



**KAJIAN PEWARNAAN TITIK PADA OPERASI GRAF
LINTASAN, GRAF LINGKARAN DAN GRAF
BINTANG**

SKRIPSI

Oleh

Alfian Yulia Harsya

101810101008

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER**

2015



**KAJIAN PEWARNAAN TITIK PADA OPERASI GRAF
LINTASAN, GRAF LINGKARAN DAN GRAF
BINTANG**

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Studi Matematika(S1) dan mencapai
gelar Sarjana Sains

Oleh

Alfian Yulia Harsya

101810101008

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER**

2015

HALAMAN PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah S.W.T yang maha pengasih lagi maha penyayang, serta sholawat atas Nabi Muhammad S.A.W, kupersembahkan sebuah kebahagiaan dalam perjalanan hidupku teriring rasa terima kasihku yang terdalem kepada:

1. orang tuaku tercinta dan terkasih :Ayahanda Samsul Edy dan Ibunda Rokhimah, serta kedua Kakakku Aditya Rahman dan Fatih Jindar Tamimy, yang senantiasa mengalirkan rasa cinta dan kasih sayangnya serta cucuran keringat dan doa yang tiada pernah putus yang selalu mengiringiku dalam meraih cita-cita;
2. Ibu Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. dan Bapak Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. yang dengar sabar dan tulus ikhlas membimbing sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan;
3. guru dan dosen-dosenku, yang telah memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;
4. sahabat-sahabat terbaikku: Maya, Erin, Cepi, Nenek, Aris, Icam, Wisnu, Argo, Fadkur, Teteh Anggun, Mbak Syifa yang senantiasa membantuku dan menorehkan sebuah pengalaman indah yang tak terlupakan;
5. teman-teman pejuang graf: (Ina, Iil, Karin, Nika, Dwi, Syerly, Cepa, Khuri, Ridho, Inge) yang selalu berbagi suka duka dan selalu memberikan dukungan untuk terus semangat;
6. teman-teman angkatan 2010 FMIPA Matematika yang senantiasa membantuku dan menorehkan sebuah pengalaman indah yang tak terlupakan;
7. Almamater tercinta Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

MOTTO

"Sesungguhnya bersama kesukaran itu ada keringanan. Karena itu bila kau sudah selesai (mengerjakan yang lain). Dan berharaplah kepada Tuhanmu."

(Q.S Al Insyirah : 6-8)*)

"Hai orang-orang yang beriman, Jadikanlah sabar dan shalatmu Sebagai penolongmu, sesungguhnya Allah beserta orang-orang yang sabar."

(Al-Baqarah: 153)**)

"Sebenarnya tantangannya bukan me-manage waktu tapi me-manage diri kita sendiri."

(Mario Teguh)***)

*) Departemen Agama Republik Indonesia. 2004. *Al-Qur'an dan Terjemahannya*. Bandung. CV Penerbit J-ART.

***) Departemen Agama Republik Indonesia. 2004. *Al-Qur'an dan Terjemahannya*. Bandung. CV Penerbit J-ART.

***) www.lokerseni.web.id/2014/01/kumpulan-kata-kata-bijak-motivasi-mario.html

HALAMAN PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Alfian Yulia Harsya

NIM : 101810101008

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: Kajian Pe warnaan Titik pada Operasi Graf Lintasan, Graf Lingkaran dan Graf Bintang adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Januari 2015

Yang menyatakan,

Alfian Yulia Harsya

NIM. 101810101008

SKRIPSI

Kajian Pewarnaan Titik pada Operasi Graf Lintasan, Graf Lingkaran dan Graf Bintang

Oleh

Alfian Yulia Harsya
NIM 101810101008

Dosen Pembimbing 1 : Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.
Dosen Pembimbing 2 : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul Kajian Pewarnaan Titik pada Operasi Graf Lintasan, Graf Lingkaran dan Graf Bintang telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember pada:

Hari :

Tanggal :

Tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji :

Dosen Pembimbing Utama,

Dosen Pembimbing Anggota,

Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.

NIP.19840801 200801 2 006

Dosen Penguji Utama,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

NIP.19680802 199303 1 004

Dosen Penguji Anggota,

Drs. Rusli Hidayat, M.Sc.

NIP.19661012 199303 1 001

M. Ziaul Arif, S.Si., M.Sc.

NIP. 19850111 200812 1 002

Mengesahkan,

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Jember

Prof. Drs. Kusno, DEA.,Ph.D.

