



**PELABELAN *HARMONIOUS* PADA  
GRAF TANGGA DAN GRAF KIPAS**

**SKRIPSI**

Oleh

**Dony Rusdianto  
NIM 041810101044**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS JEMBER  
2011**



**PELABELAN *HARMONIOUS* PADA  
GRAF TANGGA DAN GRAF KIPAS**

**SKRIPSI**

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat  
untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1)  
dan mencapai gelar Sarjana Sains

oleh

**Dony Rusdianto  
NIM 041810101044**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS JEMBER  
2011**

## **PERSEMBAHAN**

Segala puji bagi Allah SWT, serta sholawat dan salam kepada junjungan Nabi Muhammad SAW. Skripsi ini saya persembahkan untuk:

1. Ibunda Harnanik dan Ayahanda Hariyono, atas cinta, kasih sayang dan do'a yang tulus;
2. Kakak Hardian Widodo dan adik Agustina Mandasari, serta istri Meisaroh dan putra tercinta Muhammad Arya Pratama yang aku sayangi untuk kasih sayang dan kebersamaan yang telah memberikan banyak pelajaran berharga;
3. Guru-guru yang sejak taman kanak-kanak sampai dengan perguruan tinggi yang telah mendidik, memberikan ilmu, dan membimbing dengan penuh kesabaran;
4. Almamater Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

## **MOTTO**

Anda bertanggung jawab atas kehidupan anda. Anda tidak bisa terus menerus menyalahkan orang lain untuk kesalahan dalam hidup anda. Hidup ini sebenarnya adalah tentang melanjutkan hidup itu sendiri.

*Oprah Winfrey<sup>\*)</sup>*

---

<sup>\*)</sup> Metro TV. Amerika Serikat.

## PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

nama : Dony Rusdianto

NIM : 041810101044

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul “Pelabelan *harmonious* pada graf tangga dan graf kipas” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum pernah diajukan pada institusi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggungjawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 14 Oktober 2011  
Yang menyatakan,

Dony Rusdianto  
NIM 041810101044

**SKRIPSI**

**PELABELAN *HARMONIOUS* PADA  
GRAF TANGGA DAN GRAF KIPAS**

Oleh

Dony Rusdianto  
NIM 041810101044

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Kristiana Wijaya, S.Si, M.Si.

Dosen Pembimbing Anggota : Bagus Juliyanto, S.Si.

## PENGESAHAN

Skripsi berjudul “Pelabelan *Harmonious* pada Graf Tangga dan Graf Kipas” telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji:

Ketua,

Sekretaris,

Kristiana Wijaya, S.Si, M.Si.  
NIP 19740813 200003 2 004

Bagus Juliyanto, S.Si.  
NIP 19800702 200312 1 001

Anggota I,

Anggota II,

Prof. Drs. I. Made Tirta, M.Sc, Ph.D.  
NIP 19591220 198503 1 002

Ika Hesti Agustin, S.Si  
NIP 19840801 200801 2 006

Mengesahkan  
Dekan,

Prof. Drs. Kusno, DEA, Ph.D  
NIP 19610108 198602 1 001

## RINGKASAN

**Pelabelan *Harmonious* Pada Graf Tangga dan Graf Kipas;** Dony Rusdianto, 041810101044; 2011: 50 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pelabelan *harmonious* pada graf  $G$  dengan  $n$  titik dan  $m$  sisi adalah suatu pemetaan satu-satu (*injektif*) dari himpunan titik  $V(G)$  ke himpunan bilangan bulat tak negatif  $\{0,1,2,3,\dots,m-1\}$  sehingga setiap sisinya mendapat label penjumlahan dari label titik yang bersisian pada sisi tersebut dalam bilangan modulo ( $m$ ) yang berbeda semua, yaitu:  $f(e)=f(uv)=[f(u)+f(v)] \bmod (m)$ , dimana  $u$  dan  $v$  adalah titik yang bersisian pada sisi tersebut. Sebuah graf  $G$  dikatakan *harmonious* jika dapat dilabeli menurut aturan pelabelan *harmonious*. Tujuan penulisan skripsi ini adalah untuk mengetahui apakah graf tangga dan graf kipas merupakan graf *harmonious* atau bukan. Jika graf tangga dan graf kipas merupakan graf *harmonious*, maka bagaimanakah perumusan pola titik dan sisinya. Graf tangga merupakan graf hasil kali kartesius dari graf lintasan  $P_n$  dan graf lintasan  $P_2$ , yaitu  $P_n \times P_2$ . Graf kipas  $f_n$  merupakan graf yang dibentuk dari graf lintasan  $P_n$  dan satu titik yang disebut titik pusat yang *adjacent* dengan semua titik pada graf lintasan  $P_n$ .

