



**PELABELAN TOTAL SUPER  $(a, d)$ -SISI ANTIMAGIC  
PADA GRAF BIANGLALA**

**TESIS**

Oleh

**Drs. Djoni Budi Sumarno**

**NIM 111820101003**

**MAGISTER MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS JEMBER**

**2014**



**PELABELAN TOTAL SUPER  $(a, d)$ -SISI ANTIMAGIC  
PADA GRAF BIANGLALA**

**TESIS**

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat  
untuk menyelesaikan Program Magister Matematika (S2)  
dan mencapai gelar Magister Sains

Oleh

**Drs. Djoni Budi Sumarno**

**NIM 111820101003**

**MAGISTER MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS JEMBER**

**2014**

## PERSEMBAHAN

*Segala puji bagi Allah, Tuhan yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang, serta sholawat dan salam semoga terlimpah kepada makhluk ciptaan-Mu yang paling mulia, Nabi Muhammad S.A.W. Kupersembahkan secuil kebahagiaan penggalan syair dalam setiap detik perjalanan hidupku teriring rasa terima kasih kepada:*

- 1. orang tuaku tercinta dan terkasih : Ayahanda Asmar dan Ibunda tercinta Sumilah, yang senantiasa mengalirkan rasa kasih sayang, cinta, dan do'a yang tiada henti, dalam penulisan tesis ini;*
- 2. istri dan anakku tersayang Binti Munawaroh, S.Pd., Ermita Rizki Albirri, dan Arih Thoyyibatul Izdihar, terimakasih telah mendukung Bapak dalam menyelesaikan tesis;*
- 3. Bapak Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D dan Bapak Kiswara Agung Santoso, S.Si, M.Kom selaku pembimbing tesis yang dengan sabar telah memberikan ilmu dan bimbingan selama menyelesaikan tesisku;*
- 4. para dosen, yang telah memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;*
- 5. teman-teman seperjuangan S2 Matematika MIPA angkatan 2011, terima kasih atas dorongan semangat dan bantuannya selama masa proses penyelesaian tesisku;*
- 6. teman - temanku Matematika MIPA baik kakak angkatan maupun adik angkatan, terima kasih atas dorongan semangat dan bantuannya selama masa proses penyelesaian tesisku;*
- 7. almamater Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.*

## MOTO

"Apapun yang kukerjakan jika aku bersungguh-sungguh, aku akan mencapai kehebatan."

(Mario Teguh)

"Jangan lihat masa lampau dengan penyesalan; jangan pula lihat masa depan dengan ketakutan; tapi lihatlah sekitar anda dengan penuh kesadaran."

(James Thurber)

"Jadilah kamu manusia yang pada kelahiranmu semua orang tertawa bahagia, tetapi hanya kamu sendiri yang menangis; dan pada kematianmu semua orang menangis sedih, tetapi hanya kamu sendiri yang tersenyum."

(Mahatma Gandhi)

## PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

nama : Drs. Djoni Budi Sumarno

NIM : 111820101003

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa tesis yang berjudul: "PELABELAN TOTAL SUPER  $(a, d)$ -SISI ANTIMAGIC PADA GRAF BIANGLALA" adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 02 Januari 2014

Yang menyatakan,

Drs. Djoni Budi Sumarno

NIM. 111820101003

# TESIS

## PELABELAN TOTAL SUPER $(a, d)$ -SISI ANTIMAGIC PADA GRAF BIANGLALA

Oleh

**Drs. Djoni Budi Sumarno**

**NIM 111820101003**

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

Dosen Pembimbing Anggota : Kiswara Agung Santoso, S.Si, M.Kom

## PENGESAHAN

Tesis berjudul "PELABELAN TOTAL SUPER  $(a, d)$ -SISI ANTIMAGIC PADA GRAF BIANGLALA" telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam pada:

hari : Jumat

tanggal : 02 Januari 2014

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji

Dosen Pembimbing Utama,

Dosen Pembimbing Anggota,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D  
NIP. 19680802 199303 1 004