NIP. 19610108 198602 1 001

RINGKASAN

Kajian Pewarnaan Titik pada Pengoperasian Graf Lintasan, Graf Lingkaran dan Graf Bintang; Alfian Yulia Harsya, 101810101008; 2015: 95 halaman; Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Teori graf adalah bagian dari matematika diskrit yang banyak digunakan sebagai alat bantu untuk menggambarkan suatu persoalan agar lebih mudah dimengerti dan diselesaikan. Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler, seorang matematikawan berkebangsaan Swiss pada tahun 1736 melalui tulisannya yang berisi upaya pemecahan masalah Jembatan Königsberg yang sangat sulit dipecahkan pada masa itu. Meskipun pada awalnya graf diciptakan untuk diterapkan dalam penyelesaian kasus, namun graf telah mengalami perkembangan yang sangat luas didalam teori graf itu sendiri.

Salah satu teori yang dikembangkan dalam teori graf adalah pewarnaan (*colouring*). Terdapat tiga macam pewarnaan dalam teori graf, yaitu pewarnaan titik (*vertex colouring*), pewarnaan sisi (*face colouring*), dan pewarnaan wilayah (*region colouring*). Pewarnaan titik (*vertex colouring*) adalah pemberian warna pada titik-titik graf dimana dua titik yang bertetangga diberi warna yang berbeda. Jumlah warna paling sedikit yang digunakan untuk mewarnai titik pada graf G disebut bilangan kromatik yang dilambangkan dengan $\chi(G)$. Pewarnaan titik dapat diterapkan pada graf yang merupakan hasil operasi dari beberapa graf khusus. Adapun macam-macam pengoperasian graf yaitu operasi *Joint* ($G + H$), *Cartesian Product* ($G \square H$), *Crown Product* ($G \odot H$), *Tensor Product* ($G \otimes H$), *Composition* ($G[F]$), *Shackel*, dan *Amalgamation*. Pada penelitian ini menggunakan metode penelitian eksploratif dan terapan. Penelitian eksploratif adalah jenis penelitian yang bertujuan menggali hal-hal yang ingin diketahui oleh peneliti dan hasil penelitian dapat digunakan sebagai dasar penelitian selanjutnya. Penelitian terapan (*applied research*) merupakan penyelidikan yang hati-hati, sistematis dan terus-menerus terhadap suatu masalah dengan tujuan untuk digunakan dengan

segera untuk keperluan tertentu. Penelitian ini bertujuan untuk mencari batas atas bilangan kromatik dan fungsi pewarnaan titik pada graf yang dioperasikan. Graf yang digunakan adalah graf lintasan (*path*), graf lingkaran (*cycle*) dan graf bintang (*star*). Pada penelitian ini menghasilkan 10 teorema dan 4 akibat dari teorema sebelumnya, antara lain:

1. **Teorema 4.1.1** *Misal G adalah joint dari graf lintasan dan graf lingkaran. Untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$, bilangan kromatik $G = (P_n + C_m)$ adalah*

$$\chi(P_n + C_m) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } m \text{ genap} \\ 5, & \text{untuk } m \text{ ganjil} \end{cases}$$

2. **Teorema 4.1.2** *Misal G adalah joint dari graf lingkaran dan graf bintang. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, bilangan kromatik $G = (C_n + S_m)$ adalah*

$$\chi(C_n + S_m) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } n \text{ genap} \\ 5, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

3. **Akibat 4.1.1** *Misal G adalah cartesian product dari graf lintasan dan graf lingkaran. Untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$, bilangan kromatik $G = (P_n \square C_m)$ adalah*

$$\chi(P_n \square C_m) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } m \text{ genap} \\ 3, & \text{untuk } m \text{ ganjil} \end{cases}$$

4. **Akibat 4.1.2** *Misal G adalah cartesian product dari graf lingkaran dan graf bintang. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, bilangan kromatik $G = (C_n \square S_m)$ adalah*

$$\chi(C_n \square S_m) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } n \text{ genap} \\ 3, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

5. **Akibat 4.1.3** *Misal G adalah tensor product dari graf lintasan dan graf lingkaran. Untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$, bilangan kromatik $G = (P_n \otimes C_m)$*

adalah

$$\chi(P_n \otimes C_m) = 2$$

6. **Akibat 4.1.4** Misal G adalah tensor product dari graf lingkaran dan graf bintang. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, bilangan kromatik $G = (C_n \otimes S_m)$ adalah

$$\chi(C_n \otimes S_m) = 2$$

7. **Teorema 4.1.3** Misal G adalah composition dari graf lintasan dan graf lingkaran. Untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$, bilangan kromatik $G = (P_n[C_m])$ adalah

$$\chi(P_n[C_m]) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } m \text{ genap} \\ 6, & \text{untuk } m \text{ ganjil} \end{cases}$$

