 13  $mod\ 26$ , T=31220 = 20  $mod\ 26$ , U=315 = 3  $mod\ 26$ , V=2415 = 23  $mod\ 26$ , W=1015 = 1  $mod\ 26$ , X=3111 = 17  $mod\ 26$ , Y=12111 = 21  $mod\ 26$ , Z=10114 = 0  $mod\ 26$ . Tahap akhir adalah mentransformasikan angka  $mod\ 26$  ke dalam abjad, sehingga didapatlah kode sebagai berikut: A=C, B=A, C=K, D=D, E=N, F=V, G=D, H=J, I=L, J=P, K=S, L=L, M=Y, N=E, O=S, P=E, Q=C, R=Q, S=N, T=U, U=D, V=X, W=B, X=R, Y=V, Z=A.

Misalkan kita memiliki *plainttext* dari kalimat "AKU MENYIMPAN BENDA ITU DI ANTARA TUMPUKAN BUKU DI DEPAN KAMARMU" untuk mendapatkan *ciphertext*nya perlu dihilangkan terlebih dahulu anda baca sehingga pesan menjadi "AKUMENYIMPANBENDAITUDIANTARATUMPUKANBUKUDIDEPANKAMARMU". langkah selanjutnya adalah mengubah pesan tersebut menjadi *ciphertext* berdasarkan pada kode yang sudah ditemukan, sehingga *ciphertext* dari pesan tersebut adalah "CSDYNEVLYECEANEDCLUD-DLLCEUCQCUDYEDSCEADSDDLNECESCYCQYD"

## Kesimpulan

Penelitian ini membuktikan bahwa:

1. terdapat pelabelan super  $(18n^2m - 9nm + 12n + m - 1, 6n) - A_n$  antimagic total dekomposisi pada graf konektif  $\text{shack}(A_n, v, m) \cong \text{shack}(H, m)$ ;
2. terdapat pelabelan super  $(18n^2m - 7nm + 10n - 2m + 2, 5n - 2) - A_n$  antimagic total dekomposisi pada graf konektif  $\text{shack}(A_n, v, m) \cong \text{shack}(H, m)$ ;
3. terdapat pelabelan super  $((\frac{35n^2m - 15nm + 21n + n^2}{2} + 4m - 4), n^2 + n - 2) - A_n$  antimagic total dekomposisi pada graf konektif  $\text{shack}(A_n, v, m) \cong \text{shack}(H, m)$ ;
4. dapat dibentuk *ciphertext* dari pelabelan super  $(18n^2m - 9nm + 12n + m - 1, 6n) - A_n$  antimagic total dekomposisi pada graf konektif  $\text{shack}(A_n, v, m)$ .

## References

- [1] Dafik, M. Miller, J. Ryan and M. Bača, Antimagic labeling of the union of stars, *Australasian Journal of Combinatorics*, **42** (2008), 4909-4915.
- [2] Bača, M., Dafik, Miller, M., and Ryan, J, *Antimagic Labeling of Disjoint Union of s-Crowns*, *Utilitas Mathematica* (2009), 79:193–205.
- [3] A. Gutiérrez, and A. Lladó, Magic Coverings, *J. Combin. Math. Combin. Comput* **55** (2005), 43-46.
- [4] J.L. Gross, J. Yellen and P. Zhang, *Handbook of Graph Theory*, Second Edition, CRC Press, Taylor and Francis Group, 2014
- [5] N. Inayah, A.N.M. Salman and R. Simanjuntak, On  $(a, d) - H$ -antimagic coverings of graphs, *J. Combin. Math. Combin. Comput.* **71** (2009), 273281.
- [6] N. Inayah, R. Simanjuntak, A. N. M. Salman, Super  $(a, d) - H$ -antimagic total labelings for shackles of a connected graph  $H$ , *The Australasian Journal of Combinatorics*, **57** (2013), 127138.
- [7] P. Jeyanthi, P. Selvagopal, More classes of  $H$ -supermagic Graphs, *Intern. J. of Algorithms, Computing and Mathematics* **3(1)** (2010), 93-108.
- [8] A. Lladó and J. Moragas, Cycle-magic graphs, *Discrete Math.* **307** (2007), 2925 2933.

- [9] T.K. Maryati, A. N. M. Salman, E.T. Baskoro, J. Ryan, M. Miller, On  $H$ -supermagic labelings for certain shackles and amalgamations of a connected graph, *Utilitas Mathematica*, **83** (2010), 333-342.
- [10] A. A. G. Ngurah, A. N. M. Salman, L. Susilowati,  $H$ -supermagic labeling of graphs, *Discrete Math.*, **310** (2010), 1293-1300.
- [11] S.T.R. Rizvi, K. Ali, M. Hussain, Cycle-supermagic labelings of the disjoint union of graphs, *Utilitas Mathematica*, (2014), in press.
- [12] Roswitha, M. and Baskoro, E. T.,  $H$ -magic covering on some classes of graphs, *American Institute of Physics Conference Proceedings* **1450** (2012), 135-138.
- [13] R. Simanjuntak, M. Miller and F. Bertault, Two new  $(a, d)$ -antimagic graph labelings, *Proc. Eleventh Australas. Workshop Combin. Alg. (AWOCA)* (2000), 179189.
- [14] Sonia Dhull, Sonal Beniwal, Preeti Kalra. 2013. Polyalphabetic Cipher Techniques Used For Encryption Purpose. Journal. International Journal of Advanced in Computer Science and Software Aengineering. Vol 3. Hal 64-66.