Kiswara Agung Santoso, S.Si., M.Kom.  
NIP. 19720907 199803 1 003

Penguji I,

Penguji II,

Drs. Moh. Hasan, M.Sc., Ph.D  
NIP.19640404 198802 1 001

Prof. Drs. Slamini, M.Comp Sc.,Ph.D  
NIP. 19670420 199201 1 001

Mengesahkan

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Jember,

Prof. Drs. Kusno, DEA.,Ph.D.  
NIP. 19610108 198602 1 001

## RINGKASAN

**Pelabelan Total Super  $(a, d)$ -Sisi Antimagic Pada Graf Bianglala;**Drs. Djoni Budi Sumarno, 111820101003; 2014: 94 halaman; Program Studi Megister Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Dalam kehidupan sehari-hari banyak persoalan yang dapat diimplementasikan dengan graf secara jelas dan nyata. Pengimplementasian graf pada kehidupan sehari-hari dapat dilihat salah satunya dari pengaturan lampu lalu lintas. Ilmu graf merupakan salah satu cabang dari ilmu matematika yang kompleks dan cukup sulit, akan tetapi bisa juga menjadi solusi yang sangat bagus untuk memecahkan masalah tertentu. Graf dapat dikatakan sebagai suatu bentuk perwujudan visual dari beberapa objek beserta hubungannya. Hubungan antara objek satu dan objek lainnya dapat dinyatakan sebagai garis atau sisi (*edge*). Teori graf mengalami perkembangan yang sangat pesat karena aplikasinya yang sangat luas dalam kehidupan sehari-hari. Misalnya dalam pencarian lintasan terpendek, pewarnaan graf, permasalahan pengiriman surat, transportasi, komunikasi, perlokasian, desain komputer dan sebagainya.

Graf Bianglala merupakan graf yang dinotasikan dengan  $FW_{m,n}$ . Graf Bianglala adalah sebuah graf dengan himpunan titik  $V(FW_{m,n}) = \{X_{i,j}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} \cup \{X_{i,j,k}; 2 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq 2\}$  dan himpunan sisi  $E(FW_{m,n}) = \{X_{i,j}X_{i,j+1}; 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{X_{i,j}X_{i,j,k}; 2 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq 2\} \cup \{X_{i,j}X_{i+1,j,k}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq 2\} \cup \{X_{i,j,k}X_{i,j+1,k+1}; 2 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1, k=1\} \cup \{X_{i,j,k}X_{i,j-1,k-1}; 2 \leq i \leq m, \text{ untuk } j \text{ yang lainnya}, k=2\} \cup \{X_{i,j,k-1}X_{i,j-(n-1),k}; 2 \leq i \leq m, \text{ untuk } j \text{ yang lainnya}, k=2\}$ . Karena graf Bianglala membentuk topologi jaringan maka melabeli graf ini menjadi sangat penting.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah deskriptif aksiomatik yaitu dengan menurunkan lema yang telah ada tentang nilai batas  $d$  dan lema un-



tuk pelabelan graf saat  $d = 1$ , kemudian diterapkan dalam pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf  $FW_{m,n}$  dan  $sFW_{m,n}$  dan metode pendeteksian pola yaitu untuk menentukan pola umum pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada Graf Bianglala. Hasil penelitian ini berupa lema dan teorema baru mengenai pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada Graf  $FW_{m,n}$  dan  $sFW_{m,n}$ . Teorema dan lema yang dihasilkan adalah sebagai berikut:

1. Ada pelabelan titik  $(6mn - \frac{9n+1}{2}, 1)$ -sisi antimagic pada  $FW_{m,n}$  untuk  $n \geq 3$ ,  $n$  ganjil, dan  $m \geq 2$  **Lemma 4.2.1**.
2. Ada pelabelan total super  $(\frac{n+3}{2} + 6n(i-1) + mn(11-2i) - n, 0)$ -sisi antimagic pada  $FW_{m,n}$  untuk  $n \geq 3$ ,  $n$  ganjil, dan  $m \geq 2$  **Teorema 4.2.1**.
3. Ada pelabelan total super  $(\frac{n+3}{2} + 3mn - 3m, 2)$ -sisi antimagic pada  $FW_{m,n}$  untuk  $n \geq 3$ ,  $n$  ganjil, dan  $m \geq 2$  **Teorema 4.2.2**.
4. Ada pelabelan total super  $(\frac{n+3}{2} + 2mn + m + n + 2, 1)$ -sisi antimagic pada  $FW_{m,n}$  untuk  $n \geq 3$ ,  $n$  ganjil, dan  $m \geq 2$ , **Teorema 4.2.3**.
5. Ada pelabelan titik  $(\frac{sn+3}{2}, 1)$ -sisi antimagic pada  $sFW_{m,n}$  jika  $n \geq 3$ ,  $n$  ganjil,  $m \geq 2$ ,  $s \geq 3$ , dan  $s$  ganjil, **Lemma 4.4.1**.
6. Ada pelabelan total super  $(\frac{23sn+3}{2}, 0)$ -sisi antimagic pada  $sFW_{m,n}$  jika  $n \geq 3$ ,  $n$  ganjil,  $m \geq 2$ ,  $s \geq 3$ , dan  $s$  ganjil, **Teorema 4.4.1**.
7. Ada pelabelan total super  $(\frac{9sn+2s+7}{2} - 2l, 2)$ -sisi antimagic pada  $FW_{m,n}$  jika  $n \geq 3$ ,  $n$  ganjil,  $m \geq 2$ ,  $s \geq 3$ , dan  $s$  ganjil, **Teorema 4.4.2**.
8. Ada pelabelan total super  $(\frac{11sn+3}{2}, 1)$ -sisi antimagic pada  $sFW_{m,n}$  untuk  $n \geq 3$ ,  $n$  ganjil,  $m \geq 2$ ,  $s \geq 3$ , dan  $s$  ganjil, **Teorema 4.4.3**.

Dari kajian diatas ada beberapa batasan  $s$ ,  $m$  dan  $n$  yang belum ditemukan sehingga dalam penelitian ini diajukan open problem.

**Masalah terbuka 0.0.1.** *Pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf bianglala  $sFW_{m,n}$ , dengan  $n \geq 3$ ,  $n$  ganjil,  $m \geq 2$ ,  $s \geq 2$ , dan  $s$  genap untuk  $d = 0, 1, 2$ .*

## PRAKATA

Segala puji syukur ke hadirat Allah SWT. atas segala berkah dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis yang berjudul "Pelabelan Total Super (a,d)-Sisi Antimagic pada Graf Bianglala" ini dengan baik.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih dan penghargaan yang sebesar-besarnya atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan tesis ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. dosen pembimbing I dan dosen pembimbing II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan tesis ini;
4. dosen dan karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
5. semua pihak yang telah membantu terselesaikannya tesis ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan tesis ini. Akhirnya penulis berharap, semoga tesis ini dapat bermanfaat, amin yaa robbal alamin.

