GEOMETRI ANALITIK DATAR

Oleh:
Dr. Susanto, MPd

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN IPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER
TAHUN 2012

KATA PENGANTAR

Puji syukur dipanjatkan kehadirat Alloh SWT atas segala rahmat, taufiq, dan hidayahNya yang telah dilimpahkan, sehingga terselesaikannya buku pegangan kuliah untuk mata kuliah Geometri Analitik Datar. Mata Kuliah ini memuat materi tentang garis lurus, lingkaran, ellips, hiperbola, parabola, serta koordinat dan persamaan kutub.

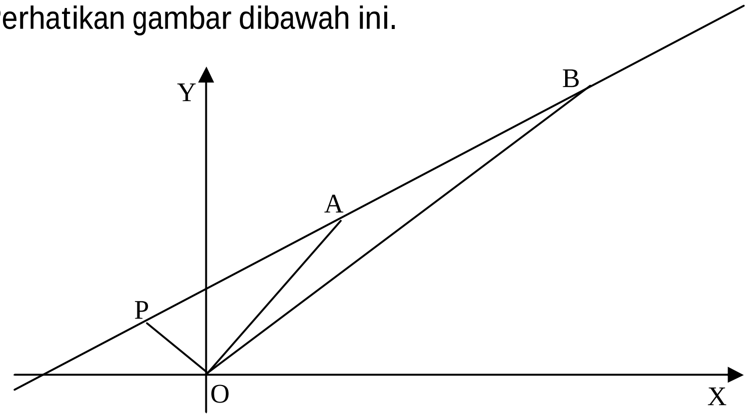
Selanjutnya penulis menyadari bahwa buku ini masih belum sempurna; untuk itu dimohon tanggapan baik berupa kritik dan saran kepada pembaca demi kebaikan buku pegangan kuliah ini. Akhirnya mudah-mudahan buku ini bermanfaat bagi pembaca.

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I
GARIS LURUS

Perhatikan gambar dibawah ini.



Misalkan diketahui garis AB dengan A(x_1 , y_1) dan B(x_2 , y_2). P(x , y) adalah sebarang titik pada garis AB tersebut. Vektor-vektor $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$, dan $\overrightarrow{AB}$, masing-masing ditulis dengan $\underline{a}$, $\underline{b}$, dan $\underline{c}$.

Garis AB dapat didefinisikan dari titik A dan B dengan menggunakan vektor sebagai berikut.

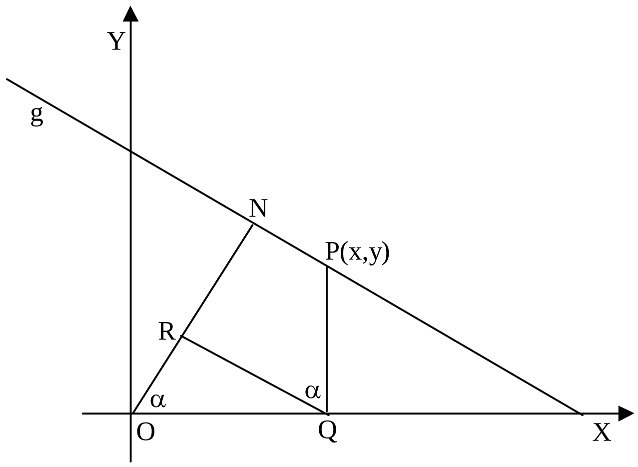
$$\langle x, y\rangle = \underline{a} + \lambda \underline{c} \quad ; \quad \lambda \in \mathrm{R}$$

$$\langle x, y\rangle = \langle x_1, y_1\rangle + \lambda\langle (x_2 - x_1), (y_2 - y_1)\rangle$$

$$\langle x - x_1, y - y_1\rangle = \lambda\langle (x_2 - x_1), (y_2 - y_1)\rangle$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \lambda$$

Selanjutnya persamaan diatas dinamakan persamaan garis lurus yang melalui titik A(x_1 , y_1) dan B(x_2 , y_2).



Perhatikan gambar diatas, $|ON| = n$ disebut panjang normal garis g. ON tegak lurus pada garis g. $\propto$ adalah sudut yang diapit oleh normal ON dan sumbu X positif. Ambil sebarang titik P(x,y) pada garis g. Q adalah proyeksi titik P pada sumbu X dan R adalah proyeksi titik Q pada ON.

$\angle OQR + \propto = 90^o$ dan

$\angle OQR + \angle PQR = 90^o$

maka $\angle PQR = \propto$.

$|OR| = |OQ| \text{ Cos} \propto = x \text{ Cos} \propto$

$|RN| = |PQ| \text{ Sin} \propto = y \text{ Sin } x$

$|RN| = |PQ| \text{ Sin} \propto = y \text{ Sin } x$

Perhatikan bahwa $|OR| + |RN| = |ON|$, maka $x \text{ Cos} \propto + y \text{ Sin} \propto = n$.

Karena titik P sebarang titik pada garis lurus g, maka hubungan terakhir ini menyatakan persamaan garis g. Persamaan bentuk itu dinamakan persamaan normal dari *Hess* atau disingkat persamaan normal atau persamaan *Hess*. Karena n adalah panjang normal, maka n suatu bilangan positif.

Contoh

Tentukan persamaan normal suatu garis lurus dengan panjang normal 5 satuan dan besar sudut apit garis tersebut dengan sumbu arah positif adalah 135^o.

Jawab

Persamaan normal garis g adalah:

x cos 45^o + y sin 45^o = 5

$$\frac{1}{2}x\sqrt{2}+\frac{1}{2}y\sqrt{2}=5$$

Apabila kedua ruas dari persamaan tersebut masing-masing dikalikan $\sqrt{2}$, maka diperoleh persamaan:

X + y = 5 $\sqrt{2}$.

Selanjutnya pandang bentuk umum persamaan garis lurus Ax + By + C = 0. Apabila kedua ruas persamaan ini dikalikan k dengan k $\neq$ 0, maka diperoleh:

KAx + kBy + kC = 0.

Jika dibandingkan dengan persamaan normal, maka diperoleh hubungan

$k^2A^2 + k^2B^2 = 1$

$k^2(A^2 + B^2) = 1$

k = $\pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Sehingga persamaan normal dari Ax + By + C = 0 adalah

$$\pm\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)=0$$

Dari normal ini dapat disimpulkan bahwa jarak titik asal O ke garis lurus dengan persamaan Ax + By + C = 0 adalah

$\pm\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$ (dipilih harga positifnya).

Contoh

Ubahlah persamaan-persamaan garis lurus berikut ini menjadi bentuk persamaan normal. Kemudian tentukan jarak garis-garis tersebut masing-masing ke titik asal O.

a) 5x – 12 y = 19

b) 3x – 4y + 10 = 0.

Jawab

a) $5x - 12y - 19 = 0$

k = $\pm \frac{1}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{169}} = \pm \frac{1}{13}$

Alternatif (-19) bilangan negatif, maka harga k dipilih yang bertanda positif, sehingga k = $\pm \frac{1}{13}$. Jadi persamaan normal adalah

$\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y - \frac{19}{13} = 0$, sedangkan jarak ke titik asal O adalah $\frac{19}{13}$ satuan panjang.

b) $3x - 4y + 10 = 0$

k = $\pm \frac{1}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$ = $\pm \frac{1}{\sqrt{25}} = \pm \frac{1}{5}$

Karena 10 adalah bilangan positif, maka nilai k dipilih yang bertanda negatif, yaitu

k = $-\frac{1}{5}$

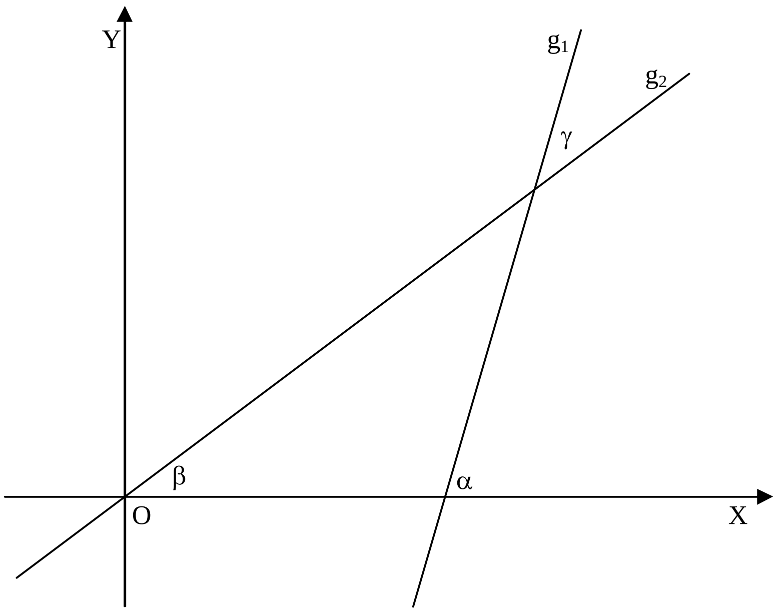
Jadi bentuk persamaan normalnya adalah

$-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2 = 0$, sedangkan jarak ke titik asal O adalah 2 satuan panjang.

Perhatikan dua garis lurus yang berpotongan

$g_1 : y = m_1x + n_1$

$g_2 : y = m_2x + n_2$ sebagaimana gambar berikut ini,



Tanjakan garis g_1 adalah m_1 = tg α, dan tanjankan garis g_2 adalah m_2 = tg β. γ adalah sudut yang dibentuk oleh garis g_1 dan garis g_2. Selanjutnya akan dicari γ, yaitu $\gamma = \alpha - \beta$.

$$tg\gamma = tg(\alpha - \beta)$$

$$tg\gamma = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha . tg\beta}$$

Sehingga

$$tg\gamma = \frac{m \;\; - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

$$Jadi \qquad y = arctg \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

Dengan memperhatikan harga-harga tertentu dari γ dpat ditentukan posisi kedua garis tersebut.

a) Jika $\gamma = 0$, maka $m_1 = m_2$. Ini berarti dua garis tersebut sejajar atau berimpit. Dua garis tersebut akan sejajar apabila $n_1 \neq n_2$ dan dua garis tersebut berimpit, apabila $n_1 = n_2$.

