



**PERBANDINGAN METODE HEUN DAN ADAM BASHFORTH MOULTON  
DALAM MENYELESAIKAN PERSAMAAN LEGENDRE**

**SKRIPSI**

oleh

**Marihot Janter Sinaga  
NIM 071810101077**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS JEMBER  
2014**



**PERBANDINGAN METODE HEUN DAN ADAM BASHFORTH MOULTON  
DALAM MENYELESAIKAN PERSAMAAN LEGENDRE**

**SKRIPSI**

diajukan guna melengkapi dan memenuhi salah satu syarat  
untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1)  
dan mencapai gelar Sarjana Sains

oleh

**Marihot Janter Sinaga**  
**NIM 071810101077**

**JURUSAN MATEMATIKA**  
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**  
**UNIVERSITAS JEMBER**  
**2014**

## **PERSEMBAHAN**

Skripsi ini saya persembahkan untuk:

1. ibunda Berliana Lumban Toruan dan Ayahanda Brohim Sinaga yang tercinta;
2. saudara-saudaraku Emmy Hernawati Sinaga, Jefri Oloan Sinaga, Bastian Sanjaya Sinaga yang tersayang;
3. guru-guru sejak taman kanak-kanak sampai dengan perguruan tinggi;
4. Almamater Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

## MOTO

“Hormatilah ayahmu dan ibumu, supaya lanjut umurmu di tanah yang diberikan Tuhan, Allahmu, kepadamu”. \*)  
(terjemahan kitab keluaran 20 ayat 12)

“Apa yang terjadi secara lahiriah di dalam kehidupan anda tidaklah sepenting apa yang terjadi secara batiniah”. \*\*)

---

\*) Lembaga Alkitab Indonesia. 2012. *Alkitab Terjemahan Baru*. Jakarta: Percetakan Lembaga Alkitab Indonesia.

\*\*\*) Warren, R. 2004. *Kehidupan Yang Digerakkan Oleh Tujuan*. Malang: Gandum Mas.

## PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

nama : Marihot Janter Sinaga

NIM : 071810101077

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa karya ilmiah yang berjudul “Perbandingan Metode *Heun* dan *Adam Bashforth Moulton* dalam Menyelesaikan Persamaan *Legendre*” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi mana pun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak mana pun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juni 2014

Yang menyatakan,

Marihot Janter Sinaga

NIM 071810101077

**SKRIPSI**

**PERBANDINGAN METODE HEUN DAN ADAM BASHFORTH MOULTON  
DALAM MENYELESAIKAN PERSAMAAN LEGENDRE**

Oleh

Marihot Janter Sinaga  
NIM 071810101077

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Drs. Rusli Hidayat, M.Sc.

Dosen Pembimbing Anggota : Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si.

## PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul “Perbandingan Metode *Heun* dan *Adam Bashforth Moulton* dalam Menyelesaikan Persamaan *Legendre*” telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji:

Ketua,

Sekretaris,

Drs. Rusli Hidayat, M.Sc.  
NIP 196610121993031001

Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si.  
NIP 196908281998021001

Penguji I,

Penguji II,

Kiswara Agung Santoso, S.Si., M.Kom.  
NIP 19720907 1998 03 1 003

Kusbudiono, S.Si., M.Si.  
NIP 19770430 2005 01 1 001

Mengesahkan

Dekan,

Prof. Drs. Kusno, DEA., Ph.D.  
NIP 196101081986021001

## RINGKASAN

**Perbandingan Metode *Heun* dan *Adam Bashforth Moulton* dalam Menyelesaikan Persamaan *Legendre*.** Marihot Janter Sinaga, 071810101077; 2014: 39 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Sistem persamaan diferensial merupakan persamaan yang terdiri dari dua atau lebih persamaan diferensial. Salah satu bentuk sistem persamaan diferensial yaitu persamaan *Legendre* yang merupakan bentuk khusus dari persamaan diferensial linier homogen orde kedua dengan parameter yang berbentuk tertentu. Persamaan *Legendre* memiliki solusi analitis dalam bentuk polinomial derajat- $n$  atau lebih dikenal sebagai polinomial *Legendre*.

Persamaan *Legendre* dapat diselesaikan secara numerik diantaranya metode *Heun* dan metode *Adam Bashforth Moulton*. Metode *Heun* merupakan metode prediktor-korektor, akan tetapi bukan termasuk metode banyak langkah. Sedangkan metode *Adam Bashforth Moulton* merupakan metode prediktor-korektor yang memiliki orde tingkat tinggi antara lain orde tiga. Metode *Adam Bashforth Moulton* orde tiga juga merupakan metode banyak langkah yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai batas pada persamaan diferensial biasa. Tujuan penelitian ini adalah: (1) mengetahui profil persamaan *Legendre* melalui solusi numerik metode *Heun* dan metode *Adam Bashforth Moulton* orde tiga, dan (2) mengetahui hasil perbandingan galat antara metode *Heun* dan metode *Adam Bashforth Moulton* orde tiga dalam menyelesaikan persamaan *Legendre*. Hasil visualisasi yang berbentuk grafik dapat menjelaskan bagaimana pengaruh koefisien- $n$  dan galatnya terhadap solusi analitiknya.

