



**PERBANDINGAN METODE *EXTENDED KALMAN FILTER* (EKF)  
DAN *ENSEMBLE KALMAN FILTER* (EnKF) DALAM  
ESTIMASI ALIRAN DUA FASE PADA  
PIPA PENGEBORAN MINYAK**

**SKRIPSI**

Oleh  
**LATIFATUR ROHMAH**  
**NIM 091810101029**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS JEMBER  
2014**



**PERBANDINGAN METODE *EXTENDED KALMAN FILTER* (EKF)  
DAN *ENSEMBLE KALMAN FILTER* (EnKF) DALAM  
ESTIMASI ALIRAN DUA FASE PADA  
PIPA PENGEBORAN MINYAK**

**SKRIPSI**

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat  
untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1)  
dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh  
**LATIFATUR ROHMAH**  
**NIM 091810101029**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS JEMBER  
2014**

## **PERSEMBAHAN**

Skripsi ini saya persembahkan untuk:

1. Ayahanda Moh. Kholil dan Ibunda Marsiti tercinta, yang telah mendoakan dan memberi kasih sayang serta pengorbanan untuk putri tercintanya;
2. Kakak Moh. Syahrul dan Ahmad Busro serta Adik Amin Jakfar dan Lailatur Rohimah, yang telah memberikan dukungan;
3. guru-guru sejak taman kanak-kanak sampai perguruan tinggi, yang telah memberikan ilmu dan bimbingan dengan penuh kesabaran;
4. Almamater Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.

## MOTO

Wahai orang-orang yang beriman! Mohonlah pertolongan (kepada Allah) dengan sabar dan shalat. Sungguh Allah beserta orang-orang yang sabar.

(Terjemahan Surat *Al-Baqarah* ayat 153)<sup>\*)</sup>

*Man jadda wajada* (Siapa yang bersungguh-sungguh, ia akan berhasil)<sup>\*\*)</sup>

---

<sup>\*)</sup> Departemen Agama Republik Indonesia. 2002. Al-Qur'an dan Terjemahnya. Jakarta: Mekar Surabaya.

<sup>\*\*)</sup> ungkapan arab. Inspirasiku. [on line]

<http://inspirasikuiq.blogspot.com/2012/11/man-jadda-wa-jada-barang-siapa-yang.html> [4 Oktober 2013]

## PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

nama : Latifatur Rohmah

NIM : 091810101029

menyatakan dengan ini sesungguhnya bahwa karya tulis ilmiah yang berjudul “Perbandingan Metode *Extended Kalman Filter* (EKF) dan *Ensemble Kalman Filter* (EnKF) dalam Estimasi Aliran Dua Fase pada Pipa Pengeboran Minyak” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya dan belum pernah diajukan pada institusi manapun serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata dikemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 3 Januari 2014

Yang menyatakan,

Latifatur Rohmah

NIM 091810101029

**SKRIPSI**

**PERBANDINGAN METODE *EXTENDED KALMAN FILTER* (EKF)  
DAN *ENSEMBLE KALMAN FILTER* (EnKF) DALAM  
ESTIMASI ALIRAN DUA FASE PADA  
PIPA PENGEBORAN MINYAK**

Oleh

Latifatur Rohmah

NIM 091810101029

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Kosala Dwidja Purnomo, S.Si, M.Si.

Dosen Pembimbing Anggota : Kusbudiono, S.Si, M.Si.

## PENGESAHAN

Skripsi berjudul “Perbandingan Metode *Extended Kalman Filter* (EKF) dan *Ensemble Kalman Filter* (EnKF) dalam Estimasi Aliran Dua Fase pada Pipa Pengeboran Minyak” telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas  
Jember.