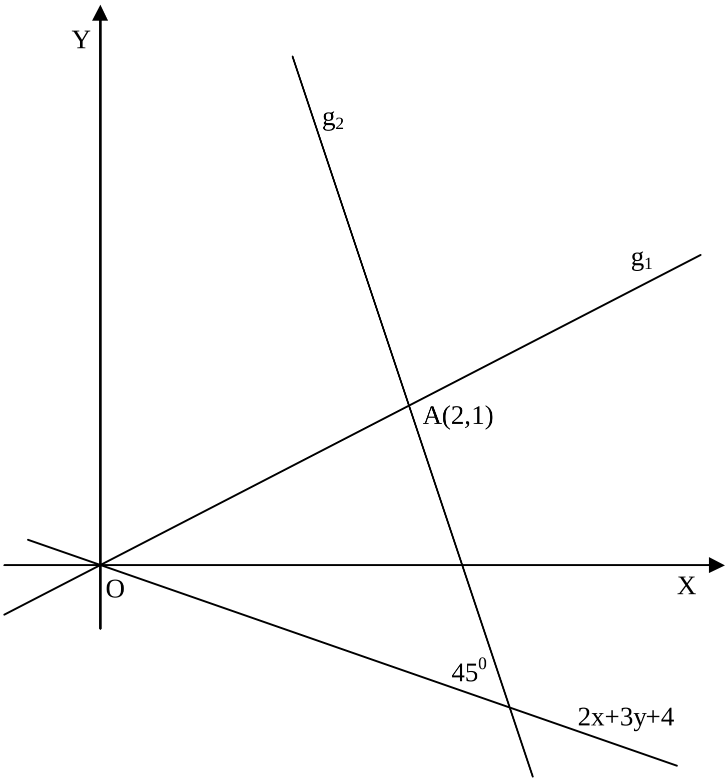
b) Jika harga tg γ besar tak berhingga, yaitu $\gamma = 90^0$, maka $1 + m_1m_2 = 0$ atau $m_1 = -\frac{1}{m_2}$. Ini berarti dua garis tersebut saling tegak lurus.

Contoh

Tentukan persamaan garis lurus yang melalui titik A(2,1) dan mengapit sudut yang besarnya 45^0 dengan garis $2x + 3y + 4 = 0$

Jawab

Gambar dibawah ini adalah sketsa dari ketentuan-ketentuan dalam soal dan garis g_1 dan g_2 adalah garis-garis yang mengapit sudut yang besarnya 45^0 dengan garis $2x+3y+4=0$.



Tanjakan garis $2x + 3y + 4 = 0$ adalah $m = -\frac{2}{3}$. Misalkan tanjakan garis g_1 yang dicari adalah m_1, maka

$$tg\,45^o = \frac{m_1 - m}{1 + m_1 m}$$

$$= \frac{m_1 + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}m_1}$$

$$1 - \frac{2}{3}m_1 = m_1 + \frac{2}{3}$$

$$m_1 = \frac{1}{5}$$

Jadi persamaan garis g_1 adalah garis dengan tanjakan $m_1 = \frac{1}{5}$ dan melalui titik A(2

, 1), yaitu

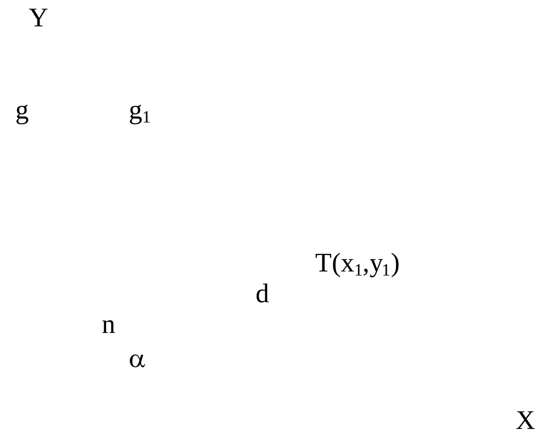
$Y - 1 = \frac{1}{5}(x - 2)$

$X - 5y + 3 = 0$

Tanjakan garis g_2 adalah $m_2 = -5$, sehir

$Y - 1 = -5(x - 2)$

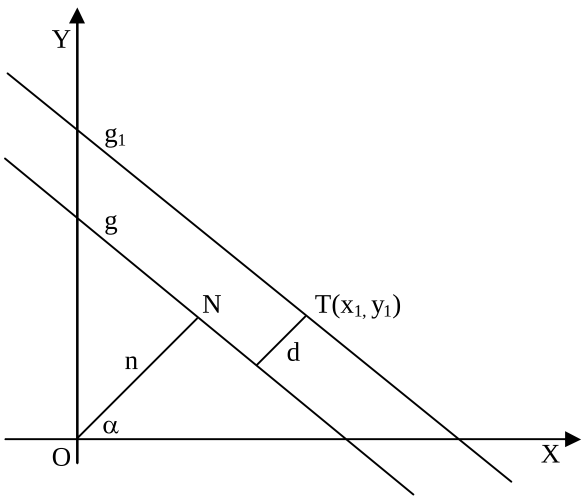
$5x + y - 11 = 0.$



Pada persamaan normal suatu garis

asal O ke garis tersebut. Selanjutnya

lurus tertentu.



Pada gambar diatas garis g memiliki persamaan normal x cos α + y sin α - n = 0 dan titik T(x_1 , y_1) yang berjarak d dari garis g. Dapat ditentukan persamaan normal garis g_1 yang melalui titik T(x_1 , y_1) dan sejajar dengan garis g. Jelas bahwa panjang normal dari garis g_1 adalah (n + d), maka persamaan normal garis g_1 adalah x cos α + y sin α - (n+d) = 0.

Karena titik T(x_1 , y_1) pada garis g_1, maka koordinat-koordinat titik T memenuhi persamaan garis g_1, sehingga diperoleh

x_1 cos α + y_1 sin α - (n + d) = 0

Jadi d = x_1 cos α + y_1 sin α - n.

Dengan cara yang sama dapat ditentukan pula jarak tersebut apabila titik-titik O dan T terletak sepihak terhadap garis g, sehingga diperoleh d = -(x_1 cos α + y_1 sin α - n)

Karena d adalah jarak, maka nilainya harus positif, sehingga harus diambil harga mutlaknya.

d = $\left| x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - n \right|$

Jika persamaan garisnya merupakan persamaan untuk umum, maka untuk menentukan jarak suatu titik pada garis tersebut harus diubah ke persamaan normal. Karena persamaan normal garis Ax + By + C = 0 adalah

$$+\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} \right) = 0$$

maka jarak titik T(x_1 , y_1) ke garis tersebut adalah

$$d = \frac{\left| Ax_1 + By_1 + C \right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Bentuk persamaan normal garis y = mx + n adalah $\pm\left(\frac{y - mx - n}{\sqrt{1+m^2}} \right) = 0$, maka jarak titik T($x_1$, y_1) ke garis tersebut adalah d = $\frac{\left| y_1 - mx_1 - n \right|}{\sqrt{1+m^2}}$

Contoh

Tentukan jarak titik P ke garis g, apabila

a) P(2 , 3) dan g : 3x – 4y – 3 = 0

b) P(-4 , 1) dan g : y = 2x – 1

Jawab

a) d = $\dfrac{|3.2-4.3-3|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \dfrac{9}{5} = 1\dfrac{4}{5}$

b) d = $\dfrac{|1+2(-4)+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{5}} = \dfrac{6}{5}\sqrt{5}$

Soal-soal Latihan

1. Gambarlah sepasang sumbu koordinat dan gambarlah kedudukan titik-titik dengan koordinat (4 , 1), (-2 , 3), (-1 , -4), (5 , -5), (0 , 6), dan (-5 , 0). Tulislah koordinat-koordinatnya disamping titik tersebut.
2. Gambarlah sebuah segitiga dengan titik-titik sudut A(0 , 1), B(2 , 5), dan C(-1 , 4). Buktikan bahwa segitiga tersebut merupakan segitiga sama kaki.
3. Diketahui sebuah segitiga dengan titik-titik sudut P(-3 , 2), Q(0 , -1), dan R(5 , 4). Buktikan bahwa segitiga tersebut merupakan segitiga siku-siku dan gambar segitiga tersebut.
4. Diketahui ruas garis dengan titik-titik ujung A(-5 , -6) dan C(10 , 1). Buktikan bahwa titik B(4 , -2) terletak pada ruas garis tersebut.
5. Diketahui sebuah segitiga dengan titik-titik sudutnya adalah A(3 , 0), B(-2 , 4), dan C(-5 , -3). Tentukan koordinat-koordinat titik beratnya. (titik berat segitiga adalah titik perpotongan ketiga garis beratnya).
6. Titik P(3 , 0) adalah titik pusat sebuah lingkaran titik A(-2 , 7) adalah titik ujung sebuah garis tengahnya. Tentukan koordinat-koordinat titik ujung lainnya dari garis tengah tersebut.

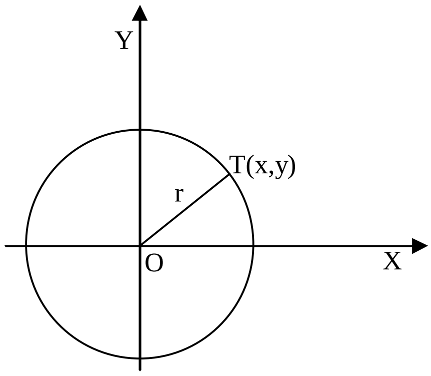
7. Diketahui titik A(4 , 7). Tentukan persamaan garis lurus yang sejajar sumbu-x dan melalui titik A. Tentukan pula persamaan garis lurus yang sejajar sumbu-y dan melalui titik A.
8. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui O(0 , 0) dan P(-2 , 5). Tentukan pula tanjakan dari garis lurus tersebut.
9. Tentukan tanjakan dan persamaan garis lurus yang melalui O(0 , 0) dan yang mengapit sudut 60^o dengan sumbu-x arah positif.
10. Diketahui titik A(1 , 4) dan B(3 , -2). Tentukan tanjakan dan persamaan garis lurus yang melalui titik-titik A dan B.
11. Tentukan persamaan garis lurus dengan tanjakan m = $\frac{1}{2}$ dan melalui titik (0 , 4).
12. Carilah persamaan garis lurus yang melalui titik (-1 , 2) dan mengapit sudut 135^o dengan sumbu-x arah positif.
13. Tentukan koordinat-koordinat titik-titik potong dengan sumbu-sumbu koordinat dan tanjakan garis $3x – 5y + 15 = 0$.
14. Suatu lingkaran dengan titik pusat (3 , -2) dan titik (9 , 2) adalah salah satu titik ujung sebuah garis tengahnya. Tentukan koordinat-koordinat titik ujung lainnya dari garis tengah tersebut.
15. Tentukan pasangan garis mendatar (sejajar sumbu-x) yang memotong sumbu y di titik sejauh 5 satuan di atas titik asal.
16. Tentukan pasangan garis vertikal yang memotong sumbu-x di sebuah titik sejauh 4 satuan sebelah kiri titik asal.
17. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui titik (-5 , 1) dengan tanjakan –1.
18. Tentukan persamaan garis lurus yang tanjakannya adalah $\frac{1}{2}$ dan yang memotong sumbu-y di sebuah titik 7 satuan dibawah titik asal.
19. Tentukan persamaan garis lurus yang tanjakannya adalah –2 dan yang memotong sumbu-x di sebuah titik 3 satuan sebelah kanan titik asal.
20. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui titik-titik (2 , -1) dan (-5 , 4).

21. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui titik (a , 0) dan (0 , b).
22. Tentukan persamaan garis lurus yang mengapit sudut 45^o dengan sumbu-x arah positif dan melalui titik A(3 , 1).
23. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui titik P(2 , 3) dan yang sejajar dengan garis $x + 2y – 3 = 0$.
24. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui titik T(-1 , -4) dan yang tegak lurus pada garis $x – 2y + 2 = 0$.
25. Diketahui titik-titik A(1 , 3) dan B(4 , -1). C adalah titik tengah ruas garis AB. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui C dan yang tegak lurus AB.
26. Diketahui A(-2 , -1) dan B(5 , 5). Tentukan sumbu ruas garis AB.
27. Ubahlah persamaan garis g berikut menjadi persamaan normal. Kemudian tentukan jarak titik P ke garis g.
    a) $g : 3x – 4y + 5 = 0$ dan P(-1 , 3)   b) $g : 12x + 5y – 19 = 0$ dan P(2 , -1).
28. Carilah persamaan garis lurus yang melalui titik potong garis-garis $11x + 3y – 7 = 0$ dan $12x + y – 19 = 0$ serta berjarak sama dari titik-titik A(3 , -2) dan B(-1 , 6).
29. Apabila α adalah sudut lancip yang dibentuk oleh garis-garis $2x – y – 3 = 0$ dan garis $x – 3y + 5 = 0$. Tentukan tg α.
30. Tentukan panjang normal dari garis $5x – 12y – 13 = 0$.
31. Tentukan persamaan garis berat Δ ABC yang melalui A dengan A(3 , -1), B(-2 , 4), dan C(6 , -2).
32. Tentukan persamaan garis yang melalui titik asal dan tegak lurus pada garis yang melalui titik-titik A(-5 , 1) dan B(2 , 4).
33. Tentukan persamaan garis yang melalui titik (3 , -2) dan mengapit sudut 45^0 dengan garis $y = 2x + 1$.

BAB II
LINGKARAN

Definisi

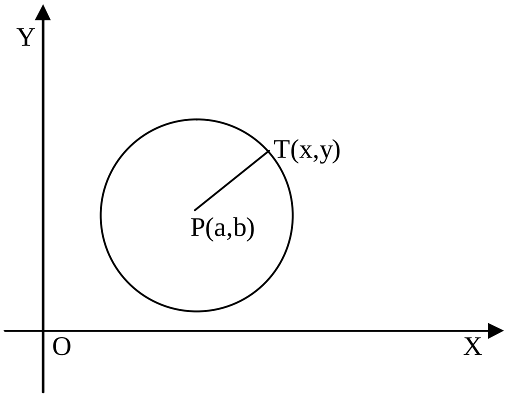
Lingkaran adalah himpunan titik-titik (pada bidang datar) yang jaraknya dari suatu titik tertentu sama panjangnya.



Pada gambar diatas titik pusat lingkaran di O(0 , 0) dan jari-jari r satuan panjang. Untuk menentukan persamaan lingkaran dapat diambil sebarang titik pada lingkaran misalnya T(x , y). Jarak titik T dan titik O adalah $\sqrt{x^2 + y^2}$. Padahal jarak titik-titik t dan titik O adalah r, maka diperoleh hubungan bahwa $\sqrt{x^2 + y^2}$ = r atau $x^2 + y^2 = r^2$.

Karena T(x , y) adalah sebarang titik pada lingkaran, maka setiap titik pada lingkaran berlaku $x^2 + y^2 = r^2$. Jadi persamaan lingkaran dengan pusat O(0 , 0) dan jari-jari r adalah $x^2 + y^2 = r^2$.

Dengan cara yang mirip, dapat ditentukan persamaan lingkaran dengan pusat titik P(a , b) dan jari-jari r satuan sebagai berikut.



Misalkan gambar diatas adalah lingkaran dengan pusat P(a , b) dan jari-jari r satuan. Untuk menentukan persamaan lingkaran ini dapat diambil sebarang titik pada lingkaran, misalnya T(x , y). Jarak titik-titik T dan P adalah $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$.

Padahal jarak titik-titik T dan P adalah jari-jari lingkaran yaitu r; maka diperoleh hubungan $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ = r atau $(x – a)^2 + (y – b)^2 = r^2$.

Karena T(x , y) adalah sebarang titik pada lingkaran itu, maka setiap titik pada lingkaran itu memenuhi hubungan tersebut. Ini berarti bahwa persamaan lingkaran yang berpusat di titik P(a , b) dengan jari-jari r satuan adalah $(x – a)^2 + (y – b)^2 = r^2$.

Contoh 1

Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di titik (4 , -3) dan berjari-jari 5 satuan.

(jawab: $(x – 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$).

Contoh 2

Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di titik P(1 , 3) dan melalui titik Q(-2 , 5).

(jawab: $(x – 1)^2 + (y – 3)^2 = 13$).

Perhatikan persamaan suatu lingkaran dengan pusat (a , b) dan jari-jari r, yaitu

$(x – a)^2 + (y – b)^2 = r^2$.

Ruas kiri dari persamaan ini dapat diuraikan menjadi:

$x^2 + y^2 – 2ax – 2by + a^2 + b^2 – r^2 = 0$.

Selanjutnya persamaan terakhir ini dapat dituliskan dalam bentuk

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$.

Persamaan bentuk terakhir ini dinamakan persamaan bentuk umum suatu lingkaran.

Apabila diketahui persamaan bentuk umum suatu lingkaran: $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, maka dapat dicari koordinat-koordinat titik pusat dan jari-jarinya. Persamaan bentuk umum tersebut dapat diubah menjadi:

$$x^2 + Ax + \frac{1}{4}A^2 + y^2 + By + \frac{1}{4}B^2 = \frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C$$

$$(x + \frac{1}{2}A)^2 + (y + \frac{1}{2}B)^2 = \frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C.$$

Dari persamaan terakhir ini, dapat disimpulkan bahwa titik pusat lingkaran adalah

$(-\frac{1}{2}A , -\frac{1}{2}B)$ dan jari-jarinya adalah $\sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$

Contoh 3

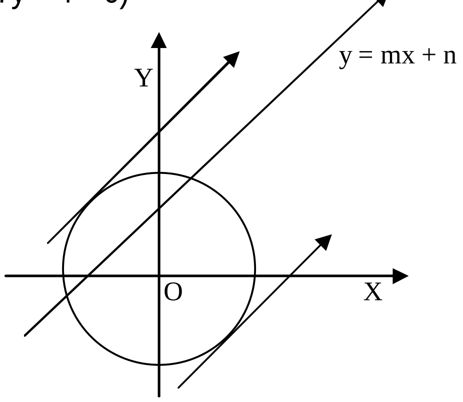
Tentukan koordinat-koordinat titik pusat dan jari-jari sebuah lingkaran dengan persamaan $4x^2 + 4y^2 - 4x + 16y - 19 = 0$.

(jawab: Titik pusatnya $(\frac{1}{2} , -2)$ dan jari-jari 3.

Contoh 4

Tentukan persamaan lingkaran yang melalui tiga titik P(1 , 0), Q(0 , 1) dan T(2 , 2).

(jawab: $3x^2 + 3y^2 - 7x - 7y + 4 = 0$)



Pada gambar diatas diketahui garis y = mx + n dan lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$. Selanjutnya dapat dicari persamaan garis singgung pada lingkaran yang sejajar garis dengan persamaan y = mx + n. Karena garis singgung yang dicari harus sejajar garis dengan persamaan y = mx + n, maka dapat dimisalkan garis singgung tersebut adalah y = mx + k.

Karena garis ini menyinggung pada lingkaran, maka ada sebuah titik yang koordinat-koordinatnya memenuhi pada persamaan garis maupun persamaan lingkaran. Sehingga dapat diperoleh

$x^2 + (mx + k)^2 + r^2$

$(1 + m^2)x^2 + 2mk + k^2 - r^2 = 0$

Persamaan ini dipandang sebagai persamaan kuadrat dalam x. Karena garis singgung dan lingkaran hanya mempunyai titik persekutuan, maka persamaan kuadrat hanya mempunyai satu harga x, syaratnya adalah diskriminan dari persamaan tersebut harus sama dengan nol; sehingga didapat: $k = \pm r \sqrt{1+m^2}$.

Jadi persamaan garis singgungnya adalah

$y = mx + r\sqrt{1+m^2}$ dan

$y = mx - r\sqrt{1+m^2}$

Dengan cara yang sama dapat diturunkan bahwa persamaan garis singgung pada lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ yang sejajar dengan garis y = mx + n adalah

$y - b = m(x - a) + r\sqrt{1+m^2}$ dan

$y - b = m(x - a) - r\sqrt{1+m^2}$.

Contoh 5

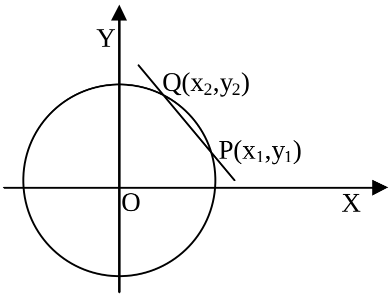
Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran berikut dan yang mengapit sudut 60^o dengan sumbu-x arah positif.

a). $x^2 + y^2 = 16$

b). $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$

(jawab : (a) $x\sqrt{3} + 8$ dan $x\sqrt{3} - 8$, (b) $y = x\sqrt{3} + 11 - 2\sqrt{3}$ dan $y = x\sqrt{3} - 5 - 2\sqrt{3}$).

Pada gambar dibawah ini lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ dan titik $P(x_1 , y_1)$ yangterletak pada lingkaran. Akan dicari persamaan garis singgung pada lingkaran di titik P.



Diambil titik $Q(x_2 , y_2)$ pada lingkaran pula, maka persamaan garis PQ adalah

$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$.

Karena titik P dan Q pada lingkaran, maka berlaku

$x_2^2 + y_2^2 = r^2$ dan $x_1^2 + y_1^2 = r^2$.

Apabila kedua persamaan ini dikurangkan, maka diperoleh

$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}$

Dengan persamaan ini, persamaan garis PQ diatas dapat ditulis menjadi

$y - y_1 = -\frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}(x - x_1)$

Jika Q mendekati P sehingga hampir $x_2 = x_1$ dan $y_2 = y_1$ maka garis PQ berubah menjadi garis singgung lingkaran di titik P, yaitu: $x_1x + y_1y = r^2$.