Jember, Januari 2014

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b> . . . . .	iii
<b>HALAMAN MOTO</b> . . . . .	iv
<b>HALAMAN PERNYATAAN</b> . . . . .	v
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b> . . . . .	vii
<b>RINGKASAN</b> . . . . .	viii
<b>PRAKATA</b> . . . . .	x
<b>DAFTAR ISI</b> . . . . .	xii
<b>DAFTAR GAMBAR</b> . . . . .	xiv
<b>DAFTAR TABEL</b> . . . . .	xv
<b>DAFTAR LAMBANG</b> . . . . .	xvi
<b>1 PENDAHULUAN</b> . . . . .	1
1.1 Latar Belakang Masalah . . . . .	1
1.2 Rumusan Masalah . . . . .	3
1.3 Tujuan Penelitian . . . . .	3
1.4 Manfaat Penelitian . . . . .	4
<b>2 TINJAUAN PUSTAKA</b> . . . . .	5
2.1 Terminologi Dasar Graf . . . . .	5
2.2 Jenis-jenis Graf . . . . .	11
2.3 Aplikasi Graf . . . . .	14
2.4 Graf Khusus . . . . .	15
2.5 Graf Bianglala . . . . .	18
2.6 Fungsi Bijektif dan Barisan Aritmatika . . . . .	19
2.7 Aksioma, Teorema, Lema, Akibat, Dugaan dan Masalah Terbuka	22
2.8 Pelabelan Graf . . . . .	23
2.8.1 Definisi Pelabelan Graf . . . . .	23
2.8.2 Pelabelan Total Super $(a, d)$ -sisi antimagic . . . . .	24
2.8.3 Pelabelan Total Super $(a, d)$ -sisi antimagic pada Graf Bianglala	25
2.9 Hasil-Hasil Pelabelan Total Super $(a, d)$ -Sisi Antimagic . . . . .	26
<b>3 METODE PENELITIAN</b> . . . . .	30

3.1	Metode Penelitian . . . . .	30
3.2	Definisi Operasional . . . . .	30
3.2.1	Pelabelan Total Super $(a, d)$ -Sisi Antimagic . . . . .	30
3.2.2	Graf Bianglala dan Gabungan Saling Lepas Graf Bianglala	31
3.3	Teknik Penelitian . . . . .	31
3.4	Observasi . . . . .	33
<b>4</b>	<b>HASIL DAN PEMBAHASAN . . . . .</b>	<b>38</b>
4.1	Graf Bianglala $FW_{m,n}$ . . . . .	38
4.1.1	Jumlah Titik dan Sisi pada Graf Bianglala $FW_{m,n}$ . . . . .	38
4.1.2	Batas Atas $d$ Graf Bianglala $FW_{m,n}$ . . . . .	39
4.2	Pelabelan Total Super $(a, d)$ -sisi Antimagic pada Graf Bianglala $FW_{m,n}$ . . . . .	40
4.3	Gabungan Graf Bianglala $sFW_{m,n}$ . . . . .	55
4.3.1	Jumlah Titik dan Sisi pada Gabungan Graf Bianglala $sFW_{m,n}$	56
4.3.2	Batas Atas $d$ Gabungan Graf Bianglala $sFW_{m,n}$ . . . . .	57
4.4	Pelabelan Total Super $(a, d)$ -sisi Antimagic pada Gabungan Graf Bianglala $sFW_{m,n}$ . . . . .	57
4.5	Hasil dan Pembahasan . . . . .	87
<b>5</b>	<b>KESIMPULAN DAN SARAN . . . . .</b>	<b>91</b>
5.1	<b>Kesimpulan . . . . .</b>	<b>91</b>
5.2	<b>Saran . . . . .</b>	<b>92</b>
	<b>DAFTAR PUSTAKA . . . . .</b>	<b>93</b>