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deskriptif aksiomatik yaitu pemaparan definisi dalam pelabelan *harmonious* yang digunakan untuk menyelidiki apakah graf tangga dan graf kipas memungkinkan untuk dilabeli dengan aturan pelabelan *harmonious*. Selanjutnya jika graf-graf tersebut memungkinkan untuk dilabeli dengan aturan pelabelan *harmonious*, maka akan dilanjutkan dengan metode *Trial and Error*. Metode *Trial and Error* yaitu mencoba kemungkinan yang ada dalam melabeli titik pada graf tangga dan graf kipas dengan

aturan pelabelan *harmonious*. Selanjutnya jika ditemukan label yang memenuhi aturan pelabelan *harmonious*, maka dilanjutkan dengan metode pendeteksian pola, dimana metode ini digunakan untuk merumuskan pola pelabelannya.

Diperoleh hasil bahwa graf tangga  $L_n$  untuk  $n \geq 3$  merupakan graf *harmonious*. Rumusan pola titik  $u_i$  dan  $v_i$  pada graf tangga  $L_n$  untuk  $n$  ganjil dengan  $n \geq 3$  adalah  $f(u_i) = \frac{i-1}{2}$  untuk  $i=1,3,5,\dots,n$ ;  $f(u_i) = \frac{n-1}{2} + \frac{i}{2}$  untuk  $i=2,4,6,\dots,n-1$ ;  $f(v_i) = \frac{3n-2+i}{2}$  untuk  $i=1,3,5,\dots,n$ ;  $f(v_i) = \frac{2n-2+i}{2}$  untuk  $i=2,4,6,\dots,n-1$ . Rumusan pola sisi  $a_i$ ,  $b_i$  dan  $c_i$  pada graf tangga  $L_n$  untuk  $n$  ganjil dengan  $n \geq 3$  adalah  $f(a_i) = \frac{n-1}{2} + i \bmod(3n-2)$  untuk  $i=1,2,3,\dots,n-1$ ;  $f(b_i) = \frac{3(n-1)}{2} + i \bmod(3n-2)$  untuk  $i=1,2,3,\dots,n$ ;  $f(c_i) = \frac{5n-3}{2} + i \bmod(3n-2)$  untuk  $i=1,2,3,\dots,n-1$ . Rumusan pola titik  $u_i$  dan  $v_i$  pada graf tangga  $L_n$  untuk  $n=4$  adalah  $f(u_i) = \{0,5,1,9\}$  dan  $f(v_i) = \{2,6,3,4\}$ . Rumusan pola sisi  $a_i$ ,  $b_i$  dan  $c_i$  pada graf tangga  $L_n$  untuk  $n=4$  adalah  $f(a_i) = \{5,6,0\}$ ,  $f(a_i) = \{2,1,4,3\}$  dan  $f(a_i) = \{8,9,7\}$ . Rumusan pola titik titik  $u_i$  dan  $v_i$  pada graf tangga  $L_n$  untuk  $n$  genap dengan  $n \geq 6$  untuk  $i=1,2,3$  adalah  $f(u_i) = \frac{5n-6}{2}$  dan  $f(v_i) = 2n-1$  untuk  $i=1$ ;  $f(u_i) = n-1$  dan  $f(v_i) = \frac{3n-4}{2}$  untuk  $i=2$ ;  $f(u_i) = \frac{5n-2}{2}$  dan  $f(v_i) = 3n-3$  untuk  $i=3$ . Rumusan pola sisi  $a_i$ ,  $b_i$  dan  $c_i$  pada graf tangga  $L_n$  untuk  $n$  genap dengan  $n \geq 6$  untuk  $i=1,2,3$  adalah  $f(a_i) = \frac{7n-8}{2} \bmod(3n-2)$ ;  $f(b_i) = \frac{9n-8}{2} \bmod(3n-2)$  dan  $f(c_i) = \frac{7n-6}{2} \bmod(3n-2)$  untuk  $i=1$ ;  $f(a_i) = \frac{7n-4}{2} \bmod(3n-2)$ ,  $f(b_i) = \frac{5n-4}{2} \bmod(3n-2)$  dan  $f(c_i) = \frac{9n-10}{2} \bmod(3n-2)$  untuk  $i=2$ ;  $f(a_i) = \frac{5n-2}{2} \bmod(3n-2)$ ,  $f(b_i) = \frac{11n-8}{2} \bmod(3n-2)$  dan  $f(c_i) = \frac{9n-6}{2} \bmod(3n-2)$  untuk  $i=3$ . Rumusan pola titik titik  $u_i$  dan  $v_i$  pada graf tangga  $L_n$  untuk  $n$  genap dengan  $n \geq 6$  untuk  $i=4,5,6,\dots,n$  adalah  $f(u_i) = \frac{i}{2} - 2$  dan