8. **Teorema 4.1.4** Misal G adalah composition dari graf lingkaran dan graf bintang. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, bilangan kromatik $G = (C_n[S_m])$ adalah

$$\chi(C_n[S_m]) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } n \text{ genap} \\ 5, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

9. **Teorema 4.1.5** Misal G adalah crown product dari graf lintasan dan graf lingkaran. Untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$, bilangan kromatik $G = (P_n \odot C_m)$ adalah

$$\chi(P_n \odot C_m) = 3$$

10. **Teorema 4.1.6** Misal G adalah crown product dari graf lingkaran dan graf

bintang. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, bilangan kromatik $G = (C_n \odot S_m)$ adalah

$$\chi(C_n \odot S_m) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } m \text{ genap} \\ 4, & \text{untuk } m \text{ ganjil} \end{cases}$$

11. **Teorema 4.1.7** Misal G adalah shackle dari operasi cartesian graf lingkaran dan graf bintang. Untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$, bilangan kromatik $G = (Shack(P_n \square C_m, r))$ adalah

$$\chi(Shack(P_n \square C_m, r)) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } m \text{ genap} \\ 3, & \text{untuk } m \text{ ganjil} \end{cases}$$

12. **Teorema 4.1.8** Misal G adalah shackle dari graf bintang. Untuk $n \geq 3$ dan $r \geq 2$, bilangan kromatik $G = (Shack(S_n, r))$ adalah

$$\chi(Shack(S_n, r)) = 2$$

13. **Teorema 4.1.9** Misal G adalah amalgamation dari hasil operasi cartesian graf lintasan dan graf lingkaran. Untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$ dan $r \geq 2$, bilangan kromatik $G = (Amal(P_n \square C_m, v = 1, r))$ adalah

$$\chi(Amal(P_n \square C_m, v = 1, r)) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } m \text{ genap} \\ 3, & \text{untuk } m \text{ ganjil} \end{cases}$$

14. **Teorema 4.1.10** Misal G adalah amalgamation dari dari graf bintang. Untuk $n \geq 3$ dan $r \geq 2$, bilangan kromatik $G = (Amal(S_n, v = 1, r))$ adalah

$$\chi(Amal(S_n, v = 1, r)) = 2$$

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah Swt atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul Kajian Pewarnaan Titik pada Operasi Graf Lintasan, Graf Lingkaran dan Graf Bintang. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Prof. Drs. Kusno, DEA., Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Kosala Dwidja Purnomo S.Si., M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Utama, Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D., selaku Dosen Pembimbing Anggota, Drs. Rusli Hidayat, M.Sc., selaku dosen Penguji I dan M.Ziaul Arif, S.Si., M.Sc., selaku dosen penguji II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
4. dosen dan Karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
5. semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Januari 2015

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman Persembahan	iii
HALAMAN MOTTO	iv
Halaman Pernyataan	v
HALAMAN PENGESAHAN	vii
RINGKASAN	viii
Kata Pengantar	xii
DAFTAR ISI	xiv
DAFTAR GAMBAR	xvii
DAFTAR TABEL	xviii
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan	3
1.5 Manfaat	3
2 TINJAUAN PUSTAKA	4
2.1 Definisi dan Terminologi Graf	4
2.2 Pewarnaan Graf	6
2.2.1 Pewarnaan Titik (<i>Vertex colouring</i>)	7
2.2.2 Pewarnaan Sisi (<i>Face Colouring</i>)	7
2.2.3 Pewarnaan Wilayah (<i>Region Colouring</i>)	8
2.3 Fungsi	8
2.4 Graf Khusus dan Operasi Graf	10
2.5 Aplikasi	19
2.6 Hasil-Hasil Pewarnaan Titik	22
3 METODE PENELITIAN	24
3.1 Jenis Penelitian	24
3.2 Data	24
3.3 Rancangan Penelitian	24

4 HASIL DAN PEMBAHASAN	27
4.1 Bilangan Kromatik dan Fungsi Pewarnaan Titik	27
4.2 Pembahasan	77
5 KESIMPULAN DAN SARAN	79
5.1 Kesimpulan	79
5.2 Saran	80
DAFTAR PUSTAKA	81
LAMPIRAN-LAMPIRAN	83