Tim Penguji:

Dosen Pembimbing Utama,

Dosen Pembimbing Anggota,

Kosala Dwidja Purnomo, S.Si, M.Si.  
NIP 196908281998021001

Kusbudiono, S.Si, M.Si.  
NIP 197704302005011001

Penguji I,

Penguji II,

Drs. Rusli Hidayat, M.Sc.  
NIP 196610121993031001

Kiswara Agung Santoso, S.Si, M.Kom.  
NIP 197209071998031003

Mengesahkan  
Dekan,

Prof. Drs. Kusno, DEA, Ph.D.  
NIP 196101081986021001

## RINGKASAN

**Perbandingan Metode *Extended Kalman Filter* (EKF) dan *Ensemble Kalman Filter* (EnKF) dalam Estimasi Aliran Dua Fase pada Pipa Pengeboran Minyak;** Latifatur Rohmah; 091810101029; 2014; 64 halaman; Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember

Aliran dua fase merupakan bagian dari aliran multifase, dimana dalam suatu aliran terdapat dua fluida yang mengalir pada saluran seperti aliran zat cair-gas, zat padat dalam zat cair dan zat padat dalam gas. Pada aliran zat cair-gas yang terjadi pada proses evaporasi untuk jenis *internal flow* (pada pipa) tidak ada permukaan bebas bagi gelembung uap untuk meloloskan diri ke udara bebas. Sehingga gelembung uap tersebut akan terseret mengikuti arus aliran cairannya. Aliran inilah yang selanjutnya disebut dengan “aliran dua fase” (*two phase flow*) yaitu fase cair dan gas yang akan mengalir bersamaan dalam pipa. Aliran dua fase pada pengeboran minyak ditunjukkan pada fase *liquid* (minyak) - gas yang mengalir bersamaan dalam pipa.

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mendapatkan hasil estimasi aliran dua fase dengan menggunakan metode *Extended Kalman Filter* (EKF) dan *Ensemble Kalman Filter* (EnKF). Selain itu, tujuan akhir dari penelitian ini yaitu menentukan metode terbaik dalam mengestimasi aliran dua fase.

Untuk memperoleh hasil estimasi dan mengetahui metode yang terbaik, dilakukan beberapa langkah, yaitu diskritisasi dengan metode beda hingga maju untuk diskritisasi pada waktu dan metode beda hingga pusat untuk diskritisasi terhadap posisi, dan dilanjutkan dengan penambahan *noise* pada model aliran dua fase. Setelah itu mengimplementasikan algoritma EKF dan EnKF. Langkah berikutnya adalah analisis hasil simulasi. Hasil yang akan dianalisis adalah hasil estimasi tekanan ( $p$ ), kecepatan ( $U$ ) dan friksi ( $H$ ) dari aliran dua fase. Analisis yang dilakukan adalah dengan membandingkan nilai dari norm kovariansi *error* dari kedua metode.



Hasil simulasi menunjukkan bahwa metode EKF dan EnKF dapat digunakan untuk mengestimasi aliran dua fase. Untuk estimasi tekanan dengan metode EKF menghasilkan nilai norm kovariansi *error* yang lebih besar dibandingkan dengan estimasi tekanan menggunakan metode EnKF, sementara untuk estimasi kecepatan dan friksi menggunakan metode EKF menghasilkan nilai norm kovariansi *error* yang lebih kecil dibandingkan dengan metode EnKF. Dengan demikian metode EKF lebih baik daripada metode EnKF dalam mengestimasi kecepatan dan friksi sedangkan untuk estimasi tekanan metode EnKF lebih baik daripada metode EKF.

## PRAKATA

Puji syukur kepada Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Perbandingan Metode *Extended Kalman Filter* (EKF) dan *Ensemble Kalman Filter* (EnKF) dalam Estimasi Aliran Dua Fase pada Pipa Pengeboran Minyak”. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember.