Penelitian dilakukan dalam beberapa skema. Skema pertama studi literatur tentang persamaan *Legendre*. Skema kedua yaitu penyelesaian persamaan *Legendre* secara analitik. Skema ketiga yaitu persamaan *Legendre* diselesaikan secara numerik



menggunakan metode *Heun* dan metode *Adam Bashforth Moulton* orde tiga. Skema keempat yaitu pembuatan program yang menggunakan software Matlab R2009a. Skema kelima yaitu simulasi program dengan cara memvariasikan koefisien- $n$ . Skema yang terakhir adalah menganalisis hasil persamaan *Legendre* dengan dasar teori yang ada.

Berdasarkan kajian yang telah dilakukan bahwa secara umum semakin besar nilai koefisien- $n$ , maka rata-rata galat metode *Heun* dan metode *Adam Bashforth Moulton* orde tiga juga semakin besar. Namun seiring meningkatnya nilai koefisien- $n$ , perubahan rata-rata galat yang terjadi pada metode *Heun* lebih cepat membesar daripada perubahan rata-rata galat pada metode *Adam Bashforth Moulton* orde tiga. Hasilnya menunjukkan bahwa, rata-rata galat metode *Adam Bashforth Moulton* orde tiga lebih kecil dari rata-rata galat metode *Heun* kecuali pada saat nilai koefisien- $n = 2,3,4,5$ . Jadi secara umum metode *Adam Bashforth Moulton* orde tiga lebih baik daripada metode *Heun*.

## PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Perbandingan Metode *Heun* dan *Adam Bashforth Moulton* dalam Menyelesaikan Persamaan *Legendre*”. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Penulisan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Drs. Rusli Hidayat, M.Sc., selaku Dosen Pembimbing Utama, Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
2. Kiswara Agung Santoso S.Si., M.Kom., dan Kusbudiono S.Si., M.Si., selaku dosen penguji yang telah memberi masukan dalam skripsi ini;
3. Yuliani Setia Dewi, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah membimbing selama penulis menjadi mahasiswa;
4. ibunda dan Ayahanda yang tercinta; serta saudara-saudaraku tersayang yang telah memberikan doa dan dorongannya demi terselesaikannya skripsi ini;
5. wasil, silvi, sinta, dyah, fery, prastowo, hasim, andik, teman kontrakan serta semua teman-teman angkatan 2007 jurusan matematika yang telah memberikan dukungan dan semangat untuk menyelesaikan tugas akhir ini;
6. arif 2008 yang telah memberikan masukan untuk menyelesaikan tugas akhir ini;
7. semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Juni 2014

Penulis

## DAFTAR ISI

|   | Halaman |
|---|---------|
| <b>HALAMAN SAMPUL</b> .....   | i       |
| <b>HALAMAN JUDUL</b> .....  | ii      |
| <b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b> .....                                    | iii     |
| <b>HALAMAN MOTO</b> .....   | iv      |
| <b>HALAMAN PERNYATAAN</b> .....                                     | v       |
| <b>HALAMAN PEMBIMBINGAN</b> .....                                   | vi      |
| <b>HALAMAN PENGESAHAN</b> .....                                     | vii     |
| <b>RINGKASAN</b> .....  | viii    |
| <b>PRAKATA</b> .....  | x       |
| <b>DAFTAR ISI</b> .....   | xi      |
| <b>DAFTAR TABEL</b> .....   | xiii    |
| <b>DAFTAR GAMBAR</b> .....  | xiv     |
| <b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....  | xv      |
| <b>BAB 1. PENDAHULUAN</b> .....                                     | 1       |
| <b>1.1 Latar Belakang</b> .....                                     | 1       |
| <b>1.2 Rumusan Masalah</b> .....                                    | 3       |
| <b>1.3 Tujuan</b> .....   | 3       |
| <b>1.4 Manfaat</b> .....  | 3       |
| <b>BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA</b> .....                                | 5       |
| <b>2.1 Persamaan Diferensial Biasa</b> .....                        | 5       |
| <b>2.2 Galat Numerik</b> .....                                      | 7       |
| <b>2.3 Polinomial Interpolasi <i>Lagrange</i></b> .....             | 8       |
| <b>2.4 Metode <i>Heun</i></b> .....                                 | 10      |
| <b>2.5 Metode <i>Adam Bashforth Moulton Orde Tiga</i></b> .....     | 12      |
| 2.5.1 Persamaan Prediktor ( <i>Adam Bashforth</i> ) Orde Tiga ..... | 12      |
| 2.5.2 Persamaan Korektor ( <i>Adam Moulton</i> ) Orde Tiga.....     | 13      |