Jadi persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ di titik (x_1,y_1) adalah $x_1x + y_1y = r^2$.

Dengan cara yang sama dapat diturunkan bahwa persamaan garis singgung pada lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ dengan titik singgung (x_1 , y_1) adalah

$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$.

Contoh 6

Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran a). $x^2 + y^2 = 25$ di titik (4 , -3).

b). $x^2 + y^2 – 4x – 6y – 12 = 0$ di titik (-1 , 7).

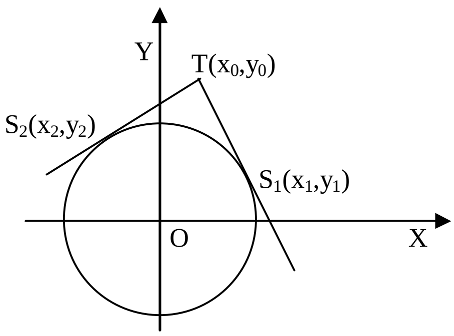
jawab: (a) $4x – 3y + 25$ dan (b) $–3x + 4y – 31 = 0$).

Contoh 7

Diketahui persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + 2x – 19 = 0$ dan titik B(1 , 6). Tentukan titik pusat dan jari-jari lingkaran. Selidiki apakah titik di bagian dalam, pada, atau di luar lingkaran. Selanjutnya tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran yang melalui titik B.

(jawab: $x – 2y + 11 = 0$ dan $2x + y – 8 = 0$).

Dengan ilustrasi yang mirip pada pembahasan diatas, dapat ditentukan bahwa



Koordinat-koordinat titik-titik S_1 dan S_2 memenuhi persamaan $x_ox + y_oy = r^2$. Garis ini melalui titik-titik singgung S_1 dan S_2 dan biasa disebut *tali busur singgung* dari titik T. Selanjutnya persamaan ini pula disebut *persamaan garis kutub* T(x_o , y_o) terhadap lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$.

Soal-soal

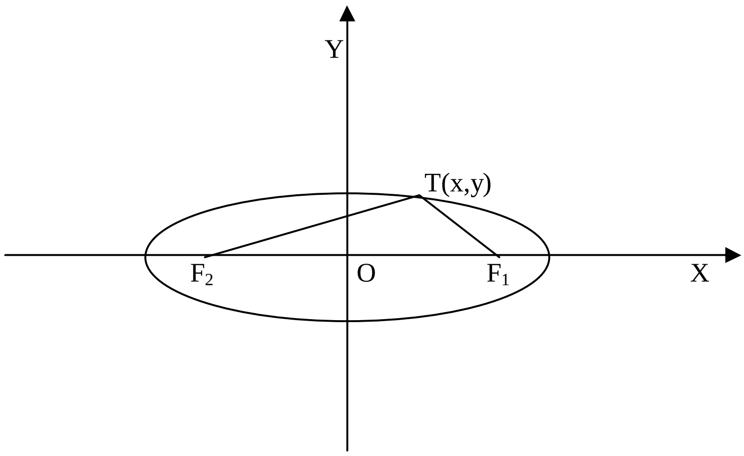
1. Tentkan titik pusat dan jari-jari lingkaran $x^2 + y^2 + 4x – 6y + 9 = 0$.
2. Tentukan persamaan lingkaran yang bertitik pusat di (1 , -2) dan melalui titik (4 , 2).
3. Tentukan jari-jari lingkaran $9x^2 + 9y^2 – 54x + 18y + 65 = 0$

4. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui O(0 , 0), P(4 , 0), dan Q(0 , 2).
5. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$ yang sejajar dengan garis $5x - 12y + 5 = 0$.
6. Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$ di titik (1 , 2).
7. Tentukan persamaan garis kutub titik (2,-1) terhadap lingkaran $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$.

BAB III
ELLIPS

Definisi

Ellips adalah himpunan semua titik yang jumlah jaraknya terhadap dua titik tertentu tetap besarnya.



Misalkan titik-titik api (fokus) F_1, F_2 pada sumbu-X dan sumbu F_1F_2 adalah sumbu-Y. Jika $|F_1F_2| = 2c$ maka $F_1(c\ ,\ 0)$ dan $F_2(-c\ ,\ 0)$. Misalkan jumlah jarak yang tetap itu adalah 2a, dengan $a > c$. Ambil T(x , y) sebarang titik yang memenuhi definisi, yaitu $|TF_1| + |TF_2| = 2a$

Berarti $\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ + $\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ = 2a

$\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ = 2a - $\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$

Setelah kedua ruas dikuadratkan dan dijabarkan kita peroleh:

$-4cx - 4a^2 = -2a\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$

Kedua ruas dikuadratkan lagi dan dijabarkan sehingga diperoleh:

$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$ ....(1)

Karena $a > c$ maka $a^2 - c^2 > 0$; sehingga dapat ditulis $a^2 - c^2 = b^2$

Sehingga dari persamaan (1) diatas menjadi:

$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

atau

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{.......(2)}$$

Karena T(x , y) sebarang titik yang diambil, maka setiap titiknya memenuhi

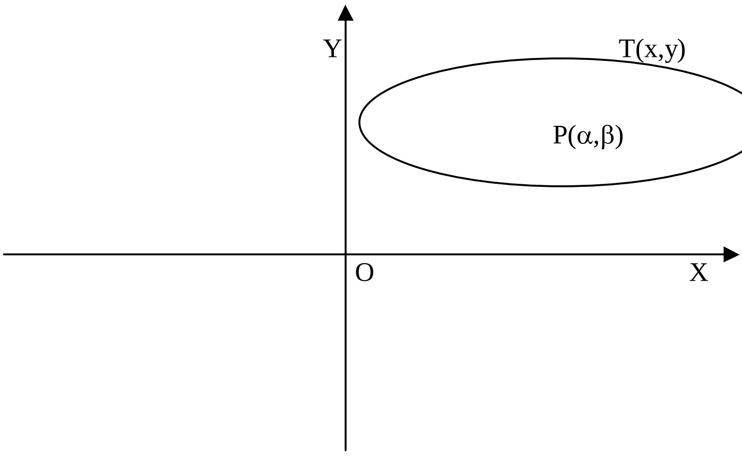
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Persamaan (2) ini disebut persamaan pusat dari ellips atau persamaan *kanonik* dari ellips.

c disebut eksentrisitas linear

$\frac{c}{a}$ disebut eksentrisitas numerik, ditulis e.

Karena a $>$ c maka 0 $<$ e = $\frac{c}{a} < 1$.



Persamaam ellips yang pusatnya P(α , β) dan sumbu-sumbunya sejajar dengan koordinat adalah $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$

Contoh 1

Tentukan persamaan ellips yang titik-titik apinya terletak pada sumbu-X dan simetris terhadap titik O serta sumbu panjangnya 20, eksentrisitas numerik e = $\frac{3}{5}$.

(jawab: $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$)

Suatu garis lurus dapat memotong ellips, menyinggung, atau tidak memotong dan tidak menyinggung ellips. Dalam hal yang terakhir garis dan ellips tidak mempunyai titik persekutuan. Selanjutnya akan dicari persamaan garis singgung yang gradiennya m.

Misalkan persamaan garis yang gradiennya m adalah y = mx + p dan persamaan ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Absis titik-titik potong garis dan ellips diperoleh dari:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx+p)^2}{b^2} = 1$$

atau

$(b^2 + a^2m^2)x^2 + 2a^2mpx + a^2(p^2 - b^2) = 0$

Garis menyinggung ellips jika titik-titik potongnya berimpit. Hal ini terjadi apabila persamaan kuadrat diatas mempunyai dua akar yang sama atau apabila diskriminannya sana dengan nol.

Sehingga $D = (2a^2mp)^2 - 4\,(b^2 + a^2m^2)\,a^2(p^2 - b^2) = 0$

Berarti p = $\pm\sqrt{b^2 + a^2m^2}$

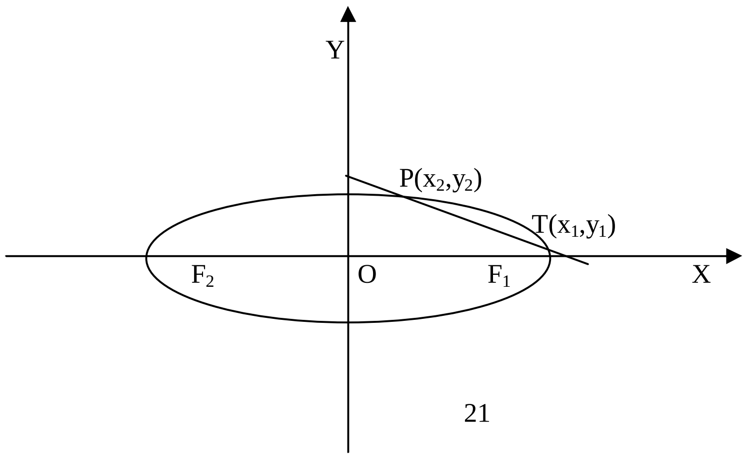
Jadi persamaan garis singgung yang gradiennya m adalah y = mx $\pm\sqrt{b^2 + a^2m^2}$

Contoh 2

Carilah persamaan garis singgung pada ellips $x^2 + 4y^2 = 20$ yang tegak lurus garis dengan persamaan 2x – 2y – 13 = 0.

(jawab: y = -x $\pm$ 5

Selanjutnya akan dicari persamaan garis singgung pada ellips dengan titik singgung T(x_1 , y_1).



Misalkan persamaan ellips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dan P(x_2 , y_2) suatu titik pada ellips, maka berlaku:

$\frac{x_2{}^2}{a^2}+\frac{y_2{}^2}{b^2}=1$ atau $b^2x_2{}^2 + a^2y_2{}^2 = a^2b^2$.

Karena T(x_1,y_1) pada ellips maka berlaku $b^2x_1{}^2 + a^2y_1{}^2 = a^2b^2$.

Dari kedua persamaan diatas didapat $b^2(x_1{}^2 - x_2{}^2) = -a^2(y_1{}^2 - y_2{}^2)$

Setelah dijabarkan diperoleh: $\frac{-b^2(x_1+x_2)}{a^2(y_1+y_2)}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$

Persamaan garis PT adalah

$y - y_1 = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$ *atau* $y-y_1=\frac{-b^2(x_1+x_2)}{a^2(y_1+y_2)}(x-x_1)$

Jika P mendekati T sedemikian P sangat dekat dengan T sehingga $x_2 = x_1$ dan $y_2 = y_1$. Akibatnya PT menjadi garis singgung di titik T dan persamaannya adalah:

$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$.