DAFTAR GAMBAR

2.1	Contoh graf yang memuat Jalan, Jejak, Lintasan, Sikel dan Matriks Ketetanggaan	6
2.2	Pewarnaan titik	8
2.3	Pewarnaan sisi	8
2.4	Pewarnaan wilayah	9
2.5	(a) fungsi injektif, (b) fungsi surjektif dan (c) fungsi bijektif . . .	10
2.6	Graf Lengkap K_5 dan K_6	11
2.7	Graf Lintasan P_3 dan P_5	11
2.8	Graf Lingkaran C_3 , C_4 , dan C_5	12
2.9	Graf Bintang S_8	12
2.10	Graf Tangga Permata Dl_3	13
2.11	Graf Tribun \mathfrak{S}_5	14
2.12	Graf Rantai Pentagon $B\zeta_4$	14
2.13	Contoh operasi <i>Joint</i>	15
2.14	Contoh operasi <i>Cartesian Product</i>	15
2.15	Contoh operasi <i>Tensor Product</i>	16
2.16	Contoh operasi <i>Composition</i>	17
2.17	Contoh operasi <i>Crown Product</i>	18
2.18	Contoh operasi <i>Shackel</i>	18
2.19	Contoh operasi <i>Amalgamation</i>	19
2.20	Representasi hewan di Taman Safari	21
2.21	Setelah diberi pewarnaan	21
3.1	Rancangan Penelitian	26
4.1	Contoh operasi $(P_3 + C_6)$	29
4.2	Contoh pewarnaan titik $(P_n + C_m)$ untuk m genap	30
4.3	Contoh pewarnaan titik $(P_n + C_m)$ untuk m ganjil	30
4.4	Contoh operasi $(C_4 + S_4)$	32
4.5	Contoh pewarnaan titik $(C_n + S_m)$ untuk n genap	33

4.6	Contoh pewarnaan titik $(C_n + S_m)$ untuk n ganjil	34
4.7	Contoh operasi $(P_3 \square C_6)$	36
4.8	Contoh pewarnaan titik $(P_n \square C_m)$ untuk m genap	37
4.9	Contoh pewarnaan titik $(P_n \square C_m)$ untuk m ganjil	37
4.10	Contoh operasi $(C_4 \square S_3)$	40
4.11	Contoh pewarnaan titik $(C_n \square S_m)$ untuk n genap	41
4.12	Contoh pewarnaan titik $(C_n \square S_m)$ untuk n ganjil	41
4.13	Contoh operasi $(P_3 \otimes C_6)$	43
4.14	Contoh pewarnaan titik $(P_n \otimes C_m)$ untuk m genap	44
4.15	Contoh pewarnaan titik $(P_n \otimes C_m)$ untuk m ganjil	45
4.16	Contoh operasi $(C_3 \otimes S_4)$	47
4.17	Contoh pewarnaan titik $(C_n \otimes S_m)$	48
4.18	Contoh operasi $(P_2[C_4])$	49
4.19	Contoh pewarnaan titik $(P_n[C_m])$ untuk m genap	50
4.20	Contoh pewarnaan titik $(P_n[C_m])$ untuk m ganjil	51
4.21	Contoh operasi $(C_4[S_3])$	53
4.22	Contoh pewarnaan titik $(C_n[S_m])$ untuk n genap	54
4.23	Contoh pewarnaan titik $(C_n[S_m])$ untuk n ganjil	54
4.24	Contoh operasi $(P_3 \odot C_6)$	57
4.25	Contoh pewarnaan titik $(P_n \odot C_m)$ untuk m genap	58
4.26	Contoh pewarnaan titik $(P_n \odot C_m)$ untuk m ganjil	58
4.27	Contoh operasi $(C_4 \odot S_4)$	61
4.28	Contoh pewarnaan titik $(C_n \odot S_m)$ untuk n genap	62
4.29	Contoh pewarnaan titik $(C_n \odot S_m)$ untuk n ganjil	62
4.30	Contoh operasi $(Shack(P_3 \square C_6, 3))$	65
4.31	Contoh pewarnaan titik $Shack(P_n \square C_m, r)$ untuk m genap	66
4.32	Contoh pewarnaan titik $Shack(P_n \square C_m, r)$ untuk m ganjil	66
4.33	Contoh operasi $(Shack(S_5, 4))$	69
4.34	Contoh pewarnaan titik $Shack(S_n, r)$	69
4.35	Contoh operasi $(Amal(P_n \square C_m))$	71
4.36	Contoh pewarnaan titik $Amal(P_n \square C_m, v = 1, r)$ untuk m genap	72

4.37	Contoh pewarnaan titik $Amal(P_n \square C_m, v = 1, r)$ untuk m ganjil	73
4.38	Contoh operasi ($Amal(S_8, v = 1, 3)$)	75
4.39	Contoh pewarnaan titik $Amal(S_n, v = 1, r)$	76

DAFTAR TABEL

2.1	Daftar Hewan di Taman Safari.	20
2.2	Hasil pewarnaan titik penelitian terdahulu	22