$f(v_i) = \frac{3n-4}{2} + \frac{i}{2}$  untuk  $i=4,6,8,\dots,n$ ;  $f(u_i) = \frac{n-2}{2} + \frac{i-1}{2}$  dan  $f(v_i) = (n-3) + \frac{3n-4}{2}$  untuk  $i=5,7,9,\dots,n-1$ . Rumusan pola sisi  $a_i$ ,  $b_i$  dan  $c_i$  pada graf tangga  $L_n$  untuk  $n$  genap dengan  $n \geq 6$  untuk  $i=4,5,6,\dots,n$  adalah  $f(a_i) = \frac{n}{2} + i - 3 \pmod{(3n-2)}$ ,  $f(b_i) = \frac{3n+2i-8}{2} \pmod{(3n-2)}$  dan  $f(c_i) = \frac{5n+2i-8}{2} \pmod{(3n-2)}$ . Demikian juga untuk graf kipas  $f_n$ , diperoleh hasil bahwa graf kipas  $f_n$  untuk  $n \geq 2$  adalah graf *harmonious*. Rumusan pola titik  $v_i$  pada graf kipas  $f_n$  untuk  $n$  ganjil dengan  $n \geq 3$  adalah  $f(v_i) = 0$  untuk  $i=0$ ;  $f(v_i) = \frac{n-1}{2} + \frac{i-1}{2}$  untuk  $i=1,3,5,\dots,n$  dan  $f(v_i) = n + \frac{i-2}{2}$  untuk  $i=2,4,6,\dots,n-1$ . Rumusan pola sisi  $a_i$ , dan  $b_i$  pada graf kipas  $f_n$  untuk  $n$  ganjil dengan  $n \geq 3$  adalah  $f(a_i) = \frac{n+i-2}{2} \pmod{(2n-1)}$  untuk  $i=1,3,5,\dots,n$ ;  $f(a_i) = \frac{2n+i-2}{2} \pmod{(2n-1)}$  untuk  $i=2,4,6,\dots,n-1$  dan  $f(b_i) = \frac{3n+2i-3}{2} \pmod{(2n-1)}$  untuk  $i=1,2,3,\dots,n-1$ . Rumusan pola titik  $v_i$  pada graf kipas  $f_n$  untuk  $n$  genap dengan  $n \geq 2$  adalah  $f(v_i) = 0$  untuk  $i=0$ ,  $f(v_i) = \frac{n}{2} + \frac{i-1}{2}$  untuk  $i=1,3,5,\dots,n-1$  dan  $f(v_i) = n + \frac{i-2}{2}$  untuk  $i=2,4,6,\dots,n$ . Rumusan pola sisi  $a_i$ , dan  $b_i$  pada graf kipas  $f_n$  untuk  $n$  ganjil dengan  $n \geq 3$  adalah  $f(a_i) = \frac{n+i-1}{2} \pmod{(2n-1)}$  untuk  $i=1,3,5,\dots,n-1$ ;  $f(a_i) = \frac{2n+i-2}{2} \pmod{(2n-1)}$  untuk  $i=2,4,6,\dots,n$  dan  $f(b_i) = \frac{3n+2i-2}{2} \pmod{(2n-1)}$  untuk  $i=1,2,3,\dots,n-1$ .