Untuk ellips dengan persamaan $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$, maka persamaan garis singgung di titik (x_1 , y_1) adalah $\frac{(x_1-\alpha)(x-\alpha)}{a^2}+\frac{(y_1-\beta)(y-\beta)}{b^2}=1$

Contoh 3

Carilah persamaan garis singgung pada ellips $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$ di titik yang absisnya 5.

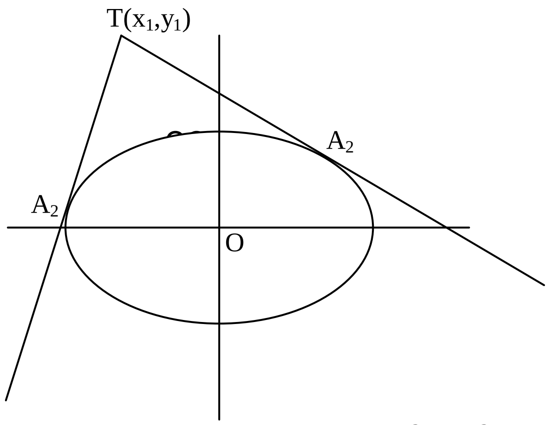
Contoh 4

Carilah persamaan garis singgung pada ellips $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ dari titik T(2 , -1).

(jawab: x = 2 atau y = -1).

Sifat utama garis singgung pada ellips sebagai berikut: Garis singgung di suatu titik pada ellips membagi dua sama besar sudut antara garis penghubung titik itu dengan titik api yang satu dan perpanjangan garis penghubung titik tersebut dengan titik api lainnya.

Perhatikan gambar dibawah ini.



Misalkan persamaan ellips diatas adalah $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dan titik-titik $A_1(x' , y')$ dan koordinat $A_2(x'' , y'')$ merupakan titik-titik singgung dari garis-garis singgung ellips yang melalui titik $T(x_1 , y_1)$ diluar ellips.

Persamaan garis singgung di A_1 adalah $\frac{x'x}{a^2}+\frac{y'y}{b^2}=1$

Karena T pada garis singgung maka $\frac{x'x_1}{a^2}+\frac{y'y_1}{b^2}=1$ ....(1)

Persamaan garis singgung di A_2 adalah $\frac{x''x}{a^2}+\frac{y''y}{b^2}=1$

Karena T pada garis singgung maka $\frac{x''x_1}{a^2}+\frac{y''y_1}{b^2}=1$ ....(2)

Dari (1) dan (2) dapat disimpulkan bahwa titik-titik A_1 dan A_2 terletak pada garis dengan persamaan $\frac{x_1\,x}{a^2}+\frac{y_1\,y}{b^2}=1$.

Persamaan ini disebut persamaan tali busur singgung dari titik $T(x_1 , y_1)$.

Soal-soal

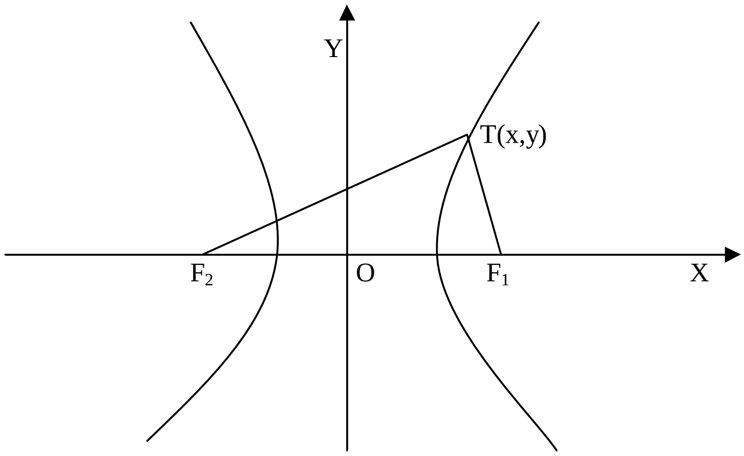
1. Dari titik C(10,-8) dibuat garis yang menyinggung ellips $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Tentukan persamaan tali busur yang menghubungkan kedua itik singgung tersebut.
2. Garis x – y – 5 = 0 menyinggung ellips yang titik-titik apinya F_1(-3 , 0) dan F_2(3 , 0). Tentukan persamaan ellips yang memenuhi persyaratan tersebut.
3. Tentukan persamaan garis singgung pada ellips $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$ yang sejajar dengan garis 4x – 2y + 23 = 0.
4. Tentukan persamaan tali busur ellips $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$yang dibagi dua sama panjang oleh titik A(2 , 1).
5. Dari titik api sebelah kanan ellips $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$ dipancarkan sinar yang mengapit sudut α (tg α = -2) dengan sumbu x positif. Tentukan persamaan garis yang dilalui sinar pantulnya.
6. Tentukan luas jajar genjang yang dua titik sudutnya adalah titik-titik api dari ellips $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ dan dua titik lainnya berimpit dengan ujung-ujung sumbu pendek dari ellips.
7. Diketahui eksentrisitas dari ellips adalah e = $\frac{2}{5}$ dan jarak dari titik M pada ellips ke salah satu garis arahnya adalah 20. Tentukan jarak dari titik M ke titik api yang bersesuaian dengan garis arah tersebut.
8. Suatu ellips menyinggung sumbu-x di titik A(3 , 0) dan menyinggung sumbu-y di di B(0 , -4). Sumbu-sumbu simetrinya sejajar sumbu-sumbu koordinat. Tentukan persamaan ellips tersebut.
9. Dari titik P(-16 , 9) dibuat garis singgung pada ellips $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. Tentukan jarak dari titik P ke garis yang menghubungkan titik-titik singgung tersebut.

10. Tentukan persamaan ellips yang sumbu-sumbunya berimpit dengan sumbu-sumbu koordinat dan yang menyinggung dua garis $3x - 2y - 20 = 0$ dan $x + 6y - 20 = 0$.

BAB IV
HIPERBOLA

Definisi: Hiperbola adalah himpunan titik-titik yang selisih jaraknya terhadap dua titik tertentu tetap besarnya.

Berdasarkan definisi tersebut dapat dicari persamaan hiperbola sebagai berikut.



Misalkan titik-titik api $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ pada sumbu-x dan sumbu dari F_1F_2 adalah sumbu-y. Jika $|F_1F_2|$ = 2c maka $F_1(c\ ,\ 0)$ dan $F_2(-c\ ,\ 0)$.

Misalkan selisih jarak yang tetap tersebut adalah 2a, dengan $a < c$. Ambil T(x , y) sebarang titik dari himpunan yang dicari, maka dipenuhi $|TF_1| - |TF_2|$ = 2a

Berarti $\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ - $\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ = 2a

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Setelah kedua ruas dikuadratkan dan dijabarkan diperoleh

$$cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Jika kedua ruas dikuadratkan lagi diperoleh

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Karena $a < c$ maka $c^2 - a^2 > 0$ sehingga dapat dituliskan $c^2 - a^2 = b^2$ sehingga didapat:

$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

Karena T sebarang titik pada himpunan, maka setiap titik dari himpunan tersebut berlaku:

$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ atau $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

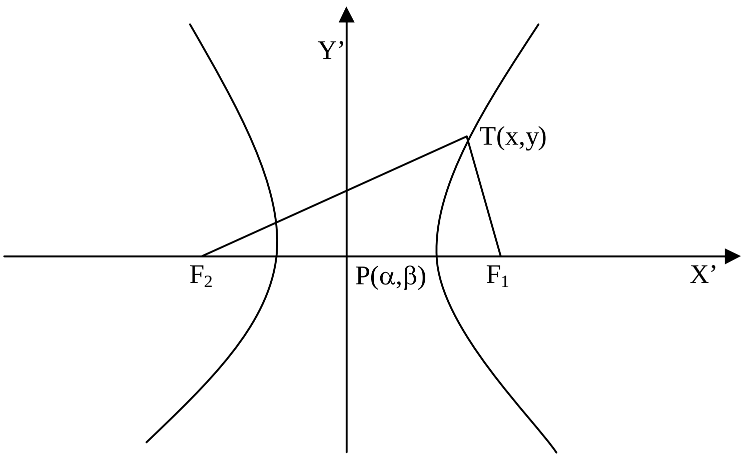
Persamaan diatas disebut persamaan hiperbola.

Titik O(0 , 0) sebagai titik pusat hiperbola.

Titik-titik F_1 dan F_2 disebut titik-titik api.

Sumbu x dan sumbu y disebut sumbu-sumbu simetri.

Karena titik titik potong hiperbola dengan sumbu x adalah nyata, maka sumbu x disebut sumbu nyata. Sedangkan titik potong hiperbola dengan sumbu y adalah khayal, sehingga sumbu y disebut sumbu khayal. Bilangan e = $\frac{c}{a}$ > 1 disebut eksentrisitas numerik.



Persamaan hiperbola yang pusatnya P(α , β) dan sumbu-sumbunya sejajar dengan sumbu-sumbu koordinat diperoleh $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$

Titik-titik potong hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dengan garis y = mx adalah

$$\left(\frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2m^2}}, \frac{mab}{\sqrt{b^2-a^2m^2}}\right) \text{ dan } \left(\frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2m^2}}, \frac{-mab}{\sqrt{b^2-a^2m^2}}\right)$$

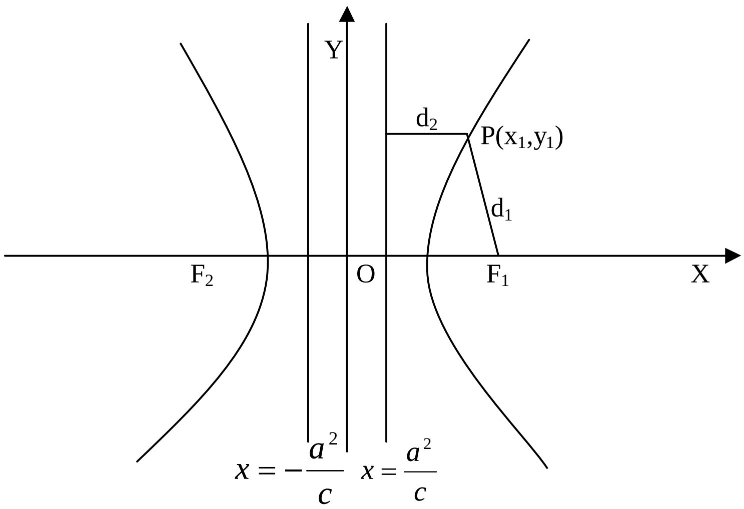
Jika $b^2 - a^2m^2 > 0$ maka ada dua titik potong yang berlainan

Jika $b^2 - a^2m^2 < 0$ maka tidak ada titik potong atau titik potongnya khayal

Jika $b^2 - a^2m^2 = 0$ maka titik potongnya di jauh tak terhingga.

