



**SUPER  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  ANTIMAGIC TOTAL COVERING  
PADA GRAF TRIANGULAR LADDER**

**SKRIPSI**

Oleh

**Nur Asia Jamil**

**NIM 101810101010**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS JEMBER**

**2014**



**SUPER  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  ANTIMAGIC TOTAL COVERING  
PADA GRAF TRIANGULAR LADDER**

**SKRIPSI**

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

**Nur Asia Jamil**  
**NIM 101810101010**

**JURUSAN MATEMATIKA**  
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**  
**UNIVERSITAS JEMBER**

**2014**

## PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah S.W.T yang maha pengasih lagi maha penyayang, serta sholawat atas Nabi Muhammad S.A.W, kupersembahkan sebuah kebahagiaan penggalan bait dalam perjalanan hidupku teriring rasa terima kasihku yang terdalam kepada:

1. Abahku Abdul Jamil dan Ibuku Maria Ulfa, serta Kakakku Uswatun Hasanah dan Adikku Khotimatul Husna yang senantiasa mengalirkan rasa cinta dan kasih sayangnya serta cucuran keringat dan doa yang tiada pernah putus yang selalu mengiringiku dalam meraih cita-cita, dan tidak lupa pula Mas Hardy dan ponakan kecilku Maghfirotn Nur Aini. Kalian orang-orang hebat sedunia;
2. Ibu Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. dan Bapak Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. selaku pembimbing skripsi yang dengan sabar telah memberikan ilmu dan bimbingan selama menyelesaikan skripsiku;
3. Bapak dan Ibu guru TK dan MI Tarbiyatul Athfal Drajat, SMP Negeri 2 Paciran Sunan Drajat, MA Tarbiyatut Tholabah, serta Dosen Matematika FMIPA Universitas Jember yang telah dengan sabar memberikan ilmunya kepadaku, hingga aku menghayati peranku saat ini;
4. Bapak Harsoeko yang sudah membantuku disaat aku mengalami kesulitan;
5. keluarga besarku yang ada di Probolinggo Maupun di Lamongan, Nenek, Pak De, Bu De, Pak Lek, Bu Lek, semua sepupuku, dan ponakan-ponakanku;
6. Taufik Qirrohman yang selalu ada disaat aku senang maupun sedih dan terimakasih sudah hadir dalam kehidupanku;

## MOTTO

"Apa yang diperintahkan Rosul kepadamu maka laksanakanlah, dan apa yang dilarangnya maka tinggalkanlah."

(QS.Al-Hasyr :7)\*

"Hidup harus dibekali agama supaya bisa tertata, hidup harus dibekali ilmu pengetahuan supaya hidup mudah dan terarah, hidup harus dilandasi rasa supaya terasa indah."

(Harsoeko)\*\*

"Usaha tanpa do'a adalah kesombongan, dan do'a tanpa usaha adalah kebohongan."\*\*\*

"Dulu Allah, kemaren Allah, sekarang Allah, besok Allah, lusa Allah, dan selamanya tetap Allah."\*\*\*\*

\* Departemen Agama Republik Indonesia. 2004. *Al-Qur'an dan Terjemahannya*. Bandung. CV Penerbit J-ART.

\*\* Motivasi dari Bapak Harsoeko secara pribadi

\*\*\* [www.motivasi-islami.com](http://www.motivasi-islami.com)

\*\*\*\* Inspirasi pribadi

## PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Nur Asia Jamil

NIM : 101810101010

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: Super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  Antimagic Total Covering pada Graf Triangular Ladder adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Desember 2014

Yang menyatakan,

Nur Asia Jamil

NIM. 101810101010

# SKRIPSI

## SUPER $(a,d)$ - $\mathcal{H}$ ANTIMAGIC TOTAL COVERING PADA GRAF TRIANGULAR LADDER

Oleh

**Nur Asia Jamil**  
**NIM 101810101010**

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.  
Dosen Pembimbing Anggota : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

**PERSETUJUAN**

**SUPER  $(a,d)$ - $\mathcal{H}$  ANTIMAGIC TOTAL COVERING PADA GRAF  
TRIANGULAR LADDER**

**SKRIPSI**

diajukan guna memenuhi syarat untuk menyelesaikan pendidikan Program  
Sarjana Strata Satu Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu  
Pengetahuan Alam Universitas Jember

Nama Mahasiswa : Nur Asia Jamil  
NIM : 101810101010  
Jurusan : Matematika  
Angkatan Tahun : 2010  
Daerah Asal : Lamongan  
Tempat, Tanggal Lahir : Lamongan, 26 Maret 1992

Disetujui oleh:

Pembimbing Utama,

Pembimbing Anggota,

Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.  
NIP. 19840801 200801 2 006

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.  
NIP. 19680802 199303 1 004

## PENGESAHAN

Skripsi berjudul Super  $(a,d)$ - $\mathcal{H}$  Antimagic Total Covering pada Graf Triangular Ladder telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember pada:

Hari :

Tanggal :

Tempat : Gedung Matematika FMIPA UNEJ

Tim Penguji :

Dosen Pembimbing Utama,

Dosen Pembimbing Anggota,

Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.

NIP.19840801 200801 2 006

Dosen Penguji Utama,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

NIP.19680802 199303 1 004

Dosen Penguji Anggota,

Ahmad Kamsyakawuni, S.Si.,M.Kom.

NIP.19721129 199802 1 001

Kosala Dwidja P., S.Si.,M.Si.

NIP. 19690828 199802 1 001

Mengetahui,

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Jember

Prof. Drs. Kusno, DEA.,Ph.D.

NIP. 19610108 198602 1 001

## RINGKASAN

**Super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  Antimagic Total Covering pada Graf Triangular Ladder;**  
Nur Asia Jamil, 101810101010; 2014: 67 halaman; Jurusan Matematika, Fakultas  
Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Graf adalah salah satu kajian dalam matematika diskrit. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek diskrit tersebut. Pelabelan graf merupakan suatu topik dalam teori graf. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan cacah yang disebut label. Terdapat berbagai jenis tipe pelabelan dalam graf, salah satunya adalah super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic Total Covering ( $\mathcal{SHATC}$ ), dimana  $a$  bobot sisi terkecil dan  $d$  nilai beda.

Salah satu jenis graf yang belum diketahui super  $(a, d)$  antimagic adalah graf triangular ladder. Graf triangular ladder yang dinotasikan dengan  $L_n$  adalah sebuah graf yang memiliki bentuk menarik yang merupakan pengembangan dari graf ladder, dimana menambahkan sisi  $u_i v_{i+1}$  untuk  $1 \leq i \leq n - 1$ . Gabungan diskonektif graf triangular ladder merupakan gabungan saling lepas dari  $m$  duplikat graf triangular ladder dan dinotasikan dengan  $mL_n$ .

Graf triangular ladder mempunyai titik  $V(mL_n) = \{u_i^j, v_i^j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$  dan sisi  $E(mL_n) = \{u_i^j v_i^j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \cup \{u_i^j u_{i+1}^j, v_i^j v_{i+1}^j, u_i^j v_{i+1}^j : 1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq j \leq m\}$ . Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah deskriptif aksiomatik yaitu dengan menurunkan lemma yang telah ada tentang nilai batas  $d$ , kemudian diterapkan dalam super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering pada graf  $L_n$  dan  $mL_n$  dan metode pendeteksian pola yaitu untuk menentukan pola umum super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering pada graf triangular ladder. Hasil penelitian ini berupa lemma dan teorema baru mengenai super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic pada Graf  $L_n$  dan  $mL_n$ . Teorema dan lemma yang dihasilkan adalah sebagai berikut:

1. **Lemma 4.1.1** *Jika sebuah graf  $G (V, E)$  adalah pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering maka  $d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s-1}$  untuk  $S = |H_i|$ ,*

$$p_G = |V|, q_G = |E|, p_H = |V'|, q_H = |E'|.$$

2. **Teorema 4.1.1** *Graf triangular ladder  $L_n$  memiliki super  $(16n - 3, 0) - C_3$  antimagic total covering pada untuk  $n \geq 2$*
3. **Teorema 4.1.2** *Graf triangular ladder  $L_n$  memiliki super  $(15n - 1, 1) - C_3$  antimagic total covering pada untuk  $n \geq 2$*
4. **Teorema 4.1.3** *Graf triangular ladder  $L_n$  memiliki super  $(12n + 3, 2) - C_3$  antimagic total covering pada untuk  $n \geq 2$*
5. **Teorema 4.1.4** *Graf triangular ladder  $L_n$  memiliki super  $(11n + 5, 3) - C_3$  antimagic total covering pada untuk  $n \geq 2$*
6. **Teorema 4.1.5** *Graf triangular ladder  $L_n$  memiliki super  $(10n + 6, 4) - C_3$  antimagic total covering pada untuk  $n \geq 2$*
7. **Teorema 4.1.6** *Graf triangular ladder  $L_n$  memiliki super  $(9n + 8, 5) - C_3$  antimagic total covering pada untuk  $n \geq 2$*
8. **Teorema 4.1.7** *Graf triangular ladder  $L_n$  memiliki super  $(10n + 6, 6) - C_3$  antimagic total covering pada untuk  $n \geq 2$*
9. **Teorema 4.1.8** *Graf triangular ladder  $L_n$  memiliki super  $(6n + 12, 9) - C_3$  antimagic total covering pada untuk  $n \geq 2$*

Dari kajian diatas ada beberapa batasan  $m$  dan  $n$  yang belum ditemukan sehingga dalam penelitian ini diajukan masalah terbuka.

1. **Masalah terbuka.** *Super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering pada graf triangular ladder  $L_n$  untuk  $n \geq 2$  dengan  $d = 7$  dan  $d = 8$ .*
2. **Masalah terbuka.** *Super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering pada gabungan graf triangular ladder  $(mL_n)$ , dengan  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$  untuk  $d \in \{1, 3, 5, 7, 8, 9\}$ .*

## KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul Super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  Antimagic Total Covering pada Graf Triangular Ladder. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Prof. Drs. Kusno, DEA.,Ph.D. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Kosala Dwidja Purnomo., S.Si.,M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Ika Hesti Agustin, S.Si, M.Si. selaku Dosen Pembimbing Utama dan Prof. Drs.Dafik, M.Sc.,Ph.D. selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
4. Ahmad Kamsyakawuni, S.Si.,M.Kom. dan Kosala Dwidja Purnomo., S.Si., M.Si. selaku dosen penguji yang telah memberikan masukan pada skripsi ini;
5. Kiswara Agung Santoso, S.Si.,M.Kom. selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah membimbing selama penulis menjadi mahasiswa;
6. Dosen dan Karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
7. Abah Abdul Jamil dan Ibunda Maria Ulfa tercinta yang sudah merawat dan selalu menyayangiku dari lahir hingga akhir hayatku;
8. teman-teman angkatan 2010 Matematika FMIPA Universitas Jember yang senantiasa membantuku dan menorehkan sebuah pengalaman serta kenangan indah yang tak terlupakan;

9. keluarga Besar Kos-kosan Kalimantan 1 no.18 Ibu Maryam, Pak Sipol, Riska, Fitri, Dewi, Mas Anang, Mas Rizky, Zulfi, Bashofi, terimakasih atas kehidupan keluarga yang indah;
10. Khuri Faridatun Nafisah dan Dwi Agustin Retno Wardani, *you are my special friends, I will not forget toward your nice to me*;
11. teman-teman seperjuangan graf (Ina, Putri HP, Nika, Karin, Sherly, Alfian, Icha, Sari, Muafa, dan teman-teman penggiat graf lainnya) kalian mengajarkan bahwa perbedaan bukan alasan untuk tidak saling membantu;
12. teman-teman seperjuangan dari Lamongan (Izuddin, Muzayyanah, Emi) kalian seperti keluarga bagiku;
13. teman-teman ARKECHE yang sudah berbagi pengalaman, tukar pikiran, dan memberi motivasi kepadaku;

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan mereka dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Desember 2014

Penulis

## DAFTAR ISI

HALAMAN SAMPUL . . . . .	i
HALAMAN JUDUL . . . . .	ii
HALAMAN PERSEMBAHAN . . . . .	iii
HALAMAN MOTTO . . . . .	iv
HALAMAN PERNYATAAN . . . . .	v
HALAMAN PERSETUJUAN . . . . .	vii
HALAMAN PENGESAHAN . . . . .	viii
RINGKASAN . . . . .	ix
KATA PENGANTAR . . . . .	xi
DAFTAR ISI . . . . .	xiv
DAFTAR GAMBAR . . . . .	xvi
DAFTAR TABEL . . . . .	xvii
DAFTAR LAMBANG . . . . .	xviii
<b>1 PENDAHULUAN . . . . .</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang Masalah . . . . .	1
1.2 Rumusan Masalah . . . . .	3
1.3 Batasan Masalah . . . . .	3
1.4 Tujuan . . . . .	3
1.5 Manfaat . . . . .	4
<b>2 TINJAUAN PUSTAKA . . . . .</b>	<b>5</b>
2.1 Definisi Graf dan Terminologi Graf . . . . .	5
2.2 Fungsi . . . . .	11
2.3 Pelabelan Graf . . . . .	13
2.3.1 Definisi Pelabelan Graf . . . . .	13
2.3.2 Pelabelan Super- $\mathcal{H}$ Antimagic Total Covering . . . . .	15
2.4 Graf-Graf Khusus . . . . .	15
2.5 Aplikasi Graf . . . . .	19
2.6 Hasil-Hasil Pelabelan Selimut Super $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -Antimagic . . . . .	20
<b>3 METODE PENELITIAN . . . . .</b>	<b>23</b>

3.1	Definisi Operasional . . . . .	23
3.1.1	Pelabelan Super $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ Antimagic Total Covering . . . . .	23
3.1.2	Graf Triangular Ladder $L_n$ . . . . .	24
3.1.3	Gabungan Saling Lepas Graf Triangular Ladder $mL_n$ . . . . .	24
3.2	Teknik Penelitian . . . . .	24
<b>4</b>	<b>HASIL DAN PEMBAHASAN</b> . . . . .	<b>28</b>
4.1	Super $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ Antimagic Total Covering pada Graf Triangular Ladder Konektif . . . . .	28
4.2	Pelabelan Super $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ Antimagic Total Covering pada Gabungan Graf Triangular Ladder Diskonektif . . . . .	48
4.3	Hasil dan Pembahasan . . . . .	60
<b>5</b>	<b>KESIMPULAN DAN SARAN</b> . . . . .	<b>65</b>
5.1	Kesimpulan . . . . .	65
5.2	Saran . . . . .	65
	<b>DAFTAR PUSTAKA</b> . . . . .	<b>66</b>

## DAFTAR GAMBAR

2.1	Contoh (a) graf $H$ dan (b) graf $G$ . . . . .	5
2.2	Contoh graf $G$ dan subgraf dari $G$ . . . . .	8
2.3	Graf Terpotong . . . . .	9
2.4	Keisomorfisan graf . . . . .	10
2.5	Graf dengan matriks ketetanggaannya . . . . .	10
2.6	(a) fungsi injektif, (b) fungsi surjektif dan (c) fungsi bijektif . . .	12
2.7	(i) Pelabelan titik, (ii) Pelabelan sisi, (iii) Pelabelan total . . . . .	14
2.8	Graf Roda $W_8$ . . . . .	16
2.9	Graf Siklus . . . . .	16
2.10	Graf Kipas $\hat{F}_7$ . . . . .	17
2.11	Graf Bintang $S_8$ . . . . .	17
2.12	Graf Siklus Generalized Petersen . . . . .	18
2.13	Graf Ladder . . . . .	18
2.14	Graf triangular ladder $L_5$ . . . . .	19
2.15	Pelabelan selimut super $(33,1)-C_3$ antimagic pada graf kipas . . .	20
2.16	Pelabelan selimut super $(63,1)-C_3$ antimagic pada graf kipas . . .	21
3.1	Graf triangular ladder $L_n$ . . . . .	24
3.2	Pelabelan super $C_3$ antimagic total covering pada $mL_5$ . . . . .	25
3.3	Rancangan Penelitian . . . . .	27
4.1	Jumlah titik dan sisi graf pada $L_2$ (a), $L_3$ (b), dan $L_4$ (c) . . . . .	29
4.2	Super $(77,0)-C_3$ antimagic total covering pada $L_5$ . . . . .	36
4.3	Super $(74,1)-C_3$ antimagic total covering pada $L_5$ . . . . .	37
4.4	Super $(63,2)-C_3$ antimagic total covering pada $L_5$ . . . . .	39
4.5	Super $(60,3)-C_3$ antimagic total covering pada $L_5$ . . . . .	41
4.6	Super $(56,4)-C_3$ antimagic total covering pada $L_5$ . . . . .	43
4.7	Super $(53,5)-C_3$ antimagic total covering pada $L_5$ . . . . .	44
4.8	Super $(56,6)-C_3$ antimagic total covering pada $L_5$ . . . . .	46
4.9	Super $(42,9)-C_3$ antimagic total covering pada $L_5$ . . . . .	48

4.10	Super $(225,0)-C_3$ antimagic total covering pada $3L_5$ . . . . .	53
4.11	Super $(181,2)-C_3$ antimagic total covering pada $3L_5$ . . . . .	56
4.12	Super $(158,4)-C_3$ antimagic total covering pada $3L_5$ . . . . .	58
4.13	Super $(156,6)-C_3$ antimagic total covering pada $3L_5$ . . . . .	61

## DAFTAR TABEL

2.1	Ringkasan pelabelan selimut super $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic. . . . .	21
4.1	Hasil Penelitian super $(a, d)$ - $C_3$ Antimagic Total Covering pada Graf Tunggal Triangular Ladder ( <i>Konektif</i> ) . . . . .	62
4.2	Hasil Penelitian super $(a, d)$ - $C_3$ Antimagic Total Covering pada Gabungan Saling Lepas Graf Triangular Ladder ( <i>Diskonektif</i> ) . .	62

## DAFTAR LAMBANG

$G$	=	Graf $G$
$G(V, E)$	=	Sebarang graf tak berarah dengan $V$ adalah himpunan tak kosong dari semua titik dan $E$ adalah himpunan sisi
$v_n$	=	Titik ke- $n$ pada suatu graf
$e_n$	=	Sisi ke- $n$ dari suatu graf
$ V(G) $	=	Himpunan titik dari graf $G$ yang disebut <i>order</i>
$ E(G) $	=	Himpunan sisi dari graf $G$ yang disebut ukuran ( <i>size</i> )
$\mathcal{H}AVC$	=	$\mathcal{H}$ <i>antimagic vertex covering</i> atau pelabelan titik $\mathcal{H}$ antiajaib selimut
$\mathcal{SHATC}$	=	<i>Super <math>\mathcal{H}</math> antimagic total covering</i> atau super $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ antiajaib total selimut
$d$	=	Nilai beda barisan bobot total selimut pada $\mathcal{SHATC}$
$a$	=	Bobot total selimut terkecil yang merupakan suku pertama barisan bobot total selimut pada $\mathcal{SHATC}$
$L_n$	=	Lambang untuk graf triangular ladder
$mL_n$	=	Lambang untuk gabungan graf triangular ladder
$n$	=	Banyaknya titik pada bagian badan graf triangular ladder
$m$	=	Banyaknya gabungan saling lepas pada graf Triangular Ladder
$u_i$	=	Titik ke- $i$ pada bagian atas graf $L_n$
$v_i$	=	Titik ke- $i$ pada bagian bawah graf $L_n$
$u_i^j$	=	Titik ke- $i$ dalam komponen ke- $j$ pada bagian atas graf $mL_n$
$v_i^j$	=	Titik ke- $i$ dalam komponen ke- $j$ pada bagian bawah graf $mL_n$
$f(u)$	=	Fungsi bijektif pelabelan titik $u$ untuk graf triangular ladder
$f(v)$	=	Fungsi bijektif pelabelan titik $v$ untuk graf triangular ladder
$f(uv)$	=	Fungsi bijektif pelabelan sisi $u$ ke $v$ untuk graf triangular ladder
$w_f$	=	Bobot total selimut graf triangular ladder

## BAB 1. PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang Masalah

Salah satu cabang matematika aplikasi yang saat ini banyak dikembangkan adalah Teori Graf. Teori Graf bermula dari masalah jembatan Königsberg, sebuah kota di Prusia (sekarang Kaliningrad, Rusia) merupakan masalah yang pertama kali menggunakan graf yang diperkenalkan oleh matematikawan yang berasal dari Swiss yaitu Leonhard Euler pada tahun 1736. Masalah jembatan Königsberg adalah kemungkinan bisa atau tidak melewati ketujuh jembatan yang ada di kota Königsberg masing-masing tepat satu kali dan kembali lagi ke tempat semula. Euler memecahkan masalah tersebut dengan membuktikan yang sederhana dengan mempresentasikan masalah tersebut dengan menggunakan titik sebagai representasi untuk daratan dan sisi sebagai representasi untuk tiap-tiap jembatan yang menghubungkan setiap daratan. Untuk selanjutnya, representasi titik dan sisi yang diperkenalkan oleh Euler tersebut dinamakan dengan graf.

Salah satu topik dalam teori graf yang banyak berkembang adalah pelabelan graf. Pelabelan graf muncul pertama kali pada pertengahan tahun 1960-an, diperkenalkan oleh Sedlacek (1964), Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970). Berdasarkan elemen-elemen yang dilabeli maka pelabelan dibagi kedalam tiga jenis, yaitu pelabelan titik (*vertex labeling*), pelabelan sisi (*edge labeling*), dan pelabelan total (*total labeling*). Pelabelan titik pada graf adalah pelabelan dengan daerah asalnya berupa himpunan titik yang memenuhi sifat tertentu. Pelabelan sisi pada graf adalah pelabelan dengan daerah asalnya berupa himpunan sisi yang memenuhi sifat tertentu. Sedangkan pelabelan total pada graf adalah pelabelan dengan daerah asalnya berupa himpunan titik dan sisi yang memenuhi sifat tertentu (Kotzig dan Rosa, 1970). Terdapat berbagai jenis tipe pelabelan dalam graf, salah satunya adalah pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic (SEATL). Pelabelan ini diperkenalkan oleh Simanjutak, Bertault, dan Miller pada tahun 2000 (Dafik, 2007).

Berdasarkan elemen-elemennya pelabelan berkembang menjadi pelabelan ajaib dan anti ajaib. Pelabelan ajaib (*magic*) adalah jika semua sisi mempunyai bobot yang sama. Sedangkan pelabelan anti ajaib (*antimagic*) adalah pengembangan dari pelabelan ajaib (*magic*) yang dilakukan oleh Hartsfield dan Ringel, 1994. Hartsfield dan Ringel, 1994, mendefinisikan bahwa suatu graf  $G$  yang memiliki verteks sebanyak  $v_G = |V| = |V(G)|$  dan *edge* sebanyak  $e_G = |E| = |E(G)|$  disebut antimagic jika masing-masing *edge* dilabeli dengan  $1, 2, 3, \dots, e_G$  sehingga bobot verteksnya saling berbeda *pairwise distinct*, dengan sebuah bobot verteks dari verteks  $v$ , verteks  $v$  adalah jumlah label dari semua *edge* yang *incident* dengan  $v$ . Bisa disimpulkan bahwa pelabelan antimagic adalah mempunyai bobot sisi yang berbeda dan membentuk barisan aritmatika dengan  $a$  sebagai suku pertama dan  $d$  sebagai nilai bedanya, dimana  $d$  akan dicari nilai batas atasnya. Sedangkan pelabelan super adalah pelabelan titik dan sisi dimana label titik kurang dari label sisi ( $|V(G)| < |E(G)|$ ).

Pengembangan dari pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic (SEATL) adalah pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering (SHATC). Pada tahun 2009, Inayah dkk mengembangkan suatu pelabelan super  $\mathcal{H}$  antimagic total covering (SHATC), dengan penjelasan bahwa suatu pelabelan selimut  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic pada graf  $G$  adalah sebuah fungsi bijektif sehingga terdapat jumlahan yang merupakan deret aritmatika  $a, a + d, a + 2d, \dots, a + (t - 1)d$ . Pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering merupakan fungsi bijektif karena label selimut untuk tiap selimut pasti berbeda maka label selimutnya selalu berbeda dan berurutan serta setiap label selimut yang merupakan range dan semuanya adalah kodomain diperoleh dari melabeli setiap selimut pada graf dengan bilangan berurutan setelah label titik terbesar. Setelah itu pada tahun 2010, Simanjuntak dkk juga meneliti tentang pelabelan total selimut super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  Antimagic pada graf Shackle tunggal.