## **PRAKATA**

Puji syukur kehadiran Allah SWT atas segala rahmat, taufik, dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Pelabelan *Harmonious* pada Graf Tangga dan Graf Kipas”. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Kristiana Wijaya S.Si, M.Si., selaku Dosen Pembimbing Utama, Bagus Juliyanto, S.Si., selaku Dosen Pembimbing Anggota I, Prof. Drs. I. Made Tirta, M.Sc Ph.D., selaku Dosen Penguji I, dan Ika Hesti Agustin, S.Si., selaku Dosen Penguji II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
2. Drs. Moh. Hasan, MSc., PhD., selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah membimbing selama penulis menjadi mahasiswa;
3. Bapak/Ibu Hariyono dan Bapak/Ibu Sukarto yang telah memberikan dorongan dan do'anya demi terselesaikannya skripsi ini;
4. Istri dan putra tercinta yang tak henti-hentinya memberikan dukungan dan semangatnya;
5. semua pihak yang tidak bisa disebutkan satu persatu yang telah memberikan banyak bantuan dan motivasi dalam menyelesaikan skripsi ini.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Oktober 2011

Penulis

## DAFTAR ISI

	Halaman
<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	i
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b> .....	ii
<b>HALAMAN MOTTO</b> .....	iii
<b>HALAMAN PERNYATAAN</b> .....	iv
<b>HALAMAN PEMBIMBINGAN</b> .....	v
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b> .....	vi
<b>RINGKASAN</b> .....	vii
<b>PRAKATA</b> .....	x
<b>DAFTAR ISI</b> .....	xi
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xiii
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xiv
<b>BAB 1. PENDAHULUAN</b> .....	1
<b>1.1 Latar Belakang</b> .....	1
<b>1.2 Rumusan Masalah</b> .....	2
<b>1.3 Tujuan</b> .....	2
<b>1.4 Manfaat</b> .....	2
<b>BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA</b> .....	3
<b>2.1 Definisi Dasar dan Terminologi Graf</b> .....	3
<b>2.2 Operasi Hasil Kali Kartesius Dua Graf</b> .....	7
<b>2.3 Kelas-kelas Graf</b> .....	7
<b>2.4 Definisi Fungsi</b> .....	9
<b>2.5 Aritmatika Modulo</b> .....	10
<b>2.6 Pelabelan <i>Harmonious</i></b> .....	10

<b>BAB 3 METODE PENELITIAN .....</b>	<b>12</b>
<b>3.1 Rancangan Penelitian .....</b>	<b>12</b>
3.1.1 Penotasian Titik dan Sisi .....	12
3.1.2 Indikator Penelitian .....	14
<b>3.2 Langkah-langkah Penelitian .....</b>	<b>14</b>
<b>BAB 4 PEMBAHASAN .....</b>	<b>17</b>
<b>4.1 Pelabelan <i>Harmonious</i> pada Graf Tangga (<math>L_n</math>) .....</b>	<b>17</b>
4.1.1 Pelabelan <i>Harmonious</i> pada Graf Tangga untuk $n$ Ganjil dengan $n \geq 3$ .....	17
4.1.2 Pelabelan <i>Harmonious</i> pada Graf Tangga untuk $n$ Genap dengan $n \geq 4$ .....	23
<b>4.2 Pelabelan <i>Harmonious</i> pada Graf Kipas (<math>f_n</math>) .....</b>	<b>34</b>
4.2.1 Graf Kipas $f_n$ untuk $n$ Ganjil dengan $n \geq 3$ .....	34
4.2.2 Graf Kipas $f_n$ untuk $n$ Genap dengan $n \geq 2$ .....	39
<b>BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN .....</b>	<b>46</b>
<b>5.1 Kesimpulan .....</b>	<b>46</b>
<b>5.2 Saran .....</b>	<b>49</b>
<b>DAFTAR PUSTAKA</b>	

## DAFTAR GAMBAR

2.1 Graf $G$ dengan 6 titik dan 6 sisi .....	3
2.2 Ilustrasi graf dengan <i>loop</i> dan sisi ganda .....	4
2.3 Graf berhingga dengan order 7 dan size 7 .....	4
2.4 Graf yang memuat <i>walk</i> , <i>trail</i> , <i>path</i> , <i>trail</i> tertutup dan sikel.....	5
2.5 (a) Graf tak terhubung dan (b) Graf terhubung.....	6
2.6 Ilustrasi graf bagian perentang dan graf bagian .....	6
2.7 Ilustrasi graf hasil kali kartesius.....	7
2.8 Graf lintasan $P_8$ .....	8
2.9 (a) Graf sikel $C_5$ dan (b) Graf sikel $C_6$ .....	8
2.10 Graf kipas $f_7$ .....	8
2.11 Graf tangga $L_5$ .....	9
2.12 Ilustrasi pelabelan <i>harmonious</i> pada graf dengan 5 titik .....	11
3.1 Graf tangga ( $L_n$ ).....	13
3.2 Graf kipas $f_6$ .....	13
3.3 <i>Flowchart</i> aturan pelabelan <i>harmonious</i> pada graf $G$ dengan $n$ titik dan $e$ sisi.....	16
4.1 (a) Graf tangga $L_3$ , (b) Graf tangga $L_5$ , (c) Graf tangga $L_7$ .....	18
4.2 Graf tangga $L_4$ .....	24
4.3 (a) Graf tangga $L_6$ , (b) Graf tangga $L_8$ .....	24
4.4 Graf tangga $L_{10}$ .....	25
4.5 (a) Graf kipas $f_3$ , (b) Graf kipas $f_5$ dan (c) Graf kipas $f_7$ .....	34
4.6 (a) Graf kipas $f_2$ , (b) Graf kipas $f_4$ dan (c) Graf kipas $f_6$ .....	40

## DAFTAR TABEL

3.1 Jumlah titik dan sisi pada graf kipas .....	14
3.2 Label titik pada graf tangga dan graf kipas .....	15
3.3 Label sisi pada graf tangga dan graf kipas .....	15
4.1 Pola label titik $u_i$ pada graf tangga $L_n$ untuk $n$ ganjil dengan $n \geq 3$ .....	18
4.2 Pola label titik $v_i$ pada graf tangga $L_n$ untuk $n$ ganjil dengan $n \geq 3$ .....	19
4.3 Label titik $u_i$ dan $v_i$ untuk $i=1,2,3$ .....	25
4.4 Label titik $u_i$ dan $v_i$ untuk $i=4,5,6,\dots,n$ .....	25
4.5 Label titik $f(u_i)$ untuk $i$ genap dan $i$ ganjil dengan $i \geq 4$ .....	27
4.6 Label titik $f(v_i)$ untuk $i$ genap dan $i$ ganjil dengan $i \geq 4$ .....	27
4.7 Pola titik pada graf kipas $f_n$ untuk $n$ ganjil dengan $n \geq 3$ .....	35
4.8 Pola titik $v_i$ pada graf kipas $f_n$ untuk $n$ ganjil dengan $n \geq 3$ .....	35
4.9 Pola label titik pada graf kipas $f_n$ untuk $n$ genap dengan $n \geq 2$ .....	40
4.10 Pola label titik $v_i$ pada graf kipas $f_n$ untuk $n$ genap dengan $n \geq 2$ .....	41