Dalam hal jika m = $\pm \frac{b}{a}$ maka garis y = mx menyinggung hiperbola di jauh tak terhingga. Garis-garis y = $\pm \frac{b}{a}$x disebut asimtot-asimtot hiperbola.

Persamaan asimtot-asimtot dapat dinyatakan juga sebagai $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ dan $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$, sehingga susunan asimtotnya adalah $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$.



Definisi hiperbola yang lain adalah sebagai berikut: hiperbola adalah tempat kedudukan titik-titik yang perbandingan jaraknya terhadap suatu titik dan suatu garis tertentu tetap besarnya dan perbandingan ini lebih besar dari 1. Selanjutnya titik tersebut dinamakan titik api dan garisnya dinamakan garis arah (direktrik). Penjelasannya sebagai berikut.

Misalkan P(x_1 , y_1) sebarang titik pada hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Maka jarak P terhadap titik api F_1(c , 0) adalah d_1 = $\sqrt{(x_1-c)^2+y_1{}^2}$

Dan jarak P terhadap titik api F_2(-c , 0) adalah d_2 = $\sqrt{(x_1+c)^2+y_1{}^2}$

Berarti $d_2{}^2 - d_1{}^2 = 4cx_1$; sedangkan $d_2 - d_1 = 2a$ …….. (1)

Jadi $d_2 + d_1$ = $\frac{2cx_1}{a}$ ……….(2)

Dari (1) dan (2) diperoleh d_1 = $\frac{c}{a}\left(x_1-\frac{a^2}{c}\right)$ dan d_2 = $\frac{c}{a}\left(x_1+\frac{a^2}{c}\right)$

Selanjutnya pandang garis-garis x = $\pm\frac{a^2}{c}$

Maka d_1 = $\frac{c}{a}\left(x_1-\frac{a^2}{c}\right)$ = $\frac{c}{a}$. Jarak titik P ke garis x = $\frac{a^2}{c}$

Maka d_2 = $\frac{c}{a}\left(x_1+\frac{a^2}{c}\right)$ = $\frac{c}{a}$. Jarak titik P ke garis x = -$\frac{a^2}{c}$

Garis-garis x = $\pm\frac{a^2}{c}$ disebut garis-garis arah atau direktrik dari hiperbola.

Contoh

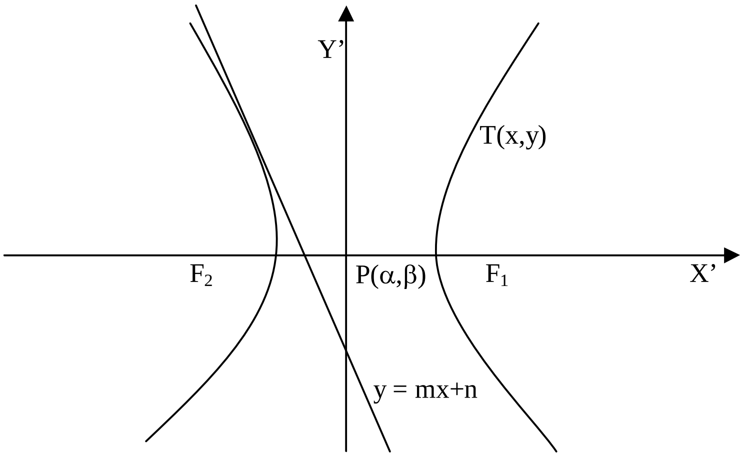
Carilah persamaan hiperbola, jika titik-titik apinya terletak pada sumbu x, simetris terhadap O dan persamaan asimtotnya y = $\pm\frac{4}{3}x$ sedangkan jarah antara kedua titik-titik apinya 20.

(jawab: $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$)

Contoh

Carilah persamaan hiperbola, jika titik-titik apinya terletak pada sumbu x, simetris terhadap O dan persamaan asimtotnya y = $\pm\frac{3}{4}x$ sedangkan jarak kedua garis arahnya $12\frac{4}{5}$.

jawab: $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$



Selanjutnya dapat dicari persamaan garis singgung pada hiperbola sebagaimana mencari persamaan garis singgung pada ellips.

Didapat bahwa persamaan garis singgung pada hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ dengan koefisien arah m adalah y = mx $\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$.

Jika persamaan hiperbola $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$, maka garis singgung dengan koefisien arah m, persamaannya y - $\beta = m(x-\alpha)\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$.

Persamaan garis singgung parabola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ di titik singgung (x_1 , y_1) adalah $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$.

Jika persamaan hiperbola $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$, maka persamaan garis singgung di titik (x_1 , y_1) adalah

$$\frac{(x_1-\alpha)(x-\alpha)}{a^2}-\frac{(y_1-\beta)(y-\beta)}{b^2}=1$$

Adapun sifat utama garis singgung adalah sebagai berikut: garis singgung pada suatu titik pada hiperbola membagi dua sama besar sudut-sudut antara garis-garis yang menghubungkan titik singgung dengan titik api.

Seperti pada ellips, terdapat dua garis singgung melalui satu titik T di luar ellips, demikian pula pada hiperbola.

Tanpa memperhatikan letak titik T(x_1 , y_1), persamaan $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$ disebut persamaan garis kutub dari T terhadap hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Jika T di luar hiperbola maka garis kutub menjadi tali busur singgung.

Jika T pada hiperbola maka garis kutub menjadi garis singgung.

Jika T di dalam hiperbola maka garis kutub berupa garis yang tidak memotong hiperbola.

Contoh

Tentukan persamaan garis singgung pada hiperbola $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64}=1$ yang sejajar garis 10x – 3y + 9 = 0.

(jawab: 3y = 10x $\pm$ 32)

Contoh

Dari titik C(1 , -10) dibuat garis singgung pada hiperbola $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{32}=1$. Tentukan persamaan garis yang menghubungkan kedua titik singgungnya.

(jawab: 10y = 32 – 4x)

Selanjutnya akan dicari syarat agar garis y = mx memotong garis lengkung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$.

Absis-absis titik potong dapat dicari sebagai berikut:

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{m^2x^2}{b^2} = -1$ atau $(b^2 - a^2m^2)x^2 = -a^2b^2$.

Berarti x = $\pm \frac{ab}{\sqrt{a^2m^2 - b^2}}$.

Jadi garis y = mx dan garis lengkung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ akan

(i) berpotongan di dua titik jika $a^2m^2 - b^2 > 0$ atau m > $\frac{b}{a}$ atau m < -$\frac{b}{a}$

(ii) tidak berpotongan jika $a^2m^2 - b^2 < 0$ atau -$\frac{b}{a}$ < m < $\frac{b}{a}$

(iii) menyinggung di jauh tak hingga jika m = ± $\frac{b}{a}$.

Persamaan $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ adalah persamaan suatu hiperbola yang tidak memotong sumbu x tetapi memotong sumbu y di titik-titik (0 , b) dan (0 , -b). Berarti sumbu x sumbu khayalnya. Sedangkan persamaan asimtot-asimtotnya adalah

y = $\frac{b}{a}x$ dan y = -$\frac{b}{a}x$

Titik-titik apinya adalah $F_1(0 , c)$ dan $F_2(0 , -c)$ dan garis-garis arahnya adalah

y = $\frac{b^2}{c}$ dan y = -$\frac{b^2}{c}$

Eksentrisitas numeriknya adalah e = $\frac{c}{b}$.

Hiperbola-hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dan $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ pada suatu susunan sumbu disebut hiperbola sekawan.

Jika suatu hiperbola a = b, maka hiperbola ini disebut juga hiperbola orthogonal.

Contoh

Tentukan persamaan hiperbola yang titik-titik apinyaterletak pada sumbu y dan simetris terhadap titik O yang memenuhi syarat bahwa jarak kedua garis arahnya $7\frac{1}{7}$ dan sumbu 2b = 10.

Jawab: $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{25}=-1$

Berikut ini adalah tempat kedudukan titik-titik yang memenuhi syarat-syarat tertentu.

1. Perhatikan persamaan hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ dan garis y = mx. Tempat kedudukan titik-titik tengah talibusur-talibusur hiperbola yang sejajar dengan garis y = mx adalah y = $\frac{b^2}{a^2m}x$; dan persamaan ini merupakan persamaan suatu garis tengah hiperbola.

   Garis-garis tengah y = mx dan y = $\frac{b^2}{a^2m}x$ disebut garis-garis tengah sekawan dan m_1 = m dan m_2 = $\frac{b^2}{a^2m}$ disebut arah-arah sekawan.
2. Persamaan tempat kedudukan titik-titik potong garis-garis singgung pada hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ yang tegak lurus sesamanya, yaitu $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$.

   Persamaan ini adalah persamaan lingkaran dengan pusat O(0 , 0) dan jari-jari $\sqrt{a^2-b^2}$. Selanjutnya lingkaran ini disebut *lingkaran orthoptis dari Monge*.
3. Persamaan tempat kedudukan titik-titik potong dari garis-garis singgung pada hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ dengan garis-garis yang tegak lurus padanya dan melalui titik-titik api yaitu $x^2 + y^2 = a^2$. Persamaan ini adalah persamaan

lingkaran dengan pusat O(0 , 0) dan jari-jari a. Selanjutnya lingkaran ini disebut *lingkaran titik kaki.*

Lingkaran orthoptis dari suatu hiperbola orthogonal berupa lingkaran titik dan garis-garis singgung pada hiperbola itu yang saling tegak lurus adalah asimtot-asimtotnya.

Misalkan titik $P_1(x_1 , y_1)$ dan $Q_1(-x , -y_1)$ ujung-ujung garis tengah hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Ujung-ujung garis tengah sekawannya dapat dicari sebagai berikut.

Persamaan garis singgung di $P_1(x_1 , y_1)$ pada hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ adalah $\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$.

Berarti gradien garis singgung di P_1 adalah $m_1 = \frac{b_2 x_1}{a^2 y_1}$

Sedangkan gradien P_1Q_1 adalah $m_2 = \frac{y_1}{x_1}$. Jadi $m_1 m_2 = \frac{b^2}{a^2}$.

Hal ini menunjukkan bahwa garis singgung di P_1 sejajar dengan garis tengah yang sekawan dengan garis tengah P_1Q_1.

Persamaan garis tengah yang sekawan dengan P_1Q_1 adalah $y = \frac{b_2 x_1}{a^2 y_1} x$.

Absis titik-titik potong garis ini dengan hiperbola dicari sebagai berikut.

$b^2x^2 - a^2\left(\frac{b_2 {x_1}^2}{a^4 {y_1}^2}\right)x^2 = a^2 b^2$ atau $(a^2{y_1}^2 - b^2{x_1}^2)x^2 = a^2{y_1}^2$. Karena $P_1(x_1 , y_1)$ pada hiperbola maka didapat $x^2 = \frac{a^2 {y_1}^2}{-a^2 b^2} = \frac{-{y_1}^2}{b^2}$ *atau* $x = \pm \frac{a}{b} y_1 i$.

