PELABELAN *EDGE GRACEFUL*
PADA BEBERAPA GRAF TERHUBUNG

SKRIPSI

Oleh

Mochamad Ansori
NIM 061810101020

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2011

PELABELAN *EDGE GRACEFUL* PADA BEBERAPA GRAF TERHUBUNG

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1)
dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Mochamad Ansori
NIM 061810101020

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2011

PERSEMBAHAN

Dengan penuh rasa syukur kehadirat Allah SWT, sholawat serta salam kepada Nabi besar Muhammad SAW, skripsi ini kupersembahkan untuk:

1. Ayahanda Midin dan Alm. Ibunda Aminah yang telah mendoakan dan memberi kasih sayang serta pengorbanan selama ini;
2. Kakak Syamsul dan Kakak Zaenal yang telah memberikan dukungan dan semangat;
3. Guru-guru sejak taman tanak-kanak sampai terguruan tinggi, yang telah memberi ilmu, mendidik dan membimbing dengan penuh kesabaran;
4. Almamater Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember, SMU Negeri 4 Jember, SLTP Negeri 7 Jember, SD Negeri Gebang 3, dan TK Alhidayah III.

MOTTO

"Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan.
Maka apabila kamu telah selesai (dari suatu urusan), kerjakanlah
dengan sungguh-sungguh (urusan) yang lain,
dan hanya kepada Tuhanlah hendaknya kamu berharap"
(QS. Alam Nasrah: 6-8)

"Barang siapa yang menghendaki dunia, maka carilah dunia dengan ilmu.
Barang siapa menghendaki akhirat, maka carilah akhirat dengan ilmu.
Dan barang siapa menghendaki keduanya maka carilah keduanya dengan ilmu"
(Khutbatul Ali Rodliyallahu 'anhu)

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Mochamad Ansori

NIM : 061810101020

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa karya tulis ilmiah yang berjudul "Pelabelan *Edge Graceful* pada Beberapa Graf Terhubung" adalah benar-benar karya sendiri, kecuali jika disebutkan sumbernya dan belum pernah diajukan pada institusi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 25 Januari 2011

Yang menyatakan,

Mochamad Ansori

NIM 061810101020

SKRIPSI

PELABELAN *EDGE GRACEFUL* PADA BEBERAPA GRAF TERHUBUNG

Oleh

Mochamad Ansori
NIM 061810101020

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Kristiana Wijaya, S.Si, M.Si

Dosen Pembimbing Anggota : Kosala Dwidja Purnomo, S.Si, M.Si

PENGESAHAN

Skripsi berjudul "Pelabelan *Edge Graceful* pada Beberapa Graf Terhubung" telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji :

Ketua,	Sekretaris,
Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si. NIP 197408132000032004	Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si. NIP 196908281998021001
Anggota I,	Anggota II,
Kiswara Agung Santoso, S.Si., M.Kom. NIP 197209071998031003	Dian Anggraeni, S.Si. NIP 198202162006042002

Mengesahkan
Dekan,

Prof. Drs. Kusno, DEA., Ph.D.
NIP 196101081986021001

RINGKASAN

Pelabelan *Edge Graceful* pada Beberapa Graf Terhubung; Mochamad Ansori, 061810101020; 2011; 57 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Misal graf G dengan p titik dan q sisi. Pelabelan *edge graceful* pada graf G adalah pemberian nilai pada sisinya dengan bilangan bulat positif $\{1, 2, 3, ..., q\}$ sedemikian hingga titiknya mendapat label dari penjumlahan label sisi yang menempel pada titik tersebut dalam modulo p yang berbeda semua, yaitu $f(v) = \sum_{uv \in E} f(uv) (\text{mod } p)$ untuk setiap $v \in V$. Dengan demikian pelabelan titiknya memenuhi sifat *bijektif* dari himpunan $V(G)$ ke himpunan bilangan bulat tak negatif $\{0, 1, 2, ..., p\text{-}1\}$. Syarat perlu dari suatu graf G dengan p titik dan q sisi memenuhi pelabelan *edge graceful* adalah $\left[\frac{p(p-1)}{2} \equiv q(q+1)\right] (\text{mod } p)$. Sebuah graf G dikatakan *edge graceful* jika setiap sisi dan titik pada graf G dapat diberi label menurut aturan *edge graceful*.

Tujuan yang ingin dicapai adalah mengetahui apakah graf roda W_n, graf *superstar* $S_{m,3}$, graf *dragon* $D_{3,n}$, graf *grid* $P_4 \times P_n$, dan graf kincir angin $K_n^{(m)}$ merupakan graf *edge graceful*. Merumuskan pelabelan *edge graceful* secara umum pada kelas-kelas graf tersebut jika kelas-kelas graf tersebut merupakan graf *edge graceful*.

Langkah-langkah untuk mencapai tujuan diatas sebagai berikut. Langkah pertama, menyelidiki syarat perlu pelabelan *edge graceful* pada graf G dengan p titik dan q sisi. Jika memenuhi maka melanjutkan ke langkah kedua. Akan tetapi, jika syarat perlu pelabelan *edge graceful* tidak terpenuhi maka graf G tersebut bukan graf

edge graceful. Langkah kedua, memberi label setiap sisi pada graf G dengan himpunan bilangan bulat positif 1, 2, 3, ..., q yang berbeda semua. Langkah ketiga, memberi label pada setiap titik dengan cara menjumlahkan label sisi yang menempel pada titik tersebut, yaitu $f(v) = \sum_{uv \in E} f(uv) (\text{mod } p)$ untuk setiap $v \in V$. Langkah keempat, menyelidiki label titiknya, jika berbeda semua yaitu memenuhi sifat *bijektif* dari himpunan titik $V(G)$ ke himpunan bilangan bulat tak negatif {0, 1, 2, ..., p-1} maka graf G adalah graf *edge graceful* dan proses pelabelan selesai, tetapi jika ada label yang sama maka kembali ke langkah kedua. Jika proses melabeli sisi pada langkah kedua sudah dilakukan sebanyak $q!$ dengan label berbeda tetapi tidak ditemukan label titik yang berbeda semua dengan label 0, 1, ..., p-1 maka graf G bukan merupakan graf *edge graceful*. Langkah kelima, membentuk suatu perumusan secara umum untuk label sisi dan label titik yang didapat dari langkah tiga dan empat.

Hasil dari penelitian ini adalah sebagai berikut. Kelas graf yang tidak memenuhi syarat perlu pelabelan *edge graceful* yaitu graf roda W_n untuk $n \neq 3$, graf *grid* $P_4 \times P_n$ untuk $n \neq 3, 4$, graf *superstar* $S_{m,3}$ untuk m ganjil, graf *dragon* $D_{3,n}$ untuk n genap, dan graf kincir angin $K_n^{(m)}$ untuk setiap m dan n. Dengan demikian kelas-kelas graf tersebut bukan graf *edge graceful*. Kelas graf yang merupakan graf *edge graceful* yaitu graf roda W_3, graf *grid* $P_4 \times P_n$ untuk $n = 3, 4$, graf *superstar* $S_{m,3}$ untuk m genap, dan graf *dragon* $D_{3,n}$ untuk n ganjil.

PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Allah SWT atas segala rahmat, taufik, serta hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Pelabelan *Edge Graceful* pada Beberapa Graf Terhubung". Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Drs. Kusno, DEA., Ph.D., selaku Dekan Fakultas MIPA, terima kasih atas saran serta motivasinya yang telah membimbing penulis selama masa kuliah;
2. Ibu Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si., dan Bapak Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing yang telah meluangkan waktu, tenaga, dan pikirannya dalam pembimbingan untuk terselesaikannya skripsi ini;
3. Bapak Kiswara Agung Santoso, S.Si., M.Kom., dan Ibu Dian Anggraeni, S.Si., selaku Dosen Penguji yang telah memberikan kritik dan saran dalam penyempurnaan skripsi ini;
4. Triningsih, S.Si., Aulia Nur Fadilah, S.Si., Mbak Riska, Mbak Niken, terima kasih atas semangat dan ilmunya yang telah membantu penulis mengatasi kesulitan selama proses penyelesaian skripsi ini;
5. Hanik, Reni, Inggi, dan semua teman-teman angkatan 2006 yang telah memberikan dukungan dan semangat selama ini;
6. semua pihak yang tidak bisa disebutkan satu persatu yang telah memberikan bantuan dan motivasi dalam penyelesaian skripsi ini.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Januari 2011 Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam perkembangan ilmu matematika saat ini, teori graf telah menjadi salah satu bidang ilmu dalam matematika yang paling banyak diminati dan banyak mengalami perkembangan. Salah satu topik yang menarik dan mendapat perhatian dalam teori graf adalah pelabelan graf. Menurut Gallian (2009) model-model yang ada pada pelabelan graf berguna untuk aplikasi yang luas, seperti dalam masalah dekomposisi graf, kriptografi, teori koding, kristalografi sinar-x, radar, sistem alamat jaringan komunikasi, dan desain sirkuit.

Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sadlàčk (1964), kemudian Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970). Pelabelan graf merupakan fungsi dari himpunan titik atau himpunan sisi graf ke himpunan bilangan bulat yang memiliki aturan tertentu. Pelabelan graf ada beberapa macam, yaitu pelabelan titik, pelabelan sisi, serta pelabelan titik dan sisi (pelabelan total). Pada skripsi ini pelabelan graf yang dibahas adalah pelabelan sisi yaitu pelabelan e*dge graceful*. Pada tahun 1985, *Lo* memperkenalkan pelabelan e*dge graceful* pada graf G dengan p titik dan q sisi yang dapat diartikan sebagai pemberian nilai pada sisi-sisinya dengan bilangan bulat positif $\{1, 2, ..., q\}$ sedemikian hingga titiknya mendapat label dari penjumlahan sisi yang menempel pada titik tersebut dalam modulo p yang berbeda semua. Dengan demikian pelabelan titiknya memenuhi sifat *bijektif* dari himpunan titiknya ke himpunan bilangan bulat tak negatif $\{0, 1, 2, ..., p\text{-}1\}$.

Beberapa penelitian telah dilakukan untuk pelabelan e*dge graceful* pada beberapa kelas graf. Pada tahun 2005, Alifah telah mengkaji ulang pelabelan *edge graceful* pada graf lintasan P_n, graf sikel C_n, graf bintang S_n, dan graf *superstar* $S_{4,n}$ sehingga diperoleh hasil bahwa kelas-kelas graf yang merupakan graf *edge graceful* yaitu graf lintasan P_n untuk n ganjil, graf sikel C_n untuk n ganjil, graf bintang S_n

untuk n ganjil, dan graf *superstar* $S_{4,n}$ untuk setiap n. Selanjutnya, Kasumasari (2009) mengkaji ulang pelabelan *edge graceful* pada graf lengkap K_n, graf matahari M_n, graf *double star* DS_n, graf kipas F_n, graf buku B_n, graf *friendship* f_n, graf bipartit lengkap $K_{m,n}$, graf bunga matahari SF_n, serta gabungan dari graf sikel dan graf lintasan ($C_n \cup P_3$). Hasil penelitian yang diperoleh, kelas-kelas graf yang merupakan graf *edge graceful* yaitu graf lengkap K_n untuk n = 3, 4, 5, dan 7, graf kipas F_2, F_3, dan F_{11}, graf $(C_n \cup P_3)$ untuk n = 6, 8, 12, dan 14, dan graf bunga matahari SF_n untuk n = 4, 6, 8, dan 10.

Hal menarik yang dikaji dalam pelabelan e*dge graceful* ini, yaitu bagaimana mendapatkan label sisi dan titik yang memenuhi sifat *bijektif* dan berpola sehingga dapat dirumuskan. Hingga saat ini studi analisis mengenai pelabelan sisi pada graf untuk pelabelan e*dge graceful* pada graf baru belum banyak diteliti dan dari penelitian yang pernah dilakukan diatas diketahui bahwa tidak semua graf dapat dilabelkan dengan aturan pelabelan *edge graceful*. Oleh karena itu pada skripsi ini, penulis tertarik untuk meneliti mengenai pelabelan *edge graceful* pada beberapa kelas graf yang berbeda yaitu graf roda W_n, graf *superstar* $S_{m,n}$ khususnya untuk $n = 3$, graf *dragon* $D_{m,n}$ khususnya untuk $m = 3$, graf *grid* $P_m \times P_n$ khususnya untuk $m = 4$, dan graf kincir angin $K_n^{(m)}$ yang semuanya termasuk dalam graf terhubung.

1.2 Perumusan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah sebagai berikut.

a. Menunjukkan apakah graf roda W_n, graf *superstar* $S_{m,n}$ khususnya untuk $n = 3$, graf *dragon* $D_{m,n}$ khususnya untuk $m = 3$, graf *grid* $P_m \times P_n$ khususnya untuk $m = 4$, dan graf kincir angin $K_n^{(m)}$ merupakan graf *edge graceful* atau bukan.

b. Menentukan perumusan pelabelan *edge graceful* pada graf roda W_n, graf *superstar* $S_{m,n}$ khususnya untuk $n = 3$, graf *dragon* $D_{m,n}$ khususnya untuk $m = 3$, graf *grid* $P_m \times P_n$ khususnya untuk $m = 4$, dan graf kincir angin $K_n^{(m)}$ jika kelas-kelas graf tersebut merupakan graf *edge graceful*.

1.3 Tujuan

Tujuan dari skripsi ini antara lain:

a. Mengetahui apakah kelas-kelas graf yang telah disebutkan dalam perumusan masalah merupakan graf *edge graