



**MODELISASI *KNOP* MELALUI PENGGABUNGAN
BENDA DASAR HASIL DEFORMASI TABUNG,
PRISMA SEGIENAM BERATURAN, DAN PERMUKAAN PUTAR**

SKRIPSI

Oleh

**Miftahur Roifah
NIM 081810101009**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2013**



**MODELISASI *KNOP* MELALUI PENGGABUNGAN
BENDA DASAR HASIL DEFORMASI TABUNG,
PRISMA SEGIENAM BERATURAN, DAN PERMUKAAN PUTAR**

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1)
dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

**Miftahur Roifah
NIM 081810101009**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2013**

PERSEMBAHAN

Alhamdulillah, dengan puji syukur kehadiran Allah SWT, skripsi ini saya persembahkan untuk:

1. ibunda Mu'afah dan ayahanda Masino tercinta, yang telah mendoakan dan memberi kasih sayang serta pengorbanan untuk putri tercintanya.
2. adik-adik tersayang Alvin Adam Maulana, Ivan Maulana Ishaq, dan Alifatul Maghfiroh yang telah banyak memberikan semangat dalam penyelesaian skripsi ini.
3. guru-guruku sejak taman kanak-kanak sampai perguruan tinggi, yang telah memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;
4. Almamater Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember, SMA Negeri 1 Jember, SMP Negeri 1 Balung, SDN Jambearum II, dan TK Dewi Mashitoh Wonosari - Puger.

MOTO

Jenius adalah 1 % inspirasi dan 99 % keringat.
Tidak ada yang dapat menggantikan kerja keras.
Keberuntungan adalah sesuatu yang terjadi ketika kesempatan
bertemu dengan kesiapan.
(Thomas A. Edison)¹

Banyak orang mengatakan kepintaran yang menjadikan seseorang ilmuwan besar.
Mereka keliru. Itu adalah karakter.
(Albert Einstein)²

¹ Habibi, M. 2012. Kata Mutiara [serial online]. <http://sobatmatematika.blogspot.com/2012/06/kata-mutiara.html>. [1 April 2013]

² Rinaldi, R. 2012. 40 Kata Mutiara Albert Einstein [serial online]. <http://www.rioshare.org/2012/12/40-kata-mutiara-albert-einstein.html>. [1 April 2013]

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

nama : Miftahur Roifah

NIM : 081810101009

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul “Modelisasi *Knop* Melalui Penggabungan Benda Dasar Hasil Deformasi Tabung, Prisma Segienam Beraturan, dan Permukaan Putar” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi mana pun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak mana pun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Mei 2013

Yang menyatakan,

Miftahur Roifah
NIM 081810101009

SKRIPSI

MODELISASI *KNOP* MELALUI PENGGABUNGAN BENDA DASAR HASIL DEFORMASI TABUNG, PRISMA SEGIENAM BERATURAN, DAN PERMUKAAN PUTAR

Oleh

Miftahur Roifah
NIM. 081810101009

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Prof. Drs. Kusno, DEA., Ph.D.

Dosen Pembimbing Anggota : Bagus Juliyanto S.Si.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul ”Modelisasi *Knop* Melalui Penggabungan Benda Dasar Hasil Deformasi Tabung, Prisma Segienam Beraturan, dan Permukaan Putar” telah diuji dan disahkan pada:

hari :

tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Tim Penguji :

Dosen Pembimbing Utama,

Dosen Pembimbing Anggota,

Prof. Drs. Kusno, DEA., Ph.D.
NIP 19610108 198602 1 001

Bagus Juliyanto, S.Si.
NIP 19800702 200312 1 001

Penguji I,

Penguji II,

Drs. Rusli Hidayat, M.Sc.
NIP 19661012 199303 1 001

Agustina Pradjaningsih, S.Si, M.Si.
NIP 19710802 200003 2 009

Mengesahkan
Dekan,

Prof. Drs. Kusno, DEA., Ph.D.
NIP 19610108 198602 1 001

RINGKASAN

Modelisasi *Knop* Melalui Penggabungan Benda Dasar Hasil Deformasi Tabung, Prisma Segienam Beraturan, dan Permukaan Putar; Miftahur Roifah; 081810101009; 2013; 66 Halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Knop atau yang sering diistilahkan dengan pegangan atau *handle* banyak ditemukan penggunaannya pada laci, almari, ataupun pintu untuk keperluan membuka dan menutup laci, almari, pintu, atau benda-benda lain di sekitar kita. Dari beberapa model *knop* yang sudah ada, umumnya bentuk penyangga *knop* terbangun hanya dari satu bentuk benda ruang seperti tabung atau potongan hiperboloida yang mempunyai lengkung tunggal dan datar sehingga terlihat monoton modelnya. Pada bagian kepala *knop* secara umum belum memiliki variasi relief sehingga tampilannya menjadi kurang menarik. Penulisan skripsi ini dimaksudkan untuk memodelisasi bentuk *knop* melalui penggabungan benda dasar hasil deformasi tabung dan prisma segienam beraturan, serta modifikasi permukaan putar yang dirangkai pada tiga jenis sumbu pemodelan sehingga menghasilkan *knop* yang bervariasi.

Dalam penelitian modelisasi *knop* ini dibagi menjadi beberapa tahapan. Tahapan pertama adalah membangun beberapa benda dasar sebagai komponen penyusun *knop* dari deformasi tabung dan prisma segi enam beraturan serta modifikasi permukaan putar. Dalam hal ini mengoperasikan titik dan kurva kemudian membangun permukaan dengan memutar atau menginterpolasikan kurva tersebut. Tahapan kedua adalah merangkai beberapa benda-benda dasar komponen *knop* pada tiga jenis sumbu pemodelan. Dalam hal ini membagi sumbu menjadi tiga bagian sebagai sumbu tiap bagian kemudian mengisi bagian tersebut dengan komponen *knop*. Selanjutnya tahapan terakhir dilakukan programasi untuk memodelisasi *knop* tersebut dengan bantuan *software* Maple 13.

Hasil penelitian ini mendapatkan dua prosedur untuk memodelisasi *knop*, yang pertama prosedur untuk membangun beberapa benda dasar sebagai komponen *knop* dengan langkah-langkah sebagai berikut. Pertama, menetapkan dua buah titik masing-masing terletak pada sisi atas dan sisi bawah tabung, prisma segienam beraturan, dan permukaan putar. Kedua, mengoperasikan titik-titik tersebut, yaitu: (a) menetapkan vektor singgung untuk kurva Hermit atau titik kontrol kelengkungan untuk kurva Bezier, (b) membangun kurva Hermit atau kurva Bezier, dan (c) memutar atau menginterpolasikan kurva tersebut sehingga menghasilkan bentuk komponen *knop* yang bervariasi. Sedangkan prosedur kedua yaitu merangkai beberapa benda dasar komponen *knop* dengan langkah-langkah sebagai berikut. Pertama, membagi sumbu menjadi tiga bagian segmen non homogen sebagai sumbu bagian alas, penyangga, dan kepala *knop*. Kedua, mengisi setiap bagian segmen sumbu non homogen dengan komponen *knop*.

PRAKATA

Puji syukur kehadiran Allah SWT, yang telah melimpahkan rahmat, dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Modelisasi *Knop* Melalui Penggabungan Benda Dasar Hasil Deformasi Tabung, Prisma Segienam Beraturan, dan Permukaan Putar”. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Drs. Kusno, DEA., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing Utama dan Bapak Bagus Juliyanto, S.Si. selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
2. Bapak Drs. Rusli Hidayat, M.Sc. dan Ibu Agustina Pradjaningsih, S.Si, M.Si. selaku Dosen Penguji yang telah memberikan kritikan dan saran demi kesempurnaan skripsi ini;
3. teman-teman angkatan 2008, Yesi, Deka, Vianda, Santhi, Laily, Rafiantika, Prian, Indah, Arisma, Baits, Bayu, Muis, Dayvis serta teman-teman yang lainnya, terima kasih atas kebersamaan selama waktu kuliah dan telah memberikan semangat serta motivasi;
4. semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Mei 2013

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	ii
HALAMAN PERSEMBAHAN	iii
HALAMAN MOTTO	iv
HALAMAN PERNYATAAN	v
HALAMAN PEMBIMBINGAN	vi
HALAMAN PENGESAHAN	vii
RINGKASAN	viii
PRAKATA	x
DAFTAR ISI	xi
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR LAMPIRAN	xvi
BAB 1. PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah	3
1.3 Tujuan	4
1.4 Manfaat	4
BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Penyajian Segmen Garis, Lingkaran, dan Poligon Segienam Beraturan	5
2.1.1 Penyajian Segmen Garis	5
2.1.2 Penyajian Lingkaran dan Bagiannya	6
2.1.3 Penyajian Poligon Segienam Beraturan.....	8
2.2 Interpolasi diantara Segmen Garis dan Kurva di Ruang	10
2.3 Penyajian Tabung dan Prisma Segienam Beraturan	11
2.3.1 Penyajian Tabung	11
2.3.2 Penyajian Prisma Segienam Beraturan	13

2.4 Dilatasi Titik pada R^3	15
2.5 Penyajian Kurva Hermit Kuadratik	16
2.6 Penyajian Kurva dan Permukaan Bezier	17
2.7 Permukaan Putar	19
2.8 Prinsip Penggabungan Permukaan Putar	20
2.9 Kontruksi Objek pada Program Maple 13	21
BAB 3. METODE PENELITIAN	26
BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN	28
4.1 Modelisasi Komponen Penyusun <i>Knop</i>	28
4.1.1 Deformasi Tabung	28
4.1.2 Deformasi Prisma Segienam Beraturan	31
4.1.3 Modifikasi Permukaan Putar	37
4.2 Perangkaian Komponen Penyusun <i>Knop</i> pada Sumbu	
Pemodelan	42
4.2.1 Model <i>Knop</i> dengan Satu Sumbu Pemodelan	42
4.2.2 Model <i>Knop</i> dengan Dua Sumbu Pemodelan	48
4.2.3 Model <i>Knop</i> dengan Tiga Sumbu Pemodelan	53
4.3 Pembahasan	58
BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN	64
5.1 Kesimpulan	64
5.2 Saran	64
DAFTAR PUSTAKA	66
LAMPIRAN	67

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
1.1 Beberapa bentuk model <i>knop</i>	2
1.2 Komponen-komponen penyusun <i>knop</i>	3
1.3 Contoh model sumbu pemodelan	4
2.1 Penyajian segmen garis di ruang	6
2.2 Penyajian lingkaran	7
2.3 Penyajian keratan lingkaran.....	7
2.4 Variasi yang terbentuk dari keratan lingkaran.....	8
2.5 Poligon segienam beraturan.....	8
2.6 Langkah-langkah membangun poligon segienam beraturan pada bidang $z = z_1$	9
2.7 Contoh kasus khusus interpolasi linier dua segmen garis	10
2.8 Interpolasi linier pada kurva	11
2.9 Penyajian tabung.....	11
2.10 Tabung dengan beragam sumbu pusat.....	12
2.11 Prisma dan bagiannya	13
2.12 Penyajian prisma segienam beraturan	15
2.13 Dilatasi dengan $k > 1$	16
2.14 Kurva Hermit kuadratik.....	17
2.15 Kurva Bezier (a) kuadratik (b) kubik.....	18
2.16 Permukaan Bezier dengan $m = 2$ dan $n = 2$	18
2.17 Permukaan putar	19
2.18 Permukaan putar kurva $C(u)$	20
2.19 Problem penggabungan dua permukaan putar.....	21
2.20 Segmen garis.....	22
2.21 Bidang segiempat.....	22

2.22	Bidang permukaan tidak datar	23
2.23	Bidang lingkaran.....	23
2.24	Interpolasi antara dua kurva.....	24
2.25	Permukaan Bezier	25
2.26	Permukaan putar kurva Bezier kuadratik	25
3.1	Skema Metode Penelitian	27
4.1	Deformasi tabung dengan modifikasi kurva selimut	29
4.2	Variasi bentuk deformasi tabung dengan modifikasi kurva selimut untuk pemilihan nilai r , t , dan $p''(1)$	30
4.3	Deformasi tabung dengan teknik dilatasi hasil modifikasi kurva selimut	31
4.4	Variasi bentuk deformasi tabung dengan teknik dilatasi hasil modifikasi kurva selimut untuk pemilihan r , r' , t , dan $p''(1)$	31
4.5	Deformasi prisma dengan sudut puntiran $\theta = 60^\circ$	32
4.6	Variasi bentuk deformasi prisma segienam beraturan dengan efek puntiran untuk pemilihan nilai r , t , dan θ	33
4.7	Deformasi sisi tegak prisma menjadi lengkung cekung	34
4.8	Variasi bentuk deformasi sisi tegak prisma segienam beraturan menjadi lengkung cekung untuk nilai $r = 2$ dan $t = 3$	34
4.9	Deformasi sisi tegak prisma menjadi lengkung cembung	35
4.10	Variasi bentuk deformasi sisi tegak prisma segienam beraturan menjadi lengkung cembung untuk nilai $r = 2$ dan $t = 4$	36
4.11	Deformasi prisma menjadi model bintang.....	37
4.12	Variasi bentuk deformasi prisma segienam beraturan menjadi model bintang untuk nilai $r = 2$ dan $t = 4$	37
4.13	Relief melintang di antara dua lingkaran paralel dengan $n = 6$	39
4.14	Variasi bentuk modifikasi permukaan putar relief melintang untuk nilai $r_1 = 2$, $r_2 = r_3 = 4$, $r_4 = 2$, dan $t = 6$	40
4.15	Relief memanjang dengan $n = 6$	41

4.16	Variasi bentuk modifikasi permukaan putar relief memanjang untuk beberapa variasi nilai $n = 8, n = 10, \text{ dan } n = 12$	41
4.17	Sumbu tegak <i>knop</i>	45
4.18	Variasi alas <i>knop</i> dengan $t_1 = 0,1 t$ dan $r_1 = 2 t_1, t = 8$	45
4.19	Variasi penyangga <i>knop</i> dengan $t_2 = 0,3 t$ dan $r_2 = 2/3 t_2, t = 8$	46
4.20	Variasi kepala <i>knop</i> dengan $t_3 = 0,1 t$ dan $r_3 = 2/5 t_3, t = 8$	46
4.21	Contoh rangkaian <i>knop</i> dengan satu sumbu pemodelan.....	47
4.22	Beberapa visualisasi model <i>knop</i> dengan satu sumbu pemodelan.....	47
4.23	Dua sumbu <i>knop</i> dan pembagian sumbu \bar{P}	51
4.24	Variasi penyangga <i>knop</i> dengan $t_2 = 0,8 t$ dan $r_2 = 1/3 t_2, t = 5$	51
4.25	Variasi kepala <i>knop</i> dengan $l = 2 t$ dan $r_3 = 2/5 t_3, t = 5$	52
4.26	Contoh rangkaian <i>knop</i> dengan dua sumbu pemodelan	52
4.27	Beberapa visualisasi model <i>knop</i> dengan dua sumbu pemodelan	53
4.28	Tiga sumbu <i>knop</i>	57
4.29	Contoh rangkaian <i>knop</i> dengan tiga sumbu pemodelan	58
4.30	Beberapa visualisasi model <i>knop</i> dengan tiga sumbu pemodelan.....	58
4.31	Variasi bentuk komponen <i>knop</i> hasil teknik deformasi.....	59
4.32	Variasi bentuk komponen <i>knop</i> hasil teknik deformasi.....	60
4.33	Variasi bentuk komponen hasil modifikasi permukaan putar akibat nilai $u_1, u_2, \text{ dan } n$	61
4.34	Variasi bentuk <i>knop</i> akibat tiga jenis sumbu pemodelan dan perubahan nilai parameter μ_1 dan μ_2	62
4.35	Variasi bentuk <i>knop</i> akibat perubahan nilai parameter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \text{ dan } \alpha$	63

DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
A. Modelisasi komponen penyusun <i>knop</i>	67
A.1 Deformasi tabung.....	67
A.2 Deformasi prisma segienam beraturan.....	67
A.3 Modifikasi permukaan putar	69
B. Perangkaian <i>knop</i> pada tiga jenis sumbu pemodelan	70
B.1 Model <i>knop</i> dengan satu sumbu pemodelan	70
B.2 Model <i>knop</i> dengan dua sumbu pemodelan.....	72
B.3 Model <i>knop</i> dengan dua sumbu pemodelan.....	73

BAB 1. PENDAHULUAN

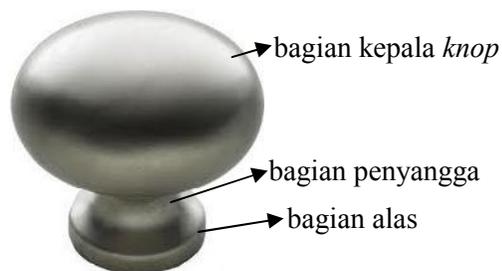
1.1 Latar Belakang

Knop atau yang sering diistilahkan dengan pegangan atau *handle* banyak ditemukan penggunaannya pada laci, almari, ataupun pintu untuk keperluan membuka dan menutup laci, almari, atau pintu. Selain itu, *knop* dapat ditemukan pada radio, kompor, dan benda-benda lain di sekitar kita. Bahan baku yang digunakan dapat berasal dari metal, kayu, batuan, ataupun kaca. Adapun cara dalam membuka, menutup, atau menyalakan benda dengan *knop* dilakukan dengan cara menarik, mendorong, menggeser, atau memutar.

Knop secara umum terdiri atas beberapa bagian yaitu alas, penyangga, dan kepala *knop* (Gambar 1.1a). Bagian alas merupakan bagian yang digunakan untuk melekatkan *knop* pada tempat pemasangan. Kepala *knop* terletak pada bagian atas dan berfungsi sebagai *handle* saat membuka dan menutup laci atau almari serta menyalakan dan mematikan radio, kompor, atau sejenisnya. Di antara alas dan kepala *knop* terdapat penyangga yang berfungsi sebagai penghubung antara alas dan kepala *knop*.

Dari beberapa model *knop* yang sudah ada (Gambar 1.1b), modelnya memiliki beberapa kelebihan, diantaranya sebagian bentuk *knop* secara geometris telah menggunakan permukaan yang halus, permukaan lengkung, dan terdiri dari beberapa benda geometri ruang sederhana seperti tabung, bola, dan hiperboloida. Akan tetapi hasil desain *knop* tersebut masih memiliki kekurangan tampilan bentuk, umumnya bentuk penyangga *knop* terbangun hanya dari satu bentuk benda ruang seperti tabung atau potongan hiperboloida yang mempunyai lengkung tunggal dan datar sehingga terlihat monoton modelnya. Pada bagian kepala *knop* secara umum belum memiliki variasi relief sehingga tampilannya menjadi kurang menarik.

Wahyudi (2001) telah melakukan penelitian tentang perancangan objek-objek industri dengan benda permukaan putar yang dapat diimplementasikan untuk desain vas bunga, gelas, kendi ataupun *knop*. Namun permukaan putar yang diperoleh pada penelitian tersebut umumnya mempunyai permukaan lengkung tunggal dan datar sehingga variasi bentuk yang didapat kurang beragam. Selain itu, Budiono (2011) melakukan penelitian tentang pemodelan *handle* pintu tipe simetris melalui teknik penggabungan beberapa benda geometri ruang. Hasil penggabungan diperoleh bentuk-bentuk *handle* pintu yang masih lengkung tunggal dan benda geometris yang digunakan masih sederhana sehingga terlihat monoton dan kurang menarik. Sehubungan dengan beberapa persoalan desain *knop* tersebut, penelitian ini dimaksudkan untuk memodelisasi *knop* melalui penggabungan beberapa permukaan putar dan permukaan hasil deformasi (perubahan bentuk) tabung dan prisma segienam beraturan.



(a) Komponen-komponen pembangun *knop*



(b) Contoh bentuk-bentuk *knop*

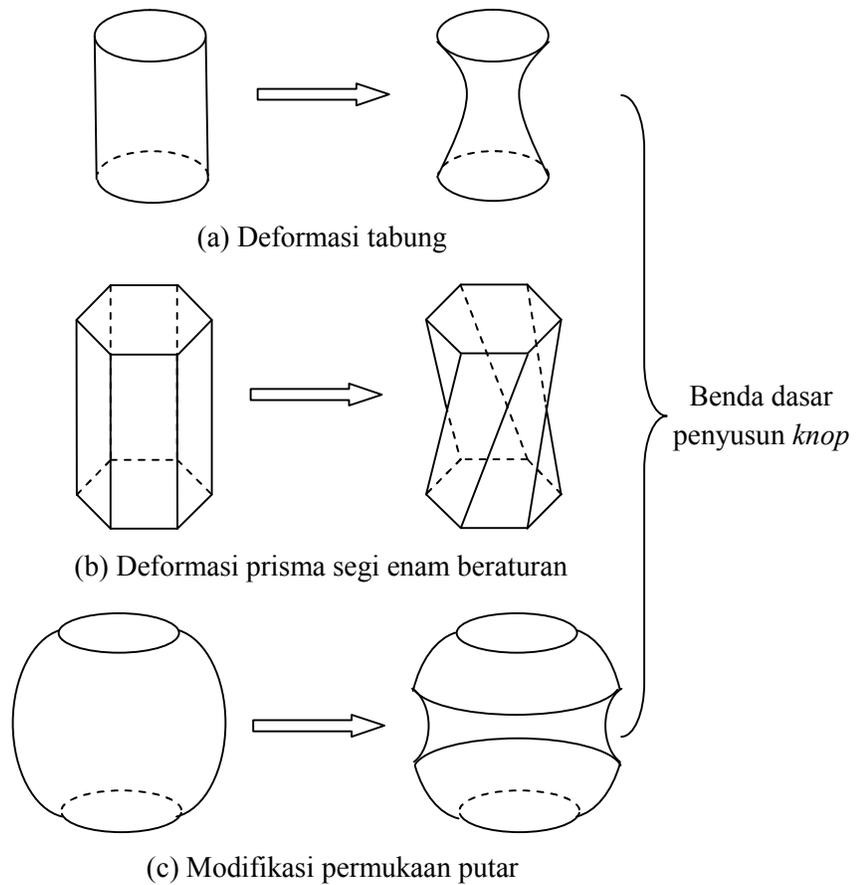
Sumber : Suharto (2009)

Gambar 1.1 Beberapa bentuk model *knop*

1.2 Perumusan Masalah

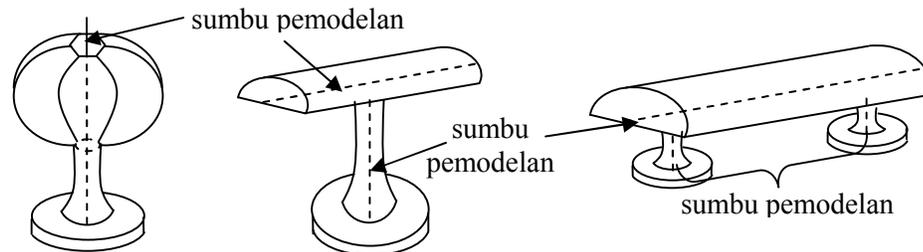
Dari beberapa kelemahan geometris yang dijelaskan pada bagian latar belakang diajukan permasalahan modelisasi *knop* sebagai berikut :

- a. diberikan tabung, prisma segienam beraturan, dan permukaan putar. Dari ketiga benda geometri ruang tersebut, bagaimana prosedur membangun beberapa benda dasar sebagai komponen penyusun *knop* dari deformasi tabung dan prisma segi enam beraturan serta modifikasi permukaan putar sehingga menghasilkan beberapa komponen penyusun *knop* yang variatif dan simetris (Gambar 1.2);



Gambar 1.2 Komponen-komponen penyusun *knop*

- b. diberikan tiga model kerangka sumbu pemodelan untuk merangkai *knop* yaitu model dengan satu sumbu pemodelan, dua sumbu pemodelan, dan tiga sumbu pemodelan (Gambar 1.3). Dari ketiga model sumbu pemodelan tersebut, bagaimana prosedur merangkai beberapa benda-benda dasar komponen *knop* agar menghasilkan model *knop* yang tergabung kontinu dan bervariasi.



Gambar 1.3 Contoh model sumbu pemodelan

1.3 Tujuan

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. mendapatkan prosedur untuk membangun beberapa benda dasar sebagai komponen penyusun *knop* dari deformasi tabung dan prisma segi enam beraturan serta modifikasi permukaan putar;
2. mendapatkan prosedur untuk merangkai beberapa benda dasar komponen *knop* pada tiga model kerangka sumbu.

1.4 Manfaat

Adapun manfaat yang dapat diperoleh dalam penelitian ini antara lain:

1. dengan bantuan komputer, dapat dihasilkan beberapa prosedur baru model *knop* yang bervariasi dan simetris;
2. memberikan informasi kepada produsen tentang beberapa daftar model *knop* sehingga menambah pilihan model *knop* yang sudah ada sebelumnya.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

Sehubungan dengan beberapa persoalan yang dimaksud dan untuk keperluan mencari solusi permasalahan modelisasi *knop*, pada bab ini disajikan beberapa teori dasar yang berkaitan dengan prosedur modelisasi *knop*. Teori dasar tersebut meliputi kajian tentang segmen garis, lingkaran, poligon segi enam beraturan, kurva Hermite, dan kurva Bezier serta benda-benda ruang geometri seperti tabung, prisma segienam beraturan, dan permukaan putar. Hal ini bertujuan untuk mempermudah dalam proses modelisasi beragam komponen *knop* dan perangkaiannya pada tiga jenis sumbu pemodelan *knop*.

2.1 Penyajian Segmen Garis, Lingkaran, dan Poligon Segienam Beraturan

2.1.1 Penyajian Segmen Garis

Misalkan diberikan dua buah titik berbeda di ruang dengan koordinat masing-masing $A(x_1, y_1, z_1)$ dan $B(x_2, y_2, z_2)$ maka segmen garis \overline{AB} dapat didefinisikan secara vektorial sebagai berikut (Gambar 2.1):

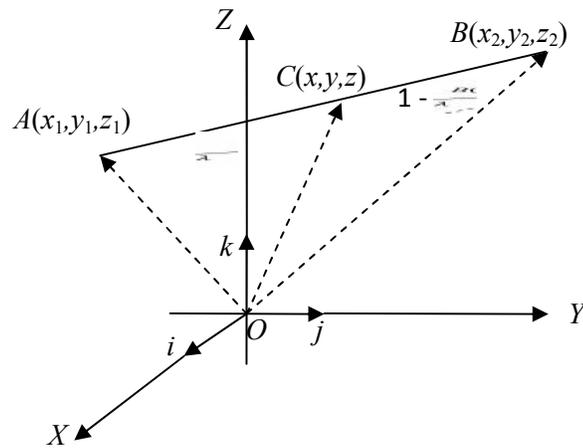
$$\vec{C} = \lambda \vec{B} + (1 - \lambda) \vec{A},$$

dengan $\lambda \in [0, 1]$ sebagai variabel parameter dan $C \in \overline{AB}$. Dengan demikian persamaan parametrik segmen garis dapat dinyatakan sebagai:

$$\langle x, y, z \rangle = \lambda \langle x_2, y_2, z_2 \rangle + (1 - \lambda) \langle x_1, y_1, z_1 \rangle, \quad (2.1a)$$

atau

$$\begin{aligned} x &= (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2, \\ y &= (1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2, \\ z &= (1 - \lambda)z_1 + \lambda z_2. \end{aligned} \quad (2.1b)$$



Gambar 2.1 Penyajian segmen garis di ruang

2.1.2 Penyajian Lingkaran dan Bagiannya

Lingkaran didefinisikan sebagai himpunan titik-titik di bidang pada jarak tertentu, yang disebut jari-jari, dari suatu titik tetap tertentu, yang disebut pusat (Wheater, 1957). Misalkan diketahui sembarang titik $A(x,y)$ pada lingkaran yang berpusat di $B(x_1, y_1)$, maka melalui A tarik garis g sejajar sumbu Y dan melalui B tarik garis h sejajar sumbu X . Titik C merupakan perpotongan dari kedua garis tersebut dan $\angle ACB$ membentuk sudut siku-siku (gambar 2.2). Maka didapat hubungan:

$$\vec{r} = \vec{b} + \vec{u} \quad (2.2)$$

Dari persamaan (2.2) dapat dibentuk persamaan parametrik lingkaran dengan arah vektor satuan u_1 dan u_2 sebagai berikut:

$$\vec{r} - \vec{b} = R \cos \theta \mathbf{u}_1 + R \sin \theta \mathbf{u}_2,$$

$$\langle x - x_1, y - y_1 \rangle = \langle R \cos \theta, R \sin \theta \rangle,$$

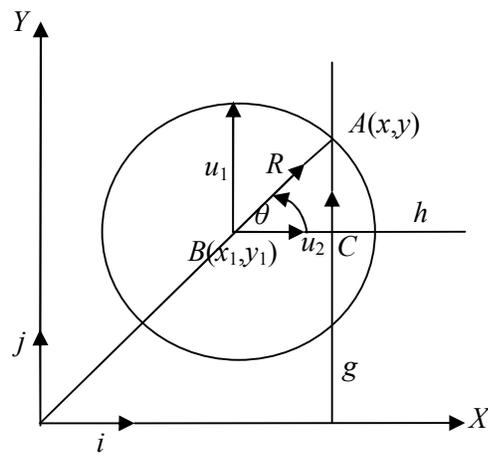
$$\langle x, y \rangle = \langle x_1 + R \cos \theta, y_1 + R \sin \theta \rangle,$$

atau dapat juga ditulis:

$$x(\theta) = x_1 + R \cos \theta, \quad (2.3)$$

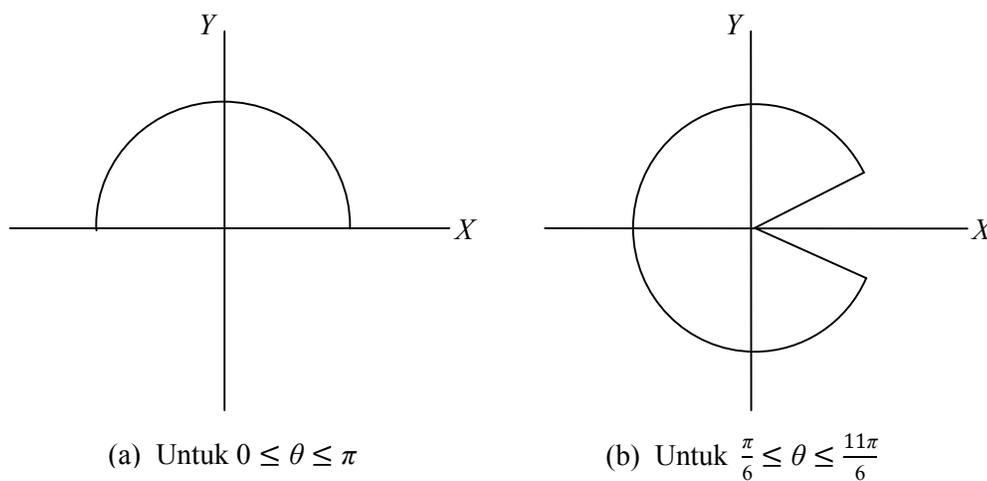
$$y(\theta) = y_1 + R \sin \theta,$$

dengan $0 \leq \theta \leq 2\pi$, dan R merupakan jari-jari lingkaran berharga real.

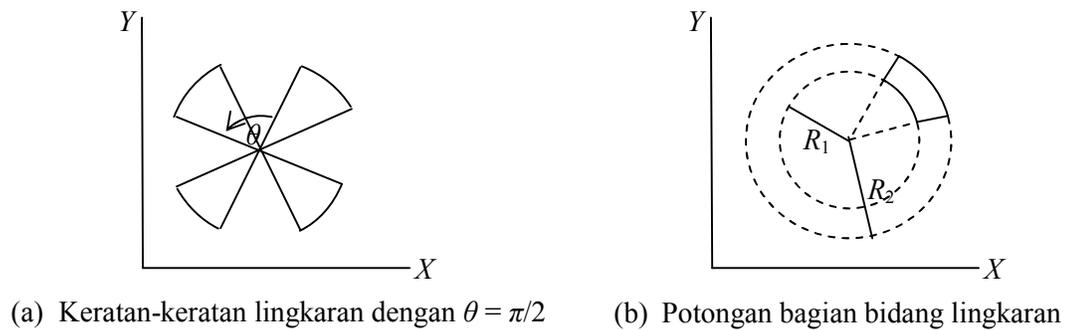


Gambar 2.2 Penyajian lingkaran

Apabila parameter θ pada persamaan (2.3) diberikan nilai dalam interval $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, maka akan diperoleh keratan lingkaran (Gambar 2.3). Dari keratan lingkaran tersebut dapat dibentuk beragam bentuk keratan yang terdefinisi dalam satu lingkaran. Tekniknya antara lain dengan cara merotasikan keratan lingkaran dengan sudut rotasi θ terhadap pusat lingkaran (Gambar 2.4a). Selain itu dapat dibangun potongan daerah lingkaran yang dibatasi oleh dua busur lingkaran sepusat dan jari-jari berbeda (Gambar 2.4b).



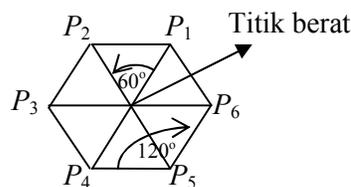
Gambar 2.3 Penyajian keratan lingkaran



Gambar 2.4 Variasi yang terbentuk dari keratan lingkaran

2.1.3 Poligon Beraturan

Poligon beraturan adalah poligon yang mempunyai panjang sisi dan besar sudut yang sama. Poligon beraturan dengan n sisi memiliki titik-titik sudut $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n$ dengan ruas-ruas garis $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \dots, \overline{P_{n-1}P_n}, \overline{P_nP_1}$, sedemikian sehingga jika dua ruas garis sembarang berpotongan maka akan mempunyai titik potong di salah satu titik-titik $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n$ dan tidak ada titik lain. Poligon konveks adalah poligon yang masing-masing sudutnya lebih kecil dari 180° (Kusno, 2002). Poligon segi enam beraturan adalah suatu poligon konveks bersisi enam dengan panjang sisi dan besar sudut sama. Besar sudut pada poligon segienam beraturan adalah 120° dan besar sudut pusat masing-masing adalah 60° (Gambar 2.5).



Gambar 2.5 Poligon segi enam beraturan

Berdasarkan definisi poligon segi enam beraturan tersebut, jika diketahui titik beratnya $D(0,0,z_1)$ yang terletak pada bidang $z = z_1$ dan jarak titik $D(0,0,z_1)$ ke titik-titik sudut poligon adalah l , maka dapat dibangun poligon segi enam beraturan dengan langkah-langkah berikut (Gambar 2.6).

- a. Menetapkan titik sudut awal $P_1(0, l, z_1)$.
- b. Merotasikan titik P_1 terhadap titik berat dengan sudut rotasi sebesar 60° menggunakan formula:

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \\ z_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

dan diperoleh titik $P_2(x_2, y_2, z_1)$.

- c. Dengan mempertahankan besar sudut 60° dan arah rotasi, ulangi langkah (b) untuk titik-titik P_i dengan $i = 2, 3, \dots, 6$ sehingga dihasilkan titik-titik $P_3(x_3, y_3, z_1)$, $P_4(x_4, y_4, z_1)$, $P_5(x_5, y_5, z_1)$, $P_6(x_6, y_6, z_1)$.
- d. Membangun poligon beraturan dengan cara membuat segmen-segmen garis $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \dots, \overline{P_6P_1}$, menggunakan formula (Kusno, 2002)

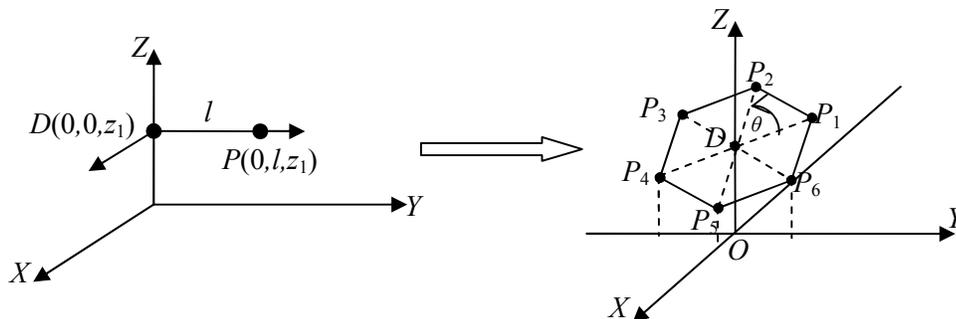
$$(1 - t)\langle x_1, y_1, z_1 \rangle + t\langle x_2, y_2, z_2 \rangle = \langle x, y, z \rangle, \quad (2.5)$$

dengan $t \in [0, 1]$. $P_1(x_1, y_1, z_1)$ adalah vektor posisi titik sudut ke-1 dan $P_2(x_2, y_2, z_1)$ vektor posisi titik sudut ke-2. Sedangkan untuk segmen garis pembangun poligon yang lainnya dibangun menggunakan persamaan

$$(1 - t)\langle x_i, y_i, z_i \rangle + t\langle x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1} \rangle = \langle x, y, z \rangle \text{ untuk } 3 \leq i < 6 \text{ dan}$$

$$(1 - t)\langle x_6, y_6, z_6 \rangle + t\langle x_1, y_1, z_1 \rangle = \langle x, y, z \rangle \text{ untuk } i = 6,$$

dengan $\langle x_i, y_i, z_i \rangle$ adalah vektor posisi titik sudut ke- i dan $\langle x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1} \rangle$ adalah vektor posisi titik sudut ke- $i+1$.



Gambar 2.6 Langkah-langkah membangun poligon segi enam beraturan pada bidang $z = z_1$

2.2 Interpolasi diantara Segmen Garis dan Kurva di Ruang

Misalkan terdapat dua segmen garis \overline{AB} dan \overline{CD} didefinisikan masing-masing oleh $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ dan $D(x_4, y_4, z_4)$ dalam bentuk parametrik $I_1(u)$ dan $I_2(u)$, maka permukaan parametrik hasil interpolasi linier kedua segmen garis tersebut diformulasikan sebagai berikut:

$$S(u, v) = (1 - v)I_1(u) + vI_2(u), \quad (2.6a)$$

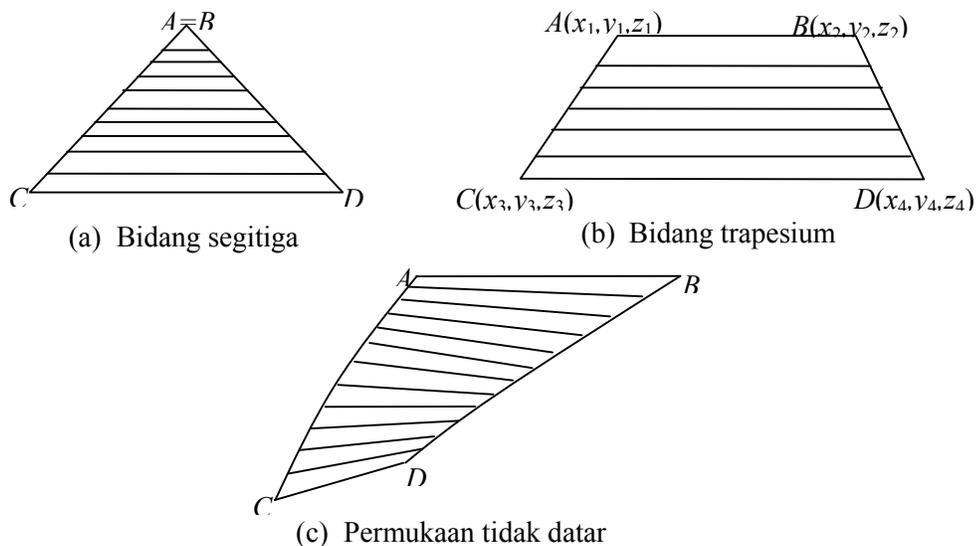
dengan $0 \leq u \leq 1$ dan $0 \leq v \leq 1$.

Terdapat beberapa kasus khusus untuk interpolasi linier kedua garis tersebut. Jika $A=B$ maka hasil interpolasi persamaan (2.6a) akan menghasilkan bidang segitiga (Gambar 2.7a). Sedangkan jika $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ maka secara umum akan membentuk bidang segi empat (Gambar 2.7b). Jika bidang tersebut dibentuk dari interpolasi dua garis yang bersilangan maka menghasilkan permukaan tidak datar (dapat melengkung ataupun terjadi puntiran di sebagian permukaan tersebut) (Gambar 2.7c).

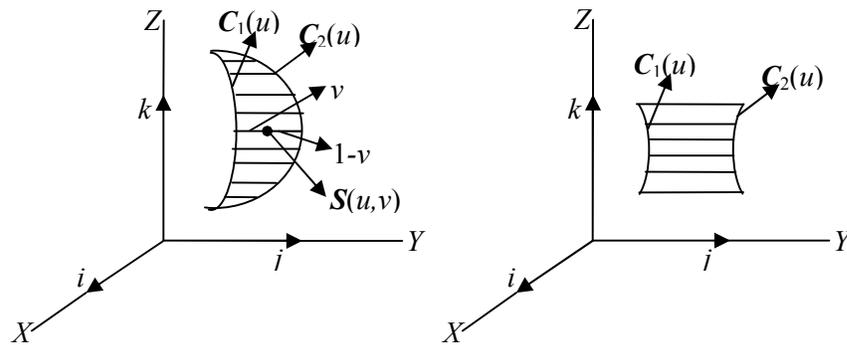
Di lain pihak kita dapat membangun permukaan lengkung hasil interpolasi kurva ruang melalui persamaan berikut:

$$S(u, v) = (1 - v)C_1(u) + vC_2(u), \quad (2.6b)$$

dengan $C_1(u)$ dan $C_2(u)$ merupakan kurva batas (Gambar 2.8).



Gambar 2.7 Contoh kasus khusus interpolasi linier dua segmen garis

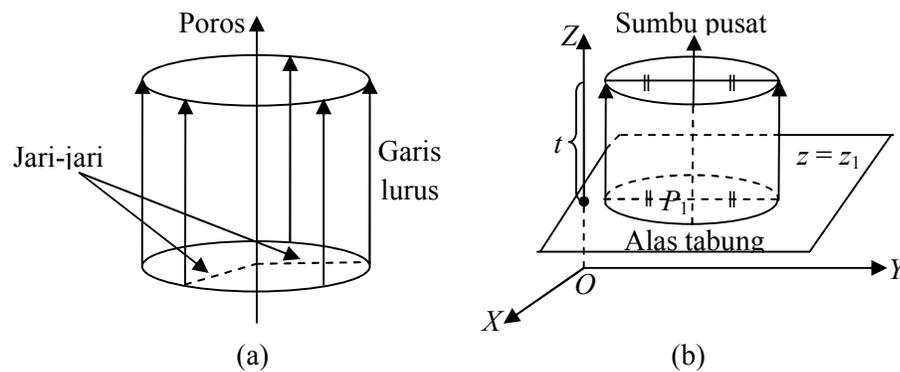


Gambar 2.8 Interpolasi linier pada kurva

2.3 Penyajian Tabung dan Prisma Segienam Beraturan

2.3.1 Penyajian Tabung

Menurut Suryadi (1986), tabung dapat dibangun oleh garis lurus yang sejajar dengan garis lurus tertentu (poros) yang bergerak sejajar dengan jarak konstan. Tabung juga dapat diartikan sebagai benda ruang yang merupakan kedudukan garis-garis sejajar dan berjarak sama terhadap garis (poros) tertentu (Gambar 2.9).



Gambar 2.9 Penyajian tabung

Menurut Bastian (2011), jika diketahui tabung dengan pusat alas $P_1(x_1, y_1, z_1)$, jari-jari R , dan tinggi t , maka dapat dicari persamaan parametrik tabung sebagai berikut.

a. Jika alas terletak pada bidang $z = z_1$ dan sumbu pusat tabung sejajar sumbu Z , maka untuk mencari persamaan parametrik tabung dapat dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut (Gambar 2.10a).

1. Tentukan persamaan parametrik lingkaran dengan pusat $P_1(x_1, y_1, z_1)$, jari-jari R , dan terletak pada bidang $z = z_1$, yaitu

$$L(\theta) = \langle x_1 + R \cos\theta, y_1 + R \sin\theta, z_1 \rangle \quad (2.7)$$

dengan $0 \leq \theta \leq 2\pi$ dan $R \in \text{real}$.

2. Translasikan lingkaran (2.7) dari z_1 sampai $z_1 + t$ sehingga terbentuk persamaan parametrik tabung

$$T(\theta, z) = \langle x_1 + R \cos\theta, y_1 + R \sin\theta, z \rangle, \quad (2.8)$$

dengan $0 \leq \theta \leq 2\pi$ dan $z_1 \leq z \leq z_1 + t$.

b. Jika alas terletak pada bidang $x = x_1$ dan sumbu pusat tabung sejajar sumbu X , maka untuk mencari persamaan parametrik tabung dapat dilakukan dengan mengulangi langkah a dan didapatkan persamaan (Gambar 2.10b)

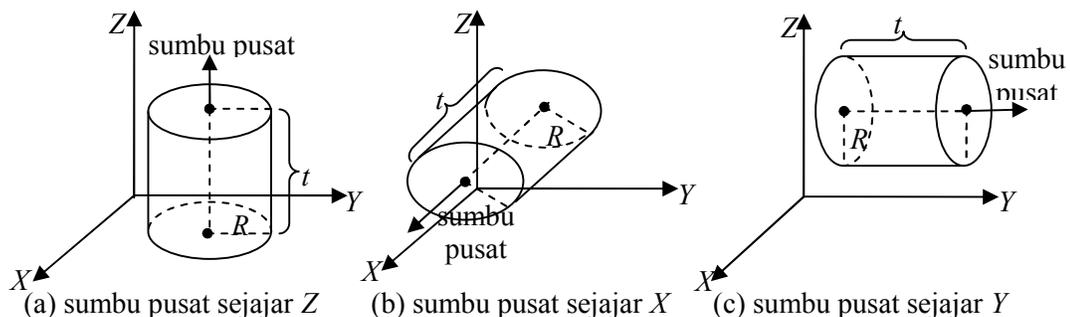
$$T(\theta, z) = \langle x, y_1 + R \sin\theta, z_1 + R \cos\theta \rangle, \quad (2.9)$$

dengan $0 \leq \theta \leq 2\pi$ dan $x_1 \leq x \leq x_1 + t$.

c. Jika alas terletak pada bidang $y = y_1$ dan sumbu pusat tabung sejajar sumbu Y , maka untuk mencari persamaan parametrik tabung dapat dilakukan dengan juga mengulangi langkah a dan didapatkan persamaan (Gambar 2.10c)

$$T(\theta, z) = \langle x_1 + R \cos\theta, y, z_1 + R \sin\theta \rangle, \quad (2.10)$$

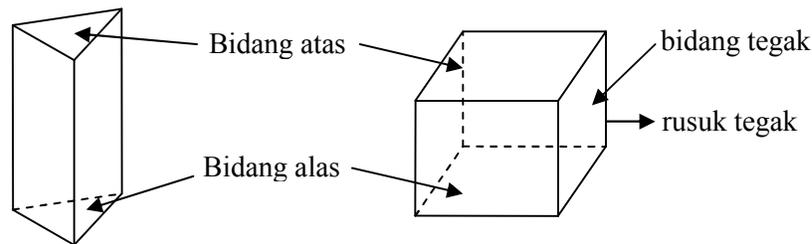
dengan $0 \leq \theta \leq 2\pi$ dan $y_1 \leq y \leq y_1 + t$.



Gambar 2.10 Tabung dengan beragam sumbu pusat

2.3.2 Penyajian Prisma Segienam Beraturan

Prisma adalah suatu benda ruang tertutup yang dibatasi oleh dua bidang sejajar dan beberapa bidang perpotongan dengan garis-garis potong sejajar. Dua bidang yang sejajar tersebut dinamakan bidang alas dan bidang atas, bidang-bidang perpotongan disebut dengan bidang tegak, sedangkan jarak antara bidang alas dan bidang atas disebut tinggi prisma (Gambar 2.11).



Gambar 2.11 Prisma dan bagiannya

Penamaan prisma diambil dari nama poligon yang menjadi bidang alas dan bidang atasnya. Jika bidang alas dan bidang atas berbentuk segilima, maka prisma tersebut disebut prisma segilima. Sedangkan prisma segienam beraturan, bidang alas dan bidang atas berupa segienam beraturan.

Misalkan diketahui segienam beraturan $K_1K_2K_3K_4K_5K_6$ dengan koordinat titik-titik sudut $K_1(x_1, y_1, z_1)$, $K_2(x_2, y_2, z_2)$, $K_3(x_3, y_3, z_3)$, $K_4(x_4, y_4, z_4)$, $K_5(x_5, y_5, z_5)$ dan $K_6(x_6, y_6, z_6)$ sebagai alas prisma. Dari data titik-titik tersebut dapat dikonstruksi prisma segienam beraturan dengan langkah-langkah sebagai berikut.

1. Menetapkan tiga titik K_1, K_2, K_3 dan vektor $\vec{K_1K_2}, \vec{K_1K_3}$ dengan

$$\vec{K_1K_2} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle,$$

$$\vec{K_1K_3} = \langle x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1 \rangle.$$

2. Menghitung vektor normal bidang (\mathbf{n}_{a_u}) alas menggunakan persamaan

$$\mathbf{n}_{a_u} = \left\langle \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \right\rangle = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle,$$

dengan

$$a = y_1(z_3 - z_2) + y_2(z_1 - z_3) + y_3(z_2 - z_1),$$

$$b = x_1(z_2 - z_3) + x_2(z_3 - z_1) + x_3(z_1 - z_2),$$

$$c = x_1(y_3 - y_2) + x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_2 - y_1).$$

3. Mentranslasikan alas prisma dengan tinggi t sejajar $\mathbf{n}_{a_u} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ sehingga didapatkan bidang atas prisma dengan titik sudut $K_1', K_2', K_3', K_4', K_5'$ dan K_6' dengan persamaan

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1 \mathbf{n}_{a_u} \Rightarrow \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_2 \mathbf{n}_{a_u} \Rightarrow \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},$$

$$\vec{r}_3 = \vec{r}_3 \mathbf{n}_{a_u} \Rightarrow \vec{r}_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},$$

$$\vec{r}_4 = \vec{r}_4 \mathbf{n}_{a_u} \Rightarrow \vec{r}_4 = \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},$$

$$\vec{r}_5 = \vec{r}_5 \mathbf{n}_{a_u} \Rightarrow \vec{r}_5 = \begin{pmatrix} x_5 \\ y_5 \\ z_5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},$$

$$\vec{r}_6 = \vec{r}_6 \mathbf{n}_{a_u} \Rightarrow \vec{r}_6 = \begin{pmatrix} x_6 \\ y_6 \\ z_6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

4. Menginterpolasi segmen-segmen garis pada bidang alas dan bidang atas prisma menggunakan persamaan (2.6a) sehingga didapatkan bidang segiempat dengan persamaan

$$S_{K_1 K_2 K_1' K_2'}(u, v) = (1 - v) \vec{r}_2(u) + v \vec{r}_1(u),$$

$$S_{K_2 K_3 K_2' K_3'}(u, v) = (1 - v) \vec{r}_3(u) + v \vec{r}_2(u),$$

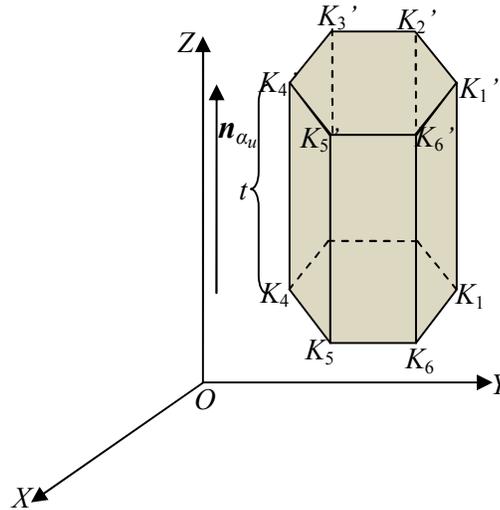
$$S_{K_3 K_4 K_3' K_4'}(u, v) = (1 - v) \vec{r}_4(u) + v \vec{r}_3(u),$$

$$S_{K_4 K_5 K_4' K_5'}(u, v) = (1 - v) \vec{r}_5(u) + v \vec{r}_4(u),$$

$$S_{K_5 K_6 K_5' K_6'}(u, v) = (1 - v) \vec{r}_6(u) + v \vec{r}_5(u),$$

$$S_{K_1 K_6 K_1' K_6'}(u, v) = (1 - v) \overrightarrow{K_1 K_6}(u) + v \overrightarrow{K_1' K_6'}(u).$$

dengan $0 \leq u \leq 1$ dan $0 \leq v \leq 1$.



Gambar 2.12 Penyajian prisma segienam beraturan

2.4 Dilatasi Titik pada \mathbb{R}^3

Dilatasi adalah suatu transformasi yang mengubah jarak titik-titik dengan faktor pengali tertentu (k) terhadap suatu titik tertentu yang disebut sebagai pusat dilatasi. Dengan kata lain, dilatasi merupakan transformasi yang mengubah ukuran (memperbesar atau memperkecil) suatu benda.

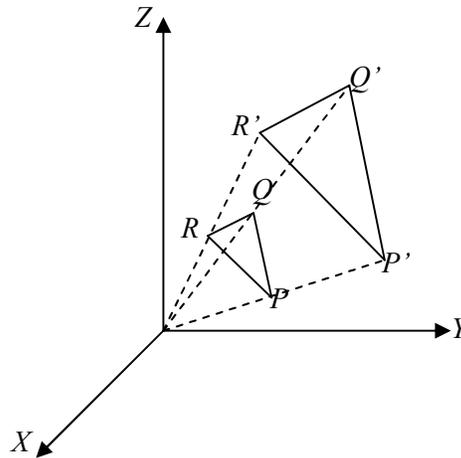
Menurut Kusno (2009), transformasi dilatasi yang memetakan titik $P(x, y, z)$ ke $P'(x', y', z')$ didefinisikan dengan bentuk formula berikut:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 x \\ k_2 y \\ k_3 z \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

dengan $k_1, k_2, k_3 \in \text{real}$.

Dalam hal ini pemilihan harga k_1 menyajikan skala ke arah sumbu X , k_2 ke arah sumbu Y dan k_3 menyajikan skala ke arah sumbu Z , jika $k_1 = k_2 = k_3$, maka peta obyek yang didapat sebangun dengan obyek aslinya (mungkin diperbesar, diperkecil atau tetap).

Misalkan segitiga PQR dengan titik-titik sudut $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ dan $R(x_3, y_3, z_3)$ didilatasikan dengan faktor pengali $k > 1$, sehingga didapatkan segitiga bayangan $P'Q'R'$ dengan titik-titik sudut $P'(kx_1, ky_1, kz_1)$, $Q'(kx_2, ky_2, kz_2)$ dan $R'(kx_3, ky_3, kz_3)$ seperti terlihat pada Gambar 2.13.



Gambar 2.13 Dilatasi dengan $k > 1$

2.5 Penyajian Kurva Hermit Kuadratik

Menurut Kusno (2009), kurva Hermit kuadratik dapat dinyatakan sebagai berikut (Gambar 2.14):

$$\mathbf{p}(u) = \mathbf{p}(0)K_1(u) + \mathbf{p}(1)K_2(u) + \mathbf{p}''(1)K_3(u), \quad (2.12)$$

dengan:

$$K_1(u) = (1 - 2u + u^2),$$

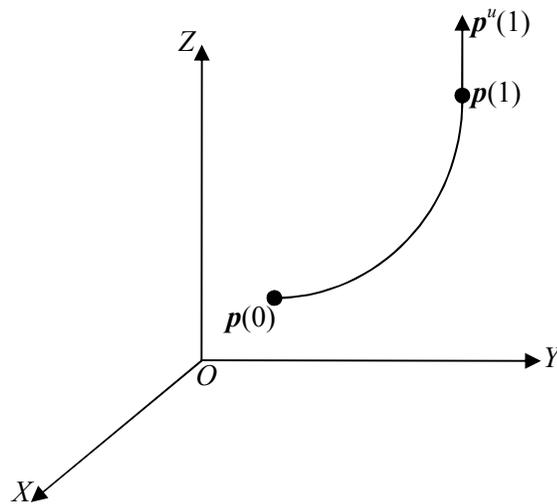
$$K_2(u) = (2u - u^2),$$

$$K_3(u) = (-u + u^2),$$

$\mathbf{p}(0)$ = titik awal kurva,

$\mathbf{p}(1)$ = titik akhir kurva,

$\mathbf{p}''(1)$ = vektor singgung di $\mathbf{p}(1)$ dengan $0 \leq u \leq 1$.



Gambar 2.14 Kurva Hermit kuadratik

2.6 Penyajian Kurva dan Permukaan Bezier

Kurva Bezier derajat- n $C(u)$ dinyatakan dalam bentuk parametrik berikut:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_i^n(u), \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (2.13)$$

dengan:

$$B_i^n(u) = C_i^n (1-u)^{n-1} u^i,$$

$$C_i^n = \frac{n!}{i!(n-i)!},$$

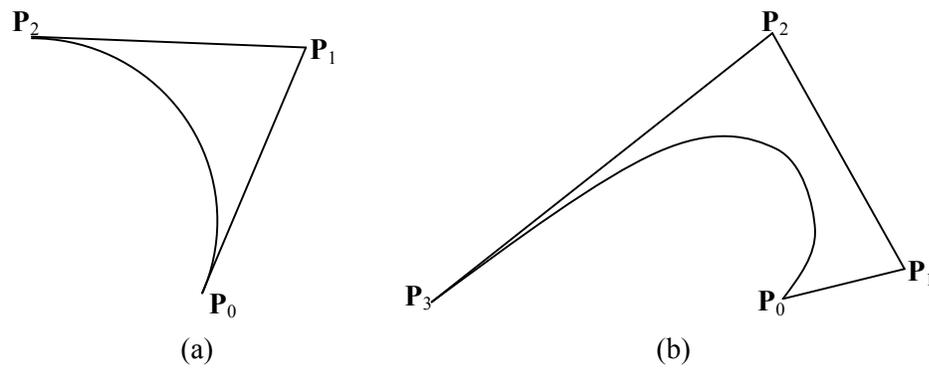
\mathbf{P}_i = koefisien geometri / titik kontrol kurva $C(u)$.

Jika $n = 2$, akan dihasilkan kurva Bezier kuadratik dengan persamaan parametrik (Gambar 2.15a):

$$C(u) = (1-u)^2 \mathbf{P}_0 + 2(1-u)u \mathbf{P}_1 + u^2 \mathbf{P}_2,$$

sedangkan untuk $n = 3$ didapatkan empat titik kontrol yaitu \mathbf{P}_0 , \mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 , dan \mathbf{P}_3 sehingga persamaan parametrik kurva Bezier kubiknya adalah (Gambar 2.15b):

$$C(u) = (1-u)^3 \mathbf{P}_0 + 3(1-u)^2 u \mathbf{P}_1 + 3(1-u)u^2 \mathbf{P}_2 + u^3 \mathbf{P}_3.$$



Gambar 2.15 Kurva Bezier (a) kuadratik (b) kubik

Permukaan Bezier pada prinsipnya identik dengan kurva Bezier. Permukaan Bezier $S(u,v)$ derajat m dan n dinyatakan dalam bentuk parametrik berikut (Gambar 2.16):

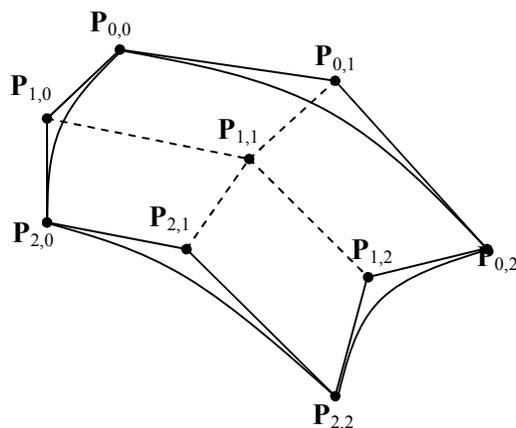
$$S(u,v) = \sum_{i,j=0}^{m,n} \mathbf{P}_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v), \quad 0 \leq u, v \leq 1 \quad (2.14)$$

dengan:

$$B_i^m(u) = \frac{m!}{i!(m-i)!} (1-u)^{m-1} u^i,$$

$$B_j^n(v) = \frac{n!}{j!(n-j)!} (1-v)^{n-1} v^j,$$

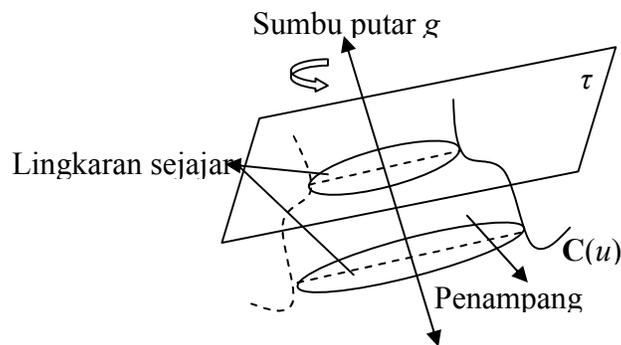
\mathbf{P}_{ij} = koefisien geometri / titik kontrol permukaan $S(u,v)$.

Gambar 2.16 Permukaan Bezier dengan $m = 2$ dan $n = 2$

2.7 Permukaan putar

Menurut Kusno (2009), permukaan putar adalah suatu permukaan yang dibangkitkan oleh suatu kurva ruang $C(u)$ (sebagai generatrik) diputar mengitari sebuah sumbu putar g yang disebut sebagai sumbu putar (Gambar 2.17).

Dalam membahas permukaan putar, terdapat beberapa istilah yang perlu diketahui. Pertama, bagian-bagian bidang penampang yang melalui sumbu putar dan dibatasi oleh permukaan putar, disebut dengan istilah penampang-penampang meridian. Semua penampang-penampang meridian adalah saling kongruen. Sedangkan lingkaran-lingkaran sejajar permukaan putar adalah perpotongan antara bidang-bidang sejajar yang tegak lurus sumbu putar dengan permukaan putar.



Gambar 2.17 Permukaan putar

Misalkan $C_x(u)$, $C_y(u)$ dan $C_z(u)$ menyatakan komponen-komponen skalar dari kurva generatrik $C(u)$, maka permukaan putar yang dibangkitkan oleh kurva $C(u)$ dapat diformulasikan sebagai berikut.

a. Jika kurva generatrik $C(u)$ pada bidang YOZ dan sumbu putar OZ , maka untuk mencari persamaan parametrik permukaan putar dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut (Gambar 2.18a).

1. Tentukan persamaan parametrik kurva $C(u)$, yaitu

$$C(u) = \langle C_x(u), C_y(u), C_z(u) \rangle, \quad (2.15)$$

dengan $0 \leq u \leq 1$.

2. Putar kurva $C(u)$ terhadap sumbu putar OZ , maka terbentuk sebuah permukaan putar dengan persamaan parametrik

$$S(u,v) = \langle C_x(u) \cos v, C_y(u) \sin v, C_z(u) \rangle, \quad (2.16)$$

dengan $0 \leq u \leq 1$ dan $0 \leq v \leq 2\pi$.

- b. Jika kurva generatrix $C(u)$ pada bidang XOY dan sumbu putar OY , maka untuk mencari persamaan parametrik permukaan putar dilakukan dengan mengulangi langkah a dan didapatkan persamaan (Gambar 2.18b)

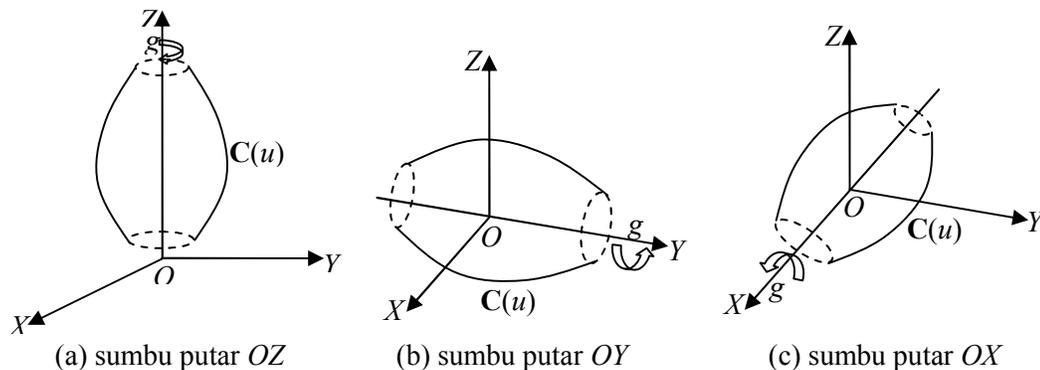
$$S(u,v) = \langle C_x(u) \cos v, C_y(u), C_z(u) \sin v \rangle, \quad (2.17)$$

dengan $0 \leq u \leq 1$ dan $0 \leq v \leq 2\pi$.

- c. Jika kurva generatrix $C(u)$ pada bidang XOY dan sumbu putar OX , maka untuk mencari persamaan parametrik permukaan putar dilakukan dengan mengulangi langkah a dan didapatkan persamaan (Gambar 2.18c)

$$S(u,v) = \langle C_x(u), C_y(u) \cos v, C_z(u) \sin v \rangle, \quad (2.18)$$

dengan $0 \leq u \leq 1$ dan $0 \leq v \leq 2\pi$.

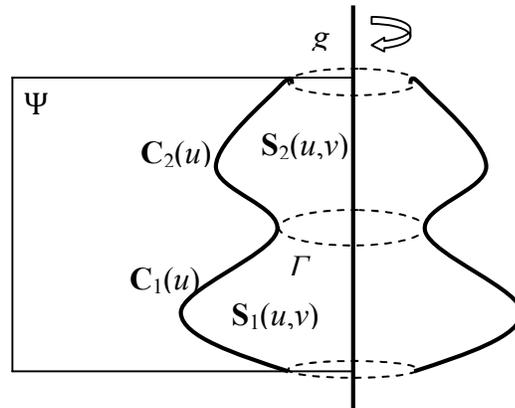


Gambar 2.18 Permukaan putar kurva $C(u)$

2.8 Prinsip Penggabungan Permukaan putar

Misalkan dua permukaan putar $S_1(u,v)$ dan $S_2(u,v)$ memiliki sumbu putar g dan orientasi arah kurva sama, masing-masing pada bidang meridian ψ dibangkitkan oleh kurva generatrix $C_1(u)$ dan $C_2(u)$. Masalahnya adalah bagaimana menggabungkan kedua permukaan $S_1(u,v)$ dan $S_2(u,v)$ sehingga kontinyu parametrik

sepanjang kurva persekutuannya Γ (Gambar 2.19). Dalam hal ini pemilihan $S_1(u,v)$ dan $S_2(u,v)$ dapat berupa permukaan putar natural, bentuk standar (berupa potongan bola, elipsoida, paraboloida, hiperboloida, silinder, dan kerucut) ataupun dari permukaan putar Bezier.



Gambar 2.19 Problem penggabungan dua permukaan putar

Jika pada permukaan tersebut masing-masing parameter u dan v terdefinisi dalam selang $u_0 \leq u \leq u_1$ dan $0 \leq v \leq 2\pi$, maka untuk mendapatkan kekontinuan parametrik sepanjang kurva persekutuan lingkaran Γ harus dipenuhi kondisi berikut.

- a. Kontinyu order nol, apabila dipenuhi

$$S_2(u_0, v) = S_1(u_1, v) \text{ atau } C_2(u_0) = C_1(u_1). \quad (2.19)$$

- b. Kontinyu order 1, apabila memenuhi kontinyu order nol dan memenuhi

$$S_2^u(u_0, v) = \lambda_1 S_1^u(u_1, v) \text{ atau } C_2(u_0) = \lambda_1 C_1(u_1). \quad (2.20)$$

dengan λ_1 suatu konstanta.

- c. Kontinyu order 2, apabila memenuhi kontinyu order 1 dan memenuhi

$$S_2^{uu}(u_0, v) = \lambda_2 S_1^{uu}(u_1, v) \text{ atau } C_2^{uu}(u_0) = \lambda_2 C_1^{uu}(u_1). \quad (2.21)$$

dengan λ_2 suatu konstanta.

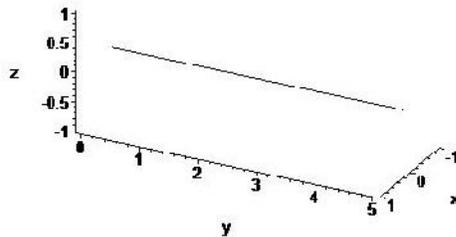
2.9 Konstruksi Objek pada Program Maple 13

Pada subbab ini disajikan beberapa contoh konstruksi obyek-obyek geometri dengan *software* Maple 13 untuk mengkonstruksi objek geometri.

a. Penyajian Segmen Garis

Untuk membuat segmen garis menggunakan maple, dapat menggunakan persamaan (2.1b) dengan memberikan nilai (x_1, y_1, z_1) dan (x_2, y_2, z_2) sebagai posisi titik ujung segmen garis di ruang. Misalkan akan dibuat suatu segmen garis a (Gambar 2.20) dengan titik-titik ujung $A(0,0,0)$ dan $B(0,5,0)$. Berikut ini merupakan *script* program Maple 13.

```
a:=spacecurve([(1-t)*0+t*0, (1-t)*0+t*5, (1-t)*0+t*0],
t=0..1):
```

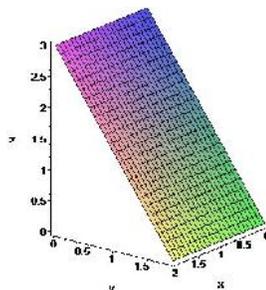


Gambar 2.20 Segmen garis

b. Penyajian Bidang Segieempat

Bidang segi empat dapat disajikan dengan persamaan (2.6a). Misalkan dibangun bidang segi empat g (Gambar 2.21) dengan titik sudut-titik sudut $A(2,2,0)$, $B(0,2,0)$, $C(2,0,3)$ dan $D(0,0,3)$ maka bentuk perintahnya sebagai berikut.

```
g:=plot3d([(1-v)*(2-2*u)+v*(2-2*u), (1-v)*2+v*0, (1-v)*0+
v*3], u=0..1, v=0..1):
```

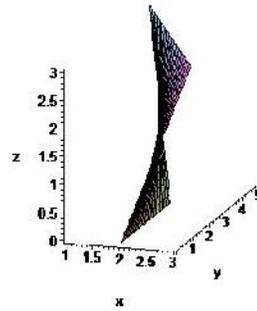


Gambar 2.21 Bidang segiempat

c. Penyajian Permukaan Tidak Datar

Sama halnya dengan penyajian bidang segitiga dan segiempat, untuk membuat permukaan tidak datar juga dapat menggunakan persamaan (2.6a), hanya kurva batasnya dipilih yang menyilang satu sama lain. Dibuat bidang atau permukaan tidak datar i dari titik-titik $A(2,0,0)$, $B(2,3,0)$, $C(3,1,3)$ dan $D(-1,5,3)$. Hasilnya dapat disajikan pada (Gambar 2.22) dengan *script* sebagai berikut.

```
i:=plot3d([(1-v)*2+v*(3-2*u), (1-v)*3*u+v*(1+4*u), (1-v)*0+v*3], u=0..1, v=0..1) :
```

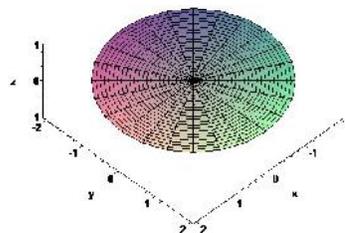


Gambar 2.22 Bidang permukaan tidak datar

d. Penyajian Bidang Lingkaran

Untuk membuat bidang lingkaran dapat menggunakan persamaan (2.3) dengan memberikan nilai jari-jari dan titik pusatnya. Misalkan akan dibentuk lingkaran l (Gambar 2.23) dengan pusat di $A(0,0,0)$ dan jari-jari sepanjang 2 satuan. Berikut ini contoh *scrip*-nya.

```
l:=plot3d([r*2*cos(t)+0, r*2*sin(t)+0, 0], r=0..1, t=0..2*Pi) :
```



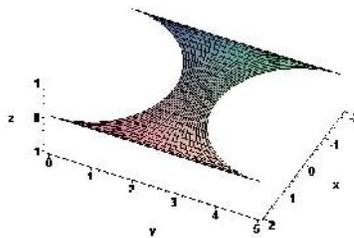
Gambar 2.23 Bidang lingkaran

e. Penyajian interpolasi antara dua kurva

Misalkan akan menginterpolasi antara dua kurva yang diberi nama ll dengan kurva pertama berupa setengah lingkaran berpusat di $(0,0,0)$ sedangkan kurva kedua berupa lingkaran berpusat di $(0,5,0)$ dengan jari-jari masing-masing 2 satuan. Berikut ini merupakan contoh *script*-nya:

```
ll:=plot3d([(1-v)*2*cos(t)+v*(2*cos(-t)),(1-v)*2*sin(t)+v*(2*sin(-t)+5),0],v=0..1,t=0..Pi):
```

Permukaan hasil interpolasi ditunjukkan pada Gambar 2.24.

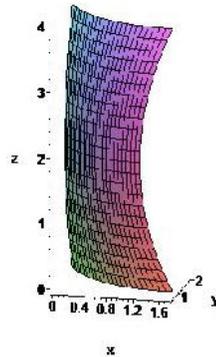


Gambar 2.24 Interpolasi antara dua kurva

f. Penyajian permukaan Bezier

Pada program Maple 13 untuk membangun permukaan Bezier misalnya permukaan Bezier bb , seperti ditunjukkan pada Gambar 2.25 dapat dituliskan contoh *script* program sebagai berikut.

```
bb:=plot3d([(1-v)^2*((1-t)^2*sqrt(3)+(2*(1-t))*t/sqrt(3)+t^2*0)+(2*(1-v))*v*((1/2)*(1-t)^2*sqrt(3)+(1/6)*(2*(1-t))*t*sqrt(3)+t^2*0)+v^2*((1-t)^2*sqrt(3)+(2*(1-t))*t/sqrt(3)+t^2*0),(1-v)^2*((1-t)^2+(2*(1-t))*t+2*t^2)+(2*(1-v))*v*((1/2)*(1-t)^2+(1/2)*(2*(1-t))*t+t^2)+v^2*((1-t)^2+(2*(1-t))*t+2*t^2),(1-v)*((1-t)^2*0+(2*(1-t))*t*0+t^2*0)+(2*(1-v))*v*(2*(1-t)^2+2*(2*(1-t))*t+2*t^2)+v^2*(4*(1-t)^2+4*(2*(1-t))*t+4*t^2)],t=0..1,v=0..1):
```

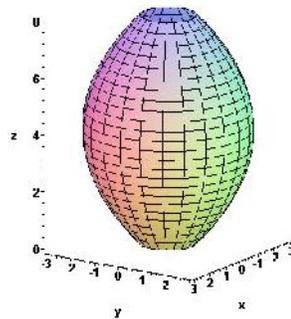


Gambar 2.25 Permukaan Bezier

g. Penyajian permukaan putar

Pada program Maple 13 untuk membangun permukaan putar misalnya permukaan putar kurva Bezier kuadratik pp yang bersumbu putar OZ , seperti ditunjukkan pada Gambar 2.26 dapat dituliskan contoh *script* program sebagai berikut.

```
pp:=plot3d([((1-u)^2)*1+2*(1-u)*u*5+(u^2)*1)
*cos(v), ((1-u)^2)*1+2*(1-u)*u*5+(u^2)*1)*sin(v), (1-
u)^2)*0+2*(1-u)*u*4+(u^2)*8], u=0..1, v=0..2*Pi):
```

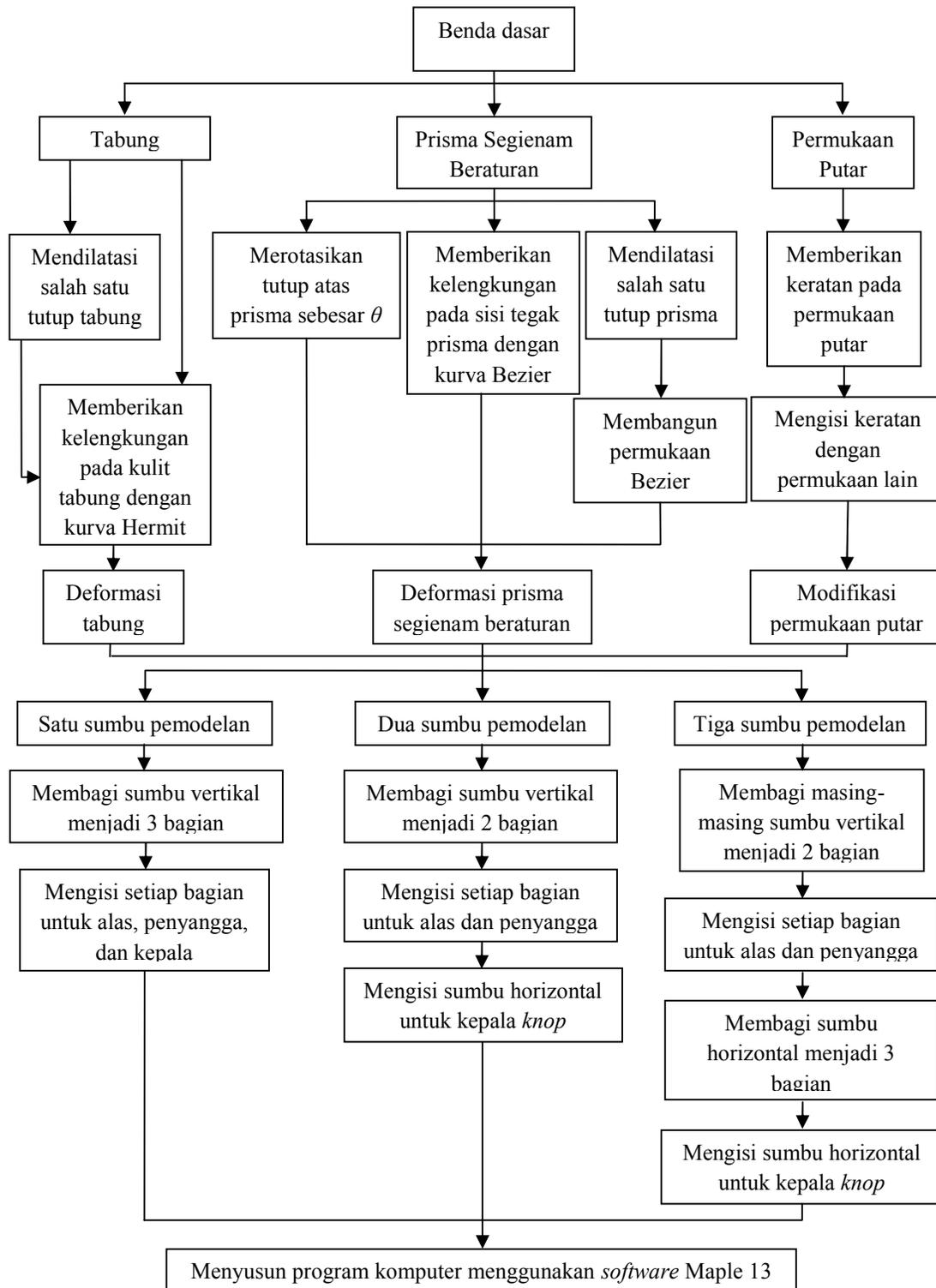


Gambar 2.26 Permukaan putar kurva Bezier kuadratik

BAB 3. METODE PENELITIAN

Berdasarkan rumusan masalah pada subbab 1.2 dan hasil kajian tinjauan pustaka pada bab 2, untuk penyelesaian permasalahan tersebut diuraikan langkah-langkah penelitian sebagai berikut (Gambar 3.1).

1. Memodelisasi benda dasar komponen *knop* dari deformasi tabung, deformasi prisma segienam beraturan dan modifikasi permukaan putar. Dalam hal ini memberikan kelengkungan pada selimut tabung dengan bantuan kurva Hermit dan kelengkungan pada sisi tegak prisma segienam beraturan dengan bantuan kurva Bezier. Pada permukaan putar dilakukan dengan memberikan keratan kemudian mengisi keratan dengan permukaan lain.
2. Memodelisasi *knop* utuh yang tergabung secara kontinu. Dalam hal ini merangkai benda dasar komponen *knop* pada tiga model sumbu pemodelan dengan cara meletakkan komponen *knop* pada masing-masing bagian sumbu pemodelan.
3. Menyusun program komputer hasil analisis (1) dan (2) menggunakan *software* Maple 13.



Gambar 3.1 Skema Metode Penelitian

BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan langkah-langkah penelitian pada bab 3, pada bagian ini dibahas tentang solusi dari masalah modelisasi *knop*. Pembahasan solusi tersebut dibagi ke dalam dua bagian. Pertama adalah pembahasan masalah modelisasi komponen penyusun *knop* dari deformasi tabung, prisma segienam beraturan, dan modifikasi permukaan putar. Kedua adalah pembahasan masalah perangkaian beberapa benda-benda dasar komponen penyusun *knop* pada tiga jenis sumbu pemodelan. Kemudian dilanjutkan dengan pembahasan hasil pada bagian pertama dan kedua. Uraian detail dari permasalahan tersebut dijelaskan sebagai berikut.

4.1 Modelisasi Komponen Penyusun *Knop*

Sehubungan dengan permasalahan pada subbab 1.2a pada bagian ini akan dibahas penyelesaiannya dengan ketentuan sebagai berikut.

4.1.1 Deformasi Tabung

Misalkan diberikan tabung berjari-jari r dengan $\frac{1}{2} \text{ cm} \leq r \leq 2 \text{ cm}$; tinggi t dengan $0,3 \text{ cm} \leq t \leq 3 \text{ cm}$; dan alas berpusat di titik $P(x_0, y_0, z_0)$ (Gambar 4.1a). Pemilihan nilai r dan t dalam selang tersebut dimaksudkan agar ukuran bentuk *knop* proporsional dan sesuai dengan laci, pintu, dan benda lain sebagai tempat melekatkan *knop*. Berdasarkan data tersebut didesain beragam bentuk komponen penyusun *knop* dengan teknik deformasi sebagai berikut.

a. Modifikasi kurva selimut

Langkah-langkah deformasi tabung dengan modifikasi pada kurva selimut adalah sebagai berikut (Gambar 4.1).

1. Tentukan $\mathbf{p}(0)$ pada lingkaran alas tabung dengan menetapkan nilai $\theta = 0$ pada persamaan lingkaran alas tabung sehingga didapat

$$\mathbf{p}(0) = \langle x_1 + r \cos \theta, y_1 + r \sin \theta, z_1 \rangle, \quad (4.1)$$

2. Tentukan $\mathbf{p}(1)$ pada lingkaran atas tabung dengan menetapkan nilai $\theta = 0$ pada persamaan lingkaran alas tabung sehingga didapat

$$\mathbf{p}(1) = \langle x_1 + r \cos \theta, y_1 + r \sin \theta, z_1 + t \rangle, \quad (4.2)$$

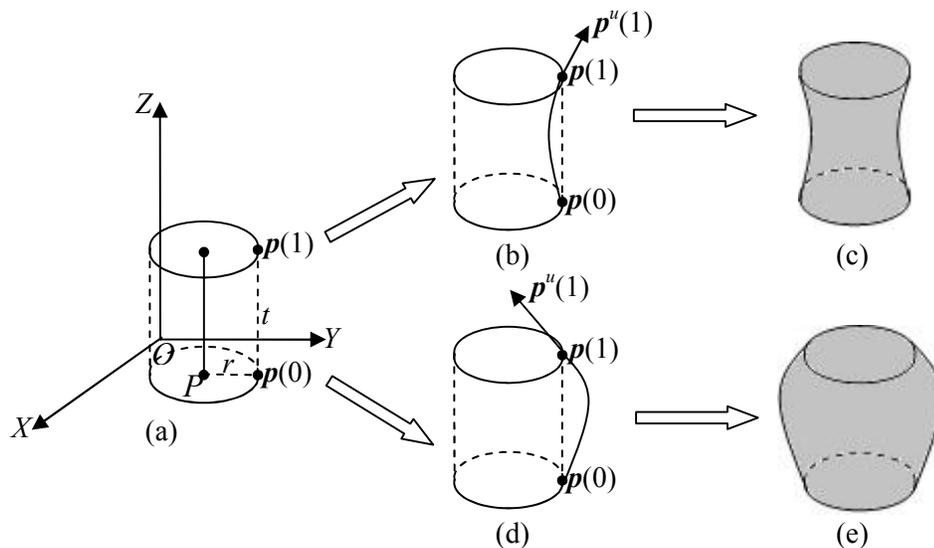
3. Tentukan vektor singgung $\mathbf{p}''(1)$ pada titik $\mathbf{p}(1)$ sehingga

$$\mathbf{p}''(1) = \langle 0, y, z \rangle, \quad (4.3)$$

dengan $-5 \leq y, z \leq 5$ dan $y, z \in R$.

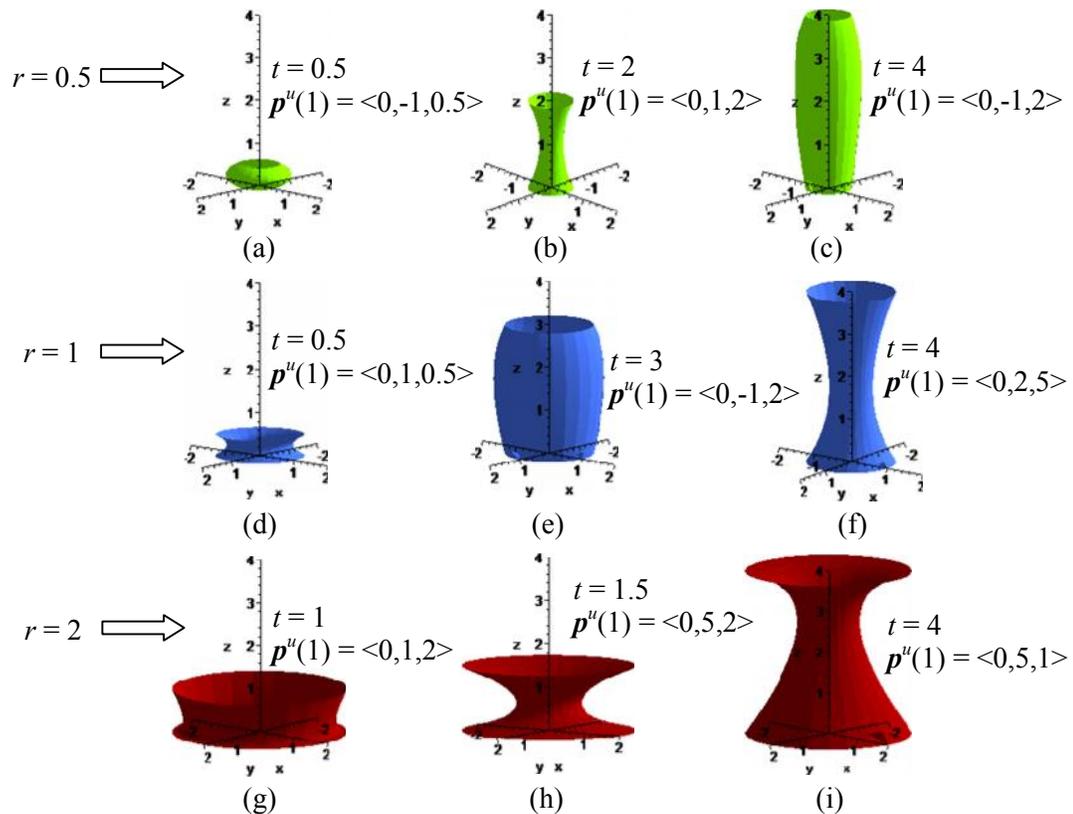
4. Bangun kurva Hermit kuadratik menggunakan persamaan (2.12).

5. Putar kurva Hermit terhadap sumbu Z menggunakan persamaan (2.16).



Gambar 4.1 Deformasi tabung dengan modifikasi kurva selimut

Dari prosedur modifikasi kurva selimut di atas, selanjutnya dapat dikembangkan beberapa bentuk deformasi tabung dengan modifikasi kurva selimut yang bermacam-macam dengan pengambilan nilai r , t , dan $\mathbf{p}''(1)$ yang berbeda. Hasilnya ditunjukkan pada Gambar 4.2 dibawah ini (Lampiran A.1).

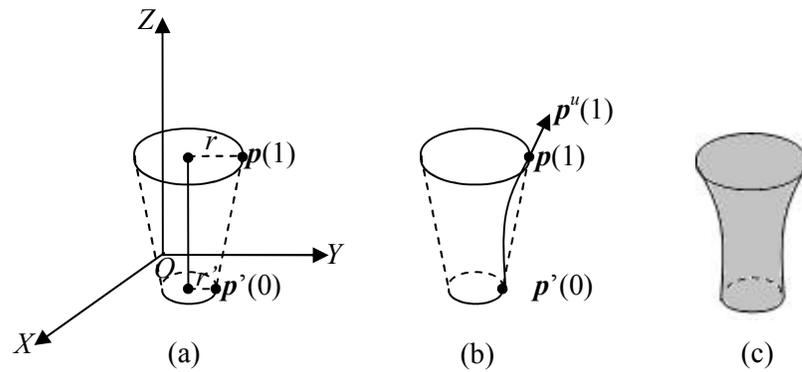


Gambar 4.2 Variasi bentuk deformasi tabung dengan modifikasi kurva selimut untuk pemilihan nilai r , t , dan $\mathbf{p}''(1)$

b. Dilatasi lengkung selimut

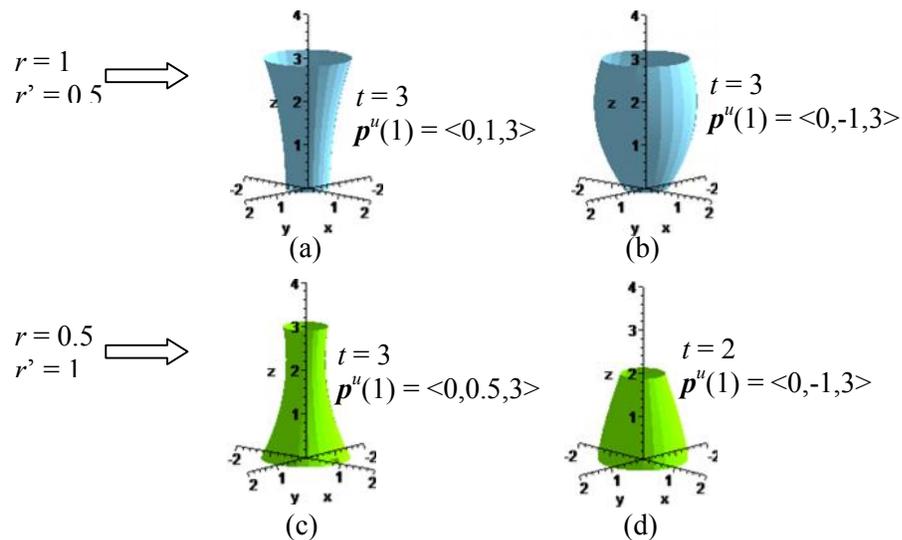
Langkah-langkah deformasi tabung dengan dilatasi hasil modifikasi kurva selimut sebagai berikut (Gambar 4.3).

1. Lakukan langkah (a.1) dan (a.2).
2. Dilatasi $\mathbf{p}(0)$ dengan faktor pengali k dengan $\frac{1}{2} \leq k \leq 2$, $k \in R$ menggunakan persamaan (2.11) sehingga didapat $\mathbf{p}'(0) = \langle x_1 + r' \cos \theta, y_1 + r' \sin \theta, z_1 \rangle$ (Gambar 4.3a).
3. Lakukan langkah (a.3) (Gambar 4.3b).
4. Bangun kurva Hermit kuadratik menggunakan persamaan (2.12).
5. Putar kurva Hermit terhadap sumbu Z menggunakan persamaan (2.16).



Gambar 4.3 Deformasi tabung dengan teknik dilatasi hasil modifikasi kurva selimut

Berikut disajikan hasil visualisasi deformasi tabung dengan dilatasi hasil modifikasi kurva selimut menggunakan *software* Maple 13 seperti pada Gambar 4.4 di bawah ini (Lampiran A.1).



Gambar 4.4 Variasi bentuk deformasi tabung dengan teknik dilatasi hasil modifikasi kurva selimut untuk pemilihan nilai r , r' , t , dan $p''(1)$

4.1.2 Deformasi Prisma Segienam Beraturan

Misal diberikan prisma segienam beraturan dengan koordinat pasangan titik ujung-titik ujung rusuk $[K_i(x_i, y_i, z_i), K_i'(x_i, y_i, z_i+t)]$ dengan $i = 1, 2, \dots, 6$ dan tinggi t

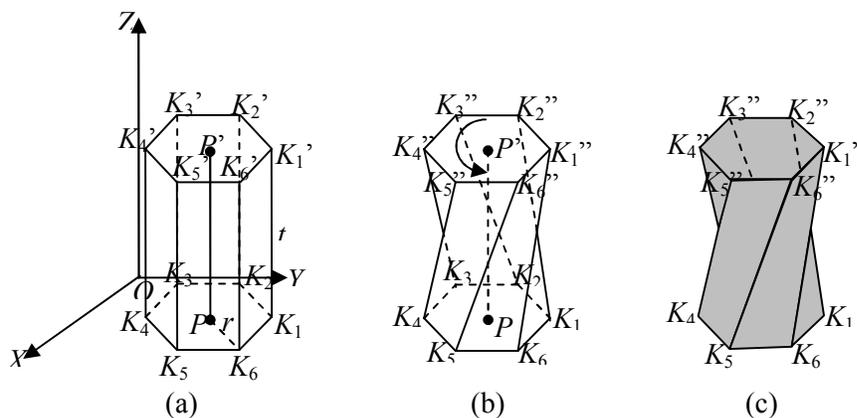
dengan $0,3 \text{ cm} \leq t \leq 5 \text{ cm}$. Masing-masing tutupnya bertitik berat di titik $P(x_0, y_0, z_0)$ dan $P'(x_0, y_0, z_0+t)$ (Gambar 4.5a). Jarak titik P ke K_i dan P' ke K_i' $\frac{1}{2} \text{ cm} \leq r \leq 2 \text{ cm}$.

Dalam hal ini, $\overline{PP'}$ diambil sebagai sumbu simetri deformasi prisma segienam beraturan. Selanjutnya dilakukan deformasi prisma dengan alternatif bentuk sebagai berikut.

a. Efek puntiran

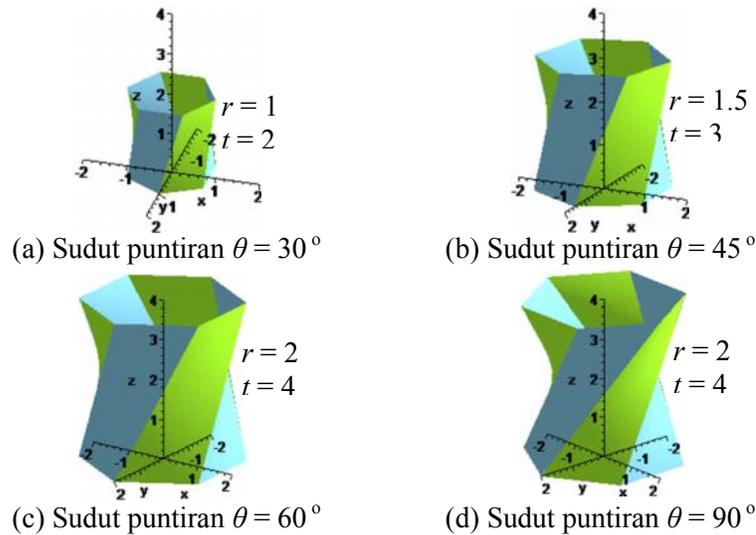
Berdasarkan data yang telah diuraikan di atas, pada bagian ini prisma dideformasi dengan memberikan efek puntiran berlawanan arah jarum jam. Langkah-langkah detailnya dijelaskan sebagai berikut (Gambar 4.5).

1. Rotasikan tutup atas prisma segienam beraturan berlawanan arah jarum jam sebesar θ dengan $30^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ yang berpusat di titik P' sehingga didapatkan $K_i''(x_i', y_i', z_i'+t)$ dengan $i = 1, 2, \dots, 6$ (Gambar 4.5b).



Gambar 4.5 Deformasi prisma dengan sudut puntiran $\theta = 60^\circ$

Selanjutnya dapat dikembangkan beberapa bentuk deformasi prisma segienam beraturan dengan efek puntiran yang bermacam-macam dengan pengambilan nilai r , t dan sudut puntiran θ yang berbeda. Hasilnya ditunjukkan pada Gambar 4.6 dibawah ini (Lampiran A.2).



Gambar 4.6 Variasi bentuk deformasi prisma segienam beraturan dengan efek puntiran untuk pemilihan nilai r , t , dan θ

b. Deformasi lengkung sisi tegak

Deformasi prisma pada sisi tegak memiliki dua alternatif bentuk desain yaitu sisi tegak cekung dan sisi tegak cembung. Uraian detailnya sebagai berikut.

i. Sisi tegak cekung

Langkah-langkah deformasi sisi tegak prisma menjadi lengkung cekung dijelaskan sebagai berikut (Gambar 4.7).

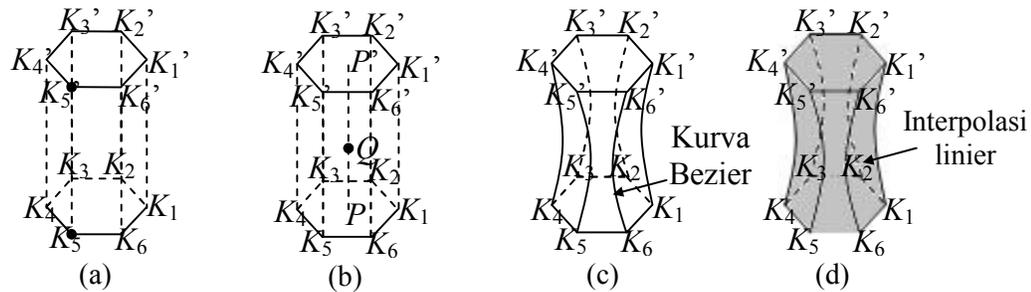
1. Pandang titik K_i dan K_i' dengan $i = 1, 2, \dots, 6$ sebagai titik kontrol untuk beberapa kurva Bezier linier (Gambar 4.7a).
2. Tetapkan titik kontrol Q pada $\vec{K_i K_i'}$ untuk mengontrol kelengkungan kurva Bezier kuadrat (Gambar 4.7b), yaitu

$$Q = \langle x_0, y_0, z \rangle, \quad (4.4)$$

dengan $z \in [z_0, t]$.

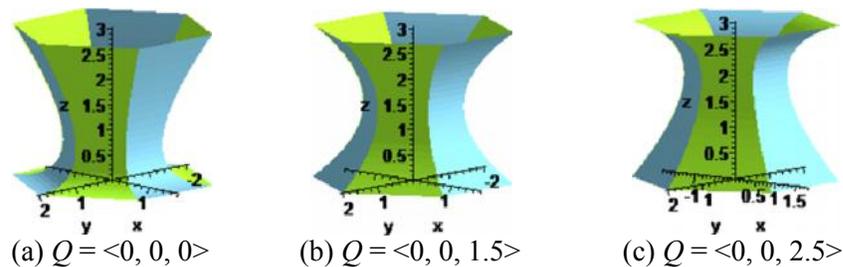
3. Bangun kurva Bezier kuadrat untuk setiap pasangan titik kontrol (K_i, Q, K_i') (Gambar 4.7c).

4. Interpolasikan secara linier masing-masing kurva Bezier melalui persamaan (2.6b) secara berpasangan dan berurutan berlawanan arah jarum jam (Gambar 4.7d).



Gambar 4.7 Deformasi sisi tegak prisma menjadi lengkung cekung

Berikut disajikan hasil visualisasi deformasi sisi tegak prisma segienam beraturan menjadi lengkung cekung menggunakan *software* Maple 13 seperti pada Gambar 4.8 di bawah ini (Lampiran A.2).



Gambar 4.8 Variasi bentuk deformasi sisi tegak prisma segienam beraturan menjadi lengkung cekung untuk nilai $r = 2$ dan $t = 3$

ii. Sisi tegak cembung

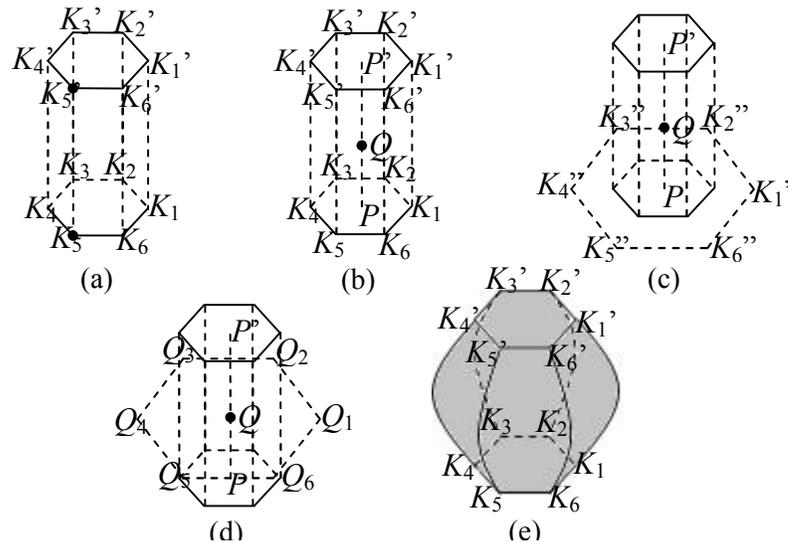
Langkah-langkah deformasi sisi tegak prisma menjadi lengkung cembung dijelaskan sebagai berikut (Gambar 4.9).

1. Pandang titik K_i dan K_i' dengan $i = 1, 2, \dots, 6$ sebagai titik kontrol untuk beberapa kurva Bezier (Gambar 4.9a).
2. Tetapkan titik Q pada $\overline{P_1P_2}$ (Gambar 4.9b), yaitu

$$Q = \langle x_0, y_0, z \rangle, \quad (4.5)$$

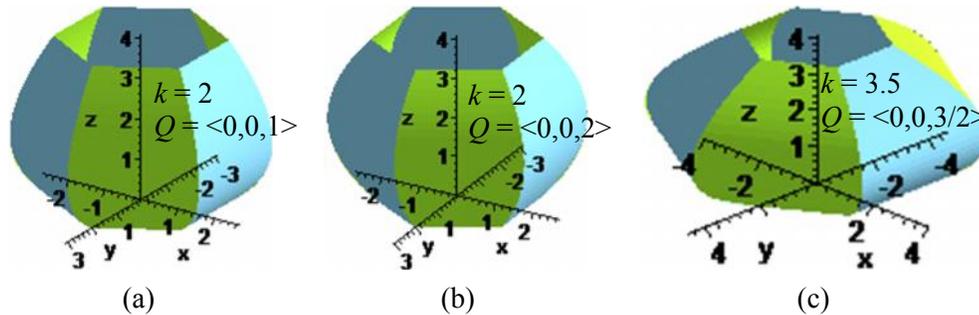
dengan $z \in [z_0, t]$.

3. Dilatasi alas prisma dengan faktor pengali $k > 1$, $k \in R$ menggunakan persamaan (2.11) sehingga menghasilkan segienam beraturan $K_1''K_2''K_3''K_4''K_5''K_6''$ (Gambar 4.9c).
4. Translasikan segienam $K_1''K_2''K_3''K_4''K_5''K_6''$ sehingga titik pusatnya berimpit dengan titik Q dan dihasilkan segienam $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$ (Gambar 4.9d).
5. Bangun kurva Bezier kuadratik untuk setiap pasangan titik kontrol (K_i, Q_i, K_i') (Gambar 4.9e).
6. Interpolasikan secara linier masing-masing kurva Bezier melalui persamaan (2.6b) secara berpasangan dan berurutan berlawanan arah jarum jam.



Gambar 4.9 Deformasi sisi tegak prisma menjadi lengkung cembung

Berikut disajikan hasil visualisasi deformasi sisi tegak prisma segienam beraturan menjadi lengkung cembung menggunakan *software* Maple 13 seperti pada Gambar 4.10 di bawah ini (Lampiran A.2).



Gambar 4.10 Variasi bentuk deformasi sisi tegak prisma segienam beraturan menjadi lengkung cembung untuk nilai $r = 2$ dan $t = 4$

c. Model bintang

Langkah-langkah deformasi prisma menjadi model bintang dijelaskan sebagai berikut (Gambar 4.11).

1. Dilatasi salah satu poligon alas atau atas prisma dengan faktor pengali k dengan

$$\frac{1}{2} \leq k \leq 2, k \in R \text{ menggunakan persamaan (2.11) terhadap titik pusat } P$$

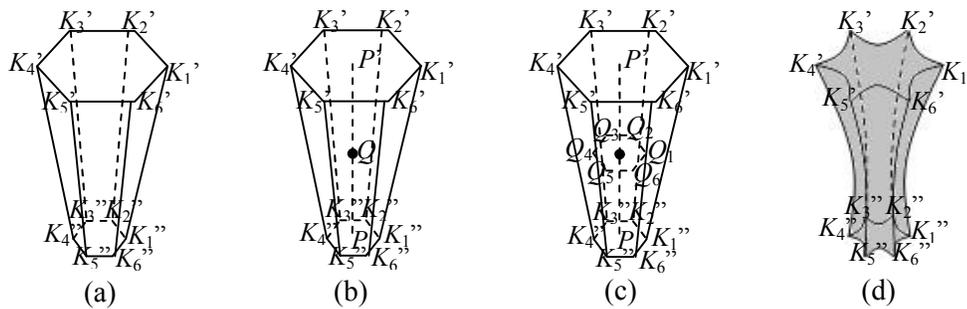
sehingga menghasilkan segienam beraturan $K_1''K_2''K_3''K_4''K_5''K_6''$ (Gambar 4.11a).

2. Tetapkan titik Q pada $\overline{PP_1P_2P_3P_4P_5P_6}$ (Gambar 4.11b), yaitu

$$Q = \langle x_0, y_0, z \rangle, \quad (4.6)$$

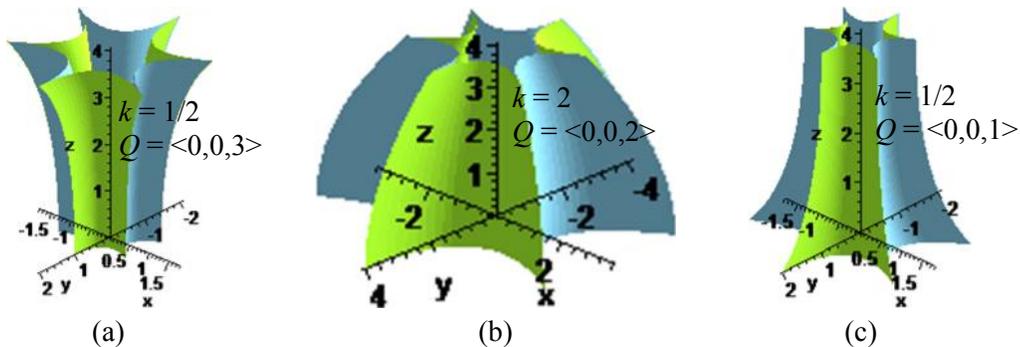
dengan $z \in [z_0, t]$.

3. Translasikan segienam $K_1''K_2''K_3''K_4''K_5''K_6''$ sehingga titik pusatnya berimpit dengan titik Q dan dihasilkan segienam $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$ (Gambar 4.11c).
4. Bangun permukaan Bezier kuadratik untuk setiap pasangan titik kontrol $(K_i', P, K_{i+1}', Q_i, Q, Q_{i+1}, K_i'', P', K_{i+1}'')$ untuk $i = 1, 2, \dots, 5$ dan pasangan titik kontrol $(K_6', P, K_1', Q_6, Q, Q_1, K_6'', P', K_1'')$ (Gambar 4.11d).



Gambar 4.11 Deformasi prisma menjadi model bintang

Berikut disajikan hasil visualisasi deformasi prisma segienam beraturan menjadi model bintang menggunakan *software* Maple 13 seperti pada Gambar 4.12 di bawah ini (Lampiran A.2).



Gambar 4.12 Variasi bentuk deformasi prisma segienam beraturan menjadi model bintang untuk nilai $r = 2$ dan $t = 4$

4.1.3 Modifikasi Permukaan Putar

Misal diberikan sebuah permukaan putar yang terbentuk dari kurva Bezier kubik dengan titik-titik kontrol $\mathbf{P}_0(x_0, r_1, z_0)$, $\mathbf{P}_1(x_0, r_2, z_0 + \frac{1}{3}t)$, $\mathbf{P}_2(x_0, r_3, z_0 + \frac{2}{3}t)$, dan $\mathbf{P}_3(x_0, r_4, z_0 + t)$ yang diputar menggunakan persamaan (2.16) dengan $1 \text{ cm} \leq r_1, r_2, r_3, r_4 \leq 2,5 \text{ cm}$ dan $0,3 \text{ cm} \leq t \leq 5 \text{ cm}$ (Gambar 4.13a). Pemilihan rentang r_1, r_2, r_3, r_4 , dan t dimaksudkan agar didapatkan *knop* yang memiliki bentuk proporsional dan memberikan kenyamanan saat ditarik, didorong, digeser, ataupun diputar. Selanjutnya

berdasarkan data tersebut didesain beragam bentuk relief pada permukaan putar dengan mengganti sebagian permukaan di antara dua lingkaran paralel dengan langkah sebagai berikut.

a. Relief melintang

Sehubungan dengan data tersebut, pada bagian ini didesain bentuk relief dengan mengganti sebagian permukaan di antara dua lingkaran paralel yang terletak pada bagian tengah permukaan putar. Langkah-langkah membangun relief melintang di antara dua lingkaran paralel dijelaskan sebagai berikut (Gambar 4.13).

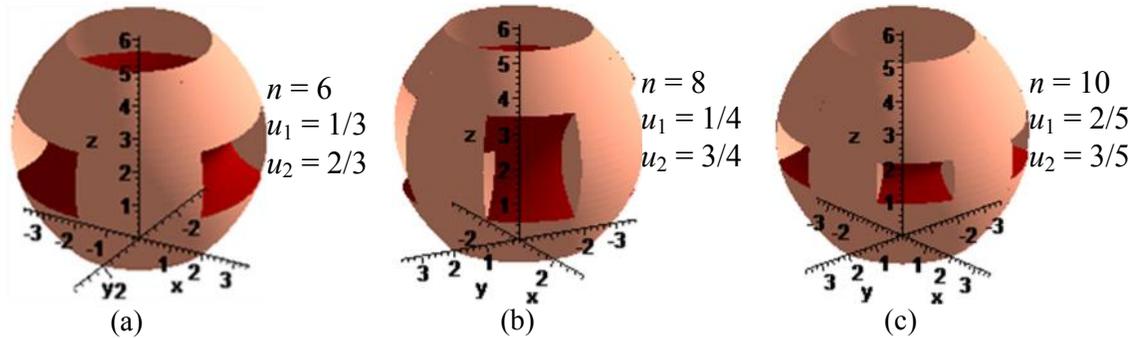
1. Tetapkan 2 titik pada permukaan putar kurva Bezier (Gambar 4.13b) dengan menetapkan nilai parameter u sebagai u_1 dan u_2 pada persamaan (2.16) sebagai berikut :

$$\mathbf{S}_0(u_1, v_0) = \langle C_x(u_1) \cos v_0, C_y(u_1) \sin v_0, C_z(u_1) \rangle \text{ dan} \quad (4.7)$$

$$\mathbf{S}_0(u_2, v_0) = \langle C_x(u_2) \cos v_0, C_y(u_2) \sin v_0, C_z(u_2) \rangle$$

dengan $0,25 \leq u_1 < u_2 \leq 0,75$ dan $v_0 = 0$.

2. Bagi keliling lingkaran paralel yang dilalui titik $\mathbf{S}_0(u_1, v_0)$ dan $\mathbf{S}_0(u_2, v_0)$ menjadi n bagian busur yang sama dengan $4 \leq n \leq 12$ dan n genap, masing-masing dari posisi awal $\mathbf{S}_0(u_1, v_0)$ dan $\mathbf{S}_0(u_2, v_0)$ dengan menetapkan titik-titik $\mathbf{S}_i(u_1, v_i)$ dan $\mathbf{S}_i(u_2, v_i)$ dengan $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ dan $v_i = \frac{2i\pi}{n}$ secara berurutan berlawanan arah jarum jam sehingga menghasilkan busur-busur $[\mathbf{S}_i(u_1, v_i)\mathbf{S}_{i+1}(u_1, v_{i+1}), \mathbf{S}_{n-1}(u_1, v_{n-1})\mathbf{S}_0(u_1, v_0)]$ dan $[\mathbf{S}_i(u_2, v_i)\mathbf{S}_{i+1}(u_2, v_{i+1}), \mathbf{S}_{n-1}(u_2, v_{n-1})\mathbf{S}_0(u_2, v_0)]$ dengan $i = 0, 1, \dots, n-2$ (Gambar 4.13c dan 4.13d).
3. Kurangi bagian permukaan putar yang dibatasi oleh pasangan busur $[\mathbf{S}_i(u_1, v_i)\mathbf{S}_{i+1}(u_1, v_{i+1}), \mathbf{S}_i(u_2, v_i)\mathbf{S}_{i+1}(u_2, v_{i+1})]$ dan $[\mathbf{S}_{n-1}(u_1, v_{n-1})\mathbf{S}_0(u_1, v_0), \mathbf{S}_{n-1}(u_2, v_{n-1})\mathbf{S}_0(u_2, v_0)]$ dengan $i = 1, 3, 5, \dots, n-3$ (Gambar 4.13e).
4. Isi bagian $[\mathbf{S}_1(u_1, v_1)\mathbf{S}_2(u_1, v_2), \mathbf{S}_1(u_2, v_1)\mathbf{S}_2(u_2, v_2)]$ dengan prosedur antara lain sebagai berikut.



Gambar 4.14 Variasi bentuk modifikasi permukaan putar relief melintang untuk nilai

$$r_1 = 2, r_2 = r_3 = 4, r_4 = 2, \text{ dan } t = 6$$

b. Relief memanjang

Pada bagian ini didesain bentuk relief dengan mengganti sebagian permukaan di antara dua lingkaran paralel yang masing-masing terletak pada ujung permukaan putar. Langkah-langkah membangun relief memanjang di antara dua lingkaran paralel dijelaskan sebagai berikut (Gambar 4.15).

1. Tetapkan 2 titik pada permukaan putar kurva Bezier dengan menetapkan nilai parameter u sebagai u_1 dan u_2 pada persamaan (2.16) sebagai berikut :

$$\mathbf{S}_0(u_1, v_0) = \langle C_x(u_1) \cos v_0, C_y(u_1) \sin v_0, C_z(u_1) \rangle \text{ dan} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{S}_0(u_2, v_0) = \langle C_x(u_2) \cos v_0, C_y(u_2) \sin v_0, C_z(u_2) \rangle$$

dengan $u_1 = 0, u_2 = 1, v_0 = 0$.

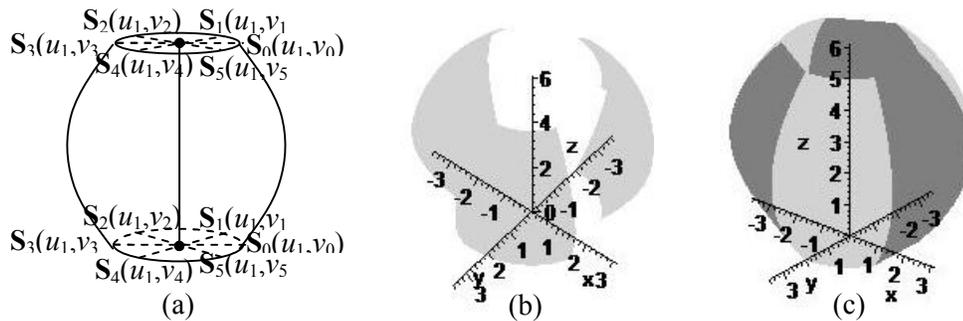
2. Bagi keliling lingkaran paralel yang dilalui titik $\mathbf{S}_0(u_1, v_0)$ dan $\mathbf{S}_0(u_2, v_0)$ menjadi n bagian busur yang sama dengan $4 \leq n \leq 12$ dan n genap, masing-masing dari posisi awal $\mathbf{S}_0(u_1, v_0)$ dan $\mathbf{S}_0(u_2, v_0)$ dengan menetapkan titik-titik $\mathbf{S}_i(u_1, v_i)$ dan $\mathbf{S}_i(u_2, v_i)$ dengan $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ dan $v_i = \frac{2i\pi}{n}$ secara berurutan searah jarum

jam sehingga menghasilkan busur-busur $[\mathbf{S}_i(u_1, v_i)\mathbf{S}_{i+1}(u_1, v_{i+1}),$

$\mathbf{S}_{n-1}(u_1, v_{n-1})\mathbf{S}_0(u_1, v_0)]$ dan $[\mathbf{S}_i(u_2, v_i)\mathbf{S}_{i+1}(u_2, v_{i+1}),$

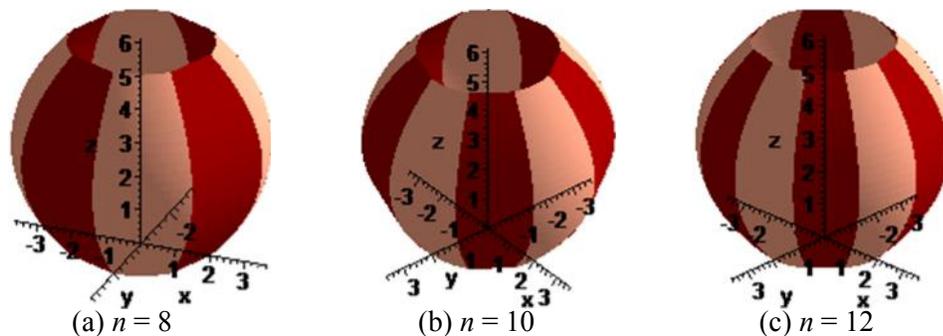
$\mathbf{S}_{n-1}(u_2, v_{n-1})\mathbf{S}_0(u_2, v_0)]$ dengan $i = 0, 1, \dots, n-2$.

3. Kurangi bagian permukaan putar yang dibatasi oleh pasangan busur $[S_i(u_1, v_i)S_i(u_2, v_i), S_{i+1}(u_1, v_{i+1})S_{i+1}(u_2, v_{i+1})]$ dan $[S_{n-1}(u_1, v_{n-1})S_0(u_1, v_0), S_{n-1}(u_2, v_{n-1})S_0(u_2, v_0)]$ dengan $i = 1, 3, 5, \dots, n-3$ (Gambar 4.15b).
4. Isi bagian $[S_1(u_1, v_1)S_1(u_2, v_1), S_2(u_1, v_2)S_2(u_2, v_2)]$ dengan menginterpolasikan secara linier pasangan busur $S_0(u_1, v_0)S_0(u_2, v_0)$ dan $S_1(u_1, v_1)S_1(u_2, v_1)$ (Gambar 4.15c).
5. Lakukan langkah (b.4) untuk bagian $[S_i(u_1, v_i)S_i(u_2, v_i), S_{i+1}(u_1, v_{i+1})S_{i+1}(u_2, v_{i+1})]$ dan $[S_{n-1}(u_1, v_{n-1})S_0(u_1, v_0), S_{n-1}(u_2, v_{n-1})S_0(u_2, v_0)]$ $i = 3, 4, \dots, n-3$ dengan arah interpolasi kurva pada busur yang bersesuaian.



Gambar 4.15 Relief memanjang dengan $n = 6$

Berikut disajikan hasil visualisasi modifikasi permukaan putar dengan relief memanjang menggunakan *software* Maple 13 seperti pada Gambar 4.16 di bawah ini (Lampiran A.3).



Gambar 4.16 Variasi bentuk modifikasi permukaan putar relief memanjang untuk beberapa variasi nilai $n = 8, n = 10$, dan $n = 12$

4.2 Perangkaian Komponen Penyusun *Knop* pada Sumbu Pemodelan

Dari hasil perlakuan 4.1 selanjutnya untuk mendapatkan bentuk utuh *knop* yang tergabung secara kontinu maka pada bagian ini dilakukan perangkaian beberapa benda-benda dasar komponen *knop* pada sumbu pemodelan *knop*. Dalam hal ini terdapat tiga pilihan model sumbu pemodelan *knop* yaitu model satu sumbu, model dua sumbu, dan model tiga sumbu. Pada model satu sumbu terdapat satu sumbu tegak vertikal, model dua sumbu terdapat sumbu vertikal dan horizontal yang saling tegak lurus, dan model tiga sumbu terdapat dua sumbu vertikal sejajar dan satu sumbu horizontal yang tegak lurus terhadap dua sumbu vertikal. Uraian detail dari permasalahan tersebut dijelaskan sebagai berikut.

4.2.1 Model *Knop* dengan Satu Sumbu Pemodelan

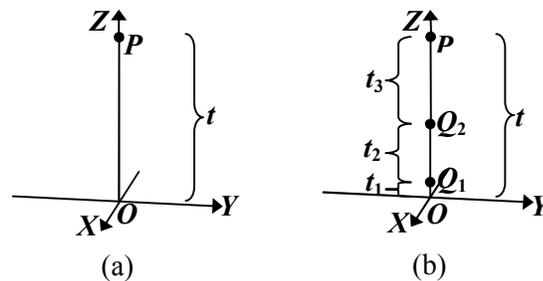
Misalkan diberikan sumbu vertikal \overline{OP} dengan koordinat titik-titik ujung $O(0,0,0)$ dan $P(0,0,t)$ sehingga t merupakan tinggi *knop*. Untuk mendapatkan ukuran yang ideal, maka nilai t diambil dalam rentang $3 \text{ cm} \leq t \leq 8 \text{ cm}$ disesuaikan dengan kegunaan *knop* tersebut (Gambar 4.17a). Untuk laci nilai t tidak terlalu besar, yaitu antara 3 cm sampai 4 cm. Untuk pintu nilai t antara 7 cm sampai 8 cm. Berdasarkan data tersebut dilakukan perangkaian model *knop* dengan satu sumbu dijelaskan secara detail sebagai berikut.

1. Bagi sumbu \overline{OP} menjadi 3 bagian segmen non homogen sebagai sumbu bagian alas, penyangga, dan kepala *knop* dengan perbandingan tinggi masing-masing bagian $t_1 : t_2 : t_3$ dengan $t_1 = \mu_1 t$; $t_2 = \mu_2 t$; dan $t_3 = t - t_1 - t_2$, sehingga terdapat titik-titik $O(0,0,0)$, $Q_1(0,0,t_1)$, $Q_2(0,0,t_1+t_2)$, dan $P(0,0,t)$ pada sumbu \overline{OP} secara terurut dengan $0,1 \leq \mu_1 \leq 0,15$ dan $0,25 \leq \mu_2 \leq 0,4$. Perbandingan tinggi tersebut bertujuan untuk mendapatkan *knop* yang secara keseluruhan proporsional (Gambar 4.17b).
2. Isi bagian $\overline{OQ_1}$, $\overline{Q_1Q_2}$, dan $\overline{Q_2P}$ dengan benda-benda dasar komponen *knop* hasil perlakuan subbab 4.1 dengan langkah pengisian sebagai berikut.

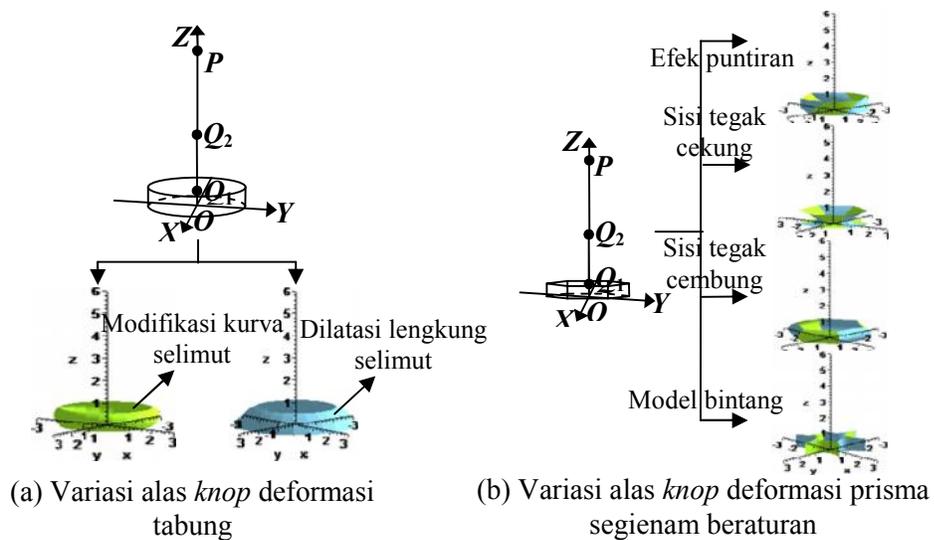
- a. Untuk bagian $\overline{P_1 Q_1 R_1 S_1 T_1 U_1 V_1 W_1 X_1 Y_1 Z_1}$, bangun tabung atau prisma segienam beraturan dengan tinggi $t_1 = \mu_1 t$ dan jari-jari $r_1 = \lambda_1 t_1$, $2 \leq \lambda_1 \leq 3$, dijelaskan sebagai berikut.
- i. tabung
 - bangun lingkaran dengan titik pusat O dan jari-jari r_1 menggunakan persamaan (2.7);
 - translasikan lingkaran tersebut searah sumbu Z sejauh t_1 menggunakan persamaan (2.8).
 - ii. prisma segienam beraturan
 - bangun poligon segienam beraturan dengan titik pusat O dan jari-jari r_1 ;
 - translasikan segienam beraturan tersebut searah sumbu Z sejauh t_1 .
- b. Lakukan deformasi pada benda dasar hasil langkah (2.a) dengan ketentuan sebagai berikut.
- i. untuk benda dasar tabung, lakukan deformasi menggunakan teknik modifikasi kurva selimut atau dilatasi lengkung selimut (Gambar 4.18a);
 - ii. untuk benda dasar prisma segienam beraturan, lakukan deformasi menggunakan alternatif efek puntiran, lengkung sisi tegak, atau model bintang (Gambar 4.18b).
- c. Untuk bagian $\overline{P_2 Q_2 R_2 S_2 T_2 U_2 V_2 W_2 X_2 Y_2 Z_2}$, bangun prisma segienam beraturan dengan tinggi $t_2 = \mu_2 t$ dan jari-jari $r_2 = \lambda_2 t_2$, $\frac{1}{2} \leq \lambda_2 \leq 1$, dijelaskan sebagai berikut.
- i. bangun poligon segienam beraturan dengan titik pusat Q_1 dan jari-jari r_2 ;
 - ii. translasikan segienam beraturan tersebut searah sumbu Z sejauh t_2 .
- d. Lakukan deformasi pada prisma segienam beraturan hasil langkah (2.c) menggunakan alternatif efek puntiran, lengkung sisi tegak, atau model bintang (Gambar 4.19).

- e. Untuk bagian \overline{P} , bangun prisma segienam beraturan atau permukaan putar dengan tinggi $t_3 = t - t_1 - t_2$ dan jari-jari $r_3 = \lambda_3 t_3$, $\frac{2}{5} \leq \lambda_3 \leq 1$, dijelaskan sebagai berikut.
- i. prisma segienam beraturan
 - bangun poligon segienam beraturan dengan titik pusat Q_2 dan jari-jari r_3 ;
 - translasikan segienam beraturan tersebut searah sumbu Z sejauh t_3 .
 - ii. permukaan putar
 - bangun kurva Bezier kubik dengan titik-titik kontrol $\mathbf{P}_0(x_0, r_3, t_1+t_2)$, $\mathbf{P}_1(x_0, r_y, t_1+t_2+\frac{1}{3}t_3)$, $\mathbf{P}_2(x_0, r_y, t_1+t_2+\frac{2}{3}t_3)$, dan $\mathbf{P}_3(x_0, r_3, t_1+t_2+t_3)$ menggunakan persamaan (2.13);
 - putar kurva Bezier tersebut dengan sumbu putar \overline{P} menggunakan persamaan (2.16).
- f. Lakukan deformasi prisma segienam beraturan atau modifikasi pada permukaan putar hasil langkah (2.e) dengan ketentuan sebagai berikut.
- i. untuk benda dasar prisma segienam beraturan, lakukan deformasi menggunakan alternatif efek puntiran, lengkung sisi tegak, atau model bintang (Gambar 4.20a);
 - ii. untuk benda dasar permukaan putar, lakukan modifikasi dengan memberikan relief melintang atau relief memanjang (Gambar 4.20b).
3. Gabungkan ketiga bagian *knop* dengan membangun bidang batas antara dua komponen berdekatan dengan prosedur sebagai berikut (Gambar 4.21a).
- a. Tetapkan lingkaran atau poligon segienam beraturan tutup atas bagian alas dengan jari-jari r_1 sebagai kurva batas $C_1(u)$.
 - b. Tetapkan lingkaran atau poligon segienam beraturan tutup bawah bagian penyangga dengan jari-jari r_2 sebagai kurva batas $C_2(u)$.

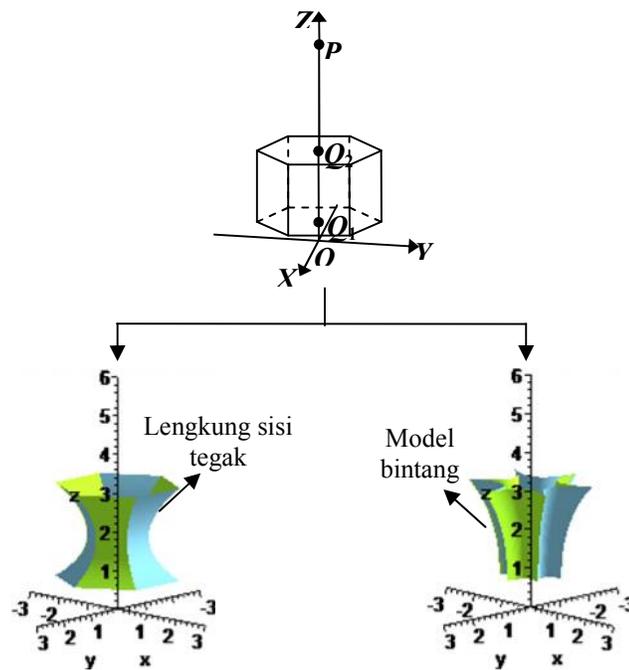
- c. Bangun bidang batas antara $C_1(u)$ dan $C_2(u)$ dengan interpolasi linier menggunakan persamaan (2.6b).
 - d. Lakukan langkah (a) sampai (c) untuk membangun bidang batas antara bagian penyangga dan kepala *knop* dengan jari-jari r_2 dan r_3 .
4. Bangun bidang tutup atas dan tutup bawah *knop* dengan prosedur sebagai berikut (Gambar 4.22b).
- a. Tetapkan lingkaran atau poligon segienam beraturan tutup bawah bagian alas dengan jari-jari r_1 sebagai kurva batas $C_1(u)$.
 - b. Bangun bidang tutup bawah menggunakan persamaan (2.6b) dengan titik Q_1 sebagai $C_2(u)$.
 - c. Lakukan langkah (a) dan (b) untuk membangun bidang tutup atas *knop*.



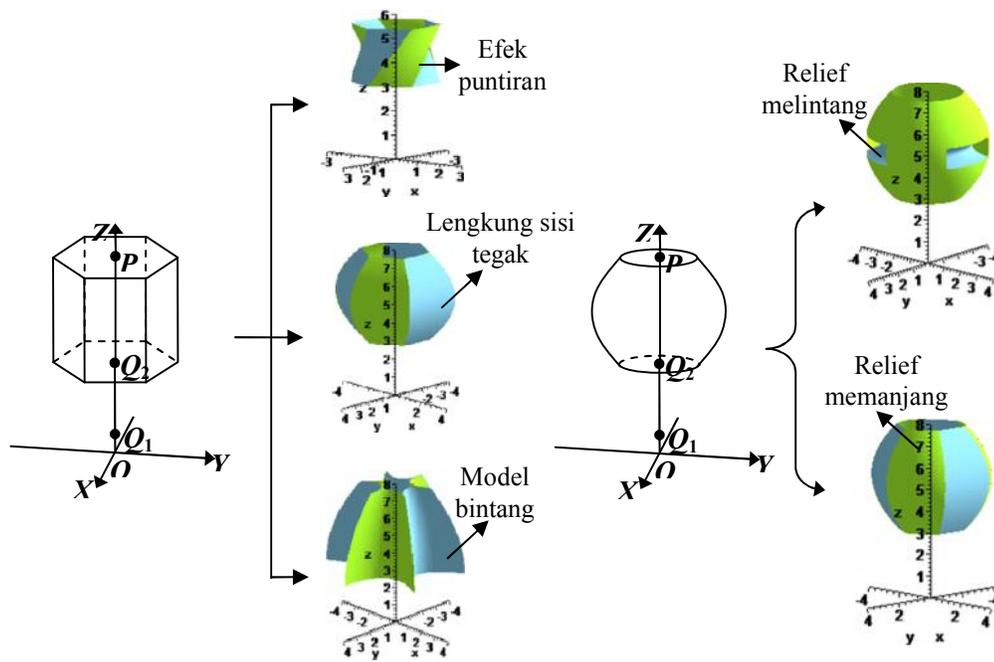
Gambar 4.17 Sumbu tegak *knop*



Gambar 4.18 Variasi alas *knop* dengan $t_1 = 0,1 t$ dan $r_1 = 2 t_1, t = 8$



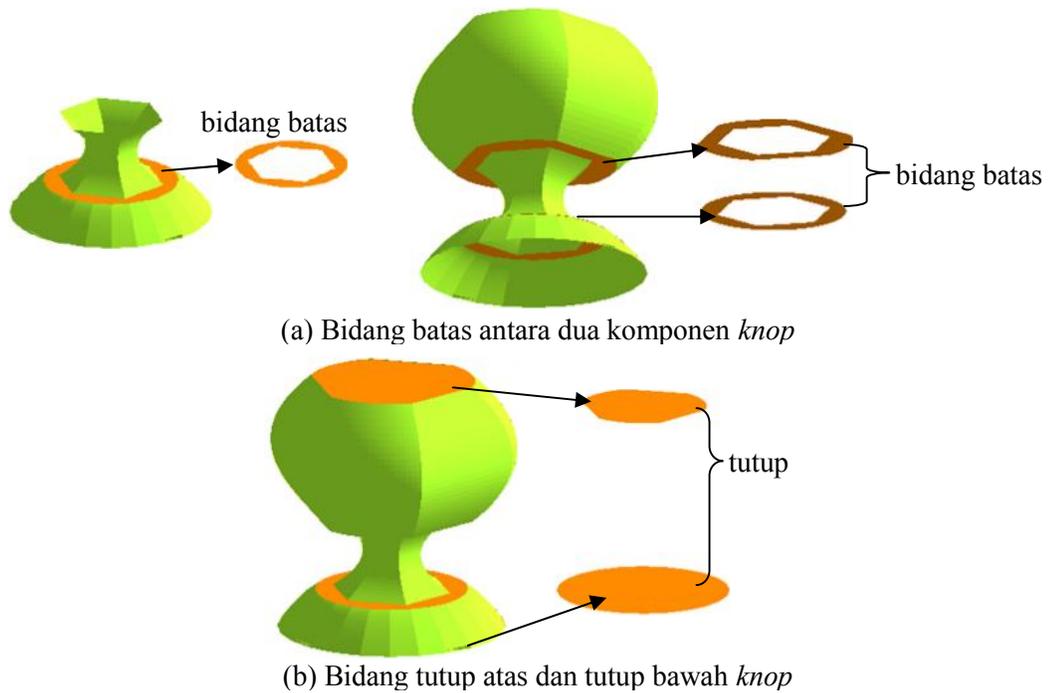
Gambar 4.19 Variasi penyangga *knop* dengan $t_2 = 0,3 t$ dan $r_2 = 2/3 t_2, t = 8$



(a) Variasi kepala *knop* deformasi prisma segienam beraturan

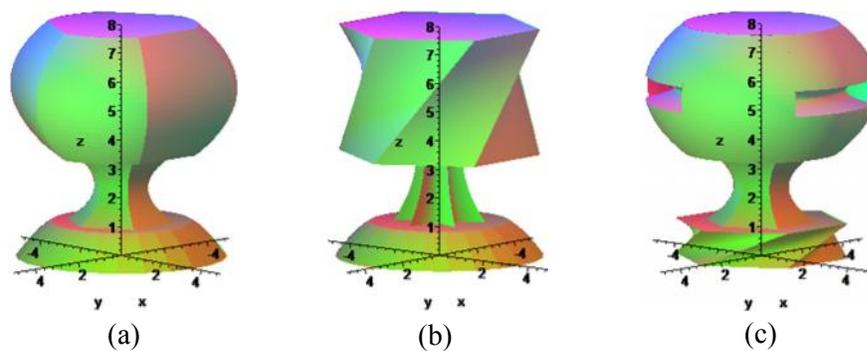
(b) Variasi kepala *knop* modifikasi permukaan putar

Gambar 4.20 Variasi kepala *knop* dengan $t_3 = 0,6 t$ dan $r_3 = 2/5 t_3, t = 8$



Gambar 4.21 Contoh rangkaian *knop* dengan satu sumbu pemodelan

Berikut disajikan beberapa contoh hasil visualisasi desain *knop* satu sumbu dengan beberapa variasi kombinasi benda-benda dasar komponen *knop* menggunakan *software* Maple 13 seperti pada Gambar 4.22 di bawah ini (Lampiran B.1).



Gambar 4.22 Beberapa visualisasi model *knop* dengan satu sumbu pemodelan

4.2.2 Model *Knop* dengan Dua Sumbu Pemodulan

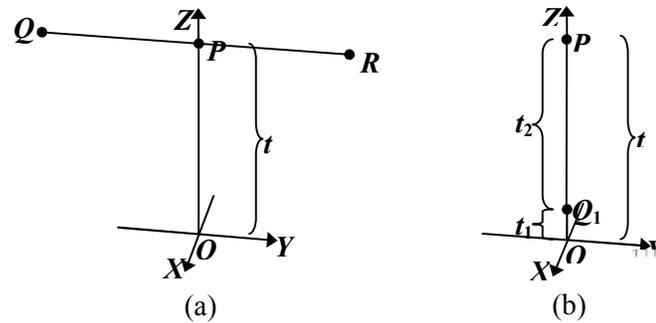
Misalkan diberikan sumbu vertikal \overline{OP} dan sumbu horizontal \overline{OR} . Pada umumnya tinggi sumbu vertikal (t) dan panjang sumbu horizontal (l) adalah $3 \text{ cm} \leq t \leq 5 \text{ cm}$ dan $l = 2t$ sehingga diperoleh koordinat titik-titik ujung $O(0,0,0)$, $P(0,0,t)$, $Q(0,-t,t)$, dan $R(0,t,t)$ (Gambar 4.23a). Berdasarkan data tersebut dilakukan perangkaian model *knop* dengan dua sumbu yang dijelaskan secara detail sebagai berikut.

1. Bagi sumbu \overline{OP} menjadi 2 bagian segmen non homogen sebagai sumbu bagian alas dan penyangga *knop* dengan perbandingan tinggi masing-masing bagian $t_1 : t_2$ dengan $t_1 = \mu_1 t$, $t_2 = t - t_1$, dan $0,15 \leq \mu_1 \leq 0,25$ sehingga terdapat titik-titik $O(0,0,0)$, $Q_1(0,-t_1,t_1)$, dan $P(0,0,t)$ pada sumbu \overline{OP} secara terurut (Gambar 4.23b).
2. Isi bagian $\overline{OQ_1P}$ dengan benda-benda dasar komponen *knop* hasil perlakuan subbab dengan langkah pengisian sebagai berikut.
 - a. Untuk bagian $\overline{OQ_1P}$, bangun tabung atau prisma segienam beraturan dengan tinggi $t_1 = \mu_1 t$ dan jari-jari $r_1 = \lambda_1 t_1$, $2,5 \leq \lambda_1 \leq 3,5$, dijelaskan sebagai berikut.
 - i. tabung
 - bangun lingkaran dengan titik pusat O dan jari-jari r_1 menggunakan persamaan (2.7);
 - translasikan lingkaran tersebut searah sumbu Z sejauh t_1 menggunakan persamaan (2.8).
 - ii. prisma segienam beraturan
 - bangun poligon segienam beraturan dengan titik pusat O dan jari-jari r_1 ;
 - translasikan segienam beraturan tersebut searah sumbu Z sejauh t_1 .
 - b. Lakukan deformasi pada benda dasar hasil langkah (2.a) dengan ketentuan sebagai berikut.

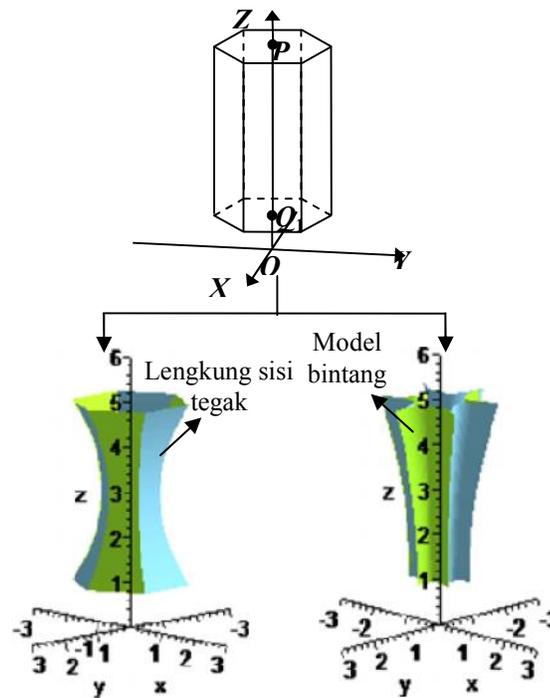
- i. untuk benda dasar tabung, lakukan deformasi menggunakan teknik modifikasi kurva selimut atau dilatasi lengkung selimut;
 - ii. untuk benda dasar prisma segienam beraturan, lakukan deformasi menggunakan alternatif efek puntiran, lengkung sisi tegak, atau model bintang.
- c. Untuk bagian \overline{P} , bangun prisma segienam beraturan dengan tinggi $t_2 = t - t_1$ dan jari-jari $r_2 = \lambda_2 t_2$, $\frac{1}{4} \leq \lambda_2 \leq \frac{1}{3}$, dijelaskan sebagai berikut.
- i. bangun poligon segienam beraturan dengan titik pusat Q_1 dan jari-jari r_2 ;
 - ii. translasikan segienam beraturan tersebut searah sumbu Z sejauh t_2 .
- d. Lakukan deformasi pada prisma segienam beraturan hasil langkah (2.c) menggunakan alternatif lengkung sisi tegak atau model bintang (Gambar 4.24).
3. Untuk sumbu \overline{R} , bangun setengah bagian prisma segienam beraturan atau setengah bagian permukaan putar dengan jari-jari $r_3 = \lambda_3 l$ dan $\frac{1}{6} \leq \lambda_3 \leq \frac{1}{3}$, dijelaskan sebagai berikut.
- a. Setengah prisma segienam beraturan
 - i. bangun setengah poligon segienam beraturan dengan titik pusat Q , jari-jari r_3 , dan koordinat titik sudut-titik sudut $K_1(r_3, t, t)$, $K_2(\frac{1}{2} r_3, t, t + \frac{r_3}{3} \sqrt{3})$, $K_3(-\frac{1}{2} r_3, t, t + \frac{r_3}{3} \sqrt{3})$, dan $K_4(-r_3, t, t)$;
 - ii. translasikan segienam beraturan tersebut searah sumbu Y sejauh l .
 - b. Setengah permukaan putar
 - i. bangun kurva Bezier kubik dengan titik-titik kontrol $\mathbf{P}_0(r_3, -t, t)$, $\mathbf{P}_1(r_3, -\frac{1}{6} t, t)$, $\mathbf{P}_2(r_3, \frac{1}{6} t, t)$, dan $\mathbf{P}_3(r_3, t, t)$ menggunakan persamaan (2.13);

- ii. putar kurva Bezier tersebut dengan sumbu putar \overline{QR} dan sudut putar $0 \leq v \leq \pi$ berlawanan arah jarum jam.
- c. Lakukan deformasi setengah prisma segienam beraturan atau modifikasi setengah permukaan putar hasil langkah (3.a) atau (3.b) dengan ketentuan sebagai berikut.
 - i. untuk benda dasar setengah prisma segienam beraturan, lakukan deformasi menggunakan alternatif lengkung sisi tegak cekung atau cembung (Gambar 4.25a);
 - ii. untuk benda dasar setengah permukaan benda putar, lakukan modifikasi dengan memberikan relief melintang atau memanjang dengan $n = 3$ atau $n = 5$, dan $v_i = \frac{\pi i}{n}$ (Gambar 4.25b).
- 4. Gabungkan ketiga bagian *knop* dengan membangun bidang batas antara dua komponen berdekatan dengan prosedur sebagai berikut (Gambar 4.26a).
 - a. Tetapkan lingkaran atau poligon segienam beraturan tutup atas bagian alas dengan jari-jari r_1 sebagai kurva batas $C_1(u)$.
 - b. Tetapkan lingkaran atau poligon segienam beraturan tutup bawah bagian penyangga dengan jari-jari r_2 sebagai kurva batas $C_2(u)$.
 - c. Bangun bidang batas antara $C_1(u)$ dan $C_2(u)$ dengan interpolasi linier menggunakan persamaan (2.6b).
 - d. Lakukan langkah (a) sampai (c) untuk membangun bidang batas antara bagian penyangga dan kepala *knop* dengan jari-jari r_2 dan r_3 .
- 5. Bangun bidang tutup atas dan tutup bawah *knop* dengan prosedur sebagai berikut (Gambar 4.26b).
 - a. Tetapkan lingkaran atau poligon segienam beraturan tutup bawah bagian alas dengan jari-jari r_1 sebagai kurva batas $C_1(u)$.
 - b. Bangun bidang tutup bawah menggunakan persamaan (2.6b) dengan titik Q_1 sebagai $C_2(u)$.

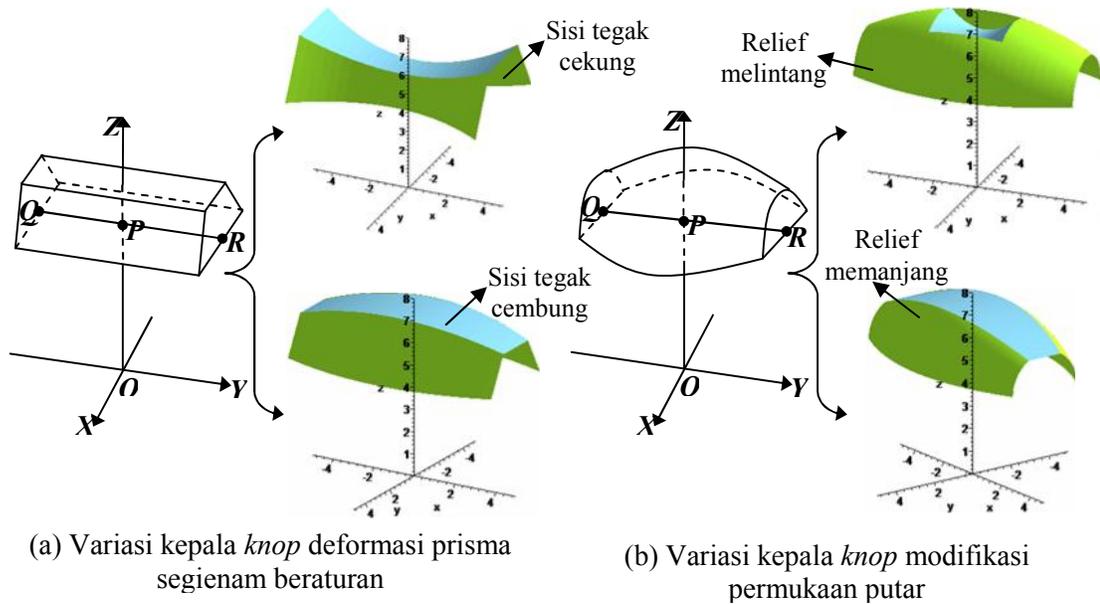
- c. Tetapkan setengah lingkaran atau setengah poligon segienam beraturan pada tutup bagian kepala *knop* dengan jari-jari r_3 sebagai kurva batas $C_1(u)$.
- d. Bangun bidang tutup pada kedua sisi kepala *knop* menggunakan persamaan (2.6b) dengan titik Q dan R berturut-turut sebagai $C_2(u)$.



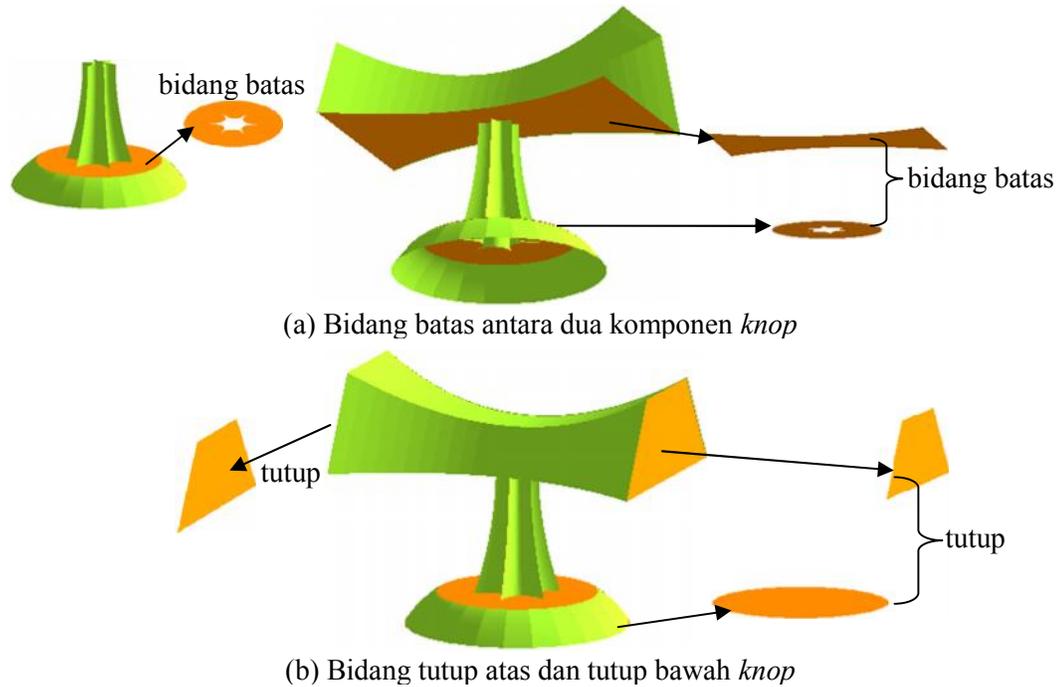
Gambar 4.23 Dua sumbu *knop* dan pembagian sumbu $\bar{P} \bar{P} \bar{P}$



Gambar 4.24 Variasi penyangga *knop* dengan $t_2 = 0,8 t$ dan $r_2 = 1/3 t_2$, $t = 5$

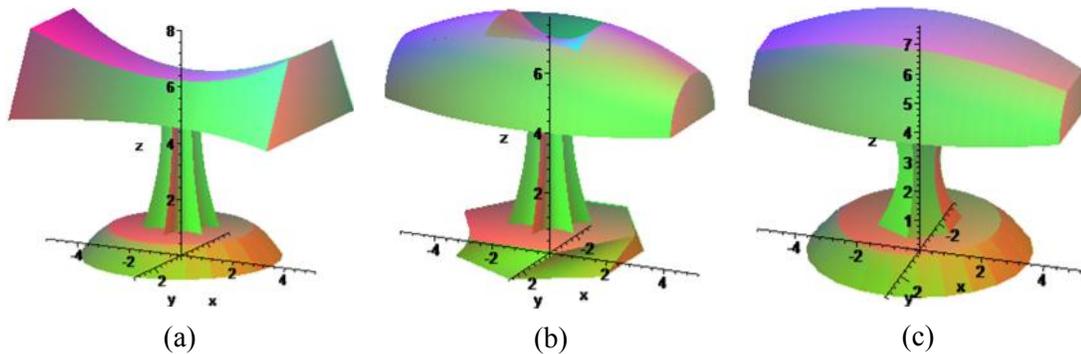


Gambar 4.25 Variasi kepala *knop* dengan $l = 2 t$ dan $r_3 = 2/5 t_3, t = 5$



Gambar 4.26 Contoh rangkaian *knop* dengan dua sumbu pemodelan

Berikut disajikan beberapa contoh hasil visualisasi desain *knop* dua sumbu dengan beberapa variasi kombinasi benda-benda dasar komponen *knop* menggunakan *software* Maple 13 seperti pada Gambar 4.27 di bawah ini (Lampiran B.2).



Gambar 4.27 Beberapa visualisasi model *knop* dengan dua sumbu pemodelan

4.2.3 Model *Knop* dengan Tiga Sumbu Pemodelan

Misalkan diberikan dua sumbu vertikal \overline{OS} dan $\overline{OS'}$ serta sumbu horizontal \overline{OP} . Pada umumnya tinggi sumbu vertikal (t) dan panjang sumbu horizontal (l) adalah $1,5 \text{ cm} \leq t \leq 3 \text{ cm}$ dan $l = 10t$ sehingga diperoleh koordinat titik-titik ujung $P(0, \frac{1}{2} \alpha l, 0)$, $Q(0, \frac{1}{2} \alpha l, t)$, $R(0, -\frac{1}{2} \alpha l, 0)$, $S(0, -\frac{1}{2} \alpha l, t)$, $T(0, -\frac{1}{2} l, t)$, dan $U(0, \frac{1}{2} l, t)$ dengan $\frac{3}{5} \leq \alpha \leq \frac{5}{6}$ (Gambar 4.28a). Berdasarkan data tersebut dilakukan perangkaian model *knop* dengan tiga sumbu yang dijelaskan secara detail sebagai berikut.

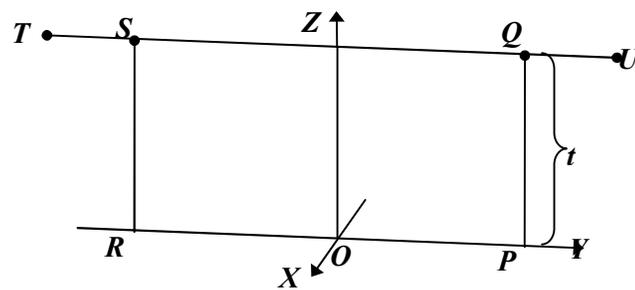
1. Bagi sumbu \overline{OS} menjadi 2 bagian segmen non homogen sebagai sumbu bagian alas dan penyangga *knop* dengan perbandingan tinggi masing-masing bagian $t_1 : t_2$ dengan $t_1 = \mu_1 t$, $t_2 = t - t_1$, dan $0,25 \leq \mu_1 \leq 0,3$ sehingga terdapat titik-titik $P(0, \frac{1}{2} \alpha l, 0)$, $Q(0, \frac{1}{2} \alpha l, t_1)$, dan $Q(0, \frac{1}{2} \alpha l, t)$ pada sumbu \overline{OS} secara terurut.
2. Isi bagian \overline{OP} dan \overline{OS} dengan benda-benda dasar komponen *knop* hasil perlakuan subbab 4.1 dengan langkah pengisian sebagai berikut.

- a. Untuk bagian $\overline{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 P_7}$, bangun tabung atau prisma segienam beraturan dengan tinggi $t_1 = \mu_1 t$ dan jari-jari $r_1 = \lambda_1 t_1$, $3 \leq \lambda_1 \leq 4$, dijelaskan sebagai.
- tabung
 - bangun lingkaran dengan titik pusat O dan jari-jari r_1 menggunakan persamaan (2.7);
 - translasikan lingkaran tersebut searah sumbu Z sejauh t_1 menggunakan persamaan (2.8).
 - prisma segienam beraturan
 - bangun poligon segienam beraturan dengan titik pusat O dan jari-jari r_1 ;
 - translasikan segienam beraturan tersebut searah sumbu Z sejauh t_1 .
- b. Lakukan deformasi pada benda dasar hasil langkah (2.a) dengan ketentuan sebagai berikut.
- untuk benda dasar tabung, lakukan deformasi menggunakan teknik modifikasi kurva selimut atau dilatasi lengkung selimut;
 - untuk benda dasar prisma segienam beraturan, lakukan deformasi menggunakan alternatif efek puntiran, lengkung sisi tegak, atau model bintang.
- c. Untuk bagian $\overline{Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 Q_5 Q_6 Q_7}$, bangun prisma segienam beraturan dengan tinggi $t_2 = t - t_1$ dan jari-jari $r_2 = \lambda_2 t_2$, $\frac{1}{2} \leq \lambda_2 \leq \frac{2}{3}$, dijelaskan sebagai berikut.
- bangun poligon segienam beraturan dengan titik pusat Q_1 dan jari-jari r_2 ;
 - translasikan segienam beraturan tersebut searah sumbu Z sejauh t_2
- d. Lakukan deformasi pada prisma segienam beraturan hasil langkah (2.c) menggunakan alternatif efek puntiran, lengkung sisi tegak, atau model bintang.
3. Lakukan langkah (1) dan (2) pada sumbu $\overline{S_1 S_2}$.

4. Bagi sumbu \overline{UV} menjadi 3 bagian segmen sebagai sumbu bagian kepala *knop* dengan perbandingan panjang masing-masing bagian $l_1 : l_2 : l_3$ dengan $l_1 = l_3 = \mu_1 l$, $l_2 = l - l_1 - l_3$, dan $\frac{1}{6} \leq \mu_1 \leq \frac{1}{5}$ sehingga terdapat titik-titik $T(0, -\frac{1}{2} l, t)$, $T_1(0, -\frac{1}{2} l_2, t)$, $T_2(0, \frac{1}{2} l_2, t)$, dan $U(0, \frac{1}{2} l, t)$ pada sumbu \overline{UV} secara teratur (Gambar 8b).
5. Isi bagian $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$ dan $\overline{A_3B_3}$ dengan benda-benda dasar komponen *knop* hasil perlakuan subbab 1 dengan langkah pengisian sebagai berikut.
- Untuk bagian $\overline{A_1B_1}$, bangun setengah bagian tabung dengan jari-jari $r_3 = \lambda_3 l_1$ dan $0,5 \leq \lambda_3 \leq 0,85$, dijelaskan sebagai berikut.
 - bangun setengah lingkaran dengan titik pusat T dan jari-jari r_3 menggunakan persamaan (2.7);
 - translasikan lingkaran tersebut searah sumbu Y sejauh l_1 menggunakan persamaan (2.8).
 - Lakukan deformasi setengah bagian tabung menggunakan teknik dilatasi lengkung selin.
 - Untuk bagian $\overline{A_2B_2}$, bangun setengah bagian prisma segienam beraturan atau setengah bagian permukaan putar dengan jari-jari $r_4 = \lambda_4 l_2$ dan $\frac{1}{6} \leq \lambda_4 \leq \frac{1}{4}$, dijelaskan sebagai berikut.
 - Setengah prisma segienam beraturan.
 - bangun setengah poligon segienam beraturan dengan titik pusat T , jari-jari r_4 , dan koordinat titik sudut-titik sudut $K_1(r_4, \frac{1}{2} l_2, t)$, $K_2(\frac{1}{2} r_4, \frac{1}{2} l_2, t + \frac{r_4}{3} \sqrt{3})$, $K_3(-\frac{1}{2} r_4, -\frac{1}{2} l_2, t + \frac{r_4}{3} \sqrt{3})$, dan $K_4(-r_4, -\frac{1}{2} l_2, t)$;
 - translasikan segienam beraturan tersebut searah sumbu Y sejauh l .

- ii. Setengah permukaan putar
- bangun kurva Bezier kubik dengan titik-titik kontrol $\mathbf{P}_0(r_4, -t, t)$, $\mathbf{P}_1(r_x, -\frac{14}{6}t, t)$, $\mathbf{P}_2(r_x, \frac{14}{6}t, t)$, dan $\mathbf{P}_3(r_4, t, t)$ menggunakan persamaan (2.13);
 - putar kurva Bezier tersebut dengan sumbu putar \vec{v}_2 dan sudut putar $0 \leq v \leq \pi$ berlawanan arah jarum jam.
- d. Lakukan deformasi setengah prisma segienam beraturan atau modifikasi setengah permukaan putar hasil langkah (5.c) dengan ketentuan sebagai berikut.
- i. untuk benda dasar setengah prisma segienam beraturan, lakukan deformasi menggunakan alternatif lengkung sisi tegak cekung atau cembung;
 - ii. untuk benda dasar setengah permukaan benda putar, lakukan modifikasi dengan memberikan relief melintang atau memanjang dengan $n = 3$ atau $n = 5$, dan $v_i = \frac{\pi i}{n}$.
- e. Lakukan langkah (a) dan (b) untuk bagian \vec{v}_3 .
6. Gabungkan ketiga bagian *knop* dengan membangun bidang batas antara dua komponen berdekatan dengan prosedur sebagai berikut (Gambar 4.29a).
- a. Tetapkan lingkaran atau poligon segienam beraturan tutup atas bagian alas dengan jari-jari r_1 sebagai kurva batas $C_1(u)$.
 - b. Tetapkan lingkaran atau poligon segienam beraturan tutup bawah bagian penyangga dengan jari-jari r_2 sebagai kurva batas $C_2(u)$.
 - c. Bangun bidang batas antara $C_1(u)$ dan $C_2(u)$ dengan interpolasi linier menggunakan persamaan (2.6b).
 - d. Lakukan langkah (a) sampai (c) untuk membangun bidang batas antara bagian penyangga dan kepala *knop* dengan jari-jari r_2 dan r_3 .

7. Bangun bidang tutup atas dan tutup bawah *knop* dengan prosedur sebagai berikut (Gambar 4.29b).
- Tetapkan lingkaran atau poligon segienam beraturan tutup bawah bagian alas dengan jari-jari r_1 sebagai kurva batas $C_1(u)$.
 - Bangun bidang tutup bawah menggunakan persamaan (2.6b) dengan titik Q_1 sebagai $C_2(u)$.
 - Tetapkan setengah lingkaran atau setengah poligon segienam beraturan pada tutup bagian kepala *knop* dengan jari-jari r_3 sebagai kurva batas $C_1(u)$.
 - Bangun bidang tutup pada kedua sisi kepala *knop* menggunakan persamaan (2.6b) dengan titik Q dan R berturut-turut sebagai $C_2(u)$.

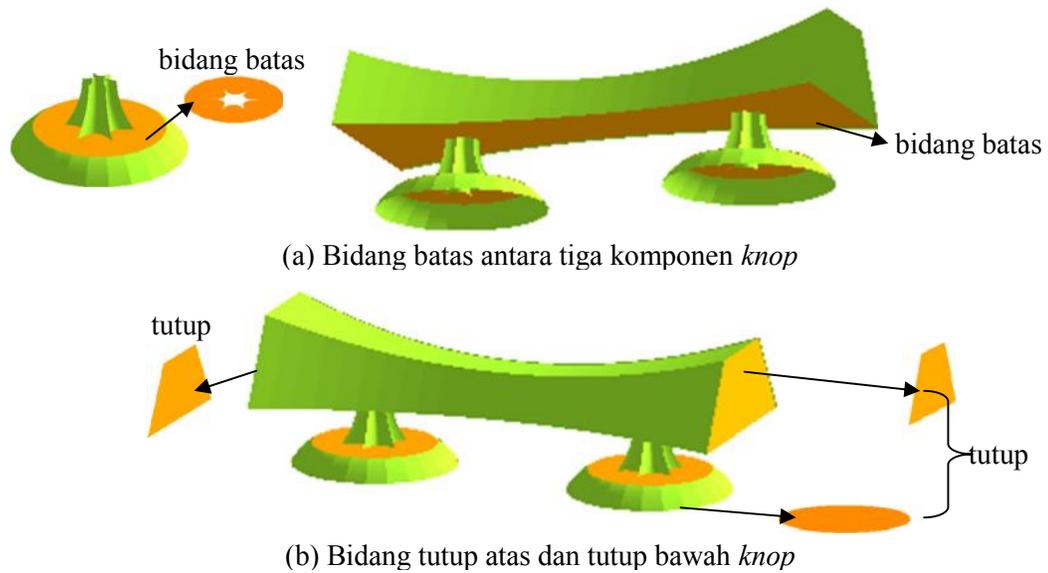


(a)

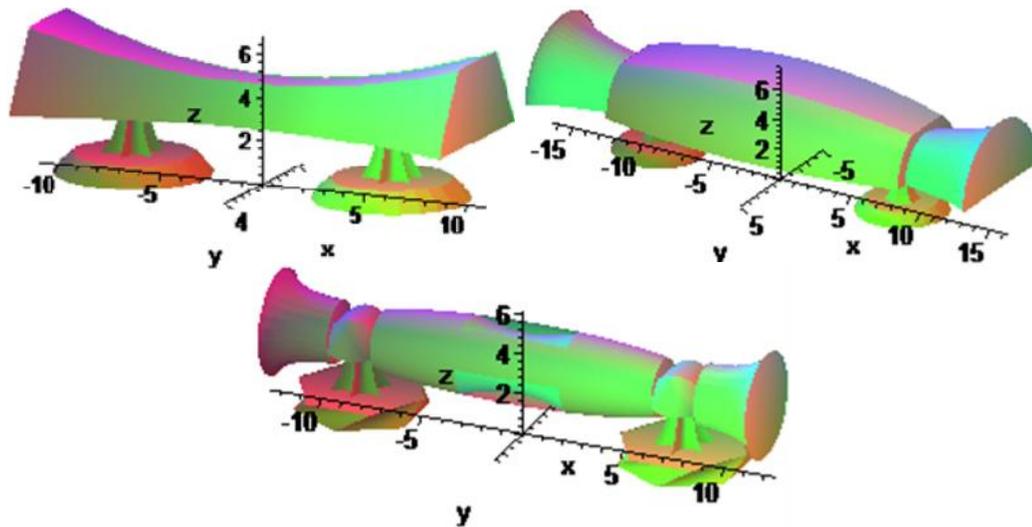


(b)

Gambar 4.28 Tiga sumbu *knop*



Gambar 4.29 Contoh rangkaian *knop* dengan tiga sumbu pemodelan

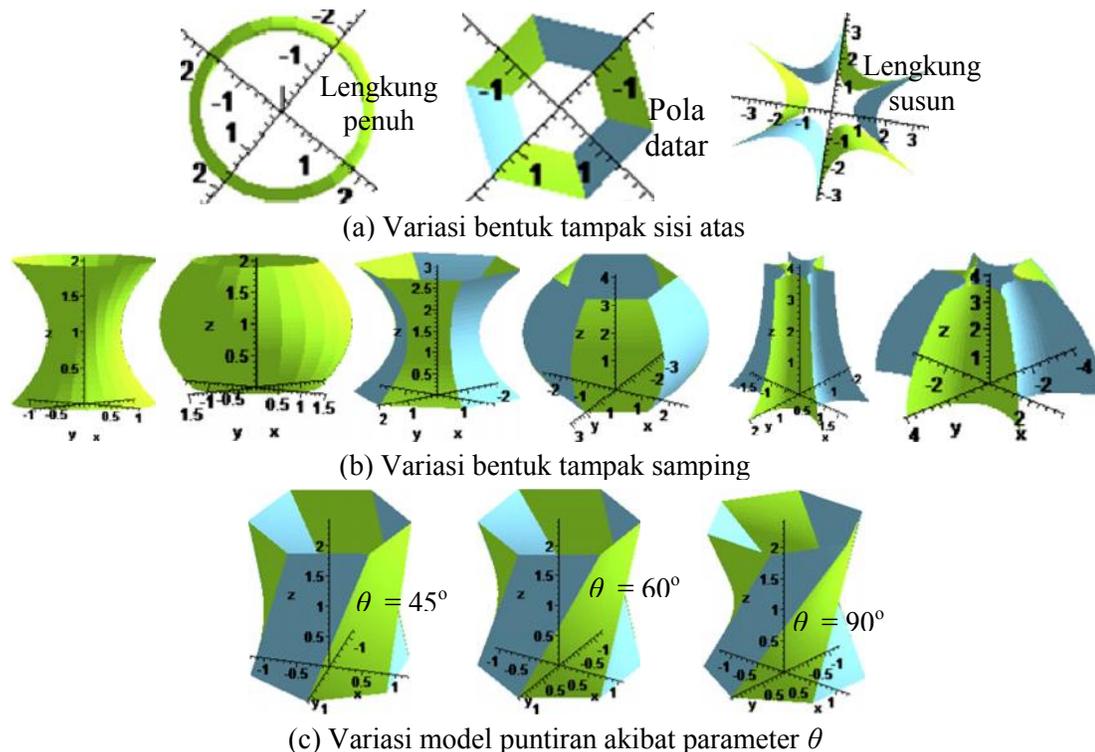


Gambar 4.30 Beberapa visualisasi model *knop* dengan tiga sumbu pemodelan (Lampiran B.3)

4.3 Pembahasan

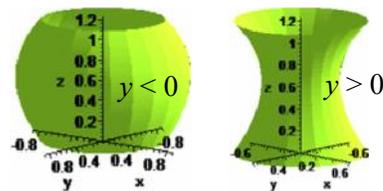
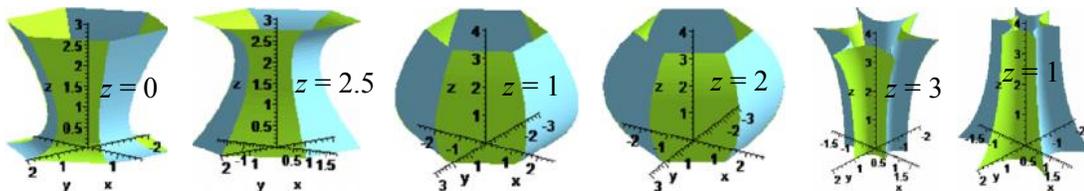
Pada bagian ini dibahas mengenai evaluasi prosedur modelisasi komponen penyusun *knop* dan perangkaian komponen penyusun *knop* tersebut pada tiga jenis sumbu pemodelan. Masing-masing prosedur modelisasi tersebut telah dibahas pada subbab 4.1 dan 4.2. Uraian detailnya dijelaskan sebagai berikut.

1. Prosedur deformasi dapat menghasilkan bentuk komponen *knop* menjadi lebih bervariasi. Pada sisi atas komponen hasil deformasi menghasilkan tiga alternatif yaitu lengkung penuh, datar, dan lengkung susun (Gambar 4.31a). Pada sisi sampingnya menghasilkan dua alternatif yaitu selimut cekung dan selimut cembung (Gambar 4.31b). Pada deformasi prisma segienam beraturan menghasilkan bentuk permukaan komponen terpuntir yang bervariasi dikarenakan penggunaan parameter θ yang menyatakan besarnya sudut yang digunakan untuk memutar tutup atas prisma (Gambar 4.31c). Selain itu, beberapa kemudahan lainnya diberikan sebagai berikut.
- a. Pemberian nilai-nilai parameter r dan t , dapat menghasilkan ukuran jari-jari dan tinggi komponen penyusun *knop*. Contohnya pada Gambar 4.2 dan 4.4 dihasilkan volume komponen *knop* yang berbeda.

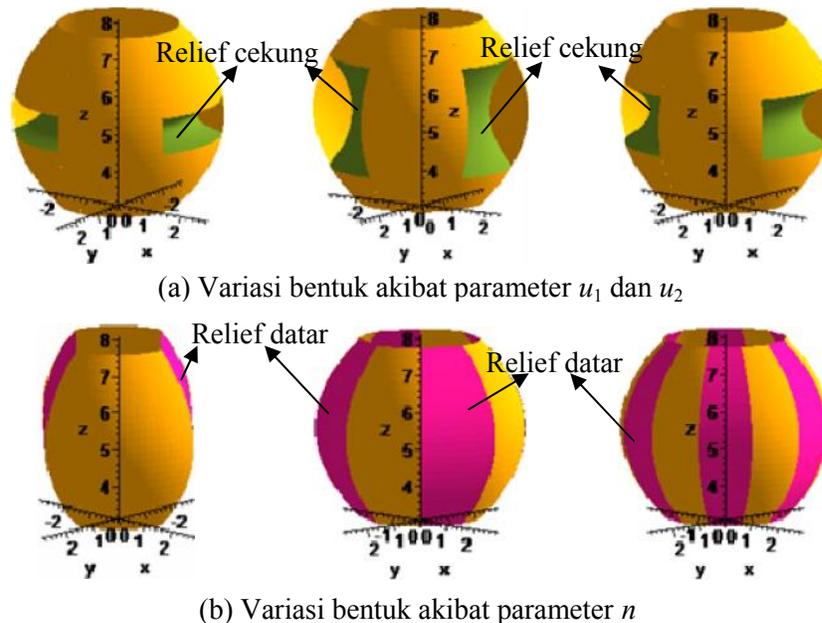


Gambar 4.31 Variasi bentuk komponen *knop* hasil teknik deformasi

- b. Pemberian nilai vektor singgung kurva Hermit pada $p^u(1)$ dalam persamaan (4.3) dapat menghasilkan permukaan cembung ($y < 0$) dan permukaan cekung ($y > 0$) (Gambar 4.32a).
- c. Pemberian nilai titik kontrol kelengkungan pada Q dalam persamaan (4.4), (4.5), dan (4.6) dapat menghasilkan variasi bentuk lengkungan pada lengkung sisi tegak dan model bintang (Gambar 4.32b).

(a) Variasi bentuk akibat parameter y (b) Variasi bentuk akibat parameter z Gambar 4.32 Variasi bentuk komponen *knop* hasil teknik deformasi

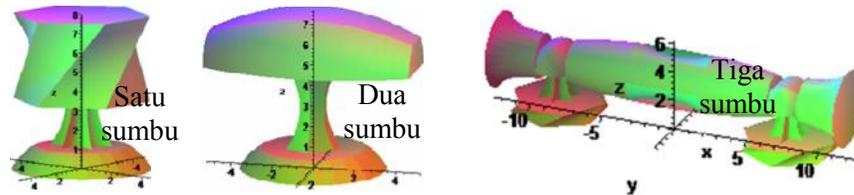
2. Prosedur modifikasi permukaan putar memberikan dua alternatif arah bentuk relief yaitu relief cekung pada model relief melintang dan relief datar pada model relief memanjang. Pada model relief melintang menghasilkan variasi bentuk dikarenakan penggunaan parameter u_1 dan u_2 pada persamaan (4.7) yang digunakan untuk menentukan batas atas dan batas bawah relief, serta parameter n digunakan untuk menentukan jumlah relief seperti yang dijelaskan pada subbab 4.1.3 (Gambar 4.33a). Pada model relief memanjang menghasilkan variasi jumlah relief dikarenakan penggunaan parameter n seperti yang dijelaskan pada subbab 4.1.3 (Gambar 4.33b).



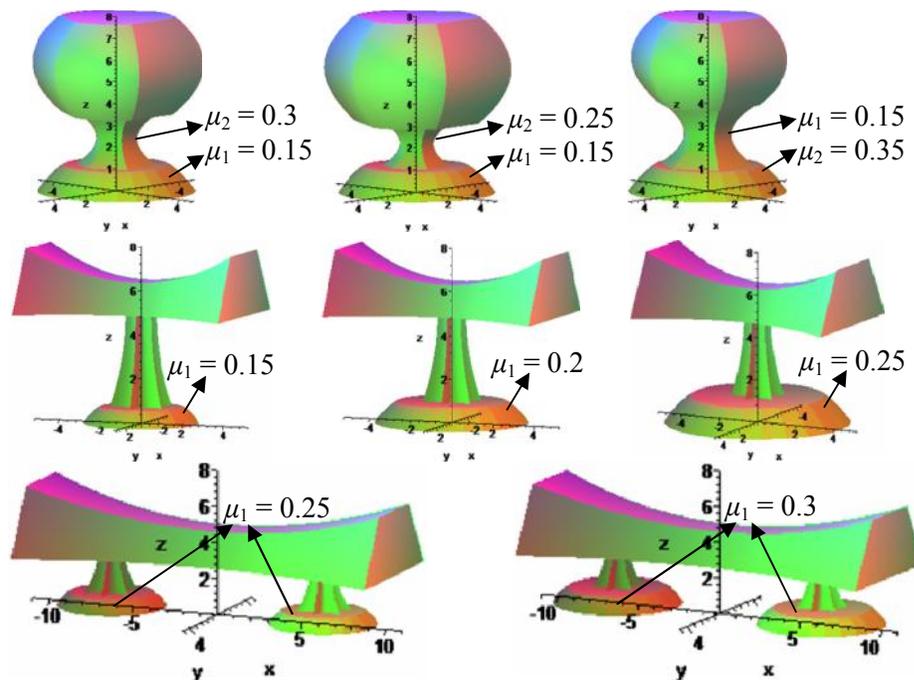
Gambar 4.33 Variasi bentuk komponen hasil modifikasi permukaan putar akibat nilai u_1 , u_2 , dan n

3. Prosedur perangkaian komponen *knop* dapat menghasilkan *knop* yang beraneka ragam jumlah batang pendukung *knop* simetris. Hal ini dibantu dengan adanya perbedaan jumlah sumbu pemodelan *knop* yaitu satu sumbu, dua sumbu, dan tiga sumbu. Perangkaian komponen penyusun *knop* pada satu sumbu menghasilkan model *knop* yang setiap bagiannya bersimetri pusat pada satu sumbu vertikal. Pada model dua sumbu menghasilkan model *knop* dengan bagian kaki (alas dan penyangga) bersimetri pusat pada sumbu vertikal dan bagian kepala memanjang menurut sumbu horizontal, sedangkan pada model tiga sumbu menghasilkan *knop* dengan dua kaki bersimetri pusat pada dua sumbu vertikal dan kepala memanjang menurut sumbu horizontal (Gambar 4.34a). Selain itu, beberapa kemudahan lainnya yang diberikan sebagai berikut.
 - a. Pemberian nilai-nilai parameter μ_1 dan μ_2 dapat menghasilkan variasi perbandingan tinggi setiap bagian segmen pada sumbu pemodelan yang kemudian digunakan sebagai tinggi setiap komponen yang bersesuaian dengan

segmen tersebut sehingga didapatkan bentuk utuh *knop* yang proporsional dan sesuai dengan kegunaan *knop* pada tempatnya (Gambar 4.34b).



(a) Variasi bentuk *knop* akibat model sumbu

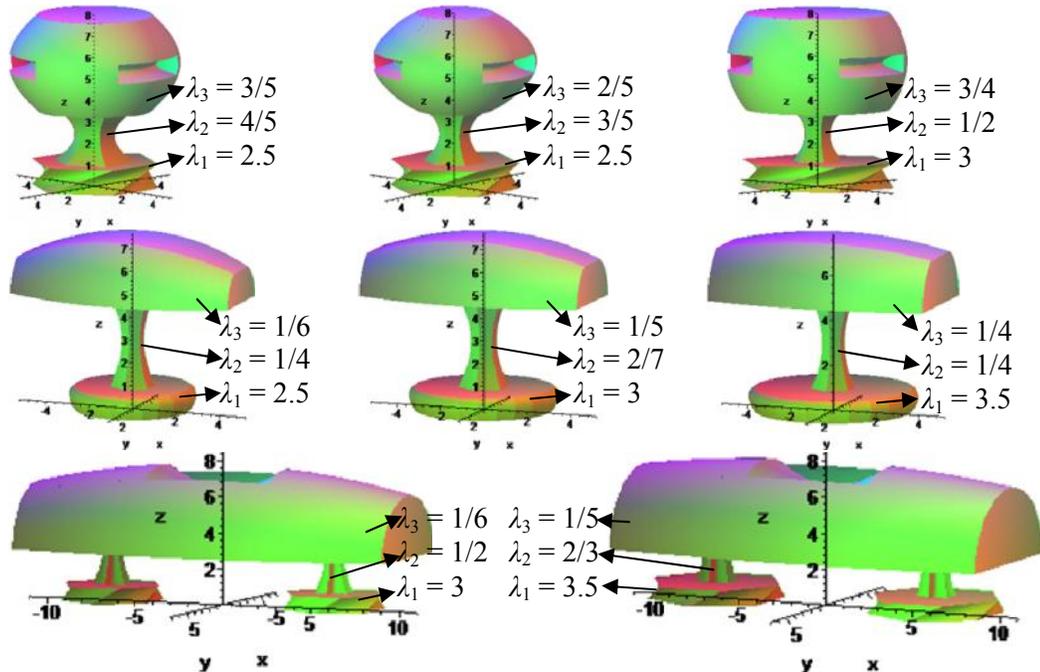


(b) Perubahan bentuk *knop* akibat perubahan nilai parameter μ_1 dan μ_2

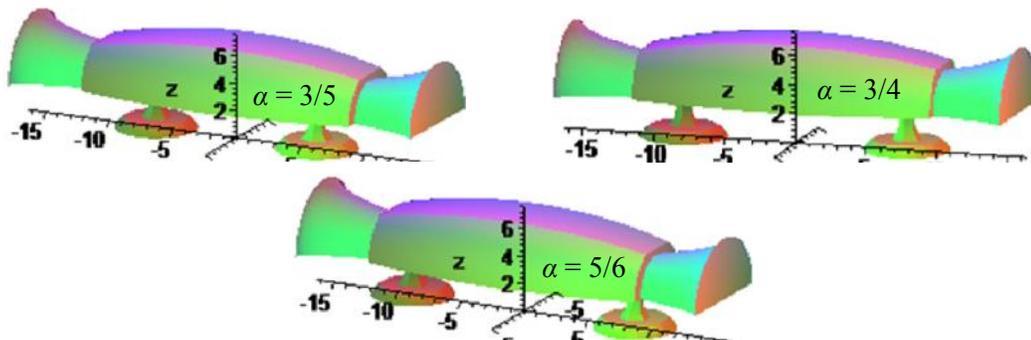
Gambar 4.34 Variasi bentuk *knop* akibat tiga jenis sumbu pemodelan dan perubahan nilai parameter μ_1 dan μ_2

- b. Pemberian nilai-nilai parameter λ_1 , λ_2 , dan λ_3 dapat menghasilkan variasi jari-jari berbeda pada bagian alas, penyangga, dan kepala *knop* yang bergantung pada tinggi masing-masing komponen yang berpengaruh pada luas penampang *knop* dan kekuatan menempel pada laci, pintu, dan benda lainnya (Gambar 4.35a).

c. Pemberian nilai parameter α dapat menghasilkan perbedaan letak alas dan penyangga pada model *knop* dengan tiga sumbu (Gambar 4.35b).



(a) Perubahan bentuk *knop* akibat perubahan nilai parameter λ_1 , λ_2 , dan λ_3



(b) Perubahan letak alas dan penyangga akibat perubahan nilai parameter α

Gambar 4.35 Variasi bentuk *knop* akibat perubahan nilai parameter λ_1 , λ_2 , λ_3 , dan

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan di bab 4, didapatkan bahwa untuk mendesain *knop* secara utuh perlu dilakukan langkah-langkah sebagai berikut.

- a. Untuk mendesain beragam bentuk komponen penyusun *knop* dari benda dasar tabung, prisma segienam beraturan, dan permukaan putar, dapat dilakukan prosedur sebagai berikut. Pertama, menetapkan dua buah titik masing-masing terletak pada sisi atas dan sisi bawah tabung, prisma segienam beraturan, dan permukaan putar. Kedua, mengoperasikan titik-titik tersebut, yaitu: (a) menetapkan vektor singgung untuk kurva Hermit atau titik kontrol kelengkungan untuk kurva Bezier, (b) membangun kurva Hermit atau kurva Bezier, dan (c) memutar atau menginterpolasikan kurva tersebut sehingga menghasilkan bentuk komponen *knop* yang bervariasi dan simetris.
- b. Untuk merangkai komponen penyusun *knop* hasil perlakuan (a) pada tiga jenis model sumbu yaitu satu sumbu pemodelan, dua sumbu pemodelan, dan tiga sumbu pemodelan, prosedurnya sebagai berikut. Pertama, membagi sumbu menjadi beberapa segmen non homogen yang diperlukan sebagai sumbu bagian alas, penyangga, dan kepala *knop*. Kedua, mengisi setiap bagian segmen sumbu non homogen tersebut dengan komponen penyusun *knop* sehingga menghasilkan model *knop* yang tergabung kontinu dan bervariasi.

5.2 Saran

Pada skripsi ini telah diperkenalkan prosedur modelisasi komponen penyusun *knop* dan perangkaian komponen penyusun *knop* pada tiga sumbu pemodelan yaitu satu sumbu, dua sumbu, dan tiga sumbu untuk menghasilkan bentuk *knop* yang utuh dan tergabung secara kontinu. Diharapkan untuk penelitian

selanjutnya metode ini dapat dikembangkan lagi dengan menggunakan benda geometri ruang lainnya seperti keratan kerucut dan limas. Selain itu dapat ditawarkan relief yang lebih bervariasi untuk modifikasi pada permukaan putar kurva.

DAFTAR PUSTAKA

- Bastian, A. 2011. *Desain Kap Lampu Duduk Melalui Penggabungan Benda-benda Geometri Ruang*. Tidak Diterbitkan. Skripsi. Jember: Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember.
- Budiono, M. 2011. *Pemodelan Handle Pintu Tipe Simetris Melalui Teknik Penggabungan Beberapa Benda Geometri Ruang*. Tidak Diterbitkan. Skripsi. Jember: Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember.
- Kusno. 2002. *Geometri Rancang Bangun Studi Aljabar Vektor Garis, Lingkaran dan Ellips*. Jember: Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember.
- Kusno. 2009. *Geometri Rancang Bangun Studi Tentang Desain dan Pemodelan Benda dengan Kurva dan Permukaan Berbantu Komputer*. Jember: Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember.
- Suharto, N. 2009. *KNOP (Handle laci)* [serial on line]. <http://indonetnetwork.co.id/1581775/knop-handle-laci.htm>. [7 Desember 2011].
- Suryadi, D. 1986. *Teori dan Soal Ilmu Ukur Analitik Ruang*. Jakarta: Ghalia Indonesia.
- Wheater, C. 1957. *Homework helpers : Geometry*. New York: The Career Press, Inc.
- Wahyudi, J. 2001. *Perancangan Objek-Objek Industri dengan Benda Permukaan Putar*. Tidak Diterbitkan. Skripsi. Jember: Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember.

LAMPIRAN

Lampiran A. Modelisasi komponen penyusun *knop*

A.1 Deformasi tabung

Modifikasi Kurva Selimut

```
k1:=1-2*u+u^2: k2:=2*u-u^2: k3:=-u+u^2:
t:=8:
ttab1:=0.1*t: #tinggi#
rtab1:=2*ttab1: #jari-jari#
xy1:=-1: z1:=0.5: #vektor singgung#

pxy1:=rtab1*k1+rtab1*k2+xy1*k3:
pz1:=0*k1+ttab1*k2+z1*k3:
tab1:=plot3d([pxy1*cos(v), pxy1*sin(v), pz1], u=0..1, v=0..2*Pi, color="GreenYellow"):
```

Dilatasi Lengkung Selimut

```
ttab2:=0.1*t: #tinggi#
ratab2:=2*ttab2: rbtab2:=3*ttab2: #jari-jari#
xy2:=-1: z2:=0.5: #vektor singgung#

pxy2:=rbtab2*k1+ratab2*k2+xy2*k3:
pz2:=0*k1+ttab2*k2+z2*k3:
tab2:=plot3d([pxy2*cos(v), pxy2*sin(v), pz2], u=0..1, v=0..2*Pi, color="SkyBlue"):
```

A.2 Deformasi prisma segienam beraturan

Efek Puntiran

```
t:=8:
theta:=Pi/6: #sudut putar#
tpunt1:=0: tpunt2:=0.3*t: #tinggi#
rpunt:=2/3*tpunt2: #jarak tipis ke titik sudut#

for i from 0 to 5 do
cp[2*i+1]:="GreenYellow": cp[2*i+2]:="SkyBlue":
a1[i+1]:=plot3d([(1-v)*((1-u)*rpunt*cos(Pi/3*i)+u*rpunt*cos(Pi/3*i+theta))+v*((1-u)*rpunt*cos(Pi/3*(i+1))+u*rpunt*cos(Pi/3*(i+1)+theta)), (1-v)*((1-u)*rpunt*sin(Pi/3*i)+u*rpunt*sin(Pi/3*i+theta))+v*((1-u)*rpunt*sin(Pi/3*(i+1))+u*rpunt*sin(Pi/3*(i+1)+theta)), (1-u)*tpunt1+u*tpunt2], u=0..1, v=0..1, color=cp[i+1]):
end do:
punt:=display({a1[1], a1[2], a1[3], a1[4], a1[5], a1[6]}):
```

Lengkung Sisi Tegak

• Cekung

```
tcek1:=0: tcek3:=0.3*t: tcek2:=1/2*tcek3: #ketinggian titik kontrol#
rcek:=2/3*tcek3: #titik kontrol pd sb x&y#
```

```
for j from 0 to 5 do
ccek[2*j+1]:="GreenYellow": ccek[2*j+2]:="SkyBlue":
b1[j+1]:=plot3d([(1-v)*((1-u)^(2*rcek+2*(1-
u)*u^0+u^2*rcek)*cos(Pi/3*j)+v*((1-u)^(2*rcek+2*(1-
u)*u^0+u^2*rcek)*cos(Pi/3*(j+1)),(1-v)*((1-u)^(2*rcek+2*(1-
u)*u^0+u^2*rcek)*sin(Pi/3*j)+v*((1-u)^(2*rcek+2*(1-
u)*u^0+u^2*rcek)*sin(Pi/3*(j+1)),(1-u)^(2*tcek1+2*(1-
u)*u*tcek2+u^2*tcek3+0.8)],u=0..1,v=0..1,color=ccek[j+1]):
end do:
cek:=display({b1[1],b1[2],b1[3],b1[4],b1[5],b1[6]}):
```

• Cembung

```
tcemb1:=0: tcemb3:=0.6*t: tcemb2:=1/2*tcemb3: #ketinggian titik
kontrol#
kcb:=2.5: #faktor pengali dilatasi segi-6#
rcemb1:=2/5*tcemb3: rcemb2:=kcb*rcemb1: #titik kontrol pd sb x&y#
```

```
for k from 0 to 5 do
ccb[2*k+1]:="GreenYellow": ccb[2*k+2]:="SkyBlue":
c1[k+1]:=plot3d([(1-v)*((1-u)^(2*rcemb1+2*(1-
u)*u*rcemb2+u^2*rcemb1)*cos(Pi/3*k)+v*((1-u)^(2*rcemb1+2*(1-
u)*u*rcemb2+u^2*rcemb1)*cos(Pi/3*(k+1)),(1-v)*((1-u)^(2*rcemb1+2*(1-
u)*u*rcemb2+u^2*rcemb1)*sin(Pi/3*k)+v*((1-u)^(2*rcemb1+2*(1-
u)*u*rcemb2+u^2*rcemb1)*sin(Pi/3*(k+1)),(1-u)^(2*tcemb1+2*(1-
u)*u*tcemb2+u^2*tcemb3+3.2)],u=0..1,v=0..1,color=ccb[k+1]):
end do:
cemb:=display({c1[1],c1[2],c1[3],c1[4],c1[5],c1[6]}):
```

Model Bintang

```
tbint1:=0: tbint3:=0.6*t: tbint2:=1/2*tbint3: #ketinggian titik
kontrol#
kbint1:=1: kbint2:=2: #faktor pengali dilatasi segi-6#
rbint1:=kbint1*2/5*tbint3: rbint2:=kbint2*2/5*tbint3: #titik kontrol
pd sb x&y#
```

```
for l from 0 to 5 do
cb[2*l+1]:="GreenYellow": cb[2*l+2]:="SkyBlue":
d1[l+1]:=plot3d([(1-v)^(2*((1-u)^(2*rbint2+2*(1-
u)*u*rbint2+u^2*rbint1)*cos(Pi/3*l)+v^(2*((1-u)^(2*rbint2+2*(1-
u)*u*rbint2+u^2*rbint1)*cos(Pi/3*(l+1)),(1-v)^(2*((1-
u)^(2*rbint2+2*(1-u)*u*rbint2+u^2*rbint1)*sin(Pi/3*l)+v^(2*((1-
u)^(2*rbint2+2*(1-u)*u*rbint2+u^2*rbint1)*sin(Pi/3*(l+1)),(1-
u)^(2*tbint1+2*(1-
u)*u*tbint2+u^2*tbint3+3.2)],u=0..1,v=0..1,color=cb[l+1]):
end do:
```

```
bint:=display({d1[1],d1[2],d1[3],d1[4],d1[5],d1[6]}):
```

A.3 Modifikasi permukaan putar

Relief Melintang

```
t:=8:
nlin:=6: #banyaknya busur#
tlin:=0.6*t: #tinggi#
rlin1:=1/3*tlin: rlin2:=2/3*tlin: rlin3:=rlin2: rlin4:=rlin1: #titik
kontrol pd sb x&y#
tlin1:=0: tlin2:=1/3*tlin: tlin3:=2/3*tlin: tlin4:=tlin: #tinggi#
u1:=2/5: u2:=3/5: #parameter keratan#
```

```
for i from 0 to (nlin-1) do
a1[i+1]:=plot3d([(1-u)^3*rlin1+3*(1-u)^2*u*rlin2+3*(1-
u)*u^2*rlin3+u^3*rlin4)*cos(v),((1-u)^3*rlin1+3*(1-
u)^2*u*rlin2+3*(1-u)*u^2*rlin3+u^3*rlin4)*sin(v),(1-u)^3*tlin1+3*(1-
u)^2*u*tlin2+3*(1-u)*u^2*tlin3+u^3*tlin4+3.2],u=0..1,v=2*Pi*(i-
1)/nlin..2*Pi*i/nlin):
a2[i+1]:=plot3d([(1-u)^3*rlin1+3*(1-u)^2*u*rlin2+3*(1-
u)*u^2*rlin3+u^3*rlin4)*cos(v),((1-u)^3*rlin1+3*(1-
u)^2*u*rlin2+3*(1-u)*u^2*rlin3+u^3*rlin4)*sin(v),(1-u)^3*tlin1+3*(1-
u)^2*u*tlin2+3*(1-u)*u^2*tlin3+u^3*tlin4+3.2],u=0..u1,v=2*Pi*(i-
1)/nlin..2*Pi*i/nlin):
a3[i+1]:=plot3d([(1-u)^3*rlin1+3*(1-u)^2*u*rlin2+3*(1-
u)*u^2*rlin3+u^3*rlin4)*cos(v),((1-u)^3*rlin1+3*(1-
u)^2*u*rlin2+3*(1-u)*u^2*rlin3+u^3*rlin4)*sin(v),(1-u)^3*tlin1+3*(1-
u)^2*u*tlin2+3*(1-u)*u^2*tlin3+u^3*tlin4+3.2],u=u2..1,v=2*Pi*(i-
1)/nlin..2*Pi*i/nlin):
end do:
lin1:=display({a1[2],a1[4],a1[6],a2[1],a2[3],a2[5],a3[1],a3[3],a3[5]
},style=patchnogrid,color="GreenYellow"):
```

```
s1:=(1-u1)^3*rlin1+3*(1-u1)^2*u1*rlin2+3*(1-
u1)*u1^2*rlin3+u1^3*rlin4: #posisi x&y keratan bawah#
s2:=(1-u2)^3*rlin1+3*(1-u2)^2*u2*rlin2+3*(1-
u2)*u2^2*rlin3+u2^3*rlin4: #posisi x&y keratan atas#
t1:=(1-u1)^3*tlin1+3*(1-u1)^2*u1*tlin2+3*(1-
u1)*u1^2*tlin3+u1^3*tlin4: #tinggi keratan bawah#
t2:=(1-u2)^3*tlin1+3*(1-u2)^2*u2*tlin2+3*(1-
u2)*u2^2*tlin3+u2^3*tlin4: #tinggi keratan atas#
```

```
for j from 0 to (nlin-1) do
a4[j+1]:=plot3d([(1-u)^2*s1+2*(1-u)*u*(s1/2)+u^2*s2)*cos(v),((1-
u)^2*s1+2*(1-u)*u*(s1/2)+u^2*s2)*sin(v),(1-u)^2*t1+2*(1-
u)*u*(t1+(t2-t1)/2)+u^2*t2+3.2],u=0..1,v=2*Pi*(j-
1)/nlin..2*Pi*j/nlin,color="SkyBlue"):
end do:
lin2:=display({a4[1],a4[3],a4[5]},style=patchnogrid):
```

Relief Memanjang

```
npan:=6: #banyaknya busur#
```

```

tpan:=0.6*t: #tinggi#
rpan1:=1/3*tpan: rpan2:=2/3*tpan: rpan3:=rpan2: rpan4:=rpan1: #titik
kontrol pd sb x&y#
tpan1:=0: tpan2:=1/3*tpan: tpan3:=2/3*tpan: tpan4:=tpan: #tinggi#

for l from 0 to (npan-1) do
b1[l+1]:=plot3d([(1-u)^3*rpan1+3*(1-u)^2*u*rpan2+3*(1-
u)*u^2*rpan3+u^3*rpan4)*cos(v), ((1-u)^3*rpan1+3*(1-
u)^2*u*rpan2+3*(1-u)*u^2*rpan3+u^3*rpan4)*sin(v), (1-u)^3*tpan1+3*(1-
u)^2*u*tpan2+3*(1-u)*u^2*tpan3+u^3*tpan4+3.2], u=0..1, v=2*Pi*(1-
l)/npan..2*Pi*l/npan, color="GreenYellow"):
end do:
pan1:=display({b1[2],b1[4],b1[6]}):

for k from 0 to (npan-1) do
b2[k+1]:=plot3d([(1-v)*((1-u)^3*rpan1+3*(1-u)^2*u*rpan2+3*(1-
u)*u^2*rpan3+u^3*rpan4)*cos(2*Pi*(k-1)/npan)+v*((1-u)^3*rpan1+3*(1-
u)^2*u*rpan2+3*(1-u)*u^2*rpan3+u^3*rpan4)*cos(2*Pi*k/npan), (1-
v)*((1-u)^3*rpan1+3*(1-u)^2*u*rpan2+3*(1-
u)*u^2*rpan3+u^3*rpan4)*sin(2*Pi*(k-1)/npan)+v*((1-u)^3*rpan1+3*(1-
u)^2*u*rpan2+3*(1-u)*u^2*rpan3+u^3*rpan4)*sin(2*Pi*k/npan), (1-
u)^3*tpan1+3*(1-u)^2*u*tpan2+3*(1-
u)*u^2*tpan3+u^3*tpan4+3.2], u=0..1, v=0..1, color="SkyBlue"):
end do:
pan2:=display({b2[1],b2[3],b2[5]}):

```

Lampiran B. Perangkaian *knop* pada tiga jenis sumbu pemodelan

B.1 Model *knop* dengan satu sumbu pemodelan

```

t:=8:
#alas#
t1:=0.15*t: #tinggi#
ra1:=2*t1: rb1:=3*t1: #jari-jari#
xy1:=-1: z1:=0.5: #vektor singgung#
#penyangga#
t21:=0: t23:=0.3*t: t22:=1/2*t23: #ketinggian titik kontrol#
r2:=4/5*t23: #titik kontrol pd sb x&y#
#kepala#
npan:=6: #banyaknya busur#
tpan:=t-t1-t23: #tinggi#
rpan1:=3/5*tpan: rpan2:=1*tpan: rpan3:=rpan2: rpan4:=rpan1: #titik
kontrol pd sb x&y#
tpan1:=0: tpan2:=1/3*tpan: tpan3:=2/3*tpan: tpan4:=tpan: #tinggi#

k1:=1-2*u+u^2: k2:=2*u-u^2: k3:=-u+u^2:

#alas#
pxy1:=rb1*k1+ra1*k2+xy1*k3:
pz1:=0*k1+t1*k2+z1*k3:
a:=plot3d([pxy1*cos(v), pxy1*sin(v), pz1], u=0..1, v=0..2*Pi):

```

```

#penyangga#
for i from 0 to 5 do
b1[i+1]:=plot3d([(1-v)*((1-u)^2*r2+2*(1-
u)*u^0+u^2*r2)*cos(Pi/3*i)+v*((1-u)^2*r2+2*(1-
u)*u^0+u^2*r2)*cos(Pi/3*(i+1)),(1-v)*((1-u)^2*r2+2*(1-
u)*u^0+u^2*r2)*sin(Pi/3*i)+v*((1-u)^2*r2+2*(1-
u)*u^0+u^2*r2)*sin(Pi/3*(i+1)),(1-u)^2*t21+2*(1-
u)*u*t22+u^2*t23+t1],u=0..1,v=0..1):
end do:
b:=display({b1[1],b1[2],b1[3],b1[4],b1[5],b1[6]}):

#kepala#
for j from 0 to (npan-1) do
c1[j+1]:=plot3d([(1-u)^3*rpan1+3*(1-u)^2*u*rpan2+3*(1-
u)*u^2*rpan3+u^3*rpan4)*cos(v),((1-u)^3*rpan1+3*(1-
u)^2*u*rpan2+3*(1-u)*u^2*rpan3+u^3*rpan4)*sin(v),(1-u)^3*tpan1+3*(1-
u)^2*u*tpan2+3*(1-u)*u^2*tpan3+u^3*tpan4+t1+t23],u=0..1,v=2*Pi*(j-
1)/npan..2*Pi*j/npan):
c2[j+1]:=plot3d([(1-v)*((1-u)^3*rpan1+3*(1-u)^2*u*rpan2+3*(1-
u)*u^2*rpan3+u^3*rpan4)*cos(2*Pi*(j-1)/npan)+v*((1-u)^3*rpan1+3*(1-
u)^2*u*rpan2+3*(1-u)*u^2*rpan3+u^3*rpan4)*cos(2*Pi*j/npan),(1-
v)*((1-u)^3*rpan1+3*(1-u)^2*u*rpan2+3*(1-
u)*u^2*rpan3+u^3*rpan4)*sin(2*Pi*(j-1)/npan)+v*((1-u)^3*rpan1+3*(1-
u)^2*u*rpan2+3*(1-u)*u^2*rpan3+u^3*rpan4)*sin(2*Pi*j/npan),(1-
u)^3*tpan1+3*(1-u)^2*u*tpan2+3*(1-
u)*u^2*tpan3+u^3*tpan4+t1+t23],u=0..1,v=0..1):
end do:
c:=display({c1[2],c1[4],c1[6],c2[1],c2[3],c2[5]}):

#sambungan#
for k from 0 to (npan-1) do
d1[k+1]:=plot3d([v*ra1*cos(Pi/3*u+k*(Pi/3))+(1-
v)*((r2*cos(Pi/3*(k+1))-
r2*cos(Pi/3*k))*u+r2*cos(Pi/3*k)),v*ra1*sin(Pi/3*u+k*(Pi/3))+(1-
v)*((r2*sin(Pi/3*(k+1))-
r2*sin(Pi/3*k))*u+r2*sin(Pi/3*k)),t1],u=0..1,v=0..1):
d2[k+1]:=plot3d([v*((r2*cos(Pi/3*(k+1))-
r2*cos(Pi/3*k))*u+r2*cos(Pi/3*k))+(1-v)*((rpan1*cos(Pi/3*(k+1))-
rpan1*cos(Pi/3*k))*u+rpan1*cos(Pi/3*k)),v*((r2*sin(Pi/3*(k+1))-
r2*sin(Pi/3*k))*u+r2*sin(Pi/3*k))+(1-v)*((rpan1*sin(Pi/3*(k+1))-
rpan1*sin(Pi/3*k))*u+rpan1*sin(Pi/3*k)),t1+t23],u=0..1,v=0..1):
d3[k+1]:=plot3d([v*((r2*cos(Pi/3*(k+1))-
r2*cos(Pi/3*k))*u+r2*cos(Pi/3*k))+(1-
v)*rpan1*cos(Pi/3*u+k*(Pi/3)),v*((r2*sin(Pi/3*(k+1))-
r2*sin(Pi/3*k))*u+r2*sin(Pi/3*k))+(1-
v)*rpan1*sin(Pi/3*u+k*(Pi/3)),t1+t23],u=0..1,v=0..1):
end do:
d:=display({d1[1],d1[2],d1[3],d1[4],d1[5],d1[6],d2[2],d3[1],d2[4],d3
[3],d2[6],d3[5]}):

```

```

#tutup#
e1:=plot3d([u*0+(1-u)*rb1*cos(v),u*0+(1-
u)*rb1*sin(v),0],u=0..1,v=0..2*Pi):
for l from 0 to (npan-1) do
e2[l+1]:=plot3d([v*0+(1-v)*((rpan1*cos(Pi/3*(l+1))-
rpan1*cos(Pi/3*l))*u+rpan1*cos(Pi/3*l)),v*0+(1-
v)*((rpan1*sin(Pi/3*(l+1))-
rpan1*sin(Pi/3*l))*u+rpan1*sin(Pi/3*l)),t],u=0..1,v=0..1):
e3[l+1]:=plot3d([v*0+(1-v)*rpan1*cos(Pi/3*u+l*(Pi/3)),v*0+(1-
v)*rpan1*sin(Pi/3*u+l*(Pi/3)),t],u=0..1,v=0..1):
end do:
e:=display({e1,e2[2],e3[1],e2[4],e3[3],e2[6],e3[5]}):

```

B.2 Model *knop* dengan dua sumbu pemodelan

```

t:=5:
l:=2*t:
#alas#
t1:=0.2*t: #tinggi#
ra1:=2.5*t1: rb1:=3.5*t1: #jari-jari#
xy1:=-1: z1:=0.5: #vektor singgung#
#penyangga#
t21:=0: t23:=t-t1: t22:=1/2*t23: #ketinggian titik kontrol#
k2:=1/2: #faktor pengali dilatasi segi-6#
r21:=k2*1/3*t23: r22:=1/3*t23: #titik kontrol pd sb x&y#
#kepala#
l1:=-1/2*1: l2:=0: l3:=1/2*1: #posisi titik kontrol pada sb y#
r3:=1/3*1: #jari-jari#

```

```

k1:=1-2*u+u^2: k2:=2*u-u^2: k3:=-u+u^2:

```

```

#alas#
pxy1:=rb1*k1+ra1*k2+xy1*k3:
pz1:=0*k1+t1*k2+z1*k3:
a:=plot3d([pxy1*cos(v),pxy1*sin(v),pz1],u=0..1,v=0..2*Pi):

```

```

#penyangga#
for l from 0 to 5 do
b1[l+1]:=plot3d([(1-v)^2*((1-u)^2*r22+2*(1-
u)*u*r21+u^2*r21)*cos(Pi/3*l)+v^2*((1-u)^2*r22+2*(1-
u)*u*r21+u^2*r21)*cos(Pi/3*(l+1)),(1-v)^2*((1-u)^2*r22+2*(1-
u)*u*r21+u^2*r21)*sin(Pi/3*l)+v^2*((1-u)^2*r22+2*(1-
u)*u*r21+u^2*r21)*sin(Pi/3*(l+1)),(1-u)^2*t21+2*(1-
u)*u*t22+u^2*t23+t1],u=0..1,v=0..1):
end do:
b:=display({b1[1],b1[2],b1[3],b1[4],b1[5],b1[6]}):

```

```

#kepala#
for i from 0 to 5 do
c1[i+1]:=plot3d([(1-v)*((1-u)^2*r3+2*(1-
u)*u*0+u^2*r3)*cos(Pi/3*i)+v*((1-u)^2*r3+2*(1-
u)*u*0+u^2*r3)*cos(Pi/3*(i+1)),(1-u)^2*l1+2*(1-u)*u*l2+u^2*l3,(1-

```

```

v) * ((1-u)^2*r3+2*(1-u)*u*0+u^2*r3) * sin(Pi/3*i) + v * ((1-u)^2*r3+2*(1-
u)*u*0+u^2*r3) * sin(Pi/3*(i+1)) + t1+t23], u=0..1, v=0..1):
end do:
c:=display({c1[1],c1[2],c1[3]}):

#sambungan#
for j from 0 to 5 do
d1[j+1]:=plot3d([v*ra1*cos(Pi/3*u+Pi/3*j)+(1-
v)*(u^2*r22*cos(Pi/3*(j+1))+(1-
u)^2*r22*cos(Pi/3*j)),v*ra1*sin(Pi/3*u+Pi/3*j)+(1-
v)*(u^2*r22*sin(Pi/3*(j+1))+(1-
u)^2*r22*sin(Pi/3*j)),t1],u=0..1,v=0..1):
end do:
d2:=plot3d([(1-v)*((1-u)^2*(-r3)+2*(1-u)*u*0+u^2*(-r3))+v*((1-
u)^2*r3+2*(1-u)*u*0+u^2*r3),(1-v)*((1-u)^2*l1+2*(1-
u)*u*l2+u^2*l3)+v*((1-u)^2*l1+2*(1-
u)*u*l2+u^2*l3),t1+t23],u=0..1,v=0..1):
d:=display({d1[1],d1[2],d1[3],d1[4],d1[5],d1[6],d2}):

#tutup#
e1:=plot3d([u*0+(1-u)*rb1*cos(v),u*0+(1-
u)*rb1*sin(v),0],u=0..1,v=0..2*Pi):
for k from 0 to 5 do
e2[k+1]:=plot3d([v*0+(1-v)*((r3*cos(Pi/3*(k+1))-
r3*cos(Pi/3*k))*u+r3*cos(Pi/3*k)),l1,v*0+(1-v)*((r3*sin(Pi/3*(k+1))-
r3*sin(Pi/3*k))*u+r3*sin(Pi/3*k))+t1+t23],u=0..1,v=0..1):
e3[k+1]:=plot3d([v*0+(1-v)*((r3*cos(Pi/3*(k+1))-
r3*cos(Pi/3*k))*u+r3*cos(Pi/3*k)),l3,v*0+(1-v)*((r3*sin(Pi/3*(k+1))-
r3*sin(Pi/3*k))*u+r3*sin(Pi/3*k))+t1+t23],u=0..1,v=0..1):
end do:
e:=display({e1,e2[1],e2[2],e2[3],e3[1],e3[2],e3[3]}):

```

B.3 Model *knop* dengan tiga sumbu pemodelan

```

t:=3:
l1:=7*t:
alfa:=3/5:
#alas#
t1:=0.3*t: #tinggi#
ra1:=3*t1: rb1:=4*t1: #jari-jari#
xy1:=-1: z1:=0.5: #vektor singgung#
#penyangga#
t21:=0: t23:=t-t1: t22:=1/2*t23: #ketinggian titik kontrol#
k2:=1/2: #faktor pengali dilatasi segi-6#
r21:=k2*2/3*t23: r22:=2/3*t23: #titik kontrol pd sb x&y#
#kepala#
l31:=-1/2*l1: l32:=0: l33:=1/2*l1: #posisi titik kontrol pada sb y#
r3:=1/5*l1: #jari-jari#

k1:=1-2*u+u^2: k2:=2*u-u^2: k3:=-u+u^2:

```

```

#alas#
pxy1:=rb1*k1+ra1*k2+xy1*k3:
pz1:=0*k1+t1*k2+z1*k3:
a1:=plot3d([pxy1*cos(v),pxy1*sin(v)+alfa*l31,pz1],u=0..1,v=0..2*Pi):
a2:=plot3d([pxy1*cos(v),pxy1*sin(v)+alfa*l33,pz1],u=0..1,v=0..2*Pi):
a:=display([a1,a2]):

#penyangga#
for l from 0 to 5 do
b1[l+1]:=plot3d([(1-v)^2*((1-u)^2*r22+2*(1-
u)*u*r21+u^2*r21)*cos(Pi/3*1)+v^2*((1-u)^2*r22+2*(1-
u)*u*r21+u^2*r21)*cos(Pi/3*(1+1)),(1-v)^2*((1-u)^2*r22+2*(1-
u)*u*r21+u^2*r21)*sin(Pi/3*1)+v^2*((1-u)^2*r22+2*(1-
u)*u*r21+u^2*r21)*sin(Pi/3*(1+1))+alfa*l31,(1-u)^2*t21+2*(1-
u)*u*t22+u^2*t23+t1],u=0..1,v=0..1):
b2[l+1]:=plot3d([(1-v)^2*((1-u)^2*r22+2*(1-
u)*u*r21+u^2*r21)*cos(Pi/3*1)+v^2*((1-u)^2*r22+2*(1-
u)*u*r21+u^2*r21)*cos(Pi/3*(1+1)),(1-v)^2*((1-u)^2*r22+2*(1-
u)*u*r21+u^2*r21)*sin(Pi/3*1)+v^2*((1-u)^2*r22+2*(1-
u)*u*r21+u^2*r21)*sin(Pi/3*(1+1))+alfa*l33,(1-u)^2*t21+2*(1-
u)*u*t22+u^2*t23+t1],u=0..1,v=0..1):
end do:
b:=display({b1[1],b1[2],b1[3],b1[4],b1[5],b1[6],b2[1],b2[2],b2[3],b2[4],b2[5],b2[6]}):

#kepala#
for i from 0 to 5 do
c1[i+1]:=plot3d([(1-v)*((1-u)^2*r3+2*(1-
u)*u*0+u^2*r3)*cos(Pi/3*i)+v*((1-u)^2*r3+2*(1-
u)*u*0+u^2*r3)*cos(Pi/3*(i+1)),(1-u)^2*l31+2*(1-u)*u*l32+u^2*l33,(1-
v)*((1-u)^2*r3+2*(1-u)*u*0+u^2*r3)*sin(Pi/3*i)+v*((1-u)^2*r3+2*(1-
u)*u*0+u^2*r3)*sin(Pi/3*(i+1))+t1+t23],u=0..1,v=0..1):
end do:
c:=display({c1[1],c1[2],c1[3]}):

#sambungan#
for j from 0 to 5 do
d1[j+1]:=plot3d([v*ra1*cos(Pi/3*u+Pi/3*j)+(1-
v)*(u^2*r22*cos(Pi/3*(j+1))+(1-
u)^2*r22*cos(Pi/3*j)),v*ra1*sin(Pi/3*u+Pi/3*j)+(1-
v)*(u^2*r22*sin(Pi/3*(j+1))+(1-
u)^2*r22*sin(Pi/3*j))+alfa*l31,t1],u=0..1,v=0..1):
d2[j+1]:=plot3d([v*ra1*cos(Pi/3*u+Pi/3*j)+(1-
v)*(u^2*r22*cos(Pi/3*(j+1))+(1-
u)^2*r22*cos(Pi/3*j)),v*ra1*sin(Pi/3*u+Pi/3*j)+(1-
v)*(u^2*r22*sin(Pi/3*(j+1))+(1-
u)^2*r22*sin(Pi/3*j))+alfa*l33,t1],u=0..1,v=0..1):
end do:
d3:=plot3d([(1-v)*((1-u)^2*(-r3)+2*(1-u)*u*0+u^2*(-r3))+v*((1-
u)^2*r3+2*(1-u)*u*0+u^2*r3),(1-v)*((1-u)^2*l31+2*(1-
u)*u*l32+u^2*l33)+v*((1-u)^2*l31+2*(1-
u)*u*l32+u^2*l33),t1+t23],u=0..1,v=0..1):

```

```

d:=display({d1[1],d1[2],d1[3],d1[4],d1[5],d1[6],d2[1],d2[2],d2[3],d2
[4],d2[5],d2[6],d3}):

#tutup#
e1:=plot3d([u*0+(1-u)*rb1*cos(v),u*0+(1-
u)*rb1*sin(v)+alfa*l31,0],u=0..1,v=0..2*Pi):
e2:=plot3d([u*0+(1-u)*rb1*cos(v),u*0+(1-
u)*rb1*sin(v)+alfa*l33,0],u=0..1,v=0..2*Pi):
for k from 0 to 5 do
e3[k+1]:=plot3d([v*0+(1-v)*((r3*cos(Pi/3*(k+1))-
r3*cos(Pi/3*k))*u+r3*cos(Pi/3*k)),l31,v*0+(1-
v)*((r3*sin(Pi/3*(k+1))-
r3*sin(Pi/3*k))*u+r3*sin(Pi/3*k))+t1+t23],u=0..1,v=0..1):
e4[k+1]:=plot3d([v*0+(1-v)*((r3*cos(Pi/3*(k+1))-
r3*cos(Pi/3*k))*u+r3*cos(Pi/3*k)),l33,v*0+(1-
v)*((r3*sin(Pi/3*(k+1))-
r3*sin(Pi/3*k))*u+r3*sin(Pi/3*k))+t1+t23],u=0..1,v=0..1):
end do:
e:=display({e1,e2,e3[1],e3[2],e3[3],e4[1],e4[2],e4[3]}):

```