Berarti titik-titik potongnya khayal yaitu $\left(\frac{a}{b} y_1 i, \frac{b}{a} x_1 i\right)$ *dan* $\left(\frac{-a}{b} y_1 i, \frac{-b}{a} x_1 i\right)$.

Akan tetapi dapat diperiksa bahwa $P_2\left(\frac{a}{b}y_1 i, \frac{b}{a}x_1 i\right)$ dan $Q_2\left(\frac{-a}{b}y_1, \frac{-b}{a}x_1\right)$ terletak pada hiperbola sekawannya $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$.

Jika suatu garis tengah tidak memotong hiperbola, maka yang dimaksud dengan ujung-ujungnya adalah titik-titik potongnya dengan hiperbola sekawannya.

Misalkan $OP_1 = a_1$ dan $OP_2 = a_2$. Maka diperoleh

$\overline{OP_1}^2 = a_1^2 = x_1^2 + y_1^2$ dan

$$\overline{OP_2}^2 = b_1^2 = \frac{a^2}{b^2}y_1^2 + \frac{b^2}{a^2}x_1^2$$

Berarti $a_1^2 - b_1^2 = \dfrac{b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2}{b^2} + \dfrac{a^2 y_1^2 - b^2 x_1^2}{a^2}$

$= a^2 - b^2$

Jadi $4a_1^2 - 4b_1^2 = 4a^2 - 4b^2$.

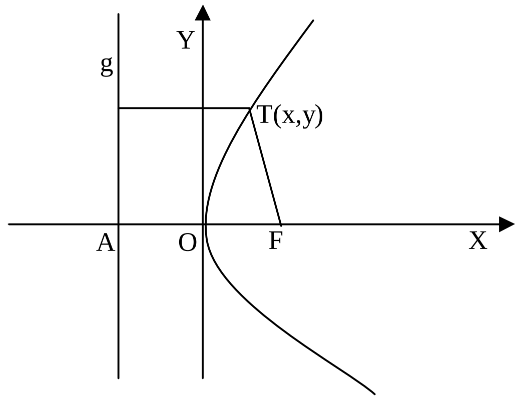
Soal-soal

1. Titik A(-3 , -5) terletak pada hiperbola yang titik apinya F(-2 , -3) dan garis arah yang bersesuaian dengan titik api ini adalah x + 1 = 0. Tentukan persamaan hiperbola yang memenuhi persyaratan diatas.
2. Tentukan nilai p agar garis $y = \frac{5}{2}x + p$ menyinggung hiperbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$.
3. Tentukan persamaan garis singgung pada hiperbola $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ yang tegak lurus garis $4x + 3y - 7 = 0$.

4. Tentukan koordinat titik M pada hiperbola $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{18} = 1$ yang terdekat ke garis 3x + 2y + 1 = 0.
5. Garis 2x – y – 4 = 0 menyinggung hiperbola yang titik-titik apinya $F_1(-3\ ,\ 0)$ dan $F_2(3\ ,\ 0)$. Tentukan persamaan hiperbola tersebut.
6. Tentukan luas daerah segitiga yang dibentuk oleh asimtot-asimtot hiperbola $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ dan garis 9x + 2y – 24 = 0.
7. Titik-titik api suatu hiperbola berimpit dengan titik-titik api ellips $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Jika eksentrisitas numerik e = 2, maka tentukan persamaan hiperbola tersebut.
8. Tentukan persamaan hiperbola yang titik-titik apinya pada puncak-puncak ellips $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ dan garis-garis arahnya melalui titik-titik api dari ellips tersebut.
9. Tentukan persamaan hiperbola yang sumbu-sumbunya berimpit dengan sumbu koordinat dan menyinggung dua garis 5x – 6y – 16 = 0 dan 13x – 10y – 48 = 0.
10. Tentukan persamaan tali busur dari hiperbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$ yang dibagi dua oleh titik B(6 , 2).

BAB V
PARABOLA

Definisi: Parabola adalah himpunan titik-titik yang berjarak sama dari suatu titik dan suatu garis tertentu. Berdasarkan definisi ini dapat ditentukan persamaan parabola sebagai berikut.



Misalkan titik yang dimaksud adalah F dan garis yang dimaksud adalah garis g; perpotongan garis g dengan sumbu x adalah A; sumbu y dibuat melalui titik tengah AF dan tegak lurus sumbu x. Misalkan jarak $|AF| = p$. Maka $F\left(\frac{1}{2}p,0)\right)$;

dan persamaan garis g adalah x = -$\frac{1}{2}p$; dan T(x , y) sebarang titik pada parabola,

maka berlaku $|TF|$ = jarak T ke garis g atau

$$\sqrt{(x-\frac{1}{2}p)^2+y^2} = x + \frac{1}{2}p$$

Setelah kedua ruas dikuadratkan dan dijabarkan diperoleh y^2 = 2px.

Persamaan ini disebut dengan persamaan puncak parabola

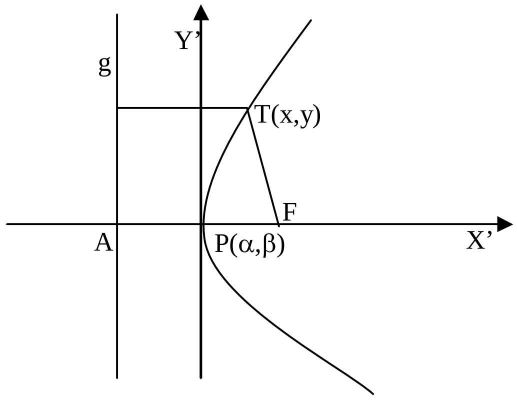
Titik F disebut titik api.

Titik O disebut puncak parabola

Garis x = -$\frac{1}{2}$ p disebut garis arah atau direktrik

Sumbu x merupakan sumbu simetri dari parabola p dan disebut parameter parabola

Berdasarkan definisi parabola, eksentrisitas parabola adalah e = 1.



Dengan menggunakan translasi susunan sumbu, dapat ditentukan bahwa persamaan parabola yang puncaknya P(α , β) dan sumbu simetrinya sejajar sumbu x adalah

$(y - \beta)^2 = 2p(x - \alpha)$.

Contoh

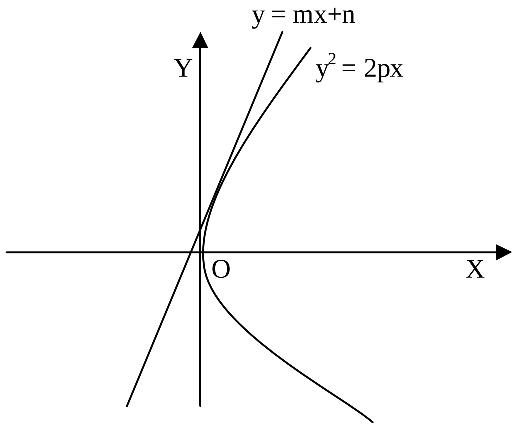
Tentukan persamaan parabola yang puncaknya di O, sumbu simetrinya berimpit dengan sumbu x dan parabolanya terletak di setengah bidang bagian kiri dan melalui titik (-1 , 2).

Jawab: $y^2 = -4x$.

Contoh

Tentukan persamaan parabola yang titik apinya F(7 , 2) dan persamaan garis arahnya $x – 5 = 0$.

Jawab: $y^2 – 4y – 4x + 28 = 0$.

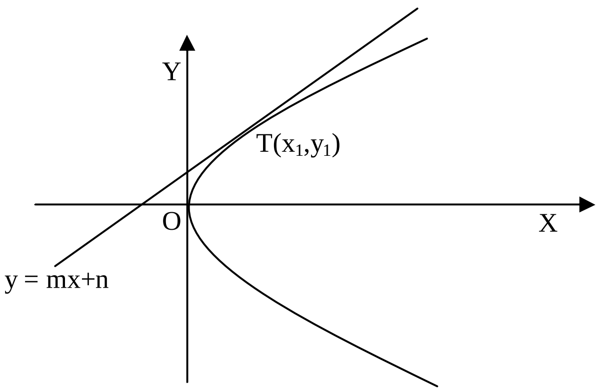


Persamaan garis singgung pada parabola dengan gradien m dapat ditentukan sebagai berikut. Misalkan persamaan parabolanya adalah $y^2 = 2px$ dan persamaan garis yang gradiennya m adalah $y = mx + n$, dengan n parameter. Absis titik-titik potong garis dan parabola tersebut diperoleh dari persamaan $(mx + n)^2 = 2px$, atau dari persamaan $m^2x^2 + (2mn – 2p)x + n^2 = 0$. Garis akan menyinggung parabola jika kedua titik potongnya berimpit atau absis kedua titik potongnya sama. Berarti harus terpenuhi persamaan $4(mn – p)^2 – 4m^2n^2 = 0$.

Dari persamaan diatas akhirnya diperoleh $n = \frac{p}{2m}$.

Jadi persamaan garis singgung pada parabola $y^2 = 2px$ dengan gradien m adalah $y = mx + \frac{p}{2m}$.

Jika persamaan parabolanya $(y - \beta)^2 = 2p(x - \alpha)$, maka persamaan garis singgung dengan gradien m adalah $(y - \beta) = m(x - \alpha) + \frac{p}{2m}$.



Persamaan garis singgung pada parabola $y^2 = 2px$ di titik singgung $T(x_1 , y_1)$ dapat ditentukan sebagai berikut. Misalkan Persamaan garis singgung nya adalah $y = mx + n$. Maka absis titik singgungnya dapat diperoleh dari persamaan $(mx + n)^2 = 2px$, atau $m^2x^2 + (2mn – 2p)x + n^2 = 0$.

Karena hanya ada satu titik singgung maka absisnya adalah

$$x_1 = \frac{-(2mn - 2p)}{2m^2} = \frac{p - mn}{m^2} \quad \text{.............} \text{(i)}$$

dan ordinatnya adalah

$y_1 = m(\frac{p-mn}{m^2}) + n = \frac{p}{m}$ .... (ii)

Jadi gradien garis singgungnya adalah m = $\frac{p}{y_1}$.

Dari persamaan (i) dan (ii) dan $y_1^2 = 2px_1$, diperoleh n = $\frac{y_1}{2}$.

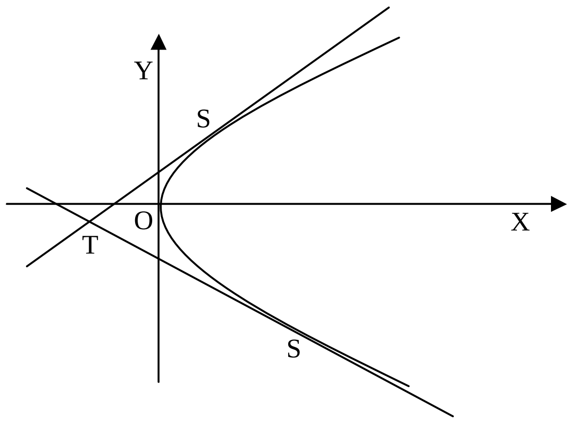
Jadi persamaan garis singgung pada parabola $y^2 = 2px$ di $T(x_1 , y_1)$ adalah

Y = $\frac{p}{y_1}x + \frac{y_1}{2}$ *atau* $y_1 y = px + \frac{y_1^2}{2}$ atau $y_1y = p(x + x_1)$.

Jika persamaan parabolanya $(y - \beta)^2 = 2p(x - \alpha)$, maka persamaan garis singgung di $T(x_1 , y_1)$ adalah $(y_1 - \beta)(y - \beta) = p(x + x_1 - 2\alpha)$.

Karena gradien garis singgung di $T(x_1 , y_1)$ adalah $\frac{p}{y_1}$ maka gradien garis normalnya adalah $-\frac{y_1}{p}$. Jadi persamaan garis normal di $T(x_1 , y_1)$ adalah

$y - y_1 = \frac{-y_1}{p}(x - x_1)$.



Persamaan garis singgung pada parabola $y^2 = 2px$ yang melalui titik $T(x_1 , y_1)$ di luar parabola dapat ditentukan sebagai berikut. Misalkan titik singgungnya $S(x_o , y_o)$. Maka persamaan garis singgung di S adalah $y_oy = p(x + x_o)$. Karena garis singgung ini melalui titik $T(x_1 , y_1)$ maka harus memenuhi $y_oy_1 = p(x_1 + x_o)$. Karena (x_o , y_o) pada parabola, maka $y_o^2 = 2px_o$. Akhirnya diperoleh persamaan garis singgung melalui T di luar parabola.

Contoh

Tentukan persamaan garis singgung yang melalui titik T(-2 , -3) pada parabola $y^2 = 8x$.

Jawab: $x + 2y + 8 = 0$ dan $2x - y + 1 = 0$.

Contoh

Tentukan titik A pada parabola $y^2 = 8x$ yang terdekat dengan garis $2x + 2y - 3 = 0$.

Jawab: (2 , -4).

Misalkan persamaan parabola $y^2 = 2px$. Titik-titik $S(x_1 , y_1)$ dan $T(x_2 , y_2)$ merupakan titik-titik singgung dari garis-garis singgung yang ditarik dari titik $P(x_o , y_o)$ di luar parabola.

Persamaan garis singgung di S dan di T berturut-turut

$y_1y = p(x + x_1)$ dan $y_2y = p(x + x_2)$.

Karena garis-garis singgung tersebut melalui P maka berlaku

$y_1y_o = p(x_o + x_1)$ dan $y_2y_o = p(x_o + x_2)$.

Ini berarti titik-titik S dan T memenuhi persamaan

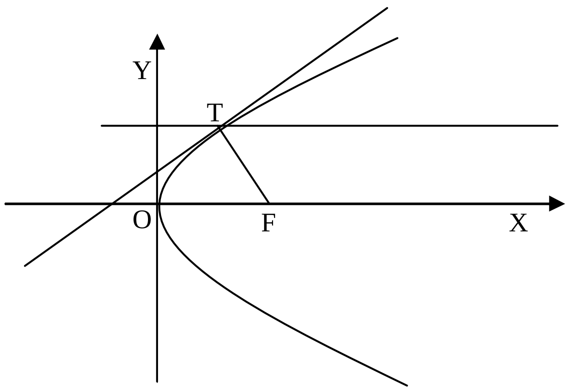
$Y_oy = p(x + x_o)$.

Persamaan ini disebut persamaan garis kutub dari P terhadap parabola $y^2 = 2px$.

Jika P pada parabola maka garis kutub menjadi garis singgung.

Jika P di luar parabola maka garis kutub menjadi tali busur singgung.

Jika P di dalam parabola maka garis kutub tidak memotong parabola.



Adapun sifat utama garis singgung adalah sebagai berikut: garis singgung di suatu titik pada parabola membagi dua sama besar sudut antara garis yang menghubungkan titik singgung dengan titik api dan garis yang melalui titik singgung sejajar dengan sumbu x. (buktikan).

Berikut ini akan disajikan beberapa tempat kedudukan titik yang memenuhi syarat tertentu.

(1) Tempat kedudukan titik-titik tengah talibusur-talibusur yang sejajar dengan garis yang gradiennya m adalah y = $\frac{p}{m}$.

(2) Tempat kedudukan titik potong garis-garis singgung pada parabola yang tegak lurus sesamanya adalah x = - $\frac{1}{2}$p (persamaan garis arah parabola atau garis *orthoptis* dari Monge).

(3) Tempat kedudukan titik-titik potong garis-garis yang melalui titik api dan tegak lurus garis-garis singgung pada parabola adalah x = 0 atau sumbu y (garis titik kaki).

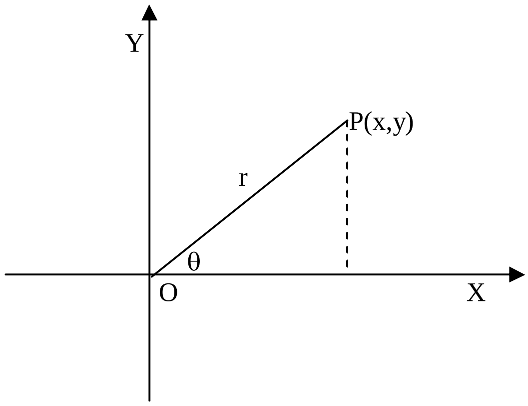
Soal-soal

1. Tentukan persamaan parabola yang simetris terhadap OX, puncaknya di titik asal, dan melalui titik A(9 , 6).
2. Tentukan persamaan parabola yang puncaknya di O, terletak di tengah-tengah bidang atas, simetris terhadap OY, dan parameter p = $\frac{1}{4}$.
3. Dari titik api parabola y^2 = 12x dipancarkan sinar yang membentuk sudut lancip α (tg α = $\frac{3}{4}$) dengan sumbu x positif. Tentukan persamaan garis yang dilalui sinar pantul tersebut.
4. Tentukan persamaan garis singgung pada parabola y^2 = 6x yang tegak lurus garis y = $\frac{1}{3}$x + 2.

5. Dari titik A(-1 , 2) dibuat garis-garis singgung pada parabola $y^2 = 10x$. Tentukan persamaan garis yang menghubungkan titik-titik singgungnya.
6. Tentukan persamaan parabola yang titik apinya F(4 , 3) dan garis arahnya $y + 1 = 0$.
7. Tentukan titik-titik pada parabola yang jaraknya 13 dari titik api parabola tersebut.
8. Tentukan titik pada parabola $y^2 = 64x$ yang terdekat dengan garis $4x + 3y – 14 = 0$.
9. Dari titik P(-3 , 12) dibuat garis singgung pada parabola $y^2 = 10x$. Tentukan jarak titik P ke garis yang menghubungkan titik-titik singgung tersebut.
10. Tentukan persamaan parabola yang puncaknya di A(-2 , -1) dan persamaan garis arahnya $x + 2y – 1 = 0$.

BAB VI
KOORDINAT DAN PERSAMAAN KUTUB

Sebuah titik P (selain titik kutub/titik asal) dinyatakan kedudukan oleh titik O ke P dan sudut antara garis OP dan sumbu kutub. Apabila r adalah jarak antara titik O dan titik P; sedangkan θ adalah salah satu sudut antara OP dan sumbu kutub, maka (r , θ) adalah sepasang koordinat kutub dari titik P dan ditulis P(r , θ). Selanjutnya r disebut jari-jari penunjuk dari P atau radius vektor dari P, sedangkan θ disebut argumen dari P atau sudut kutub dari P.



Seperti halnya dengan sistem koordinat kartesius siku-siku, dapat disusun persamaan kartesius dengan peubah-peubah x dan y; maka dengan sistem koordinat kutub, dapat pula disusun persamaan kutub dengan peubah-peubah r dan θ; misalnya $r = 8 \sin \theta$ dan $r = \dfrac{2}{1-\cos\theta}$.

Contoh

Gambarlah grafik persamaan kutub $r = 8 \sin \theta$.

Contoh

Gambarlah grafik dari $r = \dfrac{2}{1-\cos\theta}$.

Dalam sistem koordinat kutub, walaupun ada sepasang koordinat tertentu yang tidak memenuhi suatu persamaan, tetapi ini tidak perlu mengakibatkan bahwa titik yang bersangkutan tidak terletak pada grafik persamaan tersebut. Misalnya titik P(2 , $\frac{\pi}{2}$) terletak pada grafik dan memenuhi persamaan r = $\frac{2}{1-\cos\theta}$. Tetapi koordinat P dapat juga dinyatakan dengan P(-2 , $\frac{3\pi}{2}$) dan (-2 , $\frac{3\pi}{2}$) tidak memenuhi persamaan r = $\frac{2}{1-\cos\theta}$.

Hubungan koordinat kutub dan koordinat kartesius dapat diperoleh sebagai berikut.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\theta = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Contoh

Tentukan koordinat kartesius dari titik yang koordinat kutubnya adalah $\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$. Tentukan pula koordinat kutub dari titik yang koordinat kartesiusnya adalah $\left(-3, \sqrt{3}\right)$.

Contoh

Tunjukkan dengan jalan menuliskan dalam persamaan kartesius bahwa grafik persamaan r = sin θ adalah sebuah lingkaran; dan bahwa grafik persamaan r = $\frac{2}{1-\cos\theta}$ adalah sebuah parabola.

Soal-soal

1. Sketsa grafik persamaan kutub r = 6 cos θ. Berupa apakah grafiknya?
2. Sketsa grafik persamaan kutub r = $\frac{5}{\cos\theta}$. Berupa apakah grafiknya?
3. Ubahlah persamaan kartesius $(x – 2)^2 + y^2 = 4$ menjadi persamaan kutub.
4. Ubahlah persamaan kutub r = $\frac{1}{1+2\sin\theta}$ menjadi persamaan kartesius.

DAFTAR KEPUSTAKAAN

Moeharti Hadiwidjojo, *Ilmu Ukur Analitik Bidang,* Yogyakarta: FPMIPA-IKIP Yogyakarta, 1974.

Purcell, Edwin J (Penterjemah: Rawuh, Bana Kartasasmita), *Kalkulus Dan Geometri Analitis Jilid I,* Jakarta: Erlangga, 1984.

Thomas, George B., JR., *Calculus and Analytic Geometry,* Japan Publications Trading Company, Ltd, 1963.