



**POLINOMIAL KROMATIK PADA GRAF BINTANG,  
GRAF RODA, DAN GRAF TANGGA**

**SKRIPSI**

Oleh

**Reni Dwijayanti  
NIM 061810101049**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS JEMBER  
2011**



**POLINOMIAL KROMATIK PADA GRAF BINTANG,  
GRAF RODA, DAN GRAF TANGGA**

**SKRIPSI**

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat  
untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1)  
dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

**Reni Dwijayanti**  
**NIM 061810101049**

**JURUSAN MATEMATIKA**  
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**  
**UNIVERSITAS JEMBER**  
**2011**

## **PERSEMBAHAN**

Skripsi ini saya persembahkan untuk :

1. Ayahanda Sudyanto dan Ibunda Siti Zainab yang tercinta.
2. Kakak Ratna Damayanti yang telah memberikan dukungan dan semangat.
3. Guru-guru sejak Taman Kanak-kanak hingga Perguruan Tinggi, yang telah memberi ilmu, mendidik, dan membimbing dengan penuh kesabaran.
4. Almamater Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

## **MOTTO**

Keajaiban hanya terjadi pada mereka yang tidak pernah menyerah.

*(Eichiro Oda)*

Keberuntungan lebih berpihak pada orang yang kurang pandai tetapi banyak mencoba, daripada kepada mereka yang pandai tapi tidak bertindak.

*(Mario Teguh)*

## **PERNYATAAN**

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Reni Dwijayanti

NIM : 061810101049

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa karya tulis ilmiah yang berjudul “Polinomial Kromatik pada Graf Bintang, Graf Roda, dan Graf Tangga” adalah benar-benar karya sendiri, kecuali jika disebutkan sumbernya dan belum pernah diajukan pada institusi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 16 Februari 2011

Reni Dwijayanti  
NIM 061810101049

**SKRIPSI**

**POLINOMIAL KROMATIK PADA GRAF BINTANG,  
GRAF RODA, DAN GRAF TANGGA**

Oleh

**Reni Dwijayanti**  
**NIM 061810101049**

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Drs. Rusli Hidayat, M.Sc

Dosen Pembimbing Anggota : Kristiana Wijaya, S.Si, M.Si

## PENGESAHAN

Skripsi berjudul “Polinomial Kromatik pada Graf Bintang, Graf Roda, dan Graf Tangga” telah diuji dan disahkan pada:

hari :

tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji :

Ketua,

Sekretaris,

Drs. Rusli Hidayat, M.Sc.  
NIP 196610121993031001

Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si.  
NIP 197408132000032004

Anggota I,

Anggota II,

Agustina Pradjaningsih, S.Si., M.Si.  
NIP 197108022000032009

Yuliani Setia Dewi, S.Si., M.Si.  
NIP 197407162000032001

Mengesahkan  
Dekan,

Prof. Drs. Kusno, DEA., Ph.D.  
NIP 196101081986021001

## RINGKASAN

**Polinomial Kromatik pada Graf Bintang, Graf Roda, dan Graf Tangga;** Reni Dwijayanti, 061810101049; 2011: 46 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang sudah tua usianya namun mempunyai banyak terapan bagi seluruh masyarakat sampai saat ini. Salah satu teori graf yang memiliki kontribusi besar bagi perkembangan ilmu pengetahuan adalah pewarnaan graf. Pewarnaan graf adalah suatu pewarnaan ke objek tertentu. Objek tersebut dapat berupa titik, sisi, atau wilayah. Suatu pewarnaan graf diasumsikan dengan tidak memberi warna untuk dua titik yang bertetangga dengan warna yang sama. Dalam hal ini, “bertetangga” berarti titik-titik yang terletak pada sisi yang sama.

