



**SOLUSI PERSAMAAN LAPLACE MENGGUNAKAN
METODE CRANK-NICHOLSON**

SKRIPSI

Oleh

**Titis Miranti
NIM 101810101012**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2014**



**SOLUSI PERSAMAAN LAPLACE MENGGUNAKAN
METODE CRANK-NICHOLSON**

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1)
dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Titis Miranti
NIM 101810101012

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2014

PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan untuk:

1. Ibu dan Bapak tersayang, yang tidak henti-hentinya memberi doa, dukungan, semangat, kekuatan dan nasihat kepada saya;
2. kakak tersayang dan keluarga kecilnya yang telah sangat menghibur dalam suka dan duka;
3. guru-guru sejak taman kanak-kanak sampai perguruan tinggi yang telah mendidik, memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;
4. Almamater Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember, SMAN 1 Jombang, SMPN 1 Ploso, SDN Pandanblele dan TK. Tunas Bahagia.

MOTTO

Maka nikmat Tuhan kamu yang manakah yang kamu dustakan ?

(terjemahan QS. Ar-Rahman : 13) *)

Man Jaddah Wa jadda, Barang siapa yang bersungguh-sungguh , maka pasti akan
berhasil. **)

*) Departemen Agama Republika Indonesia. 2002. Al-Qur'an dan Terjemahannya. Jakarta : Mekar Surabaya.

**) Zainudin, A. 2010. Man Jadda Wajada *The Art of Excellent Life*. Jakarta : Gramedia Pustaka Utama

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Titis Miranti

NIM : 101810101012

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa karya ilmiah yang berjudul “Solusi Persamaan Laplace Menggunakan Metode Crank-Nicholson” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi mana pun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, September 2014

Yang menyatakan

Titis Miranti

NIM. 101810101012

SKRIPSI

SOLUSI PERSAMAAN LAPLACE MENGGUNAKAN METODE CRANK-NICHOLSON

Oleh

Titis Miranti

NIM 101810101012

Pembimbing:

Dosen Pembimbing Utana : Drs. Rusli Hidayat, M.Sc
Dosen Pembimbing Anggota : Kusbudiono, S.Si., M.Si.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul “Solusi Persamaan Laplace Menggunakan Metode Crank-Nicholson” telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas
Jember

Tim Penguji :

Ketua,

Sekretaris,

Drs. Rusli Hidayat, M.Sc.
NIP. 196610121993031001

Kusbudiono, S.Si., M.Si.
NIP. 197704302005011001

Penguji I,

Penguji II,

Kiswara Agung Santoso, S.Si., M.Kom.
NIP. 197209071998031003

Prof. Drs. I Made Tirta, M.Sc., Ph.D.
NIP. 195912201985031002

Mengesahkan

Dekan,

Prof. Drs. Kusno, DEA., Ph.D.
NIP. 196101081986021001

RINGKASAN

Solusi Persamaan Laplace Menggunakan Metode Crank-Nicholson; Titis Miranti, 101810101012; 2014; 46 Halaman; Jurusan Matematika Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Persamaan Laplace merupakan bagian dari persamaan diferensial parsial yang sering digunakan sebagai model suatu permasalahan dalam bidang sains. Persamaan Laplace termasuk dalam jenis persamaan linier orde dua dengan dua peubah. Beberapa contoh permasalahan bidang fisika yang sering dimodelkan dalam bentuk persamaan Laplace antara lain adalah distribusi potensial listrik, distribusi temperatur dalam zat padat, potensial aliran fluida dan aliran air bawah tanah.

Solusi persamaan Laplace secara umum sulit diselesaikan dengan metode analitik. Hal ini biasanya disebabkan adanya syarat awal dan syarat batas yang tidak sederhana. Sehingga, untuk mengatasi permasalahan tersebut digunakan beberapa metode numerik dalam memperoleh solusi persamaan Laplace. Pada penelitian sebelumnya, persamaan Laplace digunakan untuk memodelkan distribusi potensial listrik. Persamaan Laplace tersebut mempunyai syarat awal dan syarat batas yang rumit sehingga digunakan metode numerik untuk memperoleh solusinya. Adapun metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan tersebut antara lain metode Jacoby, metode Gauss-Siedel dan metode SOR.

Metode Crank-Nicholson termasuk dalam metode beda hingga yang memanfaatkan beda hingga maju dan beda beda hingga mundur. Metode Crank-Nicholson ini sebelumnya digunakan untuk mengkaji distribusi temperatur yang dimodelkan kedalam persamaan diferensial parsial tipe parabolik. Dalam penelitian

ini, metode Crank-Nicholson digunakan untuk menyelesaikan persamaan Laplace yang merupakan persamaan diferensial parsial tipe eliptik.

Solusi persamaan Laplace menggunakan metode Crank-Nicholson ini diawali dengan proses diskritisasi persamaan Laplace kedalam skema Crank-Nicholson. Tahap selanjutnya yaitu membagi lebar grid domain x dan domain y . Pembagian lebar grid domain x dan domain y ini tidak harus sama. Setelah tahap tersebut dilakukan, selanjutnya adalah mensubstitusikan nilai awal dan syarat batas dari persamaan Laplace tersebut. Diskritisasi model, nilai awal dan syarat batas ini akan menghasilkan bentuk matriks $\mathbf{A} \mathbf{U}_{i,j} + \mathbf{B} = \mathbf{0}$ dimana \mathbf{A} adalah matriks yang berisi koefisien α, β dan γ , matriks \mathbf{B} adalah matriks yang berisi nilai awal dan nilai batas sedangkan matriks $\mathbf{U}_{i,j}$ adalah matriks yang berisi titik-titik solusi dari persamaan Laplace. Bentuk matriks tersebut dapat diselesaikan dengan metode invers. Jika matriks tersebut telah dapat diselesaikan, maka tahap selanjutnya adalah simulasi dengan mengubah nilai pembagi lebar grid x dan y . Adapun pembagi lebar grid yang digunakan untuk simulai ini adalah 40,50 dan 60. Pada setiap simulasi yang dilakukan akan dapat diketahui grafik solusi analitik, grafik solusi numerik dan galatnya. Hasil dari tahap simulasi selanjutnya dianalisis untuk mengetahui pengaruh lebar grid terhadap solusi persamaan Laplace.

Hasil simulasi terbaik diperoleh dari simulasi dengan pembagi lebar grid pada domain $x(m_x)$ dan pembagi lebar grid domain $y(m_y)$ sama, yaitu sebesar 60. Hasil simulasi tersebut adalah grafik yang *smooth* dan galat sebesar 2,73%. Lebar grid yang semakin kecil dan sama pada domain x dan domain y akan menyebabkan grafik dari persamaan Laplace semakin *smooth* dan nilai galat yang semakin kecil. Hal ini menunjukkan bahwa solusi numeriknya semakin mendekati solusi analitiknya.

PRAKATA

Puji dan syukur penulis panjatkan kehadiran Allah SWT yang telah memberikan rahmat, taufik serta hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini tepat pada waktunya. Tugas akhir yang berjudul “Solusi Persamaan Laplace Menggunakan Metode Crank–Nicholson” ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember dan memperoleh gelar Sarjana Sains.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Drs. Rusli Hidayat, M.Sc., selaku Dosen Pembimbing Utama dan Kusbudiono, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
2. Kiswara Agung Santoso, S.Si., M.Kom., selaku Dosen Penguji I dan Prof. Drs. I Made Tirta, M.Sc., Ph. D., selaku Dosen Penguji II yang telah memberikan kritik dan saran demi kesempurnaan skripsi ini;
3. seluruh staf pengajar Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember yang telah memberikan ilmu serta bimbingannya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini;
4. seluruh keluarga di rumah, Ibu, Bapak, Mas, Mbak, Bulek, adek-adek yang selalu menghibur dan memberi semangat;
5. Afrizal Aditya yang selalu memberi ide – ide dan motivasi;
6. teman-teman Mathgic, kakak-kakak dan adik-adik angkatan jurusan Matematika, terimakasih atas semangat, bantuan dan doanya;

7. sahabat-sahabat ALM'71 Uye (Mbak Beby, Mbak Sari, Mbak Ila, Nova, Mbak Fitri, Mbak Iir. Lea, Mbak Rega, Mbak Agustin, Mbak Riska, Mbak Ayus, dll), sahabat-sahabat Mandaera (Mbak Diar, Hofifah, Diah, Widya, Galih, Salsasate, Ayin, dll) serta anggota keluarga kecil (Agustina, Yudis, Misi) atas keceriaan dan sanda tawa yang diberikan;
8. serta semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, September 2014

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	ii
HALAMAN PERSEMBAHAN	iii
HALAMAN MOTTO	iv
HALAMAN PERNYATAAN.....	v
HALAMAN PEMBIMBING	vi
HALAMAN PENGESAHAN.....	vii
RINGKASAN	viii
PRAKATA.....	x
DAFTAR ISI.....	xii
DAFTAR TABEL	xiv
DAFTAR GAMBAR.....	xv
DAFTAR LAMPIRAN	xvi
BAB 1. PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Tujuan	3
1.4 Manfaat.....	4
BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA.....	5
2.1 Persamaan Diferensial Parsial	5
2.2 Persamaan Laplace.....	6
2.3 Syarat Batas Dirichlet	7
2.4 Metode Numerik	7
2.5 Deret Taylor	8

2.5.1 Persamaan Deret Taylor	8
2.5.2 Kesalahan Pemotongan	9
2.6 Metode Numerik	10
2.6.1 Beda Hingga Maju	10
2.6.2 Beda Hingga Mundur	11
2.6.3 Beda Hingga Tengah.....	12
2.7 Metode Crank-Nicholson	13
2.8 Analisis Galat	14
BAB 3. METODE PENELITIAN	16
BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN	18
4.1 Model Persamaan Laplace dan Kondisi Batasnya	18
4.2 Diskritisasi Persamaan Laplace Menggunakan Metode Crank- Nicholson.....	19
4.3 Program Solusi Persamaan Laplace Menggunakan Metode Crank- Nicholson.....	30
4.4 Simulasi Program.....	31
4.5 Analisis Hasil Simulasi.....	38
BAB 5. PENUTUP.....	42
5.1 Kesimpulan.....	42
5.2 Saran	43
DAFTAR PUSTAKA	45
LAMPIRAN	

DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 4.1 Tabel Hasil Simulasi Lebar Grid Domain x Berubah dan Lebar Grid Domain y Tetap	37
Tabel 4.2 Tabel Hasil Simulasi Lebar Grid Domain x Tetap dan Lebar Grid Domain y Berubah	37
Tabel 4.3 Tabel Hasil Simulasi Lebar Grid Domain x dan Lebar Grid y Berubah...	38

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1 Kisi Skema Beda Hingga Maju.....	10
Gambar 2.2 Kisi Skema Beda Hingga Mundur	11
Gambar 2.3 Kisi Skema Beda Hingga Tengah	12
Gambar 3.1 Diagram alir proses analisis numerik persamaan Laplace menggunakan metode Crank-Nicholson	16
Gambar 4.1 Tampilan Program Solusi Persamaan Laplace.....	30
Gambar 4. 2 Plot Solusi Eksak dengan Lebar grid $x = y = 0,025$	32
Gambar 4.3 Plot Solusi Pendekatan dengan Lebar grid $x = y = 0,025$	33
Gambar 4.4 Plot Solusi Eksak dengan Lebar Grid $x = y = 0,02$	34
Gambar 4.5 Plot Solusi Pendekatan dengan Lebar Grid $x = y = 0,02$	35
Gambar 4.6 Plot Solusi Eksak dengan Lebar grid $x = y = 1/60$	36
Gambar 4.7 Plot Solusi Pendekatan dengan Lebar grid $x = y = 1/60$	36

DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
<i>A Script Program</i>	47