Pada penelitian ini dibahas tentang super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic covering (selimut) pada graf triangular ladder. Dimana penelitian ini merupakan pengembangan pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic (SEATL) pada graf triangular ladder (Fuad, 2009). Graf triangular ladder tunggal dinotasikan  $L_n$  dengan  $n \geq 2$

adalah sebuah graf yang diperoleh dengan melengkapi graf ladder dengan menambahkan sisi  $u_i v_{i+1}$  untuk  $1 \leq i \leq n - 1$ . Adapun gabungan graf triangular ladder  $mL_n$  didefinisikan sebagai gabungan saling lepas dari sebanyak  $m$  graf triangular ladder yang mempunyai titik  $V(mL_n) = \{u_i^j, v_i^j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$  dan sisi  $E(mL_n) = \{u_i^j v_i^j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \cup \{u_i^j u_{i+1}^j, v_i^j v_{i+1}^j, u_i^j v_{i+1}^j : 1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq j \leq m\}$ . Nilai  $d$  tidaklah tunggal,  $d \leq t$  dengan  $t$  bilangan bulat non negatif yang merupakan nilai terbesar untuk nilai  $d$ . Selain nilai  $d$  terdapat fungsi bijektif yang digunakan untuk menemukan  $(a, d)$  dengan pelabelan yang telah ditemukan.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini yaitu:

- a. berapa batas atas super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic covering pada graf triangular ladder tunggal (konektif) dan gabungan saling lepas (diskonektif)?
- b. bagaimana fungsi bijektif super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic covering pada graf triangular ladder tunggal (konektif) dan gabungan saling lepas (diskonektif)?

## 1.3 Batasan Masalah

Untuk menghindari meluasnya permasalahan yang akan dipecahkan, maka dalam penelitian ini permasalahannya dibatasi pada:

- a. graf berhingga yang sederhana, yaitu graf yang tidak mempunyai loop dan sisi ganda.
- b. super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic covering pada graf triangular ladder disimbolkan dengan  $L_n$  dan  $mL_n$  dimana  $m \geq 2$  dan  $n \geq 2$ .

## 1.4 Tujuan

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

- a. menentukan batas atas super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic covering pada graf triangular ladder tunggal (konektif) dan gabungan saling lepas (diskonektif).
- b. menentukan fungsi bijektif super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic covering pada graf triangular ladder tunggal (konektif) dan gabungan saling lepas (diskonektif).

### 1.5 Manfaat

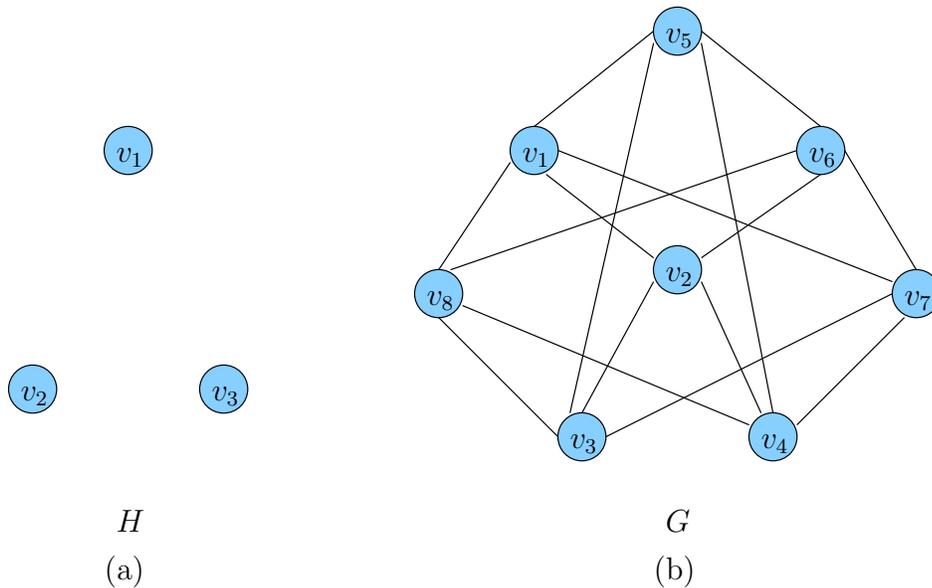
Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah:

- a. menambah pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya dalam ruang lingkup selimut graf, yaitu mengetahui fungsi bijektif super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic covering pada graf triangular ladder konektif dan diskonektif.
- b. memberi motivasi pada peneliti lain untuk meneliti super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic covering pada graf dan jenis yang lain.
- c. hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan atau perluasan ilmu dan aplikasi dalam masalah super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic covering.

## BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

### 2.1 Definisi Graf dan Terminologi Graf

Graf tak berarah atau sebuah graf  $G$  diartikan sebuah struktur  $G = (V(G), E(G))$ , dimana  $V(G)$  adalah himpunan tidak kosong dari elemen yang disebut titik (*vertex*), dan  $E(G)$  adalah himpunan boleh kosong dari pasangan tak terurut dua titik  $v_1, v_2$  dimana titik  $v_1, v_2 \in V$  yang disebut sisi (*edges*).  $V$  disebut himpunan titik dari  $G$  dan  $E$  disebut himpunan sisi dari  $G$ .  $V(G)$  adalah himpunan titik dari graf  $G$  dan  $E(G)$  adalah himpunan sisi dari graf  $G$ . Jumlah titik pada graf  $G$  disebut *order* dari  $G$  dinotasikan  $|V(G)|$  sedangkan jumlah sisinya disebut *size* dari  $G$  dinotasikan  $|E(G)|$ . Graf yang mempunyai *order*  $p = |V(G)|$  dan *size*  $q = |E(G)|$  dapat ditulis  $(p, q)$ -graf (Hartfield dan Ringel, 1994). Contoh graf disajikan pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Contoh (a) graf  $H$  dan (b) graf  $G$

Dalam pengertian graf di atas dinyatakan bahwa  $V$  tidak boleh kosong, sedangkan  $E$  boleh kosong. Sehingga sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai

sisi satu buahpun, tetapi titiknya harus ada minimal satu. Graf yang hanya mempunyai satu buah titik tanpa sebuah sisi pun dinamakan graf trivial.

Dari definisi mengenai graf yang telah disebutkan diatas dapat dimungkinkan tentang adanya sebuah graf  $G$  yang tidak memiliki sisi tetapi hanya berupa titik. Apabila titik titik ini berkelompok dan membentuk suatu himpunan titik tanpa sisi maka disebut sebagai *null graph* atau graf kosong seperti yang disajikan dalam definisi berikut.

Graf kosong (*null graph* atau *empty graph*) dinotasikan dengan  $N_n$ , dimana  $n$  adalah jumlah titik pada graf, titik tersebut membentuk sebuah himpunan titik tanpa sisi maka disebut dengan graf kosong (Lipschutz dan Lipson, 2002). Gambar 2.1 (a) graf  $H$  mempresentasikan contoh graf kosong dengan 3 titik yang dinotasikan dengan  $N_3$ .

Titik pada graf dapat dinomori dengan huruf, dengan bilangan asli, atau dengan menggunakan huruf dan angka ( bilangan asli ). Misalkan  $v_i$  dan  $v_j$  adalah titik pada suatu graf, maka sisi yang menghubungkan titik  $v_i$  dan  $v_j$  dinyatakan dengan pasangan  $(v_i, v_j)$  atau dengan lambang  $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ . Sebuah graf  $G$  mungkin mengandung *loop*, yaitu sisi yang berbentuk  $\{v_i v_j\}$  atau sisi ganda, yaitu sisi yang menghubungkan sepasang titik yang sama lebih dari satu. Untuk menyederhanakan notasi, sebuah sisi  $\{v_i v_j\}$  sering dinotasikan  $v_i v_j$ .

Misal  $u$  dan  $v$  adalah titik pada sebuah graf  $G$ . Titik  $u$  pada graf  $G$  dikatakan bertetangga (*adjacent*) pada  $v$ , jika terdapat sisi  $e$  diantara  $u$  dan  $v$  ditulis  $e = uv$ . Dengan kata lain  $u$  dan  $v$  bersisian (*incident*) dengan sisi  $e$ . Sebagai contoh pada Gambar 2.1(b) graf  $G$  titik  $v_1$  bertetangga dengan titik  $v_2, v_5, v_7, v_8$ , titik  $v_8$  bersisian dengan sisi  $v_4 v_8, v_1 v_8, v_6 v_8$ , dan  $v_3 v_8$ , maka tetangga dari titik  $v_8$  adalah  $v_4, v_1, v_6$  dan  $v_3$ , tetangga dari  $v_3$  adalah  $v_2, v_5, v_7$ , dan  $v_8$ , sedangkan pada Gambar 2.1(a) graf  $H$  semua titik tidak bertetangga.

Banyaknya sisi yang bersisian pada titik  $v$  disebut derajat (*degree*) titik  $v$  pada graf, dinotasikan  $d_i$  (indeks  $i$  menunjukkan titik ke- $i$  pada graf) (Hartsfield dan Ringel, 1994). Jika titik  $v$  mempunyai derajat 0 artinya tidak mempunyai tetangga dengan titik yang lain, maka titik  $v$  disebut titik terisolasi (*isolated vertex*). Titik yang mempunyai derajat satu disebut titik akhir (*end vertex*)

atau daun (*leaf*). Jika semua titik pada graf  $G$  mempunyai derajat yang sama  $d$  maka dikatakan graf regular  $d$  (Dafik dkk, 2009). Jika pada graf  $G$  mempunyai derajat yang tidak sama maka graf tersebut dikatakan non-reguler. Derajat terkecil dari suatu graf  $G$  yang dinotasikan dengan  $\delta(G)$  adalah derajat terkecil yang dimiliki suatu titik diantara titik-titik yang lain. Derajat terbesar dari suatu graf  $G$  yang dinotasikan dengan  $\Delta(G)$  adalah derajat terbesar yang dimiliki suatu titik diantara titik-titik yang lain.

Jalan (*walk*) dari suatu graf, dinotasikan dengan  $A_1e_1, A_2e_2, A_3e_3, A_4e_4, \dots, A_ke_k$  adalah barisan titik dan sisi terhingga dan bergantian dari titik-titik dan sisi-sisi dalam suatu graf dengan ketentuan setiap sisi  $e_i$  menempel pada  $A_i$  dan  $A_j$  dan  $A_i \neq A_j$  jika  $e_i$  bukan merupakan sebuah *loop* (Hartsfield dan Ringel, 1994). Jalan pada suatu graf dibentuk dari barisan titik dan sisi terhingga dan bergantian dari titik-titik dan sisi-sisi dalam suatu graf, dimana titik dan sisinya boleh diulang. Jalan yang demikian disebut dengan lintasan seperti pada definisi berikut.

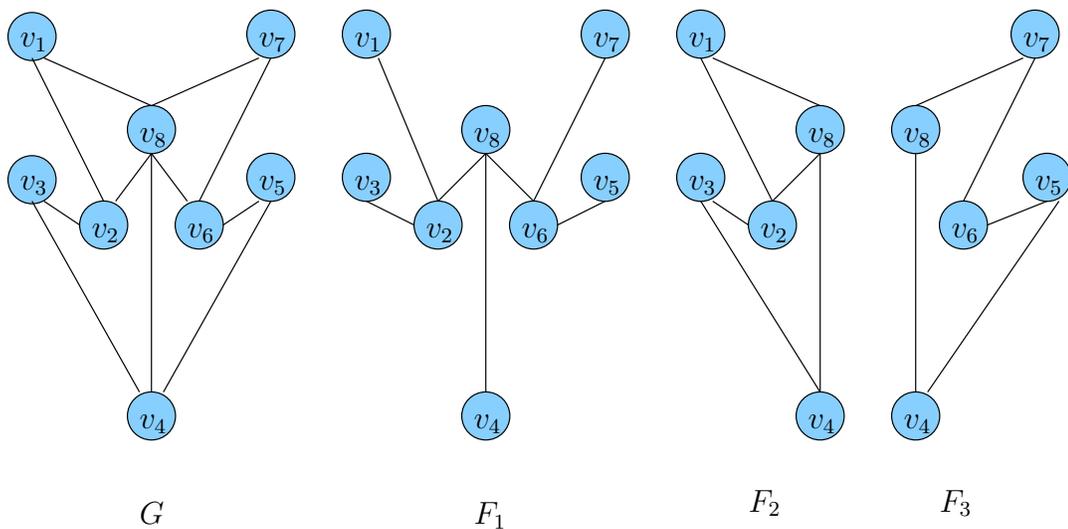
Sebuah jalan merupakan sebuah *trail* jika jalan tersebut tidak memiliki sisi yang berulang (Hartsfield dan Ringel, 1994). Sedangkan sebuah jalan dikatakan lintasan (*path*), jika titik-titik dan sisi-sisi pada jalan  $A_1e_1, A_2e_2, A_3e_3, A_4e_4, \dots, A_ke_k$  semuanya berbeda, dengan kata lain *path* merupakan *trail* yang tidak memiliki titik yang berulang (Hartsfield dan Ringel, 1994).

Panjang (*length*) dari sebuah jalan adalah banyaknya sisi pada jalan tersebut. Sebuah lintasan dikatakan tertutup, jika  $A_1 = A_k$  yang biasa disebut siklus (*cycle*) (Hartsfield dan Ringel, 1994). Pada Gambar 2.1(b) graf  $G$  yang mempunyai 8 titik, dimana  $v_1, v_2, v_3, v_8, v_6, v_2, v_4, v_7, v_3$  adalah jalan yang mempunyai panjang 8 yang bukan lintasan,  $v_1, v_2, v_4, v_5, v_6, v_7, v_3, v_8$  adalah lintasan yang mempunyai panjang 7, dan  $v_5, v_6, v_7, v_3, v_5$  adalah siklus yang mempunyai panjang 4.

Jarak (*distance*) dari titik  $u$  ke titik  $v$  dinotasikan  $dist(u, v)$  adalah panjang lintasan terpendek dari titik  $u$  ke titik  $v$ . Untuk titik  $u, v, w$  pada  $G$  mempunyai jarak  $dist(u, w) \leq dist(u, v) + dist(v, w)$  dan jika  $dist(u, v) \geq 2$  kemudian ada titik  $z$  di  $G$  maka  $dist(u, v) = dist(u, z) + dist(z, v)$ . Sebagai contoh jarak titik  $v_1$

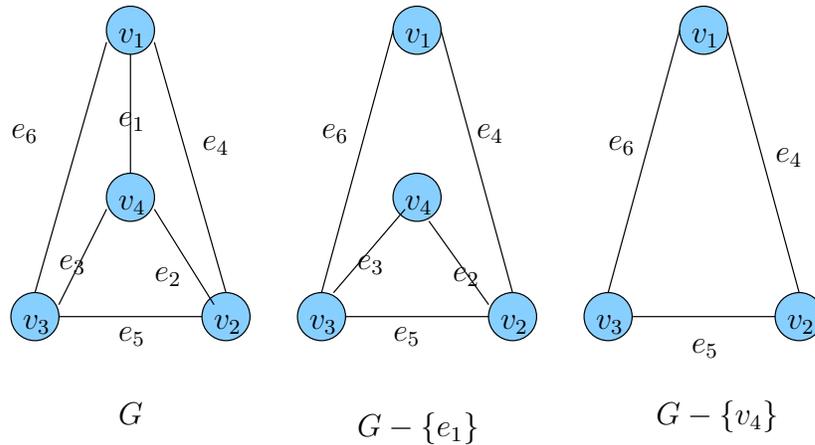
ke titik  $v_6$  pada Gambar 2.1(b) graf  $G$  adalah 2. Eksentrisitas (*eccentricity*) dari  $v$  dinotasikan  $ec(v)$  didefinisikan  $ec(v) = \max\{dist(u, v) : u \in V, u \neq v\}$  dan radius dari  $G$  dinotasikan  $rad G$  didefinisikan  $rad G = \min\{ec(v) : v \in V\}$ . Diameter dari graf  $G$  adalah jarak maksimum antara sembarang dua titiknya dan dinotasikan  $diam G = \max\{ec(v) : v \in V\}$ . Girth dari graf  $G$  adalah panjang siklus terpendek graf  $G$ , sebagai contoh graf pada Gambar 2.1(b) graf  $G$  mempunyai diameter 2 dan girth 4.

Sebuah graf  $H$  adalah subgraf dari  $G$  jika setiap titik pada  $H$  adalah titik  $G$  dan setiap sisi pada  $H$  adalah sisi pada  $G$ . Dengan kata lain  $V(H) \subset V(G)$  dan  $E(H) \subset E(G)$ . Sebuah subgraf  $H$  merupakan *spanning subgraph* dari graf  $G$  jika graf  $H$  memuat semua titik dari graf  $G$  atau  $V(H) = V(G)$ . Misalkan  $H = H(V', E)$  adalah subgraf dari  $G = G(V, E)$ , maka  $H$  dikatakan subgraf penuh dari  $G$  jika  $E'$  mengandung semua sisi dari  $E$  yang titik-titik ujungnya ada di  $V'$ . Dalam hal ini  $H$  disebut subgraf dari  $G$  yang dibangun oleh  $V'$  (Lipschutz dan Lipson, 2002). Gambar 2.2 menunjukkan contoh graf, spanning subgraph, dan subgraf. Graf  $F_1$  merupakan spanning subgraf dari graf  $G$  karena mengandung semua titik dari graf  $G$ . Graf  $F_2$  merupakan subgraf penuh dan  $F_3$  adalah subgraf dari graf  $G$  tetapi bukan subgraf penuh (karena pada  $F_3$  titik  $v_8, v_6 \in V(G)$  tetapi tidak ada sisi diantara titik tersebut).



Gambar 2.2 Contoh graf  $G$  dan subgraf dari  $G$

Misal  $e$  adalah sebuah sisi pada graf  $G$  maka  $G - \{e\}$  adalah sebuah graf yang dihasilkan dari  $G$  dengan menghapus sisi  $e$ . Jika  $G - \{e\}$  tidak terhubung maka  $e$  disebut jembatan (*bridge*) (Chartrand dan Oellermann, 1993). Secara umum, jika  $E_1$  adalah himpunan sisi dalam  $G$  maka  $G - E_1$  adalah graf yang dihasilkan dari  $G$  dengan menghapus semua sisi  $E_1$ .

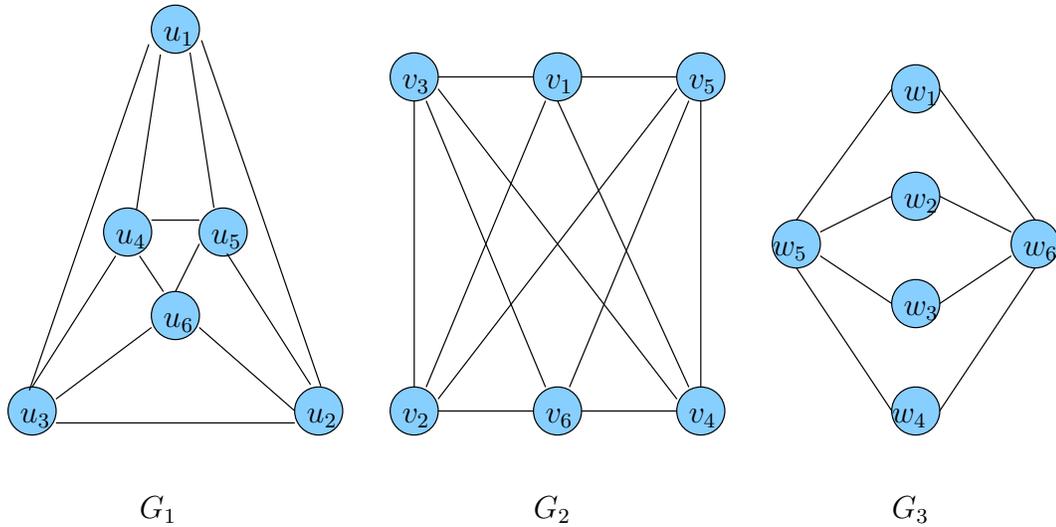


Gambar 2.3 Graf Terpotong

Misal  $v$  adalah titik pada sebuah graf  $G$ , dengan  $G - \{v\}$  adalah sebuah graf yang dihasilkan dari  $G$  dengan menghapus titik  $v$  dan semua sisi yang bertetangga pada  $v$ . Jika  $G - \{v\}$  adalah tak terhubung maka  $v$  disebut titik potong (*cut vertex*) (Chartrand dan Oellermann, 1993). Jika  $V_1$  adalah himpunan titik pada  $G$  maka  $G - V_1$  adalah graf yang dihasilkan dari  $G$  dengan menghapus semua titik pada  $V_1$  dan semua sisi yang bertetangga pada titik tersebut. Gambar 2.3 menunjukkan contoh graf  $G - \{e_4\}$  adalah hasil penghapusan sisi  $e_4$  dari  $G$  dan  $G - \{v_4\}$  adalah hasil penghapusan titik  $v_4$  dari  $G$ .

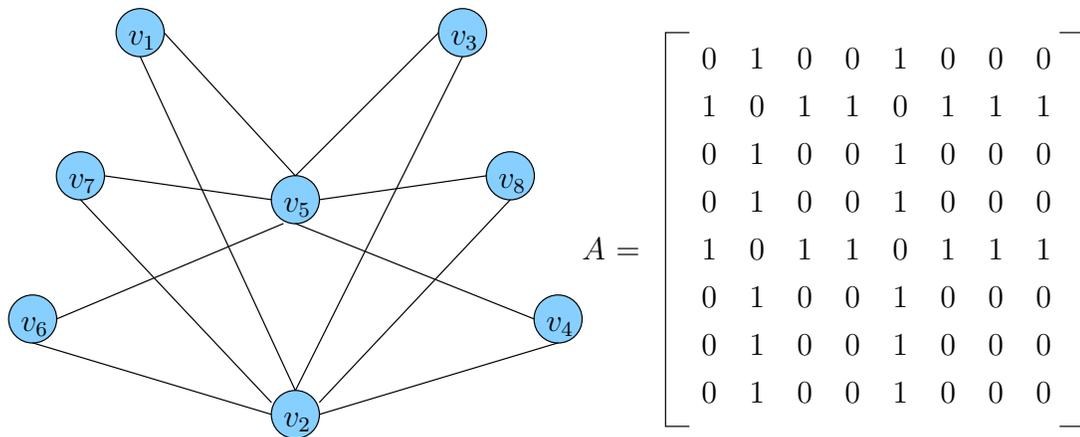
Misalkan  $G_1$  dan  $G_2$  adalah sembarang graf. Dua graf  $G_1$  dan  $G_2$  disebut isomorfis, jika ada pemetaan satu-satu dan pada  $f : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$  yang menunjukkan semua keterhubungan (*adjacencies*), yaitu  $\{f(u), f(v)\} \in E(G_2)$  jika dan hanya jika  $\{u, v\} \in G_1$  (Hartfield dan Ringel, 1994). Pada Gambar 2.4 menunjukkan bahwa graf  $G_1$  isomorfis dengan graf  $G_2$  dibawah pemetaan  $f(u_i) = v_i$  untuk setiap  $i = 1, 2, \dots, 10$ . Graf  $G_1$  dan  $G_3$  tidak isomorfis karena  $G_1$  berisi siklus yang panjangnya 3 sedangkan  $G_3$  panjangnya 4 akibatnya tidak ada pemetaan

satu-satu.



Gambar 2.4 Keisomorfisan graf

Matriks ketetanggaan (*adjacency matrix*) graf  $G$  adalah matrik dwimatra yang berukuran  $n \times n$ . Bila matrik tersebut dinamakan  $A = [a_{ij}]$ , maka  $a_{ij} = 1$  jika titik  $i$  dan  $j$  bertetangga, sebaliknya  $a_{ij} = 0$  jika titik  $i$  dan  $j$  tidak bertetangga. Pada Gambar 2.5 memperlihatkan graf 8 titik dengan matrik ketetanggaannya.



Gambar 2.5 Graf dengan matriks ketetanggaannya

Suatu graf dikatakan terhubung (*connected*), jika ada lintasan dari  $u$  ke  $v$  dan jika tidak ada lintasan dari  $u$  ke  $v$  disebut graf tak terhubung (*disconnected*).

Gabungan dua graf atau lebih  $G_1 \dots G_m$  dinotasikan  $G_1 \cup \dots \cup G_m$  didefinisikan sebagai gabungan saling lepas graf yang mempunyai titik  $V_1 \cup \dots \cup V_m$  dan sisi  $E_1 \cup \dots \cup E_m$ . Jenis graf tersebut disebut graf diskonektif dan sering dikenal dengan graf yang mempunyai  $m$  komponen.

## 2.2 Fungsi

Suatu fungsi  $f$  dari himpunan  $A$  ke himpunan  $B$  adalah sebuah himpunan  $f$  dari pasangan terurut  $A \times B$  sedemikian hingga untuk setiap  $a \in A$  terdapat secara tunggal  $b \in B$  dengan  $(a, b) \in f$ , dengan kata lain jika  $(a, b) \in f$  dan  $(a, b') \in f$ , maka  $b = b'$ . Himpunan  $A$  dinamakan daerah asal (*domain*) dan himpunan  $B$  dinamakan daerah kawan (*kodomain*). Sedangkan himpunan nilai yang diperoleh dari fungsi  $f$  dinamakan daerah hasil (*range*).

Berikut ini dijelaskan fungsi khusus yang berhubungan dalam penelitian pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic, yaitu:

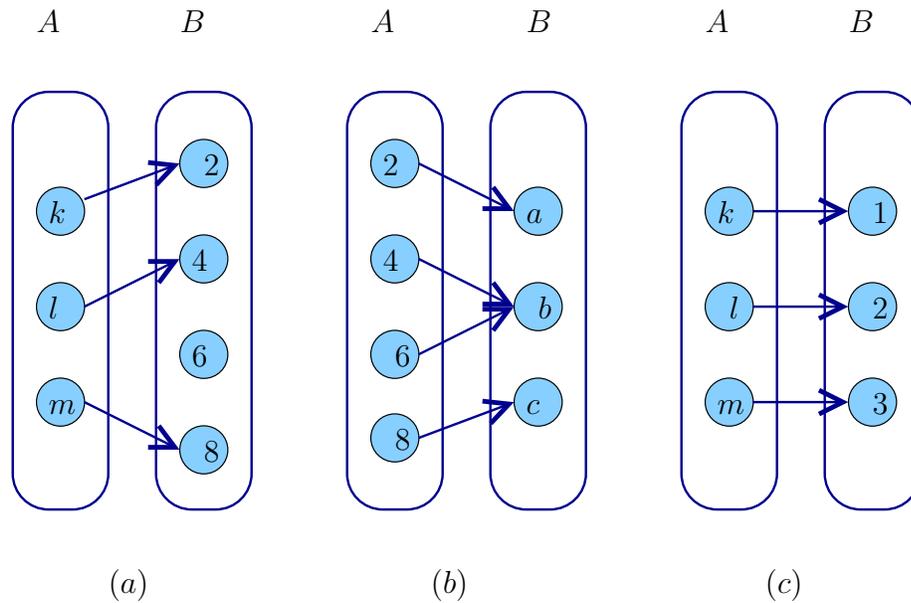
1. Fungsi  $f: A \rightarrow B$  disebut fungsi satu-satu atau fungsi injektif  $\Leftrightarrow \forall a_1$  dan  $a_2 \in A, a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$ .
2. Fungsi  $f: A \rightarrow B$  disebut fungsi kepada atau fungsi surjektif  $\Leftrightarrow \forall b \in B, \exists a \in A \Rightarrow f(a) = b$ . Dengan kata lain, suatu kodomain fungsi surjektif sama dengan kisarannya (*range*).
3. Fungsi  $f: A \rightarrow B$  disebut fungsi bijektif apabila fungsi tersebut merupakan fungsi injektif sekaligus surjektif. Gambar 2.6 menunjukkan fungsi injektif, surjektif dan bijektif.

Barisan yang dibentuk dengan cara menambah atau mengurangi suku sebelumnya dengan suatu bilangan tetap tertentu disebut barisan aritmatika.

$$(a) 25, 30, 35, 40, 45, \dots$$

$$(b) 24, 20, 16, 12, 8, \dots$$

Barisan  $(a)$  mempunyai beda,  $b = 5$ . Barisan  $(a)$  disebut barisan aritmetika naik karena nilai suku-sukunya makin besar. Barisan  $(b)$  mempunyai beda,  $b = -4$ . Barisan  $(b)$  disebut barisan aritmetika turun karena nilai suku-sukunya makin



Gambar 2.6 (a) fungsi injektif, (b) fungsi surjektif dan (c) fungsi bijektif

kecil. Suatu barisan  $U_1, U_2, U_3, \dots$  disebut barisan aritmetika jika selisih dua suku yang berurutan adalah tetap. Nilai untuk menentukan suku ke- $n$  dari barisan aritmetika, perhatikan kembali contoh barisan (a). 25, 30, 35, 40, 45,  $\dots$ , misalkan  $U_1, U_2, U_3, \dots$  adalah barisan aritmetika tersebut maka

$$\begin{aligned} U_1 &= 25 = 25 + 5(0) \\ U_2 &= 30 = 25 + 5 = 25 + 5(1) \\ U_3 &= 35 = 25 + 5 + 5 = 25 + 5(2) \\ &\dots \\ U_n &= 25 + 5(n - 1) \end{aligned}$$

Secara umum, jika suku pertama ( $U_1$ ) =  $a$  dan beda suku yang berurutan adalah  $b$  maka dari rumus  $U_n = 25 + 5(n - 1)$  diperoleh 25 adalah  $a$  dan 5 adalah  $b$ . Oleh sebab itu, suku ke- $n$  dapat dirumuskan

$$U_n = a + b(n - 1)$$

Barisan aritmetika yang mempunyai beda positif disebut barisan aritmetika naik, sedangkan jika bedanya negatif disebut barisan aritmetika turun.

$U_1, U_2, U_3, \dots, U_{n-1}, U_n$  disebut barisan aritmatika, jika  $U_2 - U_1 = U_3 - U_2 =$

$\dots = U_n - U_{n-1} = \text{konstanta.}$

## 2.3 Pelabelan Graf

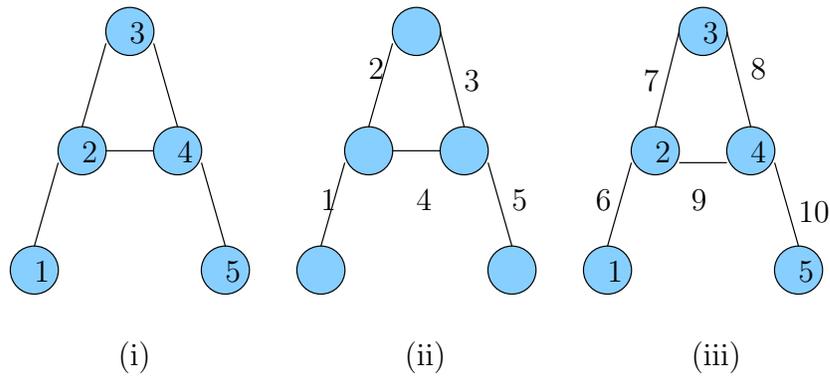
### 2.3.1 Definisi Pelabelan Graf

Pelabelan graf adalah suatu pemetaan satu-satu dan onto (fungsi bijektif) yang memetakan himpunan dari elemen-elemen graf (titik dan sisi) ke himpunan bilangan bulat positif. Secara umum, fungsi  $f$  yang memetakan himpunan  $A$  ke dalam  $B$  disebut fungsi satu-satu jika setiap elemen dalam  $A$  mempunyai bayangan yang berbeda pada  $B$  dan disebut onto jika dan hanya jika range  $f$  sama dengan  $B$ . Secara lebih singkat,  $f : A \rightarrow B$  adalah satu-satu jika  $f(a) = f(a')$  maka  $a = a'$  dan merupakan onto jika  $f(A) = B$  (Bača, 2001). Sehingga, fungsi yang memetakan himpunan elemen-elemen graf ke himpunan bilangan bulat positif disebut fungsi bijektif jika tidak ada dua buah elemen yang berbeda pada graf yang mempunyai bayangan yang sama atau dengan kata lain semua elemen pada graf dinomori dengan bilangan bulat positif yang berbeda. Secara matematik, definisi pelabelan graf dapat dituliskan sebagai berikut:

Pelabelan graf  $G = (V, E)$  adalah suatu pemetaan  $: D \rightarrow N$ , dimana  $D$  : domain,  $N$  : himpunan label dari  $G$ , jika;

- a.  $D = V$  maka disebut pelabelan titik
- b.  $D = E$  maka disebut pelabelan sisi
- c.  $D = V \cup E$  maka disebut pelabelan total

Pada pelabelan titik, jumlah label titik lebih dari dua yang saling menempel disebut *bobot selimut*. Jika semua selimut mempunyai bobot selimut yang sama maka disebut pelabelan titik selimut ajaib. Jika semua selimut mempunyai bobot selimut yang berbeda dan himpunan bobot selimut dari semua selimut membentuk barisan aritmatika dengan suku pertama  $a$  dan beda  $d$  maka pelabelan tersebut disebut pelabelan titik selimut anti ajaib atau *HAVC* (*H antimagic vertex Covering*) (Simanjutak dan Salman, 2010). Oleh karena itu pelabelan dalam penelitian ini termasuk fungsi bijektif. Dikarenakan fungsi yang akan dicari merupakan



Gambar 2.7 (i) Pelabelan titik, (ii) Pelabelan sisi, (iii) Pelabelan total

fungsi yang injektif sekaligus surjektif. Domain dalam fungsi ini merupakan label titik dan bobot selimut, sedangkan *range*-nya adalah label selimut yang diperoleh berdasarkan nilai beda  $d$  yang berbeda.

Pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering dikatakan fungsi injektif karena label selimut untuk tiap selimut pasti berbeda sesuai definisi pelabelan selimut anti ajaib di atas maka label selimutnya selalu berbeda dan berurutan. Dikatakan surjektif karena setiap label selimut yang merupakan range dan semuanya adalah kodomain diperoleh dari melabeli setiap selimut pada graf dengan bilangan berurutan setelah label titik terbesar. Sehingga jelas jika pelabelan dalam penelitian ini merupakan fungsi bijektif karena merupakan fungsi injektif sekaligus surjektif.

Sedangkan dalam pelabelan total, bobot selimut diartikan sebagai jumlah label selimut dan label lebih dari dua titik yang menempel dan membentuk suatu selimut. Jika semua selimut mempunyai bobot selimut yang sama maka pelabelan tersebut disebut pelabelan total-selimut-ajaib. Jika semua sisi mempunyai bobot selimut yang berbeda dan himpunan bobot selimut dari semua sisi membentuk barisan aritmetika dengan suku pertama  $a$  dan beda  $d$  maka pelabelan tersebut disebut pelabelan total selimut anti ajaib (pelabelan total selimut antimagic) (Maryanti dkk, 2010).

### 2.3.2 Pelabelan Super- $\mathcal{H}$ Antimagic Total Covering

Pelabelan pada suatu graf adalah pemetaan atau fungsi yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan bulat. Jika domain dari pemetaan adalah titik, maka disebut pelabelan titik (*vertex labeling*). Jika domainnya adalah sisi, maka disebut pelabelan sisi (*edge labeling*), dan jika domainnya titik dan sisi maka disebut pelabelan total (*total labeling*). Salah satu pelabelan total yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah pelabelan selimut- $\mathcal{H}$ -antiajaib super.

Pelabelan selimut- $\mathcal{H}$  anti ajaib (*antimagic*) super pada graf  $G$  dengan  $v$  titik dan  $e$  sisi didefinisikan sebagai fungsi bijektif dari titik-titik dan sisi-sisi pada himpunan bilangan bulat dari 1 sampai sejumlah titik dan sisi, secara matematis ditulis dalam bentuk  $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$  dengan sifat bahwa setiap subgraf dari  $G$  yang isomorfik dengan  $H$  dimana  $H$  juga subgraf dari  $G$  mempunyai total label  $\omega(H)$  yang berbeda,  $\omega(H) = \sum_{v \in V(H)} f(v) + \sum_{e \in E(H)} f(e)$ . Graf  $G$  dikatakan memiliki pelabelan  $\mathcal{H}$  anti ajaib super jika himpunan titik  $V(G)$  merupakan pemetaan bijektif  $f$  ke himpunan  $\{1, 2, 3, \dots, |V(G)|\}$  ( Gutierrez dan Llado, 2005).

## 2.4 Graf-Graf Khusus

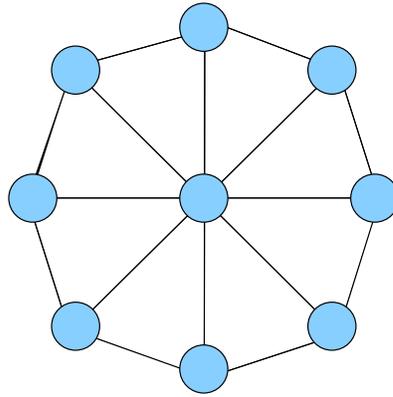
Terdapat beberapa jenis graf ditinjau dari definisi graf secara umum, diantaranya adalah graf lintasan, graf lengkap, graf siklus, graf kipas, graf ladder, graf prisma, generalisasi graf Petersen, dan masih banyak famili graf yang lainnya.

### 1. Graf Roda (*Wheel Graph*)

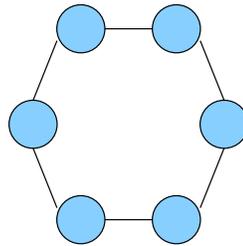
Graf roda dinotasikan  $W_n$  dengan  $n \geq 3$  adalah graf yang dibentuk dari graf sikel  $C_n$  dan satu titik yang disebut titik pusat yang bertetangga dengan semua titik di sikel  $C_n$  (Gallian,2009). Jadi,  $W_n$  terdiri dari  $n+1$  titik dan  $2n$  sisi. Pada Gambar 2.8 merupakan contoh graf roda.

### 2. Graf Siklus (*Cycle*)

*Graf siklus* adalah graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua. Graf siklus dengan  $n$  titik dilambangkan dengan  $C_n$  (Gallian,2009). Jika titik-titik pada  $C_n$  adalah  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , maka sisi-sisinya adalah  $(v_1, v_2), (v_2, v_3),$

Gambar 2.8 Graf Roda  $W_8$ 

...,  $(v_{n-1}, v_n)$  dan  $(v_n, v_1)$ . Hal ini menunjukkan bahwa ada sisi yang menghubungkan titik terakhir  $v_n$  dengan titik pertama  $v_1$ . Graf siklus  $C_n$  hanya dapat terbentuk jika  $n \geq 3$ . Berikut contoh graf siklus pada Gambar 2.9



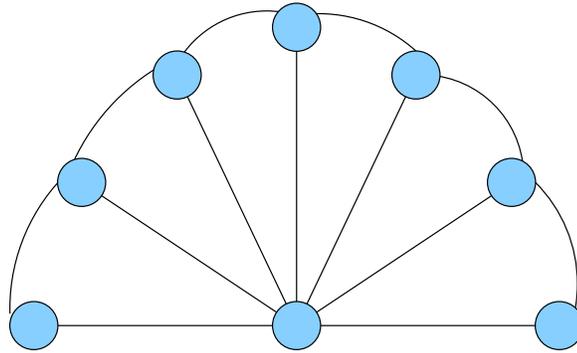
Gambar 2.9 Graf Siklus

### 3. Graf Kipas ( $Fan$ )

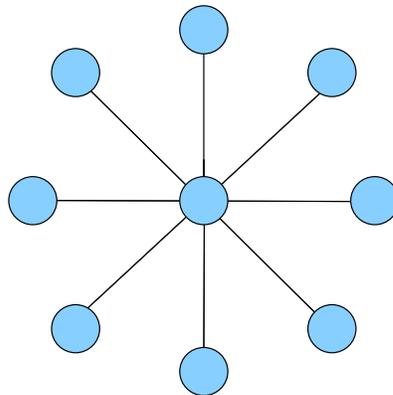
Graf kipas  $\hat{F}_n$  ( $n \geq 3$ ) adalah graf yang didapat dengan menghubungkan semua titik dari graf lintasan  $P_n$  dengan suatu titik yang disebut pusat (Karyanti, 2012). Jadi,  $\hat{F}_n$  terdiri dari  $n + 1$  titik dan  $2n - 1$  sisi. Misalkan  $c, v_1, v_2, \dots, v_n$  adalah titik pada graf kipas  $\hat{F}_n$  dengan  $c$  merupakan titik pusat, maka  $cv_1, cv_2, \dots, cv_n, v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$  adalah sisi-sisi dari  $\hat{F}_n$ . Untuk contoh, perhatikan  $\hat{F}_n$  pada Gambar 2.10.

### 4. graf Bintang ( $Star Graph$ )

Graf bintang yang dinotasikan  $S_n$  dengan  $n \geq 3$  adalah graf yang terdiri dari satu titik pusat yang berderajat  $n$  dengan  $n$  titik dan  $n - 1$  sisi (Slamin,

Gambar 2.10 Graf Kipas  $\hat{F}_7$ 

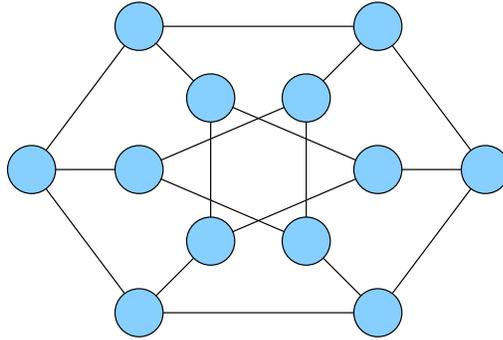
2005). Pada Gambar 2.11 merupakan contoh graf bintang.

Gambar 2.11 Graf Bintang  $S_8$ 

#### 5. Graf Petersen (*Petersen Graph*)

*Graf Petersen* adalah graf Petersen standar yang pertama kali dikenalkan, yaitu  $P(5, 2)$ . Graf Petersen berbeda dengan graf Generalized Petersen. *Graf Generalized Petersen*  $P(n, m)$  adalah sebuah graf yang terdiri atas sebuah *outer-cycle*  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ , sebuah himpunan  $n$  jeruji  $y_i x_i, 0 \leq i \leq n - 1$ , dan  $n$  sisi  $x_i x_{i+m}, 0 \leq i \leq n - 1$ , dimana semua indeks titik diambil pada modulo  $n$ , dengan syarat  $n \geq 3$  dan  $1 \leq m \leq \frac{n}{2}$  (Sugeng, 2005).  $n$  menunjukkan banyaknya titik bagian luar maupun bagian dalam, sedangkan  $m$  menunjukkan besar lompatan titik untuk membentuk  $n$  sisi  $x_i x_{i+m}$ . Pada graf  $P(n, m)$ , setiap titik  $y_i$  bagian luar dihubungkan dengan

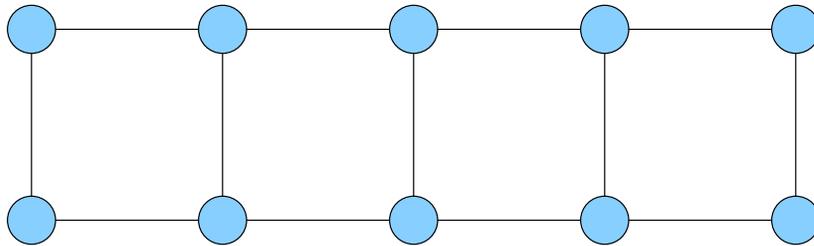
dua titik bagian luar yang lain, yaitu titik  $y_{i-1}$  dan  $y_{i+1}$  (karena membentuk siklus), serta dihubungkan pada suatu titik bagian dalam, yaitu titik  $x_i$ . Setiap titik  $x_i$  bagian dalam dihubungkan pada titik bagian dalam yang lain, yaitu titik  $x_{i-m}$  dan  $x_{i+m}$ , serta dihubungkan dengan satu titik bagian luar, yaitu titik  $y_i$ . Graf Generalized Petersen adalah graf regular berderajat tiga. Untuk contoh, perhatikan pada Gambar 2.12.



Gambar 2.12 Graf Siklus Generalized Petersen

#### 6. Graf Ladder

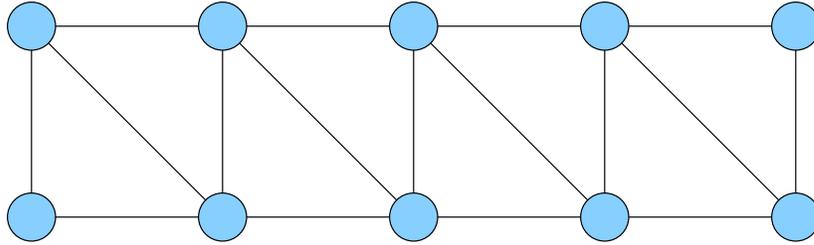
*Graf Ladder* yang dilambangkan dengan  $L_n$  adalah sebuah graf dengan titik  $V(L_n) = \{u_i, v_i : 1 \leq i \leq n\}$  dan  $E(L_n) = \{u_i u_{i+1}, v_i v_{i+1} : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_i v_i : 1 \leq i \leq n\}$  (Sugeng, 2005). Graf ladder mempunyai  $2n$  titik, dan  $3n - 2$  sisi. Gambar 2.13 menunjukkan satu contoh graf Ladder dengan  $n = 5$ .



Gambar 2.13 Graf Ladder

Graf triangular ladder dinotasikan  $L_n$ ,  $n \geq 2$  adalah sebuah graf yang diperoleh dengan melengkapi graf ladder dengan menambahkan sisi  $u_i v_{i+1}$

untuk  $1 \leq i \leq n - 1$  (Sugeng, 2005). Pada Gambar 2.14 merupakan contoh dari graf triangular ladder dengan  $n = 5$ .



Gambar 2.14 Graf triangular ladder  $L_5$

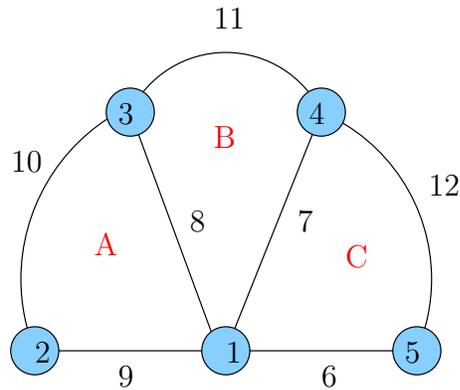
## 2.5 Aplikasi Graf

Teori graf merupakan cabang ilmu matematika yang perkembangannya meluas dengan sangat pesat. Hal ini disebabkan oleh banyaknya aplikasi yang sering ditemukan dalam kehidupan sehari-hari. Salah satunya yaitu pembuatan sandi di kantor CIA, dimana sandi tersebut sangat dibutuhkan untuk misi rahasia. Central Intelligence Agency (CIA) adalah salah satu badan intelijen pemerintah federal Amerika Serikat dan merupakan lembaga eksekutif yang berada dibawah Director of National Intelligence. Markas CIA terletak di Langley, Virginia, beberapa mil di sebelah barat Washington, D.C. Karyawan-karyawannya bekerja di kedutaan A.S. dan sejumlah lokasi lain di seluruh dunia. Pada kantor CIA, teknik kodefikasi sandi tingkat tinggi diperlukan sehingga sandi yang dihasilkan merupakan sandi yang rumit dan kompleks.

Misalnya suatu tugas tertentu harus diselesaikan bersama tiga orang agen rahasia dan dimungkinkan terdapat dua orang agen menyelesaikan tugas yang sama. Data awal penyelesaian tugas dapat diakses atau disimpan oleh anggota agen rahasia apabila tiga agen rahasia memasukkan kodenya sehingga total kode yang dimasukkan memiliki sifat yang unik, baik untuk tugas tertentu maupun untuk keseluruhan tugas, bila tidak tugas tidak dapat diselesaikan. Disamping itu kode harus dapat diperbaharui setiap saat oleh anggota atau otoritas CIA, agar rahasia sebuah tugas tidak mudah terungkap.