Ukuran terkecil banyaknya warna yang dapat diberikan kepada sebuah graf  $G$  dinamakan dengan bilangan kromatik. Pertanyaan yang menarik adalah berapa banyak cara berbeda yang digunakan untuk pemberian warna pada  $G$  dengan warna yang disediakan atau biasa disebut polinomial kromatik. Polinomial kromatik pertama kali diperkenalkan pada tahun 1946 oleh Birkhoff dalam upaya untuk menyelesaikan masalah empat warna. Dalam Chartrand dan Oellermann (1993), kajian tentang polinomial kromatik telah dibahas oleh beberapa ilmuwan, diantaranya Read dan Skiena. Pada tahun 2004, Kurniawati juga telah meneliti polinomial kromatik dari graf terhubung, yaitu graf lengkap, graf sikel, dan graf lintasan. Pada skripsi ini, penulis ingin meneliti polinomial kromatik menggunakan partisi himpunan titik pada kelas graf sederhana yang lain yaitu graf bintang  $S_n$ , graf roda  $W_n$ , dan graf tangga  $L_n$ . Tujuan penelitian adalah untuk mendapatkan polinomial kromatik dari kelas graf sederhana tersebut.

Penelitian dilakukan dalam empat langkah, yaitu mencari bilangan kromatik pada graf, kemudian menentukan kemungkinan pewarnaan titik yang terjadi,



selanjutnya mempartisi himpunan titik dari kemungkinan tersebut, dan terakhir mendapatkan polinomial kromatik suatu graf. Dari langkah terakhir akan didapatkan polinomial kromatik suatu graf dalam bentuk khusus. Jadi, untuk mendapatkan polinomial kromatik suatu graf secara umum, digunakan metode induktif.

Dari hasil penelitian diperoleh bahwa polinomial kromatik suatu graf pada prinsipnya diperoleh dari graf lengkap  $K_n$ ,  $K_{n-1}$ , dan seterusnya hingga nilai  $n$  sama dengan bilangan kromatiknya. Jadi, polinomial kromatik dari masing-masing graf bintang, graf roda, dan graf tangga adalah  $f(S_n, t) = t(t-1)^n$ ,  $f(W_n, t) = t[(t-2)^n + (-1)^n(t-2)]$ , dan  $f(L_n, t) = t(t-1)(t^2 - 3t + 3)^{n-1}$ .

## PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Allah SWT, atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Polinomial Kromatik pada Graf Bintang, Graf Roda, dan Graf Tangga”. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Bapak Drs. Rusli Hidayat, M.Sc., selaku Dosen Pembimbing Utama dan Ibu Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
2. Ibu Agustina Pradjaningsih, S.Si., M.Si., dan Ibu Yuliani Setia Dewi, S.Si., M.Si., selaku Dosen Penguji yang telah memberikan kritik dan saran demi kesempurnaan skripsi ini;
3. Triningsih, Ansori, Rini, Inggi, Indah, Hanik, Mbak Riska, Mbak Niken, Mas Mamang, Mas Koko, Mas Anto dan teman-teman angkatan 2004 – 2006 lainnya yang telah memberikan semangat dan ilmunya untuk membantu penulis mengatasi kesulitan selama proses penyelesaian skripsi ini;
4. Cêcê, Asri dan Cepy yang selalu memberikan dukungan, semangat, serta motivasi selama ini;
5. semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Penulis menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Februari 2011

Penulis

## DAFTAR ISI

	Halaman
<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	i
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b> .....	ii
<b>HALAMAN MOTTO</b> .....	iii
<b>HALAMAN PERNYATAAN</b> .....	iv
<b>HALAMAN PEMBIMBINGAN</b> .....	v
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b> .....	vi
<b>RINGKASAN</b> .....	vii
<b>PRAKATA</b> .....	ix
<b>DAFTAR ISI</b> .....	x
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xii
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xiv
<b>BAB 1. PENDAHULUAN</b>	
<b>1.1 Latar Belakang</b> .....	1
<b>1.2 Permasalahan</b> .....	2
<b>1.3 Tujuan</b> .....	2
<b>1.4 Manfaat</b> .....	2
<b>BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA</b>	
<b>2.1 Pengertian dan Konsep Graf</b> .....	3
<b>2.2 Operasi pada Graf</b> .....	5
<b>2.3 Klasifikasi Graf</b> .....	7
<b>2.4 Partisi Himpunan</b> .....	10
<b>2.5 Polinomial</b> .....	11
<b>2.6 Pewarnaan Titik</b> .....	11
2.6.1 Definisi Pewarnaan Titik .....	11

