ABSTRAK DAN EXECUTIVE SUMMARY
HIBAH DISERTASI DOKTOR

Judul:

INTEGRAL HENSTOCK-KURZWEIL DI DALAM RUANG FUNGSI KONTINU $C[a,b]$

Tim Peneliti

Firdaus Ubaidillah, S.Si, M.Si

NIDN 0006067003

UNIVERSITAS JEMBER

Pebruari 2015

ABSTRAK

Integral Henstock-Kurzweil di dalam Ruang Fungsi Kontinu $\boldsymbol{C[a,b]}$

Peneliti : Firdaus Ubaidillah[1]

Mahasiswa Terlibat : -

Sumber Dana : DIPA Universitas Jember

Kontak Email : *firdaus_u@yahoo.com*

[1] Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember

$\mathrm{C}[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ menyatakan koleksi semua fungsi kontinu bernilai real yang terdefinisi pada selang tertutup $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Tujuan dalam penelitian ini adalah membahas sifat-sifat ruang fungsi kontinu $C[a,b]$, menkonstruksi integral Henstock-Kurzweil fungsi bernilai $C[a,b]$, membahas sifat-sifat fungsi dan primitif fungsi terintegral Henstock-Kurweil yang dijabarkan dalam teorema-teorema serta membahas suatu teorema kekonvergenan. Dalam tulisan ini, dikonstruksi integral Henstock-Kurzweil fungsi bernilai $C[a,b]$ dengan menggunakan norma nilai mutlak yang bernilai $C[a,b]$. Selanjutnya dikembangkan untuk mengetahui sifat-sifat fungsi terintegral Henstock-Kurzweil dan primitif fungsi terintegral Henstock-Kurzweil. Sifat-sifat fungsi terintegral Henstock-Kurzweil dijabarkan dalam bentuk teorema-teorema. Teorema kekonvergenan monoton dan kekonvergenan seragam yang berkenaan dengan integral Henstock-Kurzweil bernilai $C[a,b]$ juga dibahas dalam tulisan ini.

Kata kunci: Fungsi terintegral Henstock-Kurzweil, norma bernilai $C[a,b]$, partisi δ-fine, primitif fungsi terintegral Henstock-Kurzweil, fungsi naik monoton

EXECUTIVE SUMMARY

Peneliti : Firdaus Ubaidillah[1]

Mahasiswa Terlibat : -

Sumber Dana : DIPA Universitas Jember

Kontak Email : *firdaus_u@yahoo.com*

[1] Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember

A. LATAR BELAKANG DAN TUJUAN

Perkembangan teori integral dalam matematika sebelum tahun 1950-an yang lampau sejalan dengan tuntutan aplikatif khususnya di bidang fisika dan teknik. Namun dalam enam dekade terakhir ini, perkembangan teori integral boleh dibilang sangat pesat setelah Ralph Henstock dan Jaroslav Kuzweil pada tahun 1957-1958 dapat mengkonstruksi sebuah integral, selanjutnya integral yang disusunnya dikenal dengan nama integral Henstock-Kurzweil, dengan memodifikasi konstanta positif δ pada integral Riemann menjadi sebuah fungsi positif δ. Dari hasil modikasi tersebut, integral Henstock-Kurzweil menjadi lebih luas pemakaiannya dibanding integral-integral yang lain.

Sejalan dengan perkembangan kebutuhan khususnya di bidang teknik dan fisika, kini para ilmuwan tidak hanya bekerja pada ruang real saja namun merambah memasuki ruang vektor beragam dimana salah satunya adalah ruang fungsi kontinu $C[a,b]$. Sebagai ilustrasi, jika dipandang integral

$$\iint_D F(x,y)dA$$

dimana D adalah daerah tertutup di $\mathbb{R}^2$ yang dibatas oleh suatu kurva yang mulus bagian demi bagian, maka dalam teknis menghitung integral diperoleh hubungan

$$\iint_D F(x,y)dA = \int_{x=a}^{x=b}\int_{y=f}^{y=g} F(x,y)dydx \qquad (1)$$

Integral pertama dari integral rangkap pada ruas kanan persamaan (1) adalah $\int_{y=f}^{y=g} F(x,y)dy$.

Integral F sebagai fungsi dari y dengan daerah asal pengintegrasian dari $y = f(x)$ ke $y = g(x)$. Oleh karena itu daerah asal pengintegrasian merupakan sebuah selang tertutup koleksi fungsi kontinu dengan nilai integralnya juga sebuah fungsi kontinu.

Tujuan dalam penelitian ini adalah memahami sifat-sifat ruang fungsi kontinu $C[a,b]$, menkonstruksi integral Henstock-Kurzweil fungsi bernilai $C[a,b]$, mengetahui sifat-sifat fungsi dan primitif fungsi terintegral Henstock-Kurweil dan membahas teorema kekonvergenan.

B. METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan hasil kajian teoritis. Penelitian diawali dengan memahami sifat-sifat ruang fungsi kontinu $C[a,b]$ yang dilengkapi dengan relasi "$\leq$". Selanjutnya membentuk norma bernilai $C[a,b]$, kemudian mengenalkan partisi δ-fine pada selang tertutup, mengkonstruksi integral Henstock-Kurzweil fungsi bernilai $C[a,b]$ pada selang tertutup, mengembangkan sifat-sifat fungsi terintegral Henstock-Kurzweil dan membahas teorema kekonvergenan. Sifat-sifat fungsi teintegral Henstock-Kurzweil disajikan dalam beberapa teorema dan ditunjukkan buktinya.

C. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dari hasil penelitian ini diperoleh beberapa hasil diantaranya: ruang $C[a,b]$ dengan dilengkapi urutan "$\leq$" merupakan ruang terurut parsial, dan setiap himpunan bagian terbatas dari $C[a,b]$ belum menjamin mempunyai supremum atau infimum. Selain itu, hasil lain yang diperoleh adalah $C[a,b]$ merupakan ruang Riesz. Untuk partisi δ-fine pada selang tertutup di dalam $C[a,b]$, bahwa setiap fungsi positip (*gauge*) pada $[f,g] \subseteq C[a,b]$ menjamin adanya partisi δ-fine pada $[f,g]$.

Selanjutnya dibentuk norma bernilai $C[a,b]$ yang didefinisikan sebagai nilai mutlak $|\cdot|$ bernilai $C[a,b]$. Suatu fungsi $F: [f,g] \to C[a,b]$ dikatakan **terintegral Henstock-Kurzweil**, pada $[f,g]$ jika terdapat $s \in C[a,b]$ sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif (*gauge*) δ pada $[f,g]$ sehingga setiap $D = \{([u,v],t)\}$ partisi δ-fine pada $[f,g]$ berlaku

$$\left|(D)\sum F(t)(v-u) - s\right| < \varepsilon e.$$

Elemen $s \in C[a,b]$ di atas dinamakan nilai integral Henstock-Kurzweil fungsi F pada $[f,g]$. Jika suatu fungsi terintegral Henstock-Kurzweil pada suatu selang $[f,g]$ maka nilai integralnya tunggal.

Jika $HK[f,g]$ menyatakan koleksi semua fungsi terintegral Henstock-Kurzweil pada $[f,g]$, maka $HK[f,g]$ merupakan ruang linear atas lapangan $\mathbb{R}$. Fungsi θ (fungsi yang bernilai nol) kecuali pada himpunan yang berukuran nol adalah fungsi yang terintegral Henstock-Kurzweil dengan nilai integralnya θ. Hal ini berakibat jika ada dua fungsi yang sama kecuali pada himpunan yang berukuran nol dan salah satunya terintegral Henstock-Kurzweil, maka fungsi yang lain juga akan terintegral Henstock-Kurzweil. Suatu fungsi yang terintegral Henstock-Kurzweil pada $[f,g]$ maka fungsi tersebut juga terintegral Henstock-Kurzweil pada setiap selang bagian dari $[f,g]$.

Jika $F \in HK[f,g]$, didefinisikan fungsi $\mathcal{F}$ pada $[f,g]$ dengan rumus

$$\mathcal{F}(h) = (HK)\int_f^g F$$

untuk setiap $h \in [f,g]$ disebut **primitif Henstock-Kurzweil** fungsi F pada $[f,g]$. Primitif Henstock-Kurzweil $\mathcal{F}$ pada $[f,g]$ merupakan fungsi kontinu pada $[f,g]$ dan diferensiabel hampir di mana-mana pada $[f,g]$.

Selanjutnya, dengan menggunakan lemma Henstock sebagai berikut: Jika $F \in HK[f,g]$ dengan primitif Henstock-Kurzweil $\mathcal{F}$ yaitu untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat gauge pada $[f,g]$ sehingga untuk setiap partisi δ-fine $D = \{([u,v],t)\}$ pada $[f,g]$ berlaku

$$\left|(D)\sum(F(t)(v-u) - \mathcal{F}(u,v))\right| < \varepsilon e,$$

diperoleh sebuah teorema kekonvergenan monoton seperti berikut:

Jika syarat-syarat berikut terpenuhi

(i) $F_n(h) \to F(h)$ untuk setiap $h \in [f,g]$ bilamana $n \to \infty$ dengan $F_n \in HK[f,g]$ untuk setiap n;

(ii) $F_1(h) \leq F_2(h) \leq F_3(h) \leq \cdots$, untuk setiap $h \in [f,g]$;

(iii) $\mathcal{F}_n(f,g) = (HK)\int_f^g F_n$ dengan $\{\mathcal{F}_n(f,g)\}$ konvergen ke $s \in C[a,b]$,

maka $F \in HK[f,g]$ dengan

$$(HK)\int_f^g F = s.$$

Lebih jauh, diperoleh sebuah teorema kekonvergenan seragam berikut.

Diberikan $\{F_n\} \subset HK[f,g]$. Jika $\{F_n\}$ konvergen seragam ke F pada $[f,g]$, maka $F \in HK[f,g]$ dan

$$\lim_{n\to\infty} (HK) \int_f^g F_n = (HK) \int_f^g F.$$

Kata Kunci :Fungsi terintegral Henstock-Kurzweil, norma bernilai $C[a,b]$, partisi δ-fine, primitif fungsi terintegral Henstock-Kurzweil, fungsi naik monoton