Dalam penyelesaian skripsi ini, penulis telah banyak mendapat bantuan dan dorongan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Kosala Dwidja Purnomo, S.Si, M.Si., selaku Dosen Pembimbing Utama dan Kusbudiono S.Si, M.Si., selaku Dosen Pembimbing Anggota, yang telah meluangkan waktu, pikiran dan perhatian dalam penyusunan skripsi ini;
2. Drs. Rusli Hidayat, M.Sc., dan Kiswara Agung Santoso, S.Si, M.Kom., selaku Dosen Penguji yang telah memberikan saran dan kritikan;
3. Yuliani Setia Dewi, S.Si, M.Si, selaku Dosen Pembimbing Akademik;
4. Bapak dan Ibu serta keluarga di rumah yang telah memberikan doa;
5. Yanti, Ira, Cici, Cocom dan Iin yang telah memberikan dukungan positif;
6. sahabat A FIRE LIFE (Aan, Fendy, Rizka, Ervin, Lutfi, Ifa, Fathur dan Elna) yang selalu memberikan semangat dan motivasi;
7. angkatan matematika 2009 dan teman-teman kost yang selalu berbagi keceriaan bersama;
8. semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak.

Jember, 3 Januari 2014

Penulis

## DAFTAR ISI

	Halaman
<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	i
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b> .....	ii
<b>HALAMAN MOTO</b> .....	iii
<b>HALAMAN PERNYATAAN</b> .....	iv
<b>HALAMAN PEMBIMBINGAN</b> .....	v
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b> .....	vi
<b>RINGKASAN</b> .....	vii
<b>PRAKATA</b> .....	ix
<b>DAFTAR ISI</b> .....	x
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xii
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xiii
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....	xv
<b>BAB 1. PENDAHULUAN</b> .....	1
<b>1.1 Latar Belakang</b> .....	1
<b>1.2 Rumusan Masalah</b> .....	2
<b>1.3 Tujuan</b> .....	3
<b>1.4 Manfaat</b> .....	3
<b>BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA</b> .....	4
<b>2.1 Model Aliran Dinamis pada Pipa Pengeboran Minyak</b> 4	4
<b>2.2 Model Sistem dari Aliran Dua Fase</b> .....	6
<b>2.3 Diskritisasi Model</b> .....	7
<b>2.4 Penambahan Faktor Stokastik</b> .....	9
<b>2.5 Metode <i>Kalman Filter</i></b> .....	10
<b>2.6 Metode <i>Extended Kalman Filter</i></b> .....	12
<b>2.7 Metode <i>Ensemble Kalman Filter</i></b> .....	14

<b>2.8 Norm Kovariansi <i>Error</i></b> .....	16
<b>BAB 3. METODE PENELITIAN</b> .....	18
<b>BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN</b> .....	21
<b>4.1 Diskritisasi Model Aliran Dua Fase</b> .....	21
<b>4.2 Penambahan <i>Noise</i></b> .....	24
<b>4.3 Implementasi Algoritma EKF untuk Model Aliran     Dua Fase</b> .....	24
<b>4.4 Implementasi Algoritma EnKF untuk Model Aliran     Dua Fase</b> .....	27
<b>4.5 Simulasi dan Evaluasi</b> .....	29
4.5.1 Estimasi dengan Metode EKF.....	29
4.5.2 Estimasi dengan Metode EnKF.....	39
4.5.3 Perbandingan Hasil Estimasi Metode EKF dan EnKF.....	60
<b>BAB 5. PENUTUP</b> .....	62
<b>5.1 Kesimpulan</b> .....	62
<b>5.2 Saran</b> .....	62
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	64
<b>LAMPIRAN</b> .....	65

## DAFTAR TABEL

	Halaman
2.1 Konstanta dalam Model Aliran Dinamis Pipa. ....	6
4.1 Rata-rata Norm Kovariansi <i>Error</i> . ....	61