## DAFTAR GAMBAR

1.1	Visualisasi dan Representasi Jembatan Konigsberg . . . . .	2
2.1	Graf $G_1$ dan $G_2$ . . . . .	6
2.2	Graf $G_3$ . . . . .	7
2.3	Graf $G_{4a}$ dan $G_{4b}$ . . . . .	8
2.4	Graf terpotong . . . . .	9
2.5	Contoh Graf Isomorfis . . . . .	9
2.6	Graf $G_9, G_{10}$ dan $G_{11}$ . . . . .	12
2.7	Graf $G_{12}$ dan $G_{13}$ . . . . .	12
2.8	Graf $G_{14}$ dan $G_{15}$ . . . . .	13
2.9	Gabungan graf $G_{16}$ dan $G_{17}$ . . . . .	13
2.10	Perjalanan Salesman . . . . .	15
2.11	Graf Roda $W_5$ dan $W_8$ . . . . .	16
2.12	Graf Tangga Permata $Dl_4$ . . . . .	16
2.13	graf tangga tiga-siklus $TCL_2$ . . . . .	17
2.14	Graf Helm ( $H_6$ ) . . . . .	17
2.15	Graf Kelelawar $Bat_3$ . . . . .	18
2.16	Graf Roket $R_{m,n}$ . . . . .	19
2.17	Graf Bianglala ( $FW_{3,5}$ ) . . . . .	20
2.18	(a) fungsi injektif, (b) fungsi surjektif dan (c) fungsi bijektif . . .	21
2.19	$G_{19}$ pelabelan titik, $G_{20}$ pelabelan sisi, dan $G_{21}$ pelabelan total . .	24
2.20	Graf Bianglala ( $FW_{2,7}$ ) . . . . .	26
3.1	Graf Bianglala ( $FW_{3,5}$ ) . . . . .	32
3.2	Rancang Penelitian 1 . . . . .	34
3.3	EAVL graf Bianglala $FW_{2,5}$ . . . . .	35
3.4	Graf Bianglala ( $FW_{2,7}$ ) . . . . .	36
3.5	EAVL gabungan graf Bianglala $3FW_{2,7}$ . . . . .	37
4.1	Pelabelan titik $(6mn - \frac{9n+1}{2}, 1)$ -sisi antimagic pada $FW_{3,5}$ . . . .	43

4.2	SEATL $FW_{5,3}$ dengan $d = 0$ . . . . .	46
4.3	Pola barisan bilangan dengan selisih tiap suku adalah 1 . . . . .	50
4.4	SEATL $FW_{5,3}$ dengan $d = 2$ . . . . .	52
4.5	SEATL $FW_{5,3}$ dengan $d = 1$ . . . . .	56
4.6	Pelabelan titik $(\frac{sn+3}{2}, 1)$ -sisi antimagic pada $3FW_{2,7}$ . . . . .	65
4.7	Pelabelan titik $(\frac{23sn+3}{2}, 0)$ -sisi antimagic pada $3FW_{2,7}$ . . . . .	72
4.8	SEATL $3FW_{2,7}$ dengan $d = 2$ . . . . .	78
4.9	SEATL $3FW_{2,7}$ dengan $d = 1$ . . . . .	84

## DAFTAR TABEL

2.1	Ringkasan pelabelan total super $(a, d)$ -edge antimagic pada graf konektif. . . . .	26
2.2	Ringkasan pelabelan total super $(a, d)$ -edge antimagic pada graf diskonektif. . . . .	27

## DAFTAR LAMBANG

$G$	=	Graf $G$
$G(V, E)$	=	Sebarang graf tak berarah dengan $V$ adalah himpunan tak kosong dari semua titik dan $E$ adalah himpunan sisi
$v_n$	=	Titik ke- $n$ pada suatu graf
$e_n$	=	Sisi ke- $n$ dari suatu graf
$EAVL$	=	<i>Edge antimagic vertex labeling</i> atau pelabelan titik sisi antimagic
$SEATL$	=	<i>Super edge antimagic total labeling</i> atau pelabelan total super- $(a, d)$ - sisi antimagic
$d$	=	Nilai beda barisan bobot sisi pada SEATL
$a$	=	Bobot sisi terkecil yang merupakan suku pertama barisan bobot sisi pada SEATL
$FW_{m,n}$	=	Lambang untuk graf Bianglala
$sFW_{m,n}$	=	Lambang untuk gabungan graf Bianglala
$i$	=	Urutan titik pada graf Bianglala $FW_{m,n}$
$j$	=	Urutan titik indeks pada graf Bianglala $FW_{m,n}$
$k$	=	Urutan titik indeks pada graf Bianglala $FW_{m,n}$