Untuk mengembangkan kode tersebut dibutuhkan representasi sebuah graf.

Misalnya saja graf kipas, pada selimut graf kipas terdapat tiga titik dan tiga sisi. Untuk menghasilkan kode-kode tersebut maka bisa menggabungkan ketiga titik dan ketiga sisi pada selimut graf kipas. Bentuk kode bisa berubah sesuai dengan pelabelan graf kipas yang didapat. Berikut merupakan contoh gambar graf kipas  $(33,1)-C_3$  yang bisa menghasilkan kode untuk agen CIA :



Gambar 2.15 Pelabelan selimut super  $(33,1)-C_3$  antimagic pada graf kipas

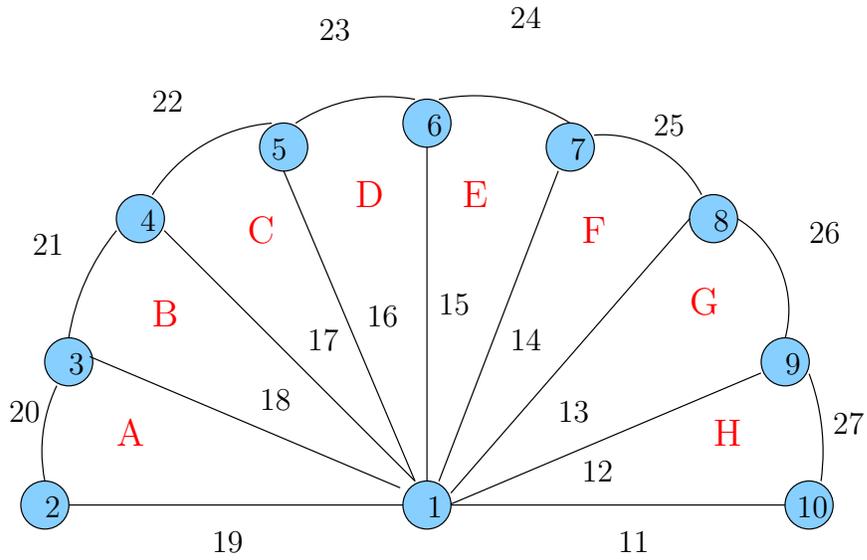
Dari Gambar 2.15 bisa dibangun kode rahasia sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 A_1 &: 1-9-2-10-3-8 & B_1 &: 1-8-3-11-4-7 & C_1 &: 1-7-4-12-5-6 \\
 A_2 &: 9-1-10-2-8-3 & B_2 &: 7-3-8-4-11-1 & C_2 &: 4-1-7-5-6-12 \\
 A_3 &: 2-9-3-1-8-10 & B_3 &: 8-4-7-3-1-11 & C_3 &: 7-5-4-12-6-1
 \end{aligned}$$

Bila Gambar 2.15 diperluas maka hasilnya seperti Gambar 2.16.

## 2.6 Hasil-Hasil Pelabelan Selimut Super $(a, d)-\mathcal{H}$ -Antimagic

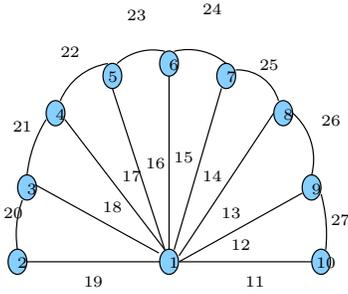
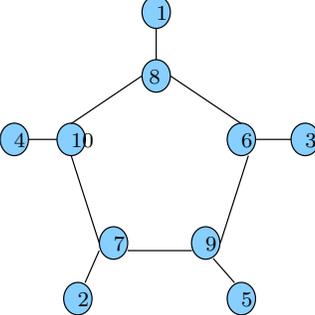
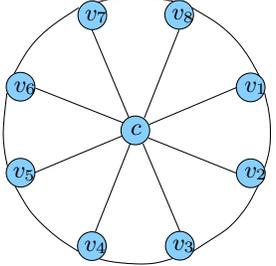
Pada bagian ini disajikan beberapa rangkuman hasil pelabelan selimut super  $(a, d)-\mathcal{H}$  antimagic yang dapat digunakan sebagai rujukan penelitian ini. Rangkuman yang tersedia pada bagian ini merupakan hasil penelitian yang diterbitkan pada tahun 2009 dan 2012. Hasil-hasil rangkuman ini merupakan ringkasan pelabelan selimut super  $(a, d)-\mathcal{H}$ -antimagic untuk graf tunggal.



Gambar 2.16 Pelabelan selimut super  $(63,1)-C_3$  antimagic pada graf kipas

Tabel 2.1: Ringkasan pelabelan selimut super  $(a, d)-\mathcal{H}$ -antimagic.

Graf	$a$	$d$	Hasil
<p><math>GP_{n,k}</math> (Generalized Petersen)</p>	$13n + 4 - \lfloor n/2 \rfloor$	$d = 2$	$(a, d) - K_{1,3}$
		(Karyanti, 2012)	

Graf	$a$	$d$	Hasil
<p data-bbox="386 199 604 235"><math>F_n(\text{Graf Kipas})</math></p> 	$12 + 4n + \lfloor n/2 \rfloor$ $8 + 6n + \lfloor n/2 \rfloor$	$d = 4$ $d = 2$ <p data-bbox="954 552 1174 588">(Karyanti, 2012)</p>	$(a, d) - C_3$ $(a, d) - C_3$
<p data-bbox="370 604 620 640"><math>S_n(\text{Graf Matahari})</math></p> 	$13n + 4$ $12n + 5 + \lfloor n/2 \rfloor$	$d = 1$ $d = 2$ <p data-bbox="954 989 1174 1024">(Karyanti, 2012)</p>	$(a, d) - K_{1,3}$ $(a, d) - K_{1,3}$
<p data-bbox="393 1041 604 1077"><math>W_n(\text{Graf Roda})</math></p> 	$3hn + 5$ $2hn + 3h + n$	$d = 3$ $d = 1$ <p data-bbox="971 1377 1157 1413">(Inayah, 2009)</p>	$(a, d) - C_3$ $(a, d) - C_3$

## BAB 3. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah Metode deduktif aksiomatik yaitu dengan menurunkan aksioma atau teorema yang sudah ada yaitu lemma 4.1.1, kemudian diterapkan dalam super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering baik yang tunggal maupun yang gabungan saling lepasnya. Dalam penelitian ini, terlebih dahulu akan ditentukan nilai beda  $d$  pada graf triangular ladder, selanjutnya nilai  $d$  tersebut diterapkan dalam super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering pada graf triangular ladder. Jika terdapat super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering, maka akan dirumuskan bagaimana pola pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering pada graf triangular ladder tersebut dengan menggunakan metode pendeteksian pola (*pattern recognition*) untuk menentukan pola umumnya.

Langkah selanjutnya adalah menentukan nilai beda  $d$  pada gabungan saling lepas graf triangular ladder, selanjutnya nilai  $d$  tersebut diterapkan dalam pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering pada gabungan saling lepas graf triangular ladder. Jika terdapat pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering, maka akan dirumuskan bagaimana pola pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering pada gabungan saling lepas graf triangular ladder tersebut dengan menggunakan metode yang sama untuk menentukan pola umumnya.

### 3.1 Definisi Operasional

Definisi operasional variabel digunakan untuk memberi gambaran secara matematis dalam penelitian dan untuk menghindari terjadinya perbedaan pengertian makna. Definisi operasional variabel yang dimaksud adalah sebagai berikut:

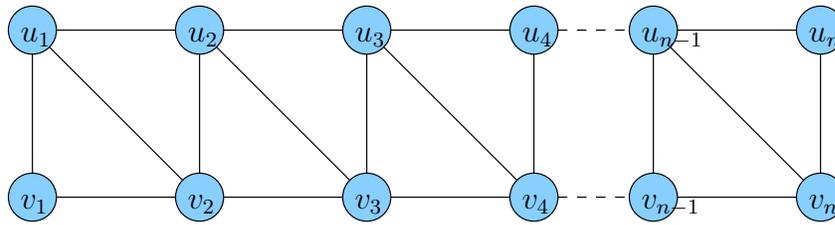
#### 3.1.1 Pelabelan Super $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ Antimagic Total Covering

Pelabelan selimut- $\mathcal{H}$  anti ajaib super pada graf  $G$  dengan  $v$  titik dan  $e$  sisi didefinisikan sebagai fungsi bijektif dari titik-titik dan sisi-sisi pada himpunan bilangan bulat dari 1 sampai sejumlah titik dan sisi, secara matematis ditulis

dalam bentuk  $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$  dengan sifat bahwa setiap subgraf dari  $G$  yang isomorfik dengan  $H$  dimana  $H$  juga subgraf dari  $G$  mempunyai total label  $\omega(H)$  yang berbeda,  $\omega(H) = \sum_{v \in V(H)} f(v) + \sum_{e \in E(H)} f(e)$ . Graf  $G$  dikatakan memiliki pelabelan  $\mathcal{H}$  anti ajaib super jika himpunan titik  $V(G)$  merupakan pemetaan bijektif  $f$  ke himpunan  $\{1, 2, 3, \dots, |V(G)|\}$ .

### 3.1.2 Graf Triangular Ladder $L_n$

Graf triangular ladder dinotasikan  $L_n$  dengan  $n \geq 2$  adalah sebuah graf dengan titik  $V(L_n) = \{u_i, v_i : 1 \leq i \leq n\}$  dan sisi  $(L_n) = \{u_i u_{i+1}, v_i v_{i+1}, u_i v_{i+1} : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_i, v_i : 1 \leq i \leq n\}$ . Graf triangular ladder tunggal juga disebut sebagai graf triangular ladder konektif. Gambar 3.1 merupakan graf triangular ladder  $L_n$ .



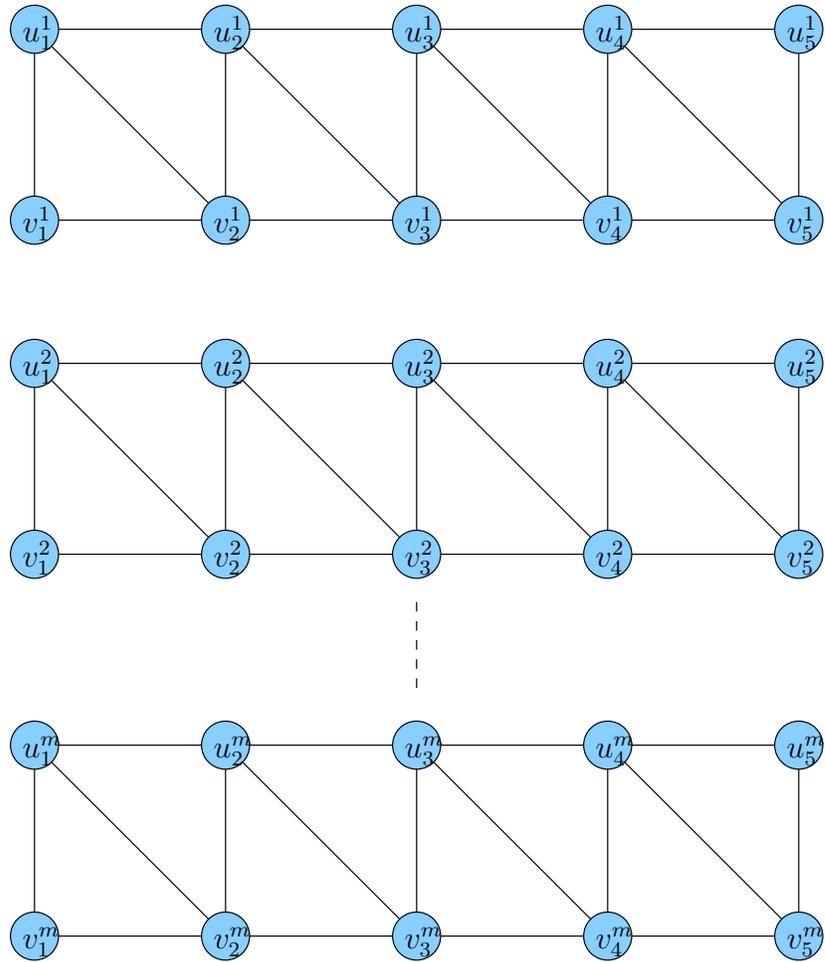
Gambar 3.1 Graf triangular ladder  $L_n$

### 3.1.3 Gabungan Saling Lepas Graf Triangular Ladder $mL_n$

Adapun gabungan saling lepas graf triangular ladder  $mL_n$  didefinisikan sebagai gabungan diskonektif sebanyak  $m$  salinan graf triangular ladder yang mempunyai titik  $V(mL_n) = \{u_i^j, v_i^j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$  dan sisi  $E(mL_n) = \{u_i^j, v_i^j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \cup \{u_i^j u_{i+1}^j, v_i^j v_{i+1}^j, u_i^j v_{i+1}^j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ . Dalam penelitian ini peneliti membatasi pada  $mL_n$  untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ . Gambar 3.2 adalah gabungan saling lepas graf triangular ladder dengan  $m = 3$  dan  $n = 5$ .

## 3.2 Teknik Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada graf triangular ladder baik tunggal maupun gabungan saling lepasnya, jika pada graf tersebut ditemukan pelabelan super



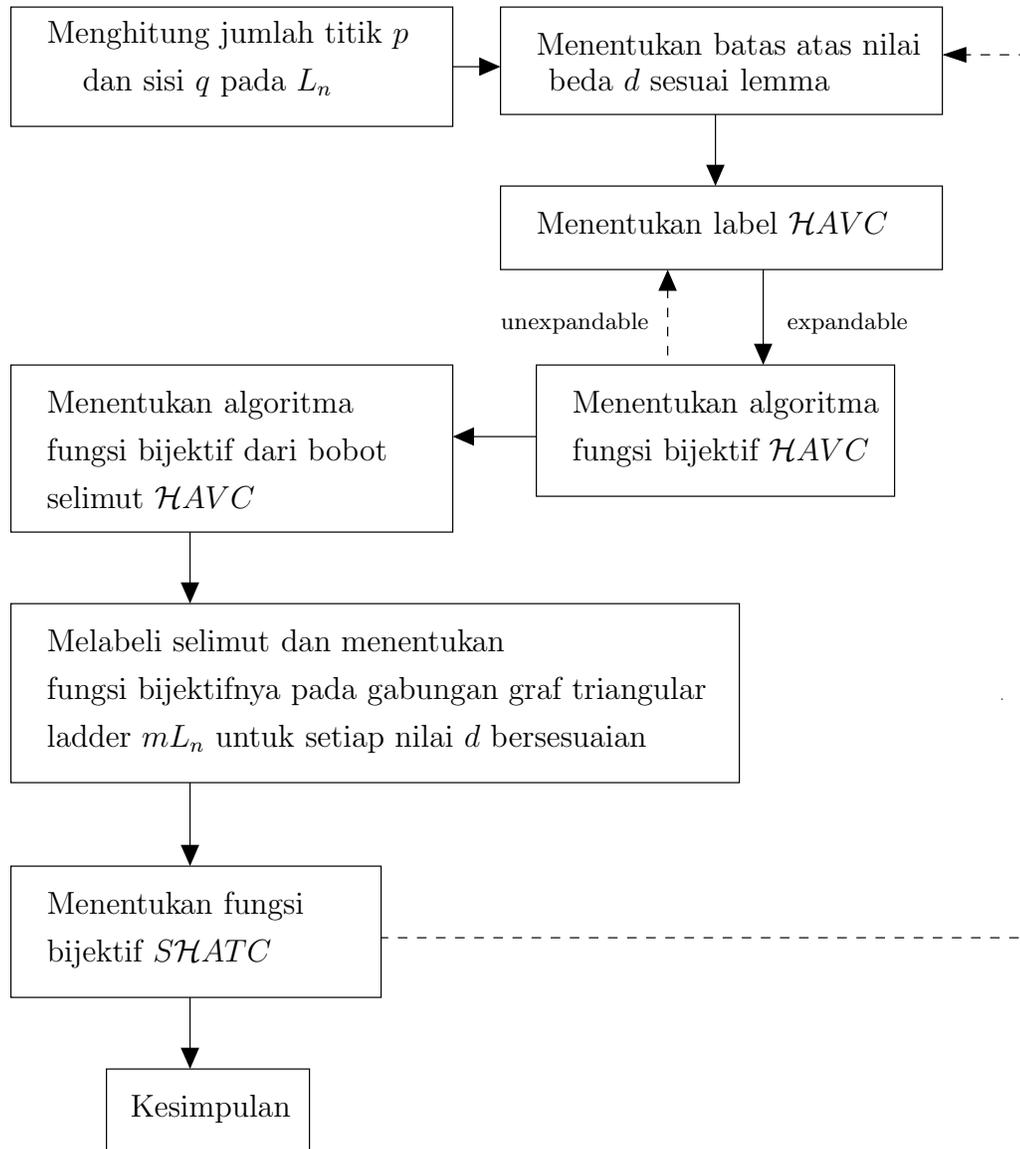
Gambar 3.2 Pelabelan super  $C_3$  antimagic total covering pada  $mL_5$

$\mathcal{H}$  antimagic total covering maka dilanjutkan dengan pendeteksian pola (*pattern recognition*). Adapun teknik penelitian adalah sebagai berikut:

1. menghitung jumlah titik  $p_G$  dan sisi  $q_G$  pada graf triangular ladder  $L_n$ , serta menghitung jumlah selimut titik  $p_H$ , jumlah selimut sisi  $q_H$ , dan jumlah selimut pada graf triangular ladder  $L_n$ .
2. menentukan batas atas nilai beda  $d$  pada graf triangular ladder  $L_n$  sesuai dengan Lemma.
3. menentukan label  $\mathcal{H}AVC$  ( $\mathcal{H}$  Antimagic Vertex Covering) atau pelabelan titik  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic pada selimut graf triangular ladder  $L_n$ .
4. apabila label  $\mathcal{H}AVC$  berlaku untuk beberapa graf baik secara *heuristik* maupun *deterministik* maka dikatakan pelabelan itu *expandable* sehingga dilanjutkan menentukan algoritma  $\mathcal{H}AVC$  pada graf triangular ladder  $L_n$ .
5. menentukan fungsi bijektif  $\mathcal{H}AVC$  pada graf triangular ladder  $L_n$ .
6. melabeli gabungan graf triangular ladder  $mL_n$  dengan  $\mathcal{SHATC}$  (*Super  $\mathcal{H}$  Antimagic Total Covering*) atau pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total selimut dengan nilai beda  $d$  yang *feasible*.
7. menentukan fungsi bijektif pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total selimut pada gabungan graf triangular ladder  $mL_n$ .

Penelitian ini akan menemukan berbagai pola pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering dengan berbagai nilai awal  $a$  serta nilai beda  $d$  yang ditentukan berdasarkan Lemma 4.1.1. Sehingga penelitian ini juga dapat dinyatakan dalam pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering pada graf triangular ladder.

Teknik penelitian yang dilakukan pada gabungan saling lepas dari graf triangular ladder juga sama dengan teknik penelitian seperti yang telah disebutkan di atas namun teknik tersebut diterapkan pada gabungan saling lepas graf triangular ladder. Secara umum, langkah-langkah penelitian di atas dapat juga disajikan dalam bagan alir pada Gambar 3.3



Keterangan:

————▶ : Aliran kegiatan utama

- - - - -▶ : Aliran pengecekan algoritma

Gambar 3.3 Rancangan Penelitian

## BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam bab ini akan dijelaskan hasil penelitian terkait pelabelan selimut super  $\mathcal{H}$  antimagic pada graf triangular ladder dengan hasil akhir berupa teorema pelabelan selimut super  $\mathcal{H}$  antimagic pada graf triangular ladder. Penelitian ini yaitu menentukan nilai batas atas ( $d$ ), menentukan  $\mathcal{H}AV$  dan bobot selimut  $\mathcal{H}AV$  kemudian menentukan  $S\mathcal{H}ATC$  dan selanjutnya bobot selimut total  $S\mathcal{H}ATC$  untuk membuktikan bahwa gabungan graf ini merupakan  $S\mathcal{H}ATC$ .

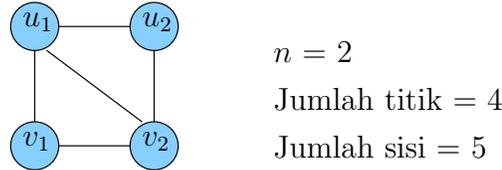
Hasil utama dari penelitian yang akan dibahas terkait dengan pelabelan selimut super  $(a,d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic pada graf  $L_n$  adalah lemma dan teorema yang diberi tanda  $\diamond$ . Terdapat 1 lemma dan 12 teorema baru yang ditemukan secara eksperimental dalam penelitian ini. Format penyajian temuan penelitian dalam bab ini diawali dengan pernyataan lemma setelah itu teorema kemudian dilanjutkan dengan bukti dan contoh gambar atau ilustrasi sebagai visualisasi kebenaran pembuktian teorema. Berikut ini akan dijelaskan tahap-tahap bagaimana teorema tersebut ditemukan sekaligus menjawab rumusan masalah yang telah disajikan sebelumnya.

### 4.1 Super $(a,d)$ - $\mathcal{H}$ Antimagic Total Covering pada Graf Triangular Ladder Konektif

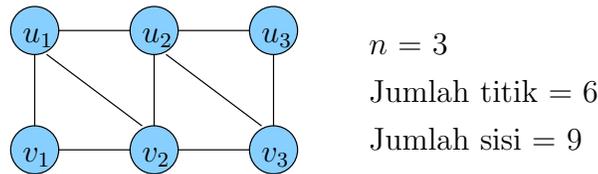
Penentuan batas atas  $d$  merupakan hal yang paling penting dalam penelitian ini. Batas atas ini adalah titik penting yang mengisyaratkan seberapa banyak nilai beda yang mungkin dimiliki oleh graf triangular ladder maupun gabungannya dalam pelabelan selimut super antimagic. Untuk menentukan nilai-nilai  $d$  tersebut, perlu diketahui jumlah titik ( $p_G$ ) dan jumlah sisi ( $q_G$ ) pada graf triangular ladder tunggal maupun gabungannya, serta perlu diketahui jumlah titik ( $p_H$ ) dan jumlah sisi ( $q_H$ ) pada subgraf atau selimut triangular ladder tunggal maupun gabungannya beserta jumlah selimutnya ( $s$ ).

Berdasarkan definisi, graf triangular ladder adalah sebuah graf yang dino-

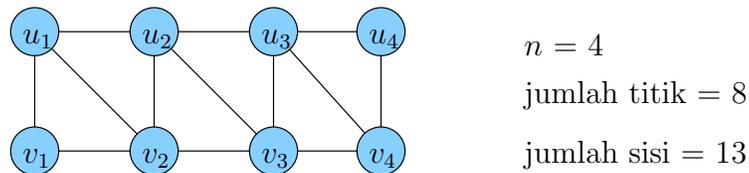
tasikan dengan  $L_n$  dimana  $V(L_n) = \{u_i, v_i : 1 \leq i \leq n\}$  dan sisi  $E(L_n) = \{u_i u_{i+1}, v_i v_{i+1}, u_i v_{i+1} : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_i, v_i : 1 \leq i \leq n\}$ . Nilai  $n$  yang dimaksudkan adalah banyaknya *expand* triangular ladder yang terdapat pada graf triangular ladder dari samping kiri ke kanan. Gambar 4.1 merupakan sebuah ilustrasi untuk menentukan jumlah titik dan jumlah sisi pada graf triangular ladder  $L_n$ .



(a) Jumlah titik dan sisi graf pada  $L_2$



(b) Jumlah titik dan sisi graf pada  $L_3$



(c) Jumlah titik dan sisi graf pada  $L_4$

Gambar 4.1 Jumlah titik dan sisi graf pada  $L_2$  (a),  $L_3$  (b), dan  $L_4$  (c)

Berdasarkan pola pada Gambar 4.1 dan setelah memperhatikan graf triangular ladder, didapatkan hasil: untuk  $n = 1$  jumlah titik adalah 2, untuk  $n = 2$  jumlah titik adalah 4, untuk  $n = 3$  jumlah titik adalah 6, untuk  $n = 4$  jumlah titik adalah 8, untuk  $n = 5$  jumlah titik adalah 10. Berdasarkan rumus suku

ke  $n$  yaitu  $U_n = a + (n - 1)b$  (telah disampaikan pada subbab 2.2), dimana  $a$  adalah nilai awal dan  $b$  adalah beda, maka  $U_n = 2 + (n - 1)2 = 2 + 2n - 2 = 2n$ , sehingga rumusan jumlah titik pada graf triangular ladder  $L_n$  adalah  $2n$ . Sedangkan jumlah sisi pada graf triangular ladder  $L_n$  merupakan jumlah seluruh sisi yang menghubungkan sebuah titik dengan titik yang lainnya pada graf tersebut sesuai definisi yang diberikan. Untuk  $n = 1$  jumlah sisi adalah 1, untuk  $n = 2$  jumlah sisi adalah 5, untuk  $n = 3$  jumlah sisi adalah 9, untuk  $n = 4$  jumlah sisi adalah 13, untuk  $n = 5$  jumlah sisi adalah 17, dengan menggunakan rumus suku ke  $n$  dengan  $a = 1$  dan  $b = 4$  diperoleh  $U_n = 1 + (n - 1)4 = 1 + 4n - 4 = 4n - 3$ . Sehingga rumusan jumlah sisi pada  $L_n$  adalah  $4n - 3$ .

Selimut pada graf triangular ladder  $L_n$  berupa subgraf dari graf triangular ladder yang berbentuk segitiga yang isomorfis, maka jumlah titik selimut adalah  $p_H = 3$ , sedangkan jumlah sisi selimut adalah  $q_H = 3$ . sedangkan jumlah selimut dapat diketahui, untuk  $n = 1$  maka jumlah selimutnya adalah 0, untuk  $n = 2$  jumlah selimut adalah 2, untuk  $n = 3$  jumlah selimut adalah 4, untuk  $n = 4$  jumlah selimut adalah 6, untuk  $n = 5$  jumlah sisi adalah 8, dengan menggunakan rumus suku ke  $n$  dengan  $a = 0$  dan  $b = 2$  diperoleh  $U_n = 0 + (n - 1)2 = 0 + 2n - 2 = 2n - 2$ . Sehingga rumusan jumlah selimut pada  $L_n$  adalah  $2n - 2$ .

Apabila menggunakan prinsip induksi matematika, maka hasilnya sebagai berikut:

Jumlah titik  $p_G$  pada  $L_n$  adalah  $2n$  dengan  $n \geq 2$  membentuk barisan aritmatika yaitu  $2, 4, \dots, 2(n - 1), 2n$  dan akan ditunjukkan dengan langkah induksi sebagai berikut:

(i) Basis induksi :  $p_G(n) = \text{benar}$ , karena untuk  $n = 2$  diperoleh:

$$\begin{aligned} \text{Jumlah titik pada } L_2 &= 2.n \\ &= 2.2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

(ii) Langkah induksi :  $p_G(n)$  bernilai benar bilamana  $p_G(k)$  benar untuk setiap  $2 \leq k < n$ , dengan  $k$  elemen bilangan bulat, untuk  $k = n - 1$  maka:

$$\begin{aligned} \text{Jumlah titik pada } L_k &= 2.k \\ &= 2(n - 1) \end{aligned}$$

$$= 2n - 2$$

karena  $2n - 2$  terletak dalam barisan titik  $L_n$  maka terbukti benar untuk  $p_G(k)$ .

Langkah (i) dan (ii) telah terbukti benar, maka jumlah titik  $p_G$  pada  $L_n$  adalah  $2n$ .

Sedangkan jumlah sisi  $q_G$  pada  $L_n$  adalah  $4n - 3$  dengan  $n \geq 2$  membentuk barisan aritmatika yaitu  $5, 9, \dots, 4n - 7, 4n - 3$  dan dapat ditunjukkan dengan langkah induksi sebagai berikut:

(i) Basis induksi :  $q_G(n) = \text{benar}$ , karena untuk  $n = 2$  diperoleh:

$$\begin{aligned} \text{Jumlah sisi pada } L_2 &= 4n - 3 \\ &= 4 \cdot 2 - 3 \\ &= 5 \end{aligned}$$

(ii) Langkah induksi :  $q_G(n)$  bernilai benar bilamana  $q_G(k)$  benar untuk setiap  $2 \leq k < n$ , dengan  $k$  elemen bilangan bulat, untuk  $k = n - 1$  maka:

$$\begin{aligned} \text{Jumlah sisi pada } L_k &= 4k - 3 \\ &= 4(n - 1) - 3 \\ &= 4n - 7 \end{aligned}$$

karena  $4n - 7$  terletak dalam barisan sisi  $L_n$  maka terbukti benar untuk  $q_G(k)$ .

Langkah (i) dan (ii) telah terbukti benar, maka jumlah sisi  $q_G$  pada  $L_n$  adalah  $4n - 3$ .

Sedangkan jumlah selimut  $s$  pada  $L_n$  adalah  $2n - 2$  dengan  $n \geq 2$  membentuk barisan aritmatika yaitu  $2, 4, \dots, 2n - 4, 2n - 2$  dan dapat ditunjukkan dengan langkah induksi sebagai berikut:

(i) Basis induksi :  $s(n) = \text{benar}$ , karena untuk  $n = 2$  diperoleh:

$$\begin{aligned} \text{Jumlah selimut pada } L_2 &= 2n - 2 \\ &= 2 \cdot 2 - 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

(ii) Langkah induksi :  $s(n)$  bernilai benar bilamana  $s(k)$  benar untuk setiap  $2 \leq k < n$ , dengan  $k$  elemen bilangan bulat, untuk  $k = n - 1$  maka:

$$\text{Jumlah selimut pada } L_k = 2k - 2$$

$$\begin{aligned} L_k &= 2(n-1) - 2 \\ &= 2n - 4 \end{aligned}$$

karena  $2n - 4$  terletak dalam barisan selimut  $L_n$  maka terbukti benar untuk  $s(k)$ .

Langkah (i) dan (ii) telah terbukti benar, maka jumlah selimut  $s$  pada  $L_n$  adalah  $2n - 2$ .

Untuk menentukan batas atas nilai beda  $d$  super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering dapat ditentukan dengan lemma berikut ini.

◇ **Lemma 4.1.1.** *Jika sebuah graf  $G (V, E)$  adalah pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering maka  $d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s-1}$  untuk  $S = |H_i|$ ,  $p_G = |V|$ ,  $q_G = |E|$ ,  $p_H = |V'|$ ,  $q_H = |E'|$ .*

**Bukti.**  $f(V) = 1, 2, 3, \dots, p_G$  dan  $f(E) = p_G + 1, p_G + 2, p_G + 2, \dots, p_G + q_G$ . Misalkan graf  $(p_G, q_G)$  mempunyai pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering dengan fungsi total  $f(\text{total}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, p_G + q_G\}$  maka himpunan bobot selimut sebuah graf adalah  $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a(s-1)d\}$  dimana  $a$  merupakan bobot selimut terkecil maka berlaku:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + p_H + (p_G + 1) + (p_G + 2) + \dots + (p_G + q_H) &\leq a \\ \frac{p_H}{2}(1 + p_H) + q_H p_G + \frac{q_H}{2}(1 + q_H) &\leq a \\ \frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2} &\leq a \end{aligned}$$

Sedangkan untuk nilai terbesar berlaku:

$$\begin{aligned} a + (s-1)d &\leq p_G + p_G - 1 + p_G - 2 + \dots + (p_G - (p_H - 1)) + (p_G + q_G) \\ &\quad + (p_G + q_G - 1) + (p_G + q_G - 2) + \dots + (p_G + q_G - (q_H - 1)) \\ &= p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(1 + (p_H - 1)) + q_H p_G + q_H p_G \\ &\quad - \frac{q_H - 1}{2}(1 + (q_H - 1)) \\ &= p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(s-1)d &\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) - a \\
&\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) - \\
&\quad \left(\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}\right) \\
&= p_H p_G - \frac{p_H^2}{2} + \frac{p_H}{2} + q_H p_G - \frac{q_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} - \left(\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}\right) \\
&= p_H p_G + q_H q_G - p_H^2 - q_H^2 \\
&= p_H p_G - p_H^2 + q_H q_G - q_H^2 \\
&= (p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H \\
d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{(s-1)}
\end{aligned}$$

Dari persamaan diatas terbukti bahwa batas atas  $d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s-1}$  jika graf  $G$  memiliki pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total selimut dari berbagai famili graf (Dafik, 2014).  $\square$

Diketahui dengan jumlah titik  $p_G = 2n$  dan sisi  $q_G = 4n - 3$ , sedangkan jumlah titik selimut adalah  $p_H = 3$  dan jumlah sisi selimut adalah  $q_H = 3$  dengan jumlah selimut  $s = 2n - 2$ . Batas atas nilai beda  $d$  tersebut adalah :

$$\begin{aligned}
d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s-1} \\
&= \frac{(2n - 3)3 + (4n - 3 - 3)3}{2n - 2 - 1} \\
&= \frac{(2n - 3)3 + (4n - 6)3}{2n - 3} \\
&= \frac{6n - 9 + 12n - 18}{2n - 3} \\
&= \frac{18n - 27}{2n - 3} \\
&= \frac{9(2n - 3)}{2n - 3} \\
&\leq 9
\end{aligned}$$

Karena pelabelan  $\mathcal{SHAT}$  selalu menggunakan bilangan bulat positif, maka nilai

$d \geq 0$  dan  $d$  adalah bilangan bulat, sehingga  $d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . Selanjutnya penentuan fungsi bijektif pelabelan selimut super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic akan disesuaikan dengan nilai  $d$  yang telah ditetapkan.

Untuk menentukan pelabelan selimut super  $\mathcal{H}$  antimagic pada graf triangular ladder digunakan metode yang terdiri dari beberapa langkah. Metode ini diawali dengan menggunakan pendeteksian pola (*pattern recognition*) untuk menentukan pelabelan yang berlaku pada batas  $i$  yang telah ditemukan. Untuk penentuan pola secara umum digunakan fungsi-fungsi barisan aritmatika, fungsi ini pada akhirnya merupakan fungsi bijektif pada graf yang diteliti. Setelah fungsi bijektif diketahui selanjutnya dilakukan pembuktian secara deduktif matematik untuk membuktikan kebenaran dari teorema yang didapat. Sebagai catatan, teorema dalam penelitian ini adalah bukan teorema yang *biimplikatif* atau karakteristik sehingga pembuktiannya hanya dilakukan satu arah.

Berdasarkan hasil penggabungan pola melalui (*pattern recognition*) dan konsep barisan aritmatika, maka diperoleh beberapa teorema dan akibat sebagai berikut. Teorema yang ditemukan dalam penelitian ini tidak bersifat tunggal (berkenaan dengan sifat ketunggalan) melainkan hanya bersifat keberadaan (*existence but not unique*).

Setelah mengetahui batas atas nilai  $d$ , langkah selanjutnya adalah menentukan pelabelan total selimut super  $\mathcal{H}$  antimagic dengan terlebih dahulu menentukan fungsi bijektif melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika dari titik dan sisi graf triangular ladder  $L_n$ , dimana  $V(L_n) = \{u_i, v_i : 1 \leq i \leq n\}$  dan  $E(L_n) = \{u_i u_{i+1}, v_i v_{i+1}, u_i v_{i+1} : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_i, v_i : 1 \leq i \leq n\}$  untuk  $n \geq 2$ .

◇ **Teorema 4.1.1.** *Graf triangular ladder  $L_n$  memiliki super  $(16n - 3, 0)$ - $C_3$  antimagic total covering untuk  $n \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli titik dan sisi graf triangular ladder  $L_n$  dengan fungsi bijektif

$f_1$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
f_1(u_i) &= 2i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_1(v_i) &= 2i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_1(u_i u_{i+1}) &= 4n - 2i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\
f_1(v_i v_{i+1}) &= 4n - 2i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\
f_1(u_i v_i) &= 6n - 2i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_1(u_i v_{i+1}) &= 6n - 2i - 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1
\end{aligned}$$

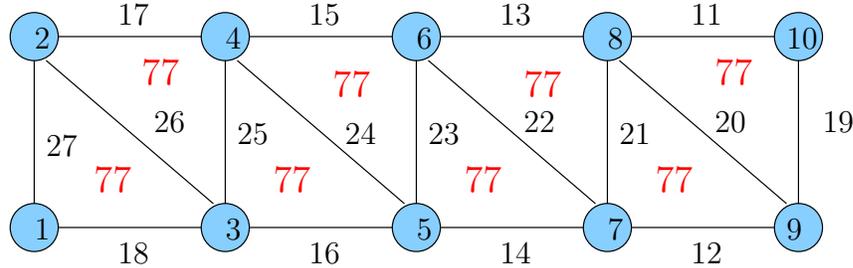
Dengan mudah dapat dilihat bahwa  $f_1$  adalah sebuah fungsi bijektif dari  $f_1 : V(L_n) \cup E(L_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 6n - 3\}$ . Jika  $w_{f_1}$  didefinisikan sebagai bobot total selimut dari pelabelan total selimut pada graf triangular ladder berdasarkan penjumlahan 3 titik dan 3 sisi yang bersisian dari  $\mathcal{H} = C_3$  yang menjadi covering pada graf triangular ladder  $L_n$ . Bilangan 1 dan 2 pada  $w_{f_1}^1$  dan  $w_{f_1}^2$  bukan pangkat, melainkan bilangan tersebut hanya merupakan kode pembeda bobot total selimut  $w_{f_1}$  untuk tiap selimut yang berlainan dengan syarat batas  $i$  yang berbeda dimana  $1 \leq i \leq n$ . Sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
w_{f_1}^1 &= \left( \sum_{i=1}^n f_1(v_i) + f_1(v_{i+1}) \right) + f_1(u_i) + f_1(u_i v_i) + f_1(v_i v_{i+1}) + f_1(u_i v_{i+1}) \\
&= 2i - 1 + 2i + 2 - 1 + 2i + 6n - 2i - 1 + 4n - 2i + 6n - 2i - 2 \\
&= 16n - 3 \\
w_{f_1}^2 &= \left( \sum_{i=1}^n f_1(u_i) + f_1(u_{i+1}) \right) + f_1(v_{i+1}) + f_1(u_{i+1} v_{i+1}) + f_1(u_i u_{i+1}) + f_1(u_i v_{i+1}) \\
&= 2i + 2i + 2 + 2i + 2 - 1 + 6n - 2i - 2 - 1 + 4n - 2i - 1 + 6n - 2i - 2 \\
&= 16n - 3
\end{aligned}$$

Berdasarkan hasil diatas, dapat diperhatikan bahwa himpunan bobot total selimut  $w_{f_1}^1 = w_{f_1}^2 = 16n - 3$ , dengan demikian  $\bigcup_{k=1}^n w_{f_1}^k = \{16n - 3, 16n - 3, \dots, 16n - 3\}$ . Karena  $U_n = a + (n - 1)b = 16n - 3 + (2n - 2 - 1)0 = 16n - 3$ , dapat disimpulkan bahwa graf triangular ladder  $L_n$  dengan  $n \geq 2$ , mempunyai pelabelan super  $(a, d)$ - $C_3$  antimagic total covering dengan  $a = 16n - 3$  dan  $d =$

0, dengan kata lain graf triangular ladder  $L_n$  mempunyai super  $(16n - 3, 0)$ - $C_3$  antimagic total covering.  $\square$

Gambar 4.2 merupakan contoh super  $(77, 0)$ - $C_3$  antimagic total covering  $\mathcal{SHATC}$  pada graf triangular ladder  $L_5$



Gambar 4.2 Super  $(77, 0)$ - $C_3$  antimagic total covering pada  $L_5$

$\diamond$  **Teorema 4.1.2.** *Graf triangular ladder  $L_n$  memiliki super  $(15n - 1, 1)$ - $C_3$  antimagic total covering untuk  $n \geq 2$ .*

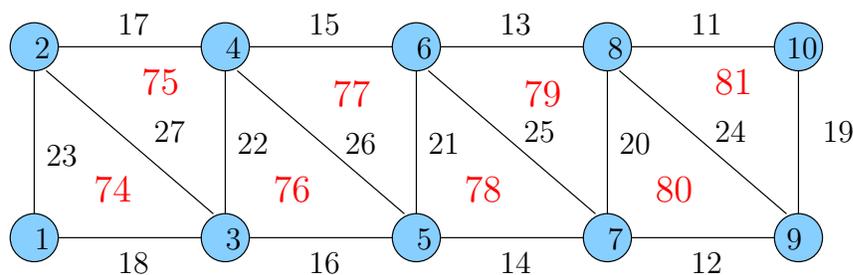
**Bukti.** Labeli titik dan sisi graf triangular ladder  $L_n$  dengan fungsi  $f_2$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 f_2(u_i) &= 2i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_2(v_i) &= 2i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_2(u_i u_{i+1}) &= 4n - 2i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\
 f_2(v_i v_{i+1}) &= 4n - 2i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\
 f_2(u_i v_i) &= 5n - i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_2(u_i v_{i+1}) &= 6n - i - 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1
 \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa  $f_2$  adalah sebuah fungsi bijektif dari  $f_2 : V(L_n) \cup E(L_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 6n - 3\}$ . Jika  $w_{f_2}$  didefinisikan sebagai bobot total selimut dari pelabelan total selimut pada graf triangular ladder berdasarkan penjumlahan 3 titik dan 3 sisi yang bersisian dari  $\mathcal{H} = C_3$  yang menjadi covering pada graf triangular ladder  $L_n$ . Bilangan 1 dan 2 pada  $w_{f_2}^1$  dan  $w_{f_2}^2$  bukan pangkat, melainkan

bilangan tersebut hanya merupakan kode pembeda bobot total selimut  $w_{f_2}$  untuk tiap selimut yang berlainan dengan syarat batas  $i$  yang berbeda Sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 w_{f_2}^1 &= \left( \sum_{i=1}^n f_2(v_i) + f_2(v_{i+1}) \right) + f_2(u_i) + f_2(u_i v_i) + f_2(v_i v_{i+1}) + f_2(u_i v_{i+1}) \\
 &= 2i - 1 + 2i + 2 - 1 + 2i + 5n - i - 1 + 4n - 2i + 6n - i - 2 \\
 &= 15n + 2i - 3 \\
 w_{f_2}^2 &= \left( \sum_{i=1}^n f_2(u_i) + f_2(u_{i+1}) \right) + f_2(v_{i+1}) + f_2(u_{i+1} v_{i+1}) + f_2(u_i u_{i+1}) + f_2(u_i v_{i+1}) \\
 &= 2i + 2i + 2 + 2i + 2 - 1 + 5n - i + 1 - 1 + 4n - 2i - 1 + 6n - i - 2 \\
 &= 15n + 2i - 2
 \end{aligned}$$



Gambar 4.3 Super  $(74,1)-C_3$  antimagic total covering pada  $L_5$

Berdasarkan himpunan bobot total selimut  $w_{f_2} = \{w_{f_2}^1, w_{f_2}^2\}$ . Dengan demikian  $\bigcup_{k=1}^n w_{f_2}^k = \{15n - 1, 15n, 15n + 1, 15n + 2, \dots, 17n - 4\}$  sehingga dapat diperhatikan bahwa bobot total selimut terkecil terdefiniskan oleh  $w_{f_2}^1$  untuk  $i = 1$ , bobot total selimut terbesar terdefinisi oleh  $w_{f_2}^2$  untuk  $i = n - 1$ . Karena  $U_n = a + (n - 1)b = 15n - 1 + (2n - 2 - 1)1 = 15n - 1 + 2n - 3 = 17n - 4$ , dapat diperoleh sebuah kesimpulan bahwa graf triangular ladder  $L_n$  memiliki super  $(a, d)-C_3$  antimagic total covering dengan  $a = 15n - 1$  dan  $d = 1$  atau graf triangular ladder  $L_n$  mempunyai super  $(15n - 1, 1)-C_3$  antimagic total covering dengan  $n \geq 2$ . Sehingga terbukti bahwa total selimut  $f_2(u_i)$ ,  $f_2(v_i)$  untuk  $1 \leq i \leq n$ ,  $f_2(u_i u_{i+1})$ ,  $f_2(v_i v_{i+1})$ ,  $f_2(u_i v_{i+1})$  untuk  $1 \leq i \leq n - 1$ ,  $f_2(u_i v_i)$  untuk  $1 \leq i \leq n$

adalah super  $(a, 1)$ - $C_3$  antimagic total covering jika  $n \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.3 merupakan contoh super  $(74, 1)$ - $C_3$  antimagic total covering  $\mathcal{SHATC}$  pada graf triangular ladder  $L_5$

$\diamond$  **Teorema 4.1.3.** *Graf triangular ladder  $L_n$  memiliki super  $(12n + 3, 2)$ - $C_3$  antimagic total covering untuk  $n \geq 2$ .*

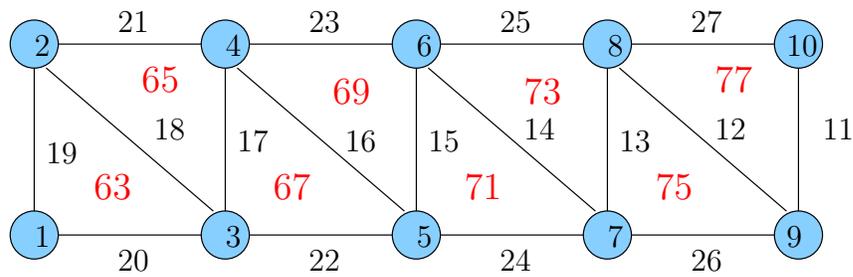
**Bukti.** Labeli titik dan sisi graf triangular ladder  $L_n$  dengan fungsi  $f_3$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_3(u_i) &= 2i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_3(v_i) &= 2i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_3(u_i u_{i+1}) &= 4n + 2i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\ f_3(v_i v_{i+1}) &= 4n + 2i - 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\ f_3(u_i v_i) &= 4n - 2i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_3(u_i v_{i+1}) &= 4n - 2i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa  $f_3$  adalah sebuah fungsi bijektif dari  $f_3 : V(L_n) \cup E(L_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 6n - 3\}$ . Jika  $w_{f_3}$  didefinisikan sebagai bobot total selimut dari pelabelan total selimut pada graf triangular ladder berdasarkan penjumlahan 3 titik dan 3 sisi yang bersisian dari  $\mathcal{H} = C_3$  yang menjadi covering pada graf triangular ladder  $L_n$ . Bilangan 1 dan 2 pada  $w_{f_3}^1$  dan  $w_{f_3}^2$  bukan pangkat, melainkan bilangan tersebut hanya merupakan kode pembeda bobot total selimut  $w_{f_3}$  untuk tiap selimut yang berlainan dengan syarat batas  $i$  yang berbeda. Sehingga dapat

dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 w_{f_3}^1 &= \left( \sum_{i=1}^n f_3(v_i) + f_3(v_{i+1}) \right) + f_3(u_i) + f_3(u_i v_i) + f_3(v_i v_{i+1}) + f_3(u_i v_{i+1}) \\
 &= 2i - 1 + 2i + 2 - 1 + 2i + 4n - 2i + 1 + 4n + 2i - 2 + 4n - 2i \\
 &= 12n + 4i - 1 \\
 w_{f_3}^2 &= \left( \sum_{i=1}^n f_3(u_i) + f_3(u_{i+1}) \right) + f_3(v_{i+1}) + f_3(u_{i+1} v_{i+1}) + f_3(u_i u_{i+1}) + f_3(u_i v_{i+1}) \\
 &= 2i + 2i + 2 + 2i + 2 - 1 + 4n - 2i - 2 + 1 + 4n + 2i - 1 + 4n - 2i \\
 &= 12n + 4i + 1
 \end{aligned}$$



Gambar 4.4 Super  $(63,2)-C_3$  antimagic total covering pada  $L_5$

Berdasarkan himpunan bobot total selimut  $w_{f_3} = \{w_{f_3}^1, w_{f_3}^2\}$ . Dengan demikian  $\bigcup_{k=1}^n w_{f_3}^k = \{12n + 3, 12n + 5, 12n + 7, 12n + 9, \dots, 16n - 3\}$  sehingga dapat diperhatikan bahwa bobot total selimut terkecil terdefinisi oleh  $w_{f_3}^1$  untuk  $i = 1$ , bobot total selimut terbesar terdefinisi oleh  $w_{f_3}^2$  untuk  $i = n - 1$ . Karena  $U_n = a + (n - 1)b = 12n + 3 + (2n - 2 - 1)2 = 12n + 3 + 4n - 6 = 16n - 3$  dimana  $1 \leq i \leq n$ , dapat diperoleh sebuah kesimpulan bahwa graf triangular ladder  $L_n$  memiliki super  $(a, d)-C_3$  antimagic total covering dengan  $a = 12n + 3$  dan  $d = 2$  atau graf triangular ladder  $L_n$  mempunyai super  $(12n + 3, 2)-C_3$  antimagic total covering dengan  $n \geq 2$ . Sehingga terbukti bahwa total selimut  $f_3(u_i), f_3(v_i)$  untuk  $1 \leq i \leq n$ ,  $f_3(u_i u_{i+1}), f_3(v_i v_{i+1}), f_3(u_i v_{i+1})$  untuk  $1 \leq i \leq n - 1$ ,  $f_3(u_i v_i)$  untuk  $1 \leq i \leq n$  adalah super  $(a, 2)-C_3$  antimagic total covering jika  $n \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.4 merupakan contoh super  $(63, 2)-C_3$  antimagic total covering

$\mathcal{SHATC}$  pada graf triangular ladder  $L_5$

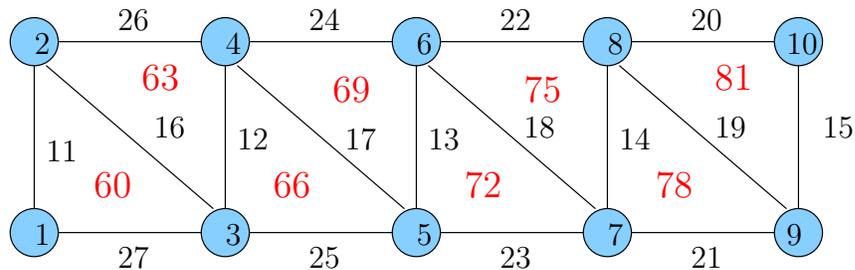
◇ **Teorema 4.1.4.** *Graf triangular ladder  $L_n$  memiliki super  $(11n + 5, 3)$ - $C_3$  antimagic total covering untuk  $n \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli titik dan sisi graf triangular ladder  $L_n$  dengan fungsi  $f_4$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_4(u_i) &= 2i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_4(v_i) &= 2i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_4(u_i u_{i+1}) &= 6n - 2i - 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\ f_4(v_i v_{i+1}) &= 6n - 2i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\ f_4(u_i v_i) &= 2n + i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_4(u_i v_{i+1}) &= 3n + i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa  $f_4$  adalah sebuah fungsi bijektif dari  $f_4 : V(L_n) \cup E(L_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 6n - 3\}$ . Jika  $w_{f_4}$  didefinisikan sebagai bobot total selimut dari pelabelan total selimut pada graf triangular ladder berdasarkan penjumlahan 3 titik dan 3 sisi yang bersisian dari  $\mathcal{H} = C_3$  yang menjadi covering pada graf triangular ladder  $L_n$ . Bilangan 1 dan 2 pada  $w_{f_4}^1$  dan  $w_{f_4}^2$  bukan pangkat, melainkan bilangan tersebut hanya merupakan kode pembeda bobot total selimut  $w_{f_4}$  untuk tiap selimut yang berlainan dengan syarat batas  $i$  yang berbeda. Sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{f_4}^1 &= \left( \sum_{i=1}^n f_4(v_i) + f_4(v_{i+1}) \right) + f_4(u_i) + f_4(u_i v_i) + f_4(v_i v_{i+1}) + f_4(u_i v_{i+1}) \\ &= 2i - 1 + 2i + 2 - 1 + 2i + 2n + i + 6n - 2i - 1 + 3n + i \\ &= 11n + 6i - 1 \\ w_{f_4}^2 &= \left( \sum_{i=1}^n f_4(u_i) + f_4(u_{i+1}) \right) + f_4(v_{i+1}) + f_4(u_{i+1} v_{i+1}) + f_4(u_i u_{i+1}) + f_4(u_i v_{i+1}) \\ &= 2i + 2i + 2 + 2i + 2 - 1 + 2n + i + 1 + 6n - 2i - 2 + 3n + i \\ &= 11n + 6i + 2 \end{aligned}$$



Gambar 4.5 Super  $(60,3)$ - $C_3$  antimagic total covering pada  $L_5$

Berdasarkan himpunan bobot total selimut  $w_{f_4} = \{w_{f_4}^1, w_{f_4}^2\}$ . Dengan demikian  $\bigcup_{k=1}^n w_{f_4}^k = \{11n+5, 11n+8, 11n+11, 11n+14, \dots, 17n-4\}$  sehingga dapat diperhatikan bahwa bobot total selimut terkecil terdefinisi oleh  $w_{f_4}^1$  untuk  $i = 1$ , bobot total selimut terbesar terdefinisi oleh  $w_{f_4}^2$  untuk  $i = n - 1$ . Karena  $U_n = a + (n-1)b = 11n+5 + (2n-2-1)3 = 11n+5 + 6n-9 = 17n-4$  dimana  $1 \leq i \leq n$ , dapat diperoleh sebuah kesimpulan bahwa graf triangular ladder  $L_n$  memiliki super  $(a, d)$ - $C_3$  antimagic total covering dengan  $a = 11n+5$  dan  $d = 3$  atau graf triangular ladder  $L_n$  mempunyai super  $(11n+5, 3)$ - $C_3$  antimagic total covering dengan  $n \geq 2$ . Sehingga terbukti bahwa total selimut  $f_4(u_i), f_4(v_i)$  untuk  $1 \leq i \leq n$ ,  $f_4(u_i u_{i+1}), f_4(v_i v_{i+1}), f_4(u_i v_{i+1})$  untuk  $1 \leq i \leq n-1$ ,  $f_4(u_i v_i)$  untuk  $1 \leq i \leq n$  adalah super  $(a, 3)$ - $C_3$  antimagic total covering jika  $n \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.5 merupakan contoh super  $(60, 3)$ - $C_3$  antimagic total covering  $\mathcal{SHATC}$  pada graf triangular ladder  $L_5$

$\diamond$  **Teorema 4.1.5.** *Graf triangular ladder  $L_n$  memiliki super  $(10n+6, 4)$ - $C_3$  antimagic total covering pada untuk  $n \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli titik dan sisi graf triangular ladder  $L_n$  dengan fungsi  $f_5$

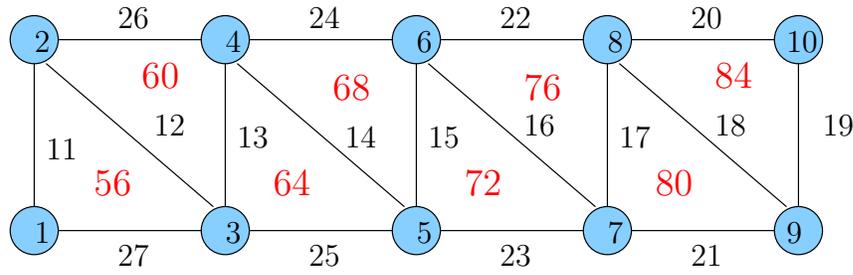
sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
f_5(u_i) &= 2i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_5(v_i) &= 2i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_5(u_i u_{i+1}) &= 6n - 2i - 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\
f_5(v_i v_{i+1}) &= 6n - 2i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\
f_5(u_i v_i) &= 2n + 2i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_5(u_i v_{i+1}) &= 2n + 2i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1
\end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa  $f_5$  adalah sebuah fungsi bijektif dari  $f_5 : V(L_n) \cup E(L_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 6n - 3\}$ . Jika  $w_{f_5}$  didefinisikan sebagai bobot total selimut dari pelabelan total selimut pada graf triangular ladder berdasarkan penjumlahan 3 titik dan 3 sisi yang bersisian dari  $\mathcal{H} = C_3$  yang menjadi covering pada graf triangular ladder  $L_n$ . Bilangan 1 dan 2 pada  $w_{f_5}^1$  dan  $w_{f_5}^2$  bukan pangkat, melainkan bilangan tersebut hanya merupakan kode pembeda bobot total selimut  $w_{f_5}$  untuk tiap selimut yang berlainan dengan syarat batas  $i$  yang berbeda. Sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
w_{f_5}^1 &= \left( \sum_{i=1}^n f_5(v_i) + f_5(v_{i+1}) \right) + f_5(u_i) + f_5(u_i v_i) + f_5(v_i v_{i+1}) + f_5(u_i v_{i+1}) \\
&= 2i - 1 + 2i + 2 - 1 + 2i + 2n + 2i - 1 + 6n - 2i - 1 + 2n + 2i \\
&= 10n + 8i - 2 \\
w_{f_5}^2 &= \left( \sum_{i=1}^n f_5(u_i) + f_5(u_{i+1}) \right) + f_5(v_{i+1}) + f_5(u_{i+1} v_{i+1}) + f_5(u_i u_{i+1}) + f_5(u_i v_{i+1}) \\
&= 2i + 2i + 2 + 2i + 2 - 1 + 2n + 2i + 2 - 1 + 6n - 2i - 2 + 2n + 2i \\
&= 10n + 8i + 2
\end{aligned}$$

Berdasarkan himpunan bobot total selimut  $w_{f_5} = \{w_{f_5}^1, w_{f_5}^2\}$ . Dengan demikian  $\bigcup_{k=1}^n w_{f_5}^k = \{10n+6, 10n+10, 10n+14, 10n+18, \dots, 18n-6\}$  sehingga dapat diperhatikan bahwa bobot total selimut terkecil terdefiniskan oleh  $w_{f_5}^1$  untuk  $i = 1$ , bobot total selimut terbesar terdefinisi oleh  $w_{f_5}^2$  untuk  $i = n - 1$ . Karena  $U_n = a + (n - 1)b = 10n + 6 + (2n - 2 - 1)4 = 10n + 6 + 8n - 12 = 18n - 6$  dimana



Gambar 4.6 Super  $(56,4)$ - $C_3$  antimagic total covering pada  $L_5$

$1 \leq i \leq n$ , dapat diperoleh sebuah kesimpulan bahwa graf triangular ladder  $L_n$  memiliki super  $(a, d)$ - $C_3$  antimagic total covering dengan  $a = 10n + 6$  dan  $d = 4$  atau graf triangular ladder  $L_n$  mempunyai super  $(10n + 6, 4)$ - $C_3$  antimagic total covering dengan  $n \geq 2$ . Sehingga terbukti bahwa total selimut  $f_5(u_i)$ ,  $f_5(v_i)$  untuk  $1 \leq i \leq n$ ,  $f_5(u_i u_{i+1})$ ,  $f_5(v_i v_{i+1})$ ,  $f_5(u_i v_{i+1})$  untuk  $1 \leq i \leq n - 1$ ,  $f_5(u_i v_i)$  untuk  $1 \leq i \leq n$  adalah super  $(a, 4)$ - $C_3$  antimagic total covering jika  $n \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.6 merupakan contoh super  $(56, 4)$ - $C_3$  antimagic total covering  $\mathcal{SHATC}$  pada graf triangular ladder  $L_5$ .

$\diamond$  **Teorema 4.1.6.** *Graf triangular ladder  $L_n$  memiliki super  $(9n + 8, 5)$  -  $C_3$  antimagic total covering pada untuk  $n \geq 2$ .*

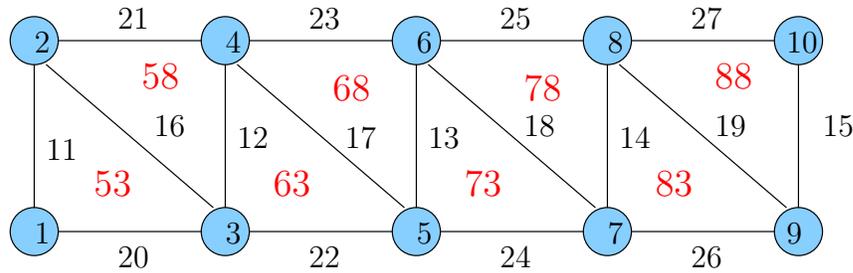
**Bukti.** Labeli titik dan sisi graf triangular ladder  $L_n$  dengan fungsi  $f_6$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 f_6(u_i) &= 2i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_6(v_i) &= 2i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_6(u_i u_{i+1}) &= 4n + 2i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\
 f_6(v_i v_{i+1}) &= 4n + 2i - 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\
 f_6(u_i v_i) &= 2n + i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_6(u_i v_{i+1}) &= 3n + i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1
 \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa  $f_6$  adalah sebuah fungsi bijektif dari  $f_6 : V(L_n) \cup E(L_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 6n - 3\}$ . Jika  $w_{f_6}$  didefinisikan sebagai bobot total selimut

dari pelabelan total selimut pada graf triangular ladder berdasarkan penjumlahan 3 titik dan 3 sisi yang bersisian dari  $\mathcal{H} = C_3$  yang menjadi covering pada graf triangular ladder  $L_n$ . Bilangan 1 dan 2 pada  $w_{f_6}^1$  dan  $w_{f_6}^2$  bukan pangkat, melainkan bilangan tersebut hanya merupakan kode pembeda bobot total selimut  $w_{f_6}$  untuk tiap selimut yang berlainan dengan syarat batas  $i$  yang berbeda. Sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 w_{f_6}^1 &= \left( \sum_{i=1}^n f_6(v_i) + f_6(v_{i+1}) \right) + f_6(u_i) + f_6(u_i v_i) + f_6(v_i v_{i+1}) + f_6(u_i v_{i+1}) \\
 &= 2i - 1 + 2i + 2 - 1 + 2i + 2n + i + 4n + 2i - 2 + 3n + i \\
 &= 9n + 10i - 2 \\
 w_{f_6}^2 &= \left( \sum_{i=1}^n f_6(u_i) + f_6(u_{i+1}) \right) + f_6(v_{i+1}) + f_6(u_{i+1} v_{i+1}) + f_6(u_i u_{i+1}) + f_6(u_i v_{i+1}) \\
 &= 2i + 2i + 2 + 2i + 2 - 1 + 2n + i + 1 + 4n + 2i - 1 + 3n + i \\
 &= 9n + 10i + 3
 \end{aligned}$$



Gambar 4.7 Super  $(53,5)$ - $C_3$  antimagic total covering pada  $L_5$

Berdasarkan himpunan bobot total selimut  $w_{f_6} = \{w_{f_6}^1, w_{f_6}^2\}$ . Dengan demikian  $\bigcup_{k=1}^n w_{f_6}^k = \{9n + 8, 9n + 13, 9n + 18, 9n + 23, \dots, 19n - 7\}$  sehingga dapat diperhatikan bahwa bobot total selimut terkecil terdefinisi oleh  $w_{f_6}^1$  untuk  $i = 1$ , bobot total selimut terbesar terdefinisi oleh  $w_{f_6}^2$  untuk  $i = n - 1$ . Karena  $U_n = a + (n - 1)b = 9n + 8 + (2n - 2 - 1)5 = 9n + 8 + 10n - 15 = 19n - 7$  dimana  $1 \leq i \leq n$ , dapat diperoleh sebuah kesimpulan bahwa graf triangular ladder  $L_n$  memiliki super  $(a, d)$ - $C_3$  antimagic total covering dengan  $a = 9n + 8$  dan  $d = 5$  atau graf triangular ladder  $L_n$  mempunyai super  $(9n + 8, 5)$ - $C_3$  antimagic total

covering dengan  $n \geq 2$ . Sehingga terbukti bahwa total selimut  $f_6(u_i), f_6(v_i)$  untuk  $1 \leq i \leq n$ ,  $f_6(u_i u_{i+1}), f_6(v_i v_{i+1}), f_6(u_i v_{i+1})$  untuk  $1 \leq i \leq n - 1$ ,  $f_6(u_i v_i)$  untuk  $1 \leq i \leq n$  adalah super  $(a, 5)$ - $C_3$  antimagic total covering jika  $n \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.7 merupakan contoh super  $(56, 4)$ - $C_3$  antimagic total covering  $\mathcal{SHATC}$  pada graf triangular ladder  $L_5$ .

$\diamond$  **Teorema 4.1.7.** *Graf triangular ladder  $L_n$  memiliki super  $(10n + 6, 6)$ - $C_3$  antimagic total covering pada untuk  $n \geq 2$ .*

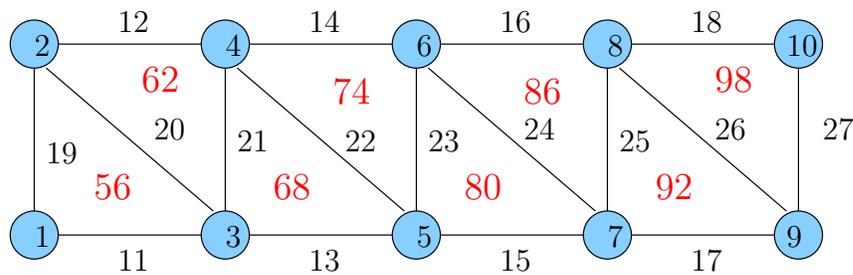
**Bukti.** Labeli titik dan sisi graf triangular ladder  $L_n$  dengan fungsi  $f_7$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_7(u_i) &= 2i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_7(v_i) &= 2i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_7(u_i u_{i+1}) &= 2n + 2i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\ f_7(v_i v_{i+1}) &= 2n + 2i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\ f_7(u_i v_i) &= 4n + 2i - 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_7(u_i v_{i+1}) &= 4n + 2i - 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa  $f_7$  adalah sebuah fungsi bijektif dari  $f_7 : V(L_n) \cup E(L_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 6n - 3\}$ . Jika  $w_{f_7}$  didefinisikan sebagai bobot total selimut dari pelabelan total selimut pada graf triangular ladder berdasarkan penjumlahan 3 titik dan 3 sisi yang bersisian dari  $\mathcal{H} = C_3$  yang menjadi covering pada graf triangular ladder  $L_n$ . Bilangan 1 dan 2 pada  $w_{f_7}^1$  dan  $w_{f_7}^2$  bukan pangkat, melainkan bilangan tersebut hanya merupakan kode pembeda bobot total selimut  $w_{f_7}$  untuk tiap selimut yang berlainan dengan syarat batas  $i$  yang berbeda. Sehingga dapat

dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 w_{f_7}^1 &= \left( \sum_{i=1}^n f_7(v_i) + f_7(v_{i+1}) \right) + f_7(u_i) + f_7(u_i v_i) + f_7(v_i v_{i+1}) + f_7(u_i v_{i+1}) \\
 &= 2i - 1 + 2i + 2 - 1 + 2i + 4n + 2i - 3 + 2n + 2i - 1 + 4n + 2i - 2 \\
 &= 10n + 12i - 6 \\
 w_{f_7}^2 &= \left( \sum_{i=1}^n f_7(u_i) + f_7(u_{i+1}) \right) + f_7(v_{i+1}) + f_7(u_{i+1} v_{i+1}) + f_7(u_i u_{i+1}) + f_7(u_i v_{i+1}) \\
 &= 2i + 2i + 2 + 2i + 2 - 1 + 4n + 2i + 2 - 3 + 2n + 2i + 4n + 2i - 2 \\
 &= 10n + 12i
 \end{aligned}$$



Gambar 4.8 Super  $(56,6)-C_3$  antimagic total covering pada  $L_5$

Berdasarkan himpunan bobot total selimut  $w_{f_7} = \{w_{f_7}^1, w_{f_7}^2\}$ . Dengan demikian  $\bigcup_{k=1}^n w_{f_7}^k = \{10n+6, 10n+12, 10n+18, 10n+24, \dots, 22n-12\}$  sehingga dapat diperhatikan bahwa bobot total selimut terkecil terdefinisi oleh  $w_{f_7}^1$  untuk  $i = 1$ , bobot total selimut terbesar terdefinisi oleh  $w_{f_7}^2$  untuk  $i = n - 1$ . Karena  $U_n = a + (n-1)b = 10n+6 + (2n-2-1)6 = 10n+6 + 12n-18 = 22n-12$  dimana  $1 \leq i \leq n$ , dapat diperoleh sebuah kesimpulan bahwa graf triangular ladder  $L_n$  memiliki super  $(a, d)-C_3$  antimagic total covering dengan  $a = 10n + 6$  dan  $d = 6$  atau graf triangular ladder  $L_n$  mempunyai super  $(10n + 6, 6)-C_3$  antimagic total covering dengan  $n \geq 2$ . Sehingga terbukti bahwa total selimut  $f_7(u_i), f_7(v_i)$  untuk  $1 \leq i \leq n$ ,  $f_7(u_i u_{i+1}), f_7(v_i v_{i+1}), f_7(u_i v_{i+1})$  untuk  $1 \leq i \leq n - 1$ ,  $f_7(u_i v_i)$  untuk  $1 \leq i \leq n$  adalah super  $(a, 6)-C_3$  antimagic total covering jika  $n \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.8 merupakan contoh super  $(56, 6)-C_3$  antimagic total covering

$\mathcal{SHATC}$  pada graf triangular ladder  $L_5$ .

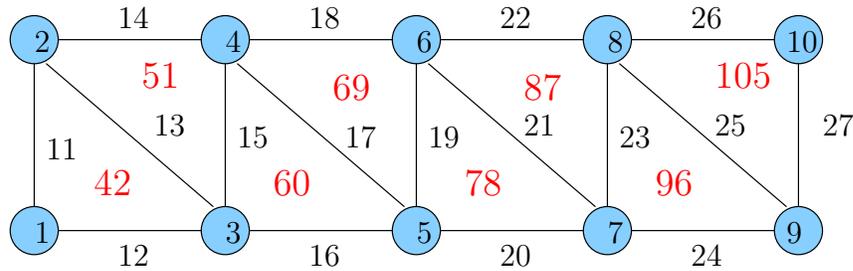
◇ **Teorema 4.1.8.** *Graf triangular ladder  $L_n$  memiliki super  $(6n + 12, 9)$ - $C_3$  antimagic total covering pada untuk  $n \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli titik dan sisi graf triangular ladder  $L_n$  dengan fungsi  $f_8$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_8(u_i) &= 2i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_8(v_i) &= 2i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_8(u_i u_{i+1}) &= 2n + 4i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\ f_8(v_i v_{i+1}) &= 2n + 4i - 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\ f_8(u_i v_i) &= 2n + 4i - 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_8(u_i v_{i+1}) &= 2n + 4i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa  $f_8$  adalah sebuah fungsi bijektif dari  $f_8 : V(L_n) \cup E(L_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 6n - 3\}$ . Jika  $w_{f_8}$  didefinisikan sebagai bobot total selimut dari pelabelan total selimut pada graf triangular ladder berdasarkan penjumlahan 3 titik dan 3 sisi yang bersisian dari  $\mathcal{H} = C_3$  yang menjadi covering pada graf triangular ladder  $L_n$ . Bilangan 1 dan 2 pada  $w_{f_8}^1$  dan  $w_{f_8}^2$  bukan pangkat, melainkan bilangan tersebut hanya merupakan kode pembeda bobot total selimut  $w_{f_8}$  untuk tiap selimut yang berlainan dengan syarat batas  $i$  yang berbeda. Sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{f_8}^1 &= \left( \sum_{i=1}^n f_8(v_i) + f_8(v_{i+1}) \right) + f_8(u_i) + f_8(u_i v_i) + f_8(v_i v_{i+1}) + f_8(u_i v_{i+1}) \\ &= 2i - 1 + 2i + 2 - 1 + 2i + 2n + 4i - 3 + 2n + 4i - 2 + 2n + 4i - 1 \\ &= 6n + 18i - 6 \\ w_{f_8}^2 &= \left( \sum_{i=1}^n f_8(u_i) + f_8(u_{i+1}) \right) + f_8(v_{i+1}) + f_8(u_{i+1} v_{i+1}) + f_8(u_i u_{i+1}) + f_8(u_i v_{i+1}) \\ &= 2i + 2i + 2 + 2i + 2 - 1 + 2n + 4i + 4 + -3 + 2n + 4i + 2n + 4i - 1 \\ &= 6n + 18i + 3 \end{aligned}$$



Gambar 4.9 Super  $(42,9)$ - $C_3$  antimagic total covering pada  $L_5$

Berdasarkan himpunan bobot total selimut  $w_{f_8} = \{w_{f_8}^1, w_{f_8}^2\}$ . Dengan demikian  $\bigcup_{k=1}^n w_{f_8}^k = \{6n + 12, 6n + 21, 6n + 30, 6n + 39, \dots, 24n - 15\}$  sehingga dapat diperhatikan bahwa bobot total selimut terkecil terdefiniskan oleh  $w_{f_8}^1$  untuk  $i = 1$ , bobot total selimut terbesar terdefinisi oleh  $w_{f_8}^2$  untuk  $i = n - 1$ . Karena  $U_n = a + (n-1)b = 6n + 12 + (2n - 2 - 1)9 = 6n + 12 + 18n - 27 = 24n - 15$  dimana  $1 \leq i \leq n$ , dapat diperoleh sebuah kesimpulan bahwa graf triangular ladder  $L_n$  memiliki super  $(a, d)$ - $C_3$  antimagic total covering dengan  $a = 6n + 12$  dan  $d = 9$  atau graf triangular ladder  $L_n$  mempunyai super  $(6n + 12, 9)$ - $C_3$  antimagic total covering dengan  $n \geq 2$ . Sehingga terbukti bahwa total selimut  $f_8(u_i)$ ,  $f_8(v_i)$  untuk  $1 \leq i \leq n$ ,  $f_8(u_i u_{i+1})$ ,  $f_8(v_i v_{i+1})$ ,  $f_8(u_i v_{i+1})$  untuk  $1 \leq i \leq n - 1$ ,  $f_8(u_i v_i)$  untuk  $1 \leq i \leq n$  adalah super  $(a, 9)$ - $C_3$  antimagic total covering jika  $n \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.9 merupakan contoh super  $(42, 9)$ - $C_3$  antimagic total covering  $\mathcal{SHATC}$  pada graf triangular ladder  $L_5$ .

## 4.2 Pelabelan Super $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ Antimagic Total Covering pada Gabungan Graf Triangular Ladder Diskonektif

Selanjutnya peneliti melakukan penelitian untuk gabungan graf triangular ladder  $mL_n$ . Penelitian ini merupakan pengembangan dari graf triangular ladder tunggal. Gabungan graf triangular ladder didefinisikan sebagai graf graf triangular ladder dengan salinan sebanyak  $m$ . Dalam hal ini graf-graf tersebut diletakkan dalam posisi sejajar kebawah seperti pada Gambar 3.2. Gabungan graf triangular ladder  $mL_n$  didefinisikan sebagai  $V(mL_n) = \{u_i^k, v_i^k : 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m\}$  dan sisi  $E(mL_n) = \{u_i^k u_{i+1}^k, v_i^k v_{i+1}^k, u_i^k v_{i+1}^k : 1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq k \leq m\} \cup$

$\{u_i^k, v_i^k : 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m\}$ .

Sama seperti graf triangular ladder tunggal, untuk menentukan batas atas  $d$  pada gabungan graf triangular ladder, perlu diketahui pula rumusan jumlah titik ( $p_G$ ) dan jumlah sisi ( $q_G$ ) pada gabungan graf triangular ladder. Jumlah titik dan jumlah sisi pada  $mL_n$  dapat ditentukan dengan terlebih dahulu mencermati definisi gabungan pada suatu graf. Gabungan  $m$  graf triangular ladder yang dinotasikan  $mL_n$  didefinisikan sebagai gabungan saling lepas dari  $m$  buah salinan graf triangular ladder  $L_n$  dengan  $1 \leq j \leq m$ , ditulis :  $L_n^1 \cup L_n^2 \cup L_n^3 \cup \dots \cup L_n^m$ . Sehingga jumlah titik graf  $mL_n$  adalah  $m$  kali jumlah titik graf  $L_n$  dapat dituliskan dalam  $p_G = m(2n) = 2nm$  dan jumlah sisi graf  $mL_n$  adalah  $m$  kali jumlah sisi graf  $L_n$  dapat dituliskan dengan  $q_G = m(4n - 3) = 4nm - 3m$ . Sedangkan jumlah titik pada selimut graf  $mL_n$  adalah  $m$  kali jumlah titik pada selimut graf  $L_n$ , yaitu  $p_H = m(3) = 3m$  dan jumlah sisi pada selimut graf  $mL_n$  adalah  $m$  kali jumlah sisi pada selimut graf  $L_n$ , dapat ditulis dengan  $q_H = m(3) = 3m$ . Jumlah selimut graf  $mL_n$  adalah  $m$  kali jumlah selimut graf  $L_n$ , dapat dituliskan  $s = m(2n - 2) = 2nm - 2m$ .

Batas atas  $d$  gabungan graf triangular ladder  $mL_n$  juga dapat ditentukan dengan menggunakan Lemma 4.1.1. Diketahui jumlah titik pada graf  $mL_n$  adalah  $p_G = 2nm$  dan jumlah sisi  $q_G = 4nm - 3m$ . Sedangkan jumlah titik pada selimut graf  $mL_n$  adalah  $p_H = 3m$  dan jumlah sisi pada selimut  $q_H = 3m$  dengan jumlah selimut  $mL_n$  adalah  $s = 2nm - 2m$  untuk  $m$  adalah jumlah salinan graf triangular ladder dari atas ke bawah dan  $n$  adalah banyaknya *expand* graf triangular ladder dari samping kiri ke kanan. Dengan demikian batas atas nilai beda  $d$  tersebut

adalah:

$$\begin{aligned}
d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s - m} \\
&= \frac{(2nm - 3m)3m + (4nm - 3m - 3m)3m}{2nm - 2m - m} \\
&= \frac{(2nm - 3m)3m + (4nm - 6m)3m}{2nm - 3m} \\
&= \frac{6nm^2 - 9m^2 + 12nm^2 - 18m^2}{2nm - 3m} \\
&= \frac{18nm^2 - 27m^2}{2nm - 3m} \\
&= \frac{9m(2nm - 3m)}{2nm - 3m} \\
&\leq 9m
\end{aligned}$$

Sesuai dengan pelabelan selimut  $S\mathcal{H}AT$  pada graf triangular ladder tunggal, gabungan graf triangular ladder juga menggunakan bilangan bulat positif, sehingga nilai  $d \geq 0$  dan  $d$  adalah bilangan bulat. Dengan demikian dapat disimpulkan  $d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}m$ . Selanjutnya akan ditentukan fungsi bijektif super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering sesuai dengan nilai  $d$  yang telah ditetapkan.

Sama seperti graf triangular ladder tunggal, metode yang digunakan dalam menemukan pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering pada gabungan graf triangular ladder  $mL_n$  terdiri dari beberapa langkah yang diawali dengan menggunakan pendeteksian pola (*pattern recognition*) untuk menentukan pelabelan yang berlaku sampai dengan batas  $i, j$  dan  $k$  yang telah ditemukan. Kemudian untuk menentukan pola secara umum digunakan fungsi-fungsi dalam barisan aritmatika untuk menentukan fungsi bijektifnya. Setelah fungsi bijektif diketahui maka harus dibuktikan secara deduktif matematik untuk membuktikan kebenaran dari teorema tersebut.

Perlu diketahui bahwa teorema dalam penelitian ini adalah bukan teorema yang biimplikatif atau karakteristik sehingga pembuktiannya hanya dilakukan

satu arah. Dari hasil penggabungan pola melalui *pattern recognition* dan konsep barisan aritmatika, maka diperoleh teorema dan akibat sebagai berikut. Teorema yang ditemukan dalam penelitian ini tidak bersifat tunggal (berkenaan dengan sifat ketunggalan) melainkan hanya bersifat keberadaan (*existence but not unique*).

Untuk menentukan pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering pada gabungan graf triangular ladder  $mL_n$ . Terlebih dahulu harus diketahui batas atas nilai  $d$  untuk gabungan graf sebanyak  $m$  graf triangular ladder, dengan menggunakan rumus yang telah ada.

◇ **Teorema 4.2.1.** *Gabungan graf triangular ladder  $mL_n$  memiliki super  $(16nm - 6m + 3, 0)$  -  $C_3$  antimagic total covering untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli titik dan sisi gabungan graf triangular ladder  $mL_n$  dengan fungsi bijektif  $f_1$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_1(u_i^j) &= 2mi + j - m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_1(v_i^j) &= 2mi + j - 2m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_1(u_i^j u_{i+1}^j) &= 4nm - j - 2mi - m + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq j \leq m \\ f_1(v_i v_{i+1}) &= 4nm - j - 2mi + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq j \leq m \\ f_1(u_i v_i) &= 6nm - j - 2mi - m + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_1(u_i v_{i+1}) &= 6nm - j - 2mi - 2m + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

Dengan mudah dapat dilihat bahwa  $f_1$  adalah sebuah fungsi bijektif dari  $f_1 : V(mL_n) \cup E(mL_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 6nm - 3m\}$ . Jika  $w_{f_1}$  didefinisikan sebagai bobot total selimut dari pelabelan total selimut pada gabungan graf triangular ladder berdasarkan penjumlahan 3 titik dan 3 sisi dari  $\mathcal{H} = C_3$  yang menjadi covering pada gabungan graf triangular ladder  $mL_n$ . Bilangan 1 dan 2 pada  $w_{f_1}^1$  dan  $w_{f_1}^2$  bukan pangkat, melainkan bilangan tersebut hanya merupakan kode pembeda bobot total selimut  $w_{f_1}$  untuk tiap selimut yang berlainan dengan syarat

batas  $i$  dan  $j$  yang bersesuaian. Sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

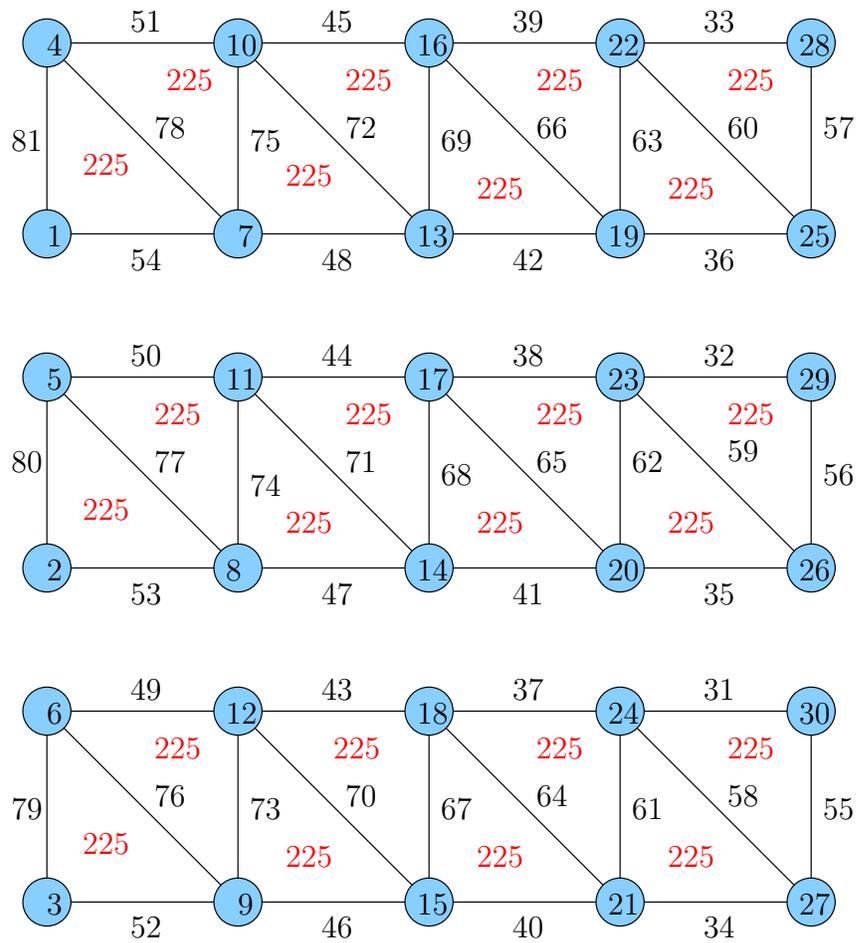
$$\begin{aligned}
w_{f_1}^1 &= \left( \sum_{i=1}^n f_1(v_i^j) + f_1(v_{i+1}^j) \right) + f_1(u_i^j) + f_1(u_i^j v_i^j) + f_1(v_i^j v_{i+1}^j) + f_1(u_i^j v_{i+1}^j) \\
&= 2mi + j - 2m + 2mi + 2m + j - 2m + 2mi + j - m + 6nm - j - 2mi \\
&\quad - m + 1 + 4nm - j - 2mi + 1 + 6nm - j - 2mi - 2m + 1 \\
&= 16nm - 6m + 3 \\
w_{f_1}^2 &= \left( \sum_{i=1}^n f_1(u_i^j) + f_1(u_{i+1}^j) \right) + f_1(v_{i+1}^j) + f_1(u_{i+1}^j v_{i+1}^j) + f_1(u_i^j u_{i+1}^j) + f_1(u_i^j v_{i+1}^j) \\
&= 2mi + j - m + 2mi + 2m + j - m + 2mi + 2m + j - 2m + 6nm - j \\
&\quad - 2mi - 2m - m + 1 + 4nm - j - 2mi - m + 1 + 6nm - j - 2mi \\
&\quad - 2m + 1 \\
&= 16nm - 6m + 3
\end{aligned}$$

Berdasarkan hasil diatas, dapat diperhatikan bahwa  $w_{f_1}^1 = w_{f_1}^2 = 16nm - 6m + 3$ . Rumusan tersebut dapat pula dituliskan sebagai  $\bigcup_{r=1}^{nm} w_{f_1}^r = \{16nm - 6m + 3, 16nm - 6m + 3, \dots, 16nm - 6m + 3\}$ . Karena  $U_n = a + (s - 1)b = 16nm - 6m + 3 + (2nm - 2m - 1)0 = 16nm - 6m + 3$ , sehingga dapat disimpulkan bahwa gabungan graf triangular ladder  $mL_n$  dengan  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ , mempunyai pelabelan super  $(a, d)$ - $C_3$  antimagic total covering dengan  $a = 16nm - 6m + 3$  dan  $d = 0$ , dengan kata lain gabungan graf triangular ladder  $mL_n$  mempunyai super  $(16nm - 6m + 3, 0)$ - $C_3$  antimagic total covering.  $\square$

Gambar 4.10 merupakan contoh super  $(225, 0)$ - $C_3$  antimagic total covering  $\mathcal{SHATC}$  pada gabungan graf triangular ladder  $3L_5$ .

$\diamond$  **Teorema 4.2.2.** *Gabungan graf triangular ladder  $mL_n$  memiliki super  $(12nm - m + 4, 2)$ - $C_3$  antimagic total covering untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli titik dan sisi gabungan graf triangular ladder  $mL_n$  dengan



Gambar 4.10 Super  $(225,0)-C_3$  antimagic total covering pada  $3L_5$

fungsi  $f_2$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
f_2(u_i^j) &= 2mi + j - m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\
f_2(v_i^j) &= 2mi + j - 2m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\
f_2(u_i^j u_{i+1}^j) &= 4nm + j + 2mi - 2m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m \\
f_2(v_i v_{i+1}) &= 4nm + j + 2mi - 3m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m \\
f_2(u_i v_i) &= 4nm - j - 2mi + m + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\
f_2(u_i v_{i+1}) &= 4nm - j - 2mi + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m
\end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa  $f_2$  adalah sebuah fungsi bijektif dari  $f_2 : V(mL_n) \cup E(mL_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 6nm - 3m\}$ . Jika  $w_{f_2}$  didefinisikan sebagai bobot total selimut dari pelabelan total selimut pada gabungan graf triangular ladder berdasarkan penjumlahan 3 titik dan 3 sisi dari  $\mathcal{H} = C_3$  yang menjadi covering pada gabungan graf triangular ladder  $mL_n$ . Bilangan 1 dan 2 pada  $w_{f_2}^1$  dan  $w_{f_2}^2$  bukan pangkat, melainkan bilangan tersebut hanya merupakan kode pembeda bobot total selimut  $w_{f_2}$  untuk tiap selimut yang berlainan dengan syarat batas  $i$  dan  $j$  yang bersesuaian. Sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
w_{f_2}^1 &= \left( \sum_{i=1}^n f_2(v_i^j) + f_2(v_{i+1}^j) \right) + f_2(u_i^j) + f_2(u_i^j v_i^j) + f_2(v_i^j v_{i+1}^j) + f_2(u_i^j v_{i+1}^j) \\
&= 2mi + j - 2m + 2mi + 2m + j - 2m + 2mi + j - m + 4nm - j - 2mi \\
&\quad + m + 1 + 4nm + j + 2mi - 3m + 4nm - j - 2mi - 2m + 1 \\
&= 12nm + 4mi + 2j - 5m + 2 \\
w_{f_2}^2 &= \left( \sum_{i=1}^n f_2(u_i^j) + f_2(u_{i+1}^j) \right) + f_2(v_{i+1}^j) + f_2(u_{i+1}^j v_{i+1}^j) + f_2(u_i^j u_{i+1}^j) + f_2(u_i^j v_{i+1}^j) \\
&= 2mi + j - m + 2mi + 2m + j - m + 2mi + 2m + j - 2m + 4nm - j \\
&\quad - 2mi - 2m + m + 1 + 4nm + j + 2mi - 2m + 4nm - j - 2mi + 1 \\
&= 16nm - 6m + 3
\end{aligned}$$

Berdasarkan himpunan bobot total selimut  $w_{f_2} = \{w_{f_2}^1, w_{f_2}^2\}$ , dengan demikian  $\bigcup_{k=1}^{nm} w_{f_2}^k = \{12nm - m + 4, 12nm - m + 6, 12nm - m + 8, 12nm + m +$

$4, \dots, 16nm - 5m + 2\}$  sehingga dapat diperhatikan bahwa bobot total selimut terkecil terdefiniskan oleh  $w_{f_2}^1$  untuk  $i = 1$  dan  $j = 1$ , bobot total selimut terbesar terdefinisi oleh  $w_{f_2}^2$  untuk  $i = n - 1$  dan  $j = m$ .  $w_{f_2}^1$ . Karena  $U_n = a + (s - 1)b = 12nm - m + 4 + (2nm - 2m - 1)2 = 16nm - 5m + 2$  dimana  $1 \leq i \leq n$  dan  $1 \leq j \leq m$ , dapat diperoleh sebuah kesimpulan bahwa gabungan graf triangular ladder  $mL_n$  memiliki super  $(a, d)$ - $C_3$  antimagic total covering dengan  $a = 12nm - m + 4$  dan  $d = 2$  atau gabungan graf triangular ladder  $mL_n$  mempunyai super  $(12nm - m + 4, 2)$ - $C_3$  antimagic total covering dengan  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ . Sehingga terbukti bahwa total selimut  $f_2(u_i^j), f_2(v_i^j)$  untuk  $1 \leq i \leq n$  dan  $1 \leq j \leq m$ ,  $f_2(u_i^j u_{i+1}^j), f_2(v_i^j v_{i+1}^j), f_2(u_i^j v_{i+1}^j)$  untuk  $1 \leq i \leq n - 1$  dan  $1 \leq j \leq m$ ,  $f_2(u_i^j v_i^j)$  untuk  $1 \leq i \leq n$  dan  $1 \leq j \leq m$  adalah super  $(a, 2)$ - $C_3$  antimagic total covering jika  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ .  $\square$

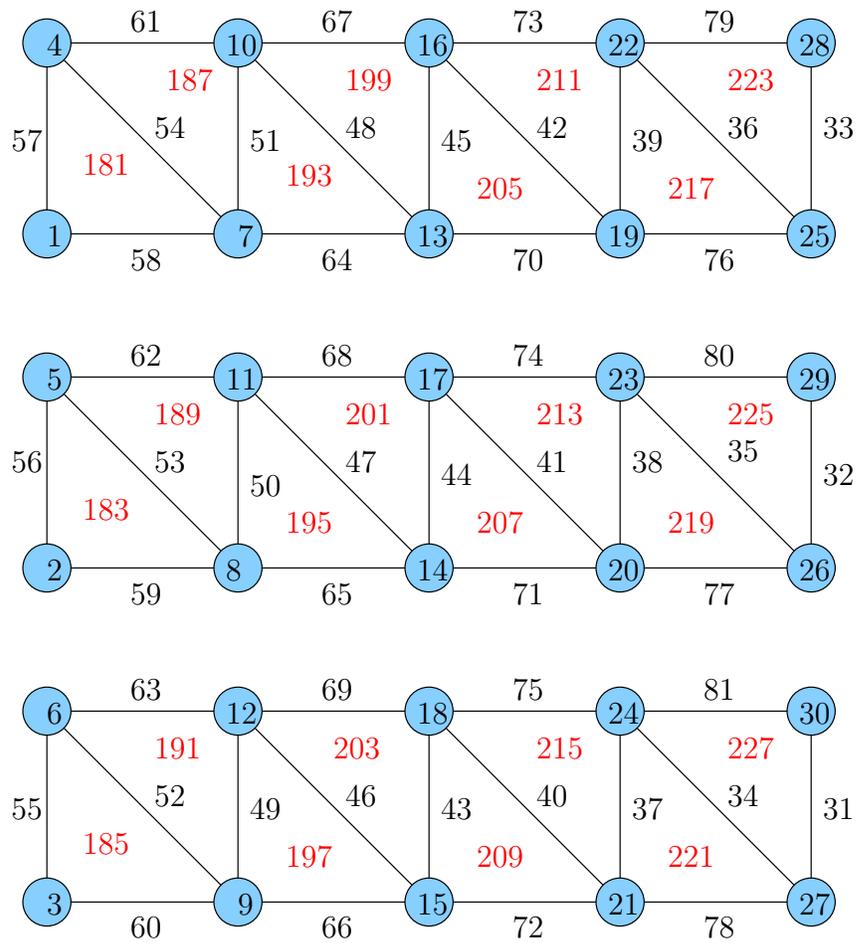
Gambar 4.11 merupakan contoh super  $(181, 2)$ - $C_3$  antimagic total covering  $\mathcal{SHATC}$  pada gabungan graf triangular ladder  $3L_5$ .

$\diamond$  **Teorema 4.2.3.** *Gabungan graf triangular ladder  $mL_n$  memiliki super  $(10nm + m + 5, 4)$ - $C_3$  antimagic total covering untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli titik dan sisi gabungan graf triangular ladder  $mL_n$  dengan fungsi  $f_3$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_3(u_i^j) &= 2mi + j - m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_3(v_i^j) &= 2mi + j - 2m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_3(u_i^j u_{i+1}^j) &= 6nm - j - 2mi - 2m + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq j \leq m \\ f_3(v_i v_{i+1}) &= 6nm - j - 2mi - m + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq j \leq m \\ f_3(u_i v_i) &= 2nm + j + 2mi - 2m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_3(u_i v_{i+1}) &= 2nm + j + 2mi - m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa  $f_3$  adalah sebuah fungsi bijektif dari  $f_3 : V(mL_n) \cup E(mL_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 6nm - 3m\}$ . Jika  $w_{f_3}$  didefinisikan sebagai bobot total selimut dari pelabelan total selimut pada gabungan graf triangular ladder



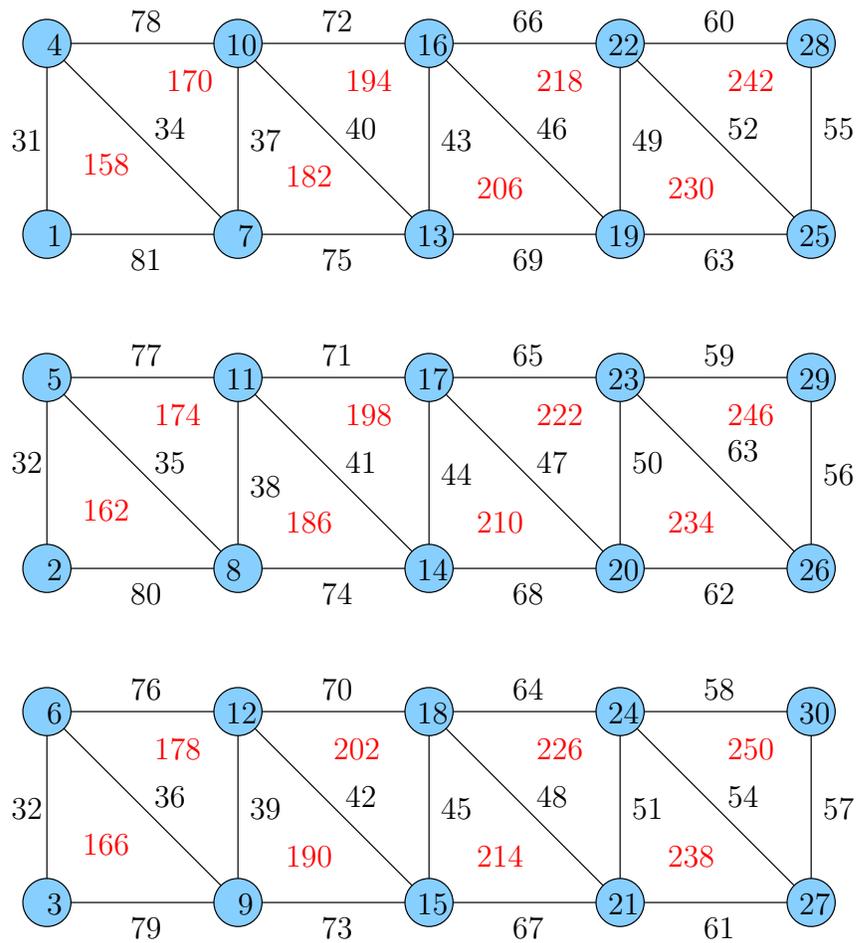
Gambar 4.11 Super  $(181,2)-C_3$  antimagic total covering pada  $3L_5$

berdasarkan penjumlahan 3 titik dan 3 sisi dari  $\mathcal{H} = C_3$  yang menjadi covering pada gabungan graf triangular ladder  $mL_n$ . Bilangan 1 dan 2 pada  $w_{f_3}^1$  dan  $w_{f_3}^2$  bukan pangkat, melainkan bilangan tersebut hanya merupakan kode pembeda bobot total selimut  $w_{f_3}$  untuk tiap selimut yang berlainan dengan syarat batas  $i$  dan  $j$  yang bersesuaian. Sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
w_{f_3}^1 &= \left( \sum_{i=1}^n f_3(v_i^j) + f_3(v_{i+1}^j) \right) + f_3(u_i^j) + f_3(u_i^j v_i^j) + f_3(v_i^j v_{i+1}^j) + f_3(u_i^j v_{i+1}^j) \\
&= 2mi + j - 2m + 2mi + 2m + j - 2m + 2mi + j - m + 2nm + j + 2mi \\
&\quad - 2m + 6nm - j - 2mi - m + 1 + 2nm + j + 2mi - m \\
&= 10nm + 8mi + 4j - 7m + 1 \\
w_{f_3}^2 &= \left( \sum_{i=1}^n f_3(u_i^j) + f_3(u_{i+1}^j) \right) + f_3(v_{i+1}^j) + f_3(u_{i+1}^j v_{i+1}^j) + f_3(u_i^j u_{i+1}^j) + f_3(u_i^j v_{i+1}^j) \\
&= 2mi + j - m + 2mi + 2m + j - m + 2mi + 2m + j - 2m + 2nm + j \\
&\quad + 2mi + 2m - 2m + 6nm - j - 2mi - 2m + 1 + 2nm + j + 2mi - m \\
&= 10nm - 8mi + 4j - 3m + 1
\end{aligned}$$

Berdasarkan himpunan bobot total selimut  $w_{f_3} = \{w_{f_3}^1, w_{f_3}^2\}$ , dengan demikian  $\bigcup_{k=1}^{nm} w_{f_3}^k = \{10nm + m + 5, 10nm + m + 9, 10nm + m + 13, 10nm + 5m + 5, \dots, 18nm - 7m + 1\}$  sehingga dapat diperhatikan bahwa bobot total selimut terkecil terdefiniskan oleh  $w_{f_3}^1$  untuk  $i = 1$  dan  $j = 1$ , bobot total selimut terbesar terdefinisi oleh  $w_{f_3}^2$  untuk  $i = n - 1$  dan  $j = m$ . Karena  $U_n = a + (s - 1)b = 10nm + m + 5 + (2nm - 2m - 1)4 = 18nm - 7m + 1$  dimana  $1 \leq i \leq n$  dan  $1 \leq j \leq m$ , dapat diperoleh sebuah kesimpulan bahwa gabungan graf triangular ladder  $mL_n$  memiliki super  $(a, d)$ - $C_3$  antimagic total covering dengan  $a = 10nm + m + 5$  dan  $d = 4$  atau gabungan graf triangular ladder  $mL_n$  mempunyai super  $(10nm + m + 5, 4)$ - $C_3$  antimagic total covering dengan  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ . Sehingga terbukti bahwa total selimut  $f_3(u_i^j)$ ,  $f_3(v_i^j)$  untuk  $1 \leq i \leq n$  dan  $1 \leq j \leq m$ ,  $f_3(u_i^j u_{i+1}^j)$ ,  $f_3(v_i^j v_{i+1}^j)$ ,  $f_3(u_i^j v_{i+1}^j)$  untuk  $1 \leq i \leq n - 1$  dan  $1 \leq j \leq m$ ,  $f_3(u_i^j v_i^j)$  untuk  $1 \leq i \leq n$  dan  $1 \leq j \leq m$  adalah super  $(a, 4)$ - $C_3$  antimagic total covering jika  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.12 merupakan contoh super  $(158, 4)$ - $C_3$  antimagic total covering  $\mathcal{SHATC}$  pada gabungan graf triangular ladder  $3L_5$ .



Gambar 4.12 Super  $(158,4)$ - $C_3$  antimagic total covering pada  $3L_5$

◇ **Teorema 4.2.4.** *Gabungan graf triangular ladder  $mL_n$  memiliki super  $(6nm + 20m + 6, 6)$ - $C_3$  antimagic total covering untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli titik dan sisi gabungan graf triangular ladder  $mL_n$  dengan

fungsi  $f_4$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
f_4(u_i^j) &= 2mi + j - m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\
f_4(v_i^j) &= 2mi + j - 2m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\
f_4(u_i^j u_{i+1}^j) &= 2nm + j + 2mi - m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m \\
f_4(v_i v_{i+1}) &= 2nm + j + 2mi - 2m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m \\
f_4(u_i v_i) &= 2nm + j + 2mi + 6m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\
f_4(u_i v_{i+1}) &= 2nm + j + 2mi + 7m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m
\end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa  $f_4$  adalah sebuah fungsi bijektif dari  $f_4 : V(mL_n) \cup E(mL_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 6nm - 3m\}$ . Jika  $w_{f_4}$  didefinisikan sebagai bobot total selimut dari pelabelan total selimut pada gabungan graf triangular ladder berdasarkan penjumlahan 3 titik dan 3 sisi dari  $\mathcal{H} = C_3$  yang menjadi covering pada gabungan graf triangular ladder  $mL_n$ . Bilangan 1 dan 2 pada  $w_{f_4}^1$  dan  $w_{f_4}^2$  bukan pangkat, melainkan bilangan tersebut hanya merupakan kode pembeda bobot total selimut  $w_{f_4}$  untuk tiap selimut yang berlainan dengan syarat batas  $i$  dan  $j$  yang bersesuaian. Sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
w_{f_4}^1 &= \left( \sum_{i=1}^n f_4(v_i^j) + f_4(v_{i+1}^j) \right) + f_1(u_i^j) + f_1(u_i^j v_i^j) + f_1(v_i^j v_{i+1}^j) + f_1(u_i^j v_{i+1}^j) \\
&= 2mi + j - 2m + 2mi + 2m + j - 2m + 2mi + j - m + 2nm + j + 2mi \\
&\quad + 6m + 2nm + j + 2mi - 2m + 2nm + j + 2mi + 7m \\
&= 6nm + 12mi + 6j + 8m \\
w_{f_4}^2 &= \left( \sum_{i=1}^n f_4(u_i^j) + f_4(u_{i+1}^j) \right) + f_1(v_{i+1}^j) + f_1(u_{i+1}^j v_{i+1}^j) + f_1(u_i^j u_{i+1}^j) + f_1(u_i^j v_{i+1}^j) \\
&= 2mi + j - m + 2mi + 2m + j - m + 2mi + 2m + j - 2m + 2nm + j \\
&\quad + 2mi + 2m + 6m + 2nm + j + 2mi - m + 2nm + j + 2mi + 7m \\
&= 6nm + 12mi + 6j + 14m
\end{aligned}$$

Berdasarkan himpunan bobot total selimut  $w_{f_4} = \{w_{f_4}^1, w_{f_4}^2\}$  dengan demikian  $\bigcup_{k=1}^{nm} w_{f_4}^k = \{6nm + 20m + 6, 6nm + 20m + 12, 6nm + 20m + 18, 6nm +$

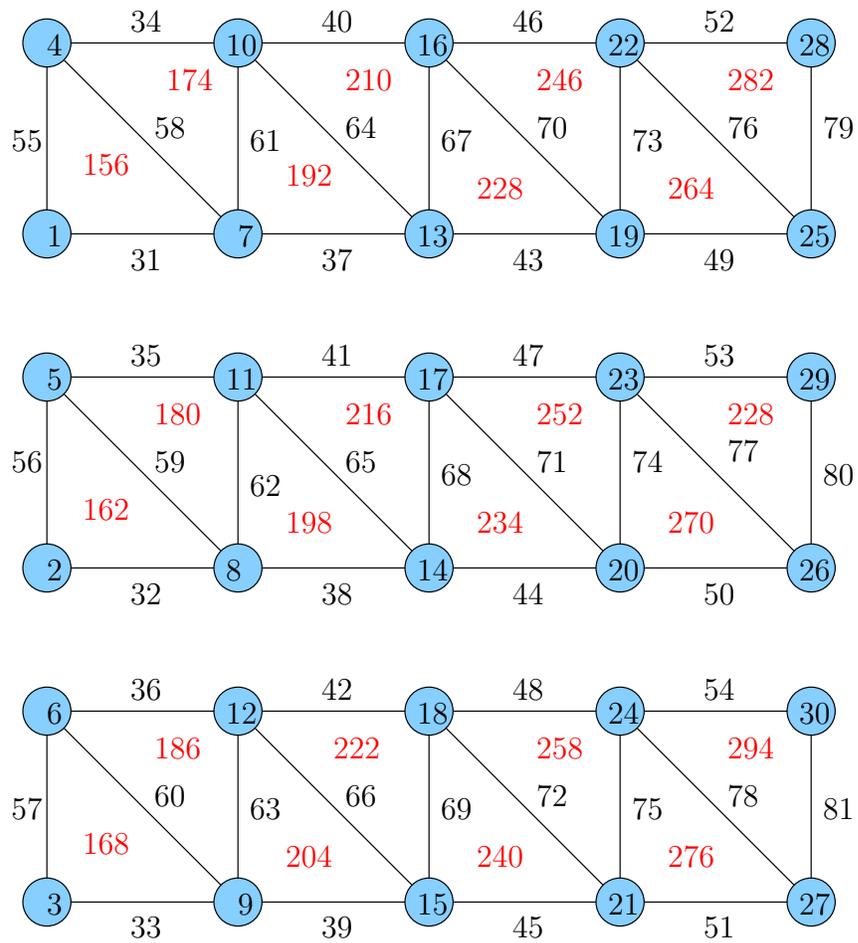
$26m + 6, \dots, 18nm + 8m\}$  sehingga dapat diperhatikan bahwa bobot total selimut terkecil terdefiniskan oleh  $w_{f_4}^1$  untuk  $i = 1$  dan  $j = 1$ , bobot total selimut terbesar terdefinisi oleh  $w_{f_4}^2$  untuk  $i = n - 1$  dan  $j = m$ . Karena  $U_n = a + (s - 1)b = 6nm + 20m + 6 + (2nm - 2m - 1)6 = 18nm - 8m$  dimana  $1 \leq i \leq n$  dan  $1 \leq j \leq m$ , dapat diperoleh sebuah kesimpulan bahwa gabungan graf triangular ladder  $mL_n$  memiliki super  $(a, d)$ - $C_3$  antimagic total covering dengan  $a = 6nm + 20m + 6$  dan  $d = 6$  atau gabungan graf triangular ladder  $mL_n$  mempunyai super  $(6nm + 20m + 6, 6)$ - $C_3$  antimagic total covering dengan  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ . Sehingga terbukti bahwa total selimut  $f_4(u_i^j)$ ,  $f_4(v_i^j)$  untuk  $1 \leq i \leq n$  dan  $1 \leq j \leq m$ ,  $f_4(u_i^j u_{i+1}^j)$ ,  $f_4(v_i^j v_{i+1}^j)$ ,  $f_4(u_i^j v_{i+1}^j)$  untuk  $1 \leq i \leq n - 1$  dan  $1 \leq j \leq m$ ,  $f_4(u_i^j v_i^j)$  untuk  $1 \leq i \leq n$  dan  $1 \leq j \leq m$  adalah super  $(a, 6)$ - $C_3$  antimagic total covering jika  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.13 merupakan contoh super  $(156, 6)$ - $C_3$  antimagic total covering  $\mathcal{SHATC}$  pada gabungan graf triangular ladder  $3L_5$ .

### 4.3 Hasil dan Pembahasan

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui batas atas nilai  $d$  sehingga graf triangular ladder tunggal  $L_n$  maupun gabungannya  $mL_n$  mempunyai super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering, selanjutnya dicari pelabelan pada graf tersebut dan ditentukan kontruksi fungsi bijektifnya. Berdasarkan hasil perhitungan diperoleh nilai  $d$  yang mungkin untuk super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering pada graf triangular ladder tunggal  $L_n$  maupun gabungannya  $mL_n$  adalah  $d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . Setelah menentukan nilai  $d$ , peneliti mencari pelabelan sesuai dengan nilai  $d$  yang telah ditentukan tersebut.

Dari hasil penelitian pada beberapa nilai  $d$  tersebut diatas, diperoleh 12 (dua belas) teorema baru tentang pelabelan graf triangular ladder tunggal  $L_n$  maupun gabungannya  $mL_n$ , yaitu:



Gambar 4.13 Super  $(156,6)$ - $C_3$  antimagic total covering pada  $3L_5$

Tabel 4.1: Hasil Penelitian super  $(a, d)$ - $C_3$  Antimagic Total Covering pada Graf Tunggal Triangular Ladder (*Konektif*)

<b>Teorema</b>	$a$	$d$
<b>4.1.1</b>	$16n - 3$	0
<b>4.1.2</b>	$15n - 1$	1
<b>4.1.3</b>	$12n + 3$	2
<b>4.1.4</b>	$11n + 5$	3
<b>4.1.5</b>	$10n + 6$	4
<b>4.1.6</b>	$9n + 8$	5
<b>4.1.7</b>	$10n + 6$	6
<b>4.1.8</b>	$6n + 12$	9

Tabel 4.2: Hasil Penelitian super  $(a, d)$ - $C_3$  Antimagic Total Covering pada Gabungan Saling Lepas Graf Triangular Ladder (*Diskonektif*) .

<b>Teorema</b>	$a$	$d$
<b>4.2.1</b>	$16nm - 6m + 3$	0
<b>4.2.2</b>	$12nm - m + 4$	2
<b>4.2.3</b>	$10nm + m + 5$	4
<b>4.2.4</b>	$6nm + 20m + 6$	6

Berdasarkan hasil penelitian tersebut, dapat diketahui bahwa jika diketahui nilai batas atas  $d$  yang berlainan maka nilai awal  $a$  juga akan berlainan. Namun demikian seluruh label titik dan seluruh label sisi yang digunakan sama baik untuk semua nilai beda  $d$ , label titik yang digunakan adalah dari 1 hingga  $p_G$  dimana  $p_G$  adalah jumlah titik pada graf sedangkan label untuk sisi yang digunakan adalah dimulai dari  $p_G + 1$  hingga  $p_G + q_G$  dimana  $q_G$  merupakan jumlah sisi, sehingga

$p_G + q_G$  merupakan jumlah titik dan sisi pada graf. Jika kedua label tersebut digunakan untuk melabeli sebuah graf dengan aturan yang diberikan di atas maka pelabelan tersebut disebut sebagai pelabelan total. Pada graf triangular ladder tunggal  $L_n$  dan gabungan graf triangular ladder  $mL_n$  kesepuluh nilai  $d$  tersebut berlaku pada syarat yang sama yaitu  $n \geq 2$ . Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilaksanakan, peneliti telah mendapatkan  $\mathcal{SHATC}$  (Super  $\mathcal{H}$  Antimagic Total Covering) untuk graf triangular ladder tunggal untuk  $d \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$  dan  $\mathcal{SHATC}$  untuk gabungan graf triangular ladder  $d \in \{0, 2, 4, 6\}$ .

Penelitian  $\mathcal{SHATC}$  gabungan graf triangular ladder  $mL_n$  untuk  $d \in \{1, 3, 5, 9\}$  masih belum ditemukan dikarenakan pola pelabelan yang telah ditemukan pada pelabelan graf triangular ladder tunggal  $L_n$  tidak bisa diterapkan pada pelabelan gabungan graf triangular ladder. Hal ini berarti harus ditemukan pola pelabelan baru terlebih dahulu untuk menentukan pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering pada gabungan graf triangular ladder  $mL_n$  untuk  $d \in \{1, 3, 5, 9\}$ . Peneliti juga mengalami kesulitan dalam mencari  $\mathcal{SHATC}$  graf triangular ladder  $L_n$  untuk  $d \in \{7, 8\}$  sehingga  $\mathcal{SHATC}$  pada gabungan graf triangular ladder  $mL_n$  untuk  $d \in \{7, 8\}$  juga belum bisa ditemukan.

Penentuan nilai kebenaran sebuah rumus bijektif pada bidang teori graf hanya ditentukan melalui pendeteksian pola (*pattern recognition*) yang kemudian dikembangkan menjadi sebuah teorema. Teorema ini kemudian juga dikembangkan dengan menggunakan pendeteksian pola pada gabungan graf yang berlaku sampai batas  $m$  dan  $n$  yang ditemukan peneliti kemudian baru menentukan fungsi bijektifnya. Dalam hal ini, penulis tidak mencamtumkan bagaimana cara memperoleh fungsi bijektif tersebut, tetapi pembuktian kebenaran teorema tersebut telah dipaparkan serta diberikan pula beberapa contoh pelabelan sebagai visualisasi dari kebenaran teorema.

Berdasarkan hasil perhitungan dan penelitian yang telah dilakukan sebelumnya, peneliti kesulitan untuk menemukan pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering pada gabungan graf triangular ladder  $mL_n$ . Namun peneliti memberikan beberapa visualisasi pelabelan pada graf triangular ladder yang telah peneliti peroleh, dengan demikian diharapkan hasil tersebut dapat digunakan se-

bagai rujukan untuk penelitian rujukan atau membantu peneliti lain yang akan melakukan penelitian sejenis. Beberapa pelabelan yang belum ditemukan oleh penulis disajikan pada masalah terbuka berikut:

**Masalah terbuka.** *Super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering pada graf triangular ladder  $L_n$  untuk  $n \geq 2$  dengan  $d = 7$  dan  $d = 8$ .*

**Masalah terbuka.** *Super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering pada gabungan graf triangular ladder  $(mL_n)$ , dengan  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$  untuk  $d \in \{1, 3, 5, 7, 8, 9\}$ .*

## BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

1. Graf triangular ladder tunggal ( $L_n$ ) memiliki pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering untuk  $d = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9$ . Hasil penelitian ini dibuktikan pada teorema bahwa graf triangular ladder ( $L_n$ ) terdapat fungsi bijektif pelabelan super yaitu  $(16n - 3, 0)$ ,  $(15n - 1, 1)$ ,  $(12n + 3, 2)$ ,  $(11n + 5, 3)$ ,  $(10n + 6, 4)$ ,  $(9n + 8, 5)$ ,  $(10n + 6, 6)$ , dan  $(6n + 12, 9)$ - $C_3$  antimagic total covering untuk  $n \geq 2$ .
2. Gabungan saling lepas graf triangular ladder ( $mL_n$ ) memiliki pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering untuk  $d = 0, 2, 4, 6$ . Hasil penelitian ini dibuktikan bahwa gabungan graf triangular ladder ( $mL_n$ ) terdapat fungsi bijektif pelabelan super yaitu  $(16nm - 6m + 3, 0)$ ,  $(12nm - m + 4, 2)$ ,  $(10nm + m + 5, 4)$ , dan  $(6nm + 20m + 6, 6)$ - $C_3$  antimagic total covering untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ .

### 5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering pada graf triangular ladder ( $L_n$ ) serta mengacu pada *open problem* dari hasil penelitian yang telah ditemukan, maka peneliti memberikan saran kepada pembaca agar dapat melakukan penelitian pada super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering pada graf triangular ladder  $L_n$ , dengan  $n \geq 2$  untuk  $d = 7$  dan  $d = 8$ . Serta untuk super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering pada gabungan graf triangular ladder ( $mL_n$ ), dengan  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$  untuk  $d \in \{1, 3, 5, 7, 8, 9\}$ .

## DAFTAR PUSTAKA

- Chartrand, G. dan Oellermann. 1993. *Applied and Algorithmic Graph Theory*. New York. MacGraw-Hill,inc.
- Dafik. 2007. *Structural Properties and Labeling of Graphs*.Diss. Australia : University of Ballarat.
- Dafik. 2014. *Batas Atas  $d$  dari Sebuah Graf yang Memiliki Super  $(a,d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic Covering*. Working Paper, FKIP UNEJ.
- Dafik, M.Miller, J.Ryan and M.Bača. 2009. *On super  $(a,d)$ -edge antimagic total labeling of disconnected graphs*. Discrete Math.
- Fuad, M. 2009. *Pelabelan Total Super  $(a,d)$ -Sisi Antimagic pada Gabungan Graf Triangular Ladder*. Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.
- Gallian, J.A . 2009. *Dinamyc Survey of Graph Labeling*. The Electronic Journal of Combinatorics.
- Gutierrez, A. dan Llado, A. 2005. Magic Caverings. *Of Combin Math and Combin Comput*. Vol.55: 451-461.
- Hartsfield, N. dan Ringel, G. 1994. *Pearls in Graph Theory*. London: Accademic Press Limited.
- Inayah, N., Simanjuntak, R., Salman, A. 2009. *On  $(a,d)$ - $\mathcal{H}$  Antimagic Covering of Graph*. The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing.
- Karyanti. 2012. *Pelabelan Selimut $(a,d)$ - $\mathcal{H}$ -Anti Ajaib Super pada Graf Fan, Sun, dan Generalized Petersen* . Tidak dipublikasikan (Skripsi). Surakarta: Universitas Sebelas Maret.
- Kotzig, A. dan Rosa, A. 1970. *Magic Valuations of Finite Graph*. Canada Mathematics Bulletin

- Lipschutz, S. dan Lipson, M.L. 2002. *Matematika Diskrit 2*. Jakarta: Penerbit salemba teknika.
- Maryati, T. K., Salman, A., Baskoro, E. T., Ryan, J. Miller, M. 2010. *On  $\mathcal{H}$  Supermagic Labellings for Certain Shackles and Amalgamations of A Connected Graph Antimagic Total Labelings For Shackles of A Connected Graph*. Utilitas Math.
- M.Bača, Y.Lin, M.Miller and R.Simanjuntak. 2001. *New constructions of magic and antimagic graph labelings*. Utilitas Math.
- Simanjuntak, R., Salman, A. 2010. *Super  $(a,d)$ - $\mathcal{H}$  Antimagic Total Labelings For Shackles of A Connected Graph  $H$* . Australasian Journal of Combinatorics.
- Slamin. 2005. *Super  $(a,d)$ -edge Antimagic Total Labelings of Stars*. Lecture Notes in Computer Science.
- Sugeng, K.A. 2005. *Magic and Antimagic Labeling og Graph*. PhD Thesis, School of Information Technology and Mathematical Sciences University of Bal-larat.
- Universitas Jember. 2013. *Pedoman Penulisan Karya Ilmiah*. Jember: Badan Penerbit Universitas Jember.
- <http://www.tempo.co/read/news/2014/09/01/116606459/Central-Intelligence-agency>. [4 September 2014]