## DAFTAR GAMBAR

	Halaman
4.1 Hasil estimasi $p$ pada posisi grid ke 10 dengan metode EKF .....	30
4.2 Norm kovariansi $error p$ dengan metode EKF.....	30
4.3 Estimasi $p$ numerik dan estimasi dengan metode EKF terhadap posisi .....	31
4.4 Hasil estimasi $U$ pada posisi grid ke 10 dengan metode EKF .....	32
4.5 Norm kovariansi $error U$ dengan metode EKF.....	33
4.6 Estimasi $U$ numerik dan estimasi dengan metode EKF terhadap posisi .....	34
4.7 Hasil estimasi $H$ pada posisi grid ke 10 dengan metode EKF .....	35
4.8 Norm kovariansi $error H$ dengan metode EKF.....	36
4.9 Estimasi $H$ numerik dan estimasi dengan metode EKF terhadap posisi .....	37
4.10 Estimasi $p, U$ dan $H$ terhadap waktu pada posisi grid ke 10 dengan metode EKF .....	38
4.11 Estimasi $p, U$ dan $H$ terhadap posisi pada waktu terakhir dengan metode EKF .....	38
4.12 Hasil estimasi $p$ pada posisi grid ke 10 dengan metode EnKF $N_e=50$ .....	39
4.13 Hasil estimasi $p$ pada posisi grid ke 10 dengan metode EnKF $N_e=100$ .....	40
4.14 Hasil estimasi $p$ pada posisi grid ke 10 dengan metode EnKF $N_e=500$ .....	40
4.15 Hasil estimasi $p$ pada posisi grid ke 10 dengan metode EnKF $N_e=750$ .....	41
4.16 Norm kovariansi $error p$ dengan metode EnKF $N_e=50$ .....	41
4.17 Norm kovariansi $error p$ dengan metode EnKF $N_e=100$ .....	42
4.18 Norm kovariansi $error p$ dengan metode EnKF $N_e=500$ .....	42
4.19 Norm kovariansi $error p$ dengan metode EnKF $N_e=750$ .....	43
4.20 Estimasi $p$ numerik dan estimasi dengan $N_e= 750$ terhadap posisi.....	44
4.21 Hasil estimasi $U$ pada posisi grid ke 10 dengan metode EnKF $N_e=50$ .....	45
4.22 Hasil estimasi $U$ pada posisi grid ke 10 dengan metode EnKF $N_e=100$ .....	46
4.23 Hasil estimasi $U$ pada posisi grid ke 10 dengan metode EnKF $N_e=500$ .....	47
4.24 Hasil estimasi $U$ pada posisi grid ke 10 dengan metode EnKF $N_e=750$ .....	48
4.25 Norm kovariansi $error U$ dengan metode EnKF $N_e=50$ .....	49

4.26	Norm kovariansi <i>error U</i> dengan metode EnKF $Ne=100$ .....	49
4.27	Norm kovariansi <i>error U</i> dengan metode EnKF $Ne=500$ .....	50
4.28	Norm kovariansi <i>error U</i> dengan metode EnKF $Ne=750$ .....	50
4.29	Estimasi $U$ numerik dan estimasi dengan $Ne= 750$ terhadap posisi.....	51
4.30	Hasil estimasi $H$ pada posisi grid ke 10 dengan metode EnKF $Ne=50$ .....	52
4.31	Hasil estimasi $H$ pada posisi grid ke 10 dengan metode EnKF $Ne=100$ .....	53
4.32	Hasil estimasi $H$ pada posisi grid ke 10 dengan metode EnKF $Ne=500$ .....	54
4.33	Hasil estimasi $H$ pada posisi grid ke 10 dengan metode EnKF $Ne=750$ .....	55
4.34	Norm kovariansi <i>error H</i> dengan metode EnKF $Ne=50$ .....	56
4.35	Norm kovariansi <i>error H</i> dengan metode EnKF $Ne=100$ .....	56
4.36	Norm kovariansi <i>error H</i> dengan metode EnKF $Ne=500$ .....	57
4.37	Norm kovariansi <i>error H</i> dengan metode EnKF $Ne=750$ .....	57
4.38	Estimasi $H$ numerik dan estimasi dengan $Ne= 750$ terhadap posisi.....	58
4.39	Estimasi $p, U$ dan $H$ terhadap waktu pada posisi grid ke 10 dengan metode EnKF $Ne=750$ .....	59
4.40	Estimasi $p, U$ dan $H$ terhadap posisi pada waktu terakhir dengan metode EnKF $Ne=750$ .....	60

## DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
A. Skrip Program Metode EKF.....	65
B. Skrip Program Metode EnKF.....	71