2.6.2 Bilangan Kromatik .....	13
2.6.3 Masalah Penjadwalan .....	13
2.6.4 Polinomial Kromatik .....	13
<b>BAB 3. METODE PENELITIAN</b>	
<b>3.1 Metodologi</b> .....	18
<b>3.2 Penotasian Titik</b> .....	19
3.2.1 Penotasian Titik pada Graf Bintang $S_n$ .....	19
3.2.2 Penotasian Titik pada Graf Roda $W_n$ .....	19
3.2.3 Penotasian Titik pada Graf Tangga $L_n$ .....	19
<b>3.3 Langkah-langkah Penelitian</b> .....	20
<b>BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN</b>	
<b>4.1 Dasar Penghitungan Polinomial Kromatik Menggunakan Partisi Himpunan Titik</b> .....	22
<b>4.2 Polinomial Kromatik pada Graf Bintang, Graf Roda dan Graf Tangga</b> .....	26
4.2.1 Polinomial Kromatik dari Graf Bintang .....	26
4.2.2 Polinomial Kromatik dari Graf Roda .....	31
4.2.3 Polinomial Kromatik dari Graf Tangga .....	37
<b>4.3 Aplikasi Pewarnaan Graf dalam Masalah Penjadwalan</b> .....	42
<b>BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN</b>	
<b>5.1 Kesimpulan</b> .....	45
<b>5.2 Saran</b> .....	45
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	46

## DAFTAR GAMBAR

	Halaman
2.1 Graf $G$ dengan empat titik dan empat sisi .....	3
2.2 Graf $G$ dengan <i>loop</i> dan sisi rangkap .....	4
2.3 Graf untuk mengilustrasikan jalan, jejak, lintasan dan sikel .....	5
2.4 (a) Graf terhubung dan (b) Graf tak terhubung .....	5
2.5 Graf hasil <i>join</i> $G + H$ .....	6
2.6 Graf hasil <i>dot</i> $G \cdot uv$ .....	6
2.7 Graf hasil kartesius $G_1 \times G_2$ .....	7
2.8 Graf lintasan $P_6$ .....	7
2.9 Graf bipartit lengkap $K_{2,3}$ .....	8
2.10 Graf sikel $C_6$ .....	8
2.11 Graf lengkap $K_5$ .....	8
2.12 Graf bintang $S_6$ .....	9
2.13 Graf roda $W_6$ .....	9
2.14 Graf tangga $L_3$ .....	9
2.15 Graf dengan 5 titik dan 7 sisi .....	10
2.16 (a) Graf $G$ yang bernotasi dan (b) Dua pewarnaan graf yang berbeda .....	12
2.17 Graf dengan 5 titik dan 6 sisi .....	14
2.18 Banyaknya cara pewarnaan graf $H$ dengan 3 warna .....	17
3.1 Penotasian titik pada graf bintang $S_5$ .....	19
3.2 Penotasian titik pada graf roda $W_6$ .....	19
3.3 Penotasian titik pada graf tangga $L_5$ .....	20
4.1 Graf dengan 5 titik dan 8 sisi .....	23
4.2 Graf bintang $S_2$ .....	27
4.3 Graf bintang $S_3$ .....	27

4.4	Graf bintang $S_4$ .....	28
4.5	Graf roda $W_3$ .....	32
4.6	Graf roda $W_4$ .....	33
4.7	Graf roda $W_5$ .....	34
4.8	Graf tangga $L_2$ .....	38
4.9	Graf tangga $L_3$ .....	39
4.10	Graf tangga $L_4$ .....	41
4.11	Graf persoalan jadwal rapat kerja .....	43
4.12	(a) Cara pewarnaan graf $M$ pertama dan (b) Cara pewarnaan graf $M$ kedua .....	44

## DAFTAR TABEL

	Halaman
4.1 Bentuk partisi graf bintang $S_3$ .....	28
4.2 Bentuk partisi graf bintang $S_4$ .....	29
4.3 Bentuk partisi graf roda $W_4$ .....	33
4.4 Bentuk partisi graf roda $W_5$ .....	34
4.5 Bentuk partisi graf tangga $L_3$ .....	39