|   |    |
|---|----|
| <b>2.6 Persamaan Legendre</b> .....   | 14 |
| <b>BAB 3. METODE PENELITIAN</b> .....   | 17 |
| <b>BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN</b> .....  | 20 |
| <b>4.1 Penyelesaian Persamaan Legendre Secara Analitik</b> .....  | 20 |
| <b>4.2 Diskritisasi Persamaan Legendre dengan Metode Heun dan</b><br><b>Metode Adam Bashforth Moulton Orde Tiga</b> ..... | 22 |
| 4.2.1 Formulasi Metode Heun.....  | 22 |
| 4.2.2 Formulasi Metode Adam Bashforth Moulton Orde Tiga .....   | 22 |
| <b>4.3 Simulasi Program</b> .....   | 23 |
| 4.3.1 Metode Heun .....   | 24 |
| 4.3.2 Metode Adam Bashforth Moulton Orde Tiga .....   | 26 |
| 4.3.3 Perbandingan Solusi Numerik Metode Heun dan Metode<br>Adam Bashforth Moulton Orde Tiga .....                        | 28 |
| <b>4.4 Analisis Hasil Simulasi</b> .....  | 34 |
| 4.4.1 Analisis Hasil Simulasi dengan Metode Heun .....  | 34 |
| 4.4.2 Analisis Hasil Simulasi dengan Metode Adam Bashforth<br>Moulton Orde Tiga.....                                      | 35 |
| 4.4.3 Analisis Perbandingan Solusi Numerik Metode Heun dan<br>Metode Adam Bashforth Moulton Orde Tiga.....                | 35 |
| <b>BAB 5. PENUTUP</b> .....   | 38 |
| <b>5.1 Kesimpulan</b> .....   | 38 |
| <b>5.2 Saran</b> .....  | 38 |
| <b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....   | 39 |
| <b>LAMPIRAN</b>   |    |

## DAFTAR TABEL

|  | Halaman |
|--|---------|
| Tabel 4.2 Perbandingan rata-rata galat antara metode <i>Heun</i> dan metode <i>Adam</i><br><i>Bashforth Moulton</i> orde tiga..... | 37      |

## DAFTAR GAMBAR

|  | Halaman |
|--|---------|
| Gambar 3.1 Skema penelitian.....   | 17      |
| Gambar 4.1 Profil polinomial <i>Legendre</i> berbagai nilai koefisien- $n$ .....   | 21      |
| Gambar 4.2 Profil persamaan <i>Legendre</i> pada metode <i>Heun</i> dengan variasi koefisien- $n$ .....  | 25      |
| Gambar 4.3 Profil rata-rata galat pada metode <i>Heun</i> dengan variasi koefisien- $n$ .....  | 26      |
| Gambar 4.4 Profil persamaan <i>Legendre</i> pada metode <i>Adam Bashforth Moulton</i> orde tiga dengan variasi koefisien- $n$ .....            | 27      |
| Gambar 4.5 Profil rata-rata galat pada metode <i>Adam Bashforth Moulton</i> orde tiga dengan variasi koefisien- $n$ .....                      | 28      |
| Gambar 4.6 Perbandingan solusi numerik metode <i>Heun</i> dan metode <i>Adam Bashforth Moulton</i> orde tiga pada saat $n = 4$ .....           | 29      |
| Gambar 4.7 Perbandingan rata-rata galat antara metode <i>Heun</i> dan metode <i>Adam Bashforth Moulton</i> orde tiga pada saat $n = 4$ .....   | 30      |
| Gambar 4.8 Perbandingan solusi numerik metode <i>Heun</i> dan metode <i>Adam Bashforth Moulton</i> orde tiga pada saat $n = 7$ .....           | 31      |
| Gambar 4.9 Perbandingan rata-rata galat antara metode <i>Heun</i> dan metode <i>Adam Bashforth Moulton</i> orde tiga pada saat $n = 7$ .....   | 32      |
| Gambar 4.10 Perbandingan solusi numerik metode <i>Heun</i> dan metode <i>Adam Bashforth Moulton</i> orde tiga pada saat $n = 10$ .....         | 33      |
| Gambar 4.11 Perbandingan rata-rata galat antara metode <i>Heun</i> dan metode <i>Adam Bashforth Moulton</i> orde tiga pada saat $n = 10$ ..... | 34      |

## DAFTAR LAMPIRAN

|   | Halaman |
|---|---------|
| A. Output Solusi Persamaan Diferensial <i>Legendre</i> .....  | 40      |
| A1. Penentuan Parameter dan Koefisien- <i>n</i> .....   | 40      |
| A.2 Proses Penyelesaian Numerik Metode <i>Heun</i> dan <i>Adam Bashforth</i><br><i>Moulton</i> Orde Tiga .....          | 43      |
| A.3 Penyelesaian Solusi analitik, Metode <i>Heun</i> , Metode <i>Adam Bashforth</i><br><i>Moulton</i> Orde Tiga .....   | 44      |
| A.4 Hasil Simulasi Solusi Analitik, Metode <i>Heun</i> , metode <i>Adam Bashforth</i><br><i>Moulton</i> Orde Tiga ..... | 46      |
| B. Tampilan GUI Untuk Simulasi dan Grafik Persamaan <i>Legendre</i> .....   | 50      |
| C. Solusi Analitik Berbagai Koefisien- <i>n</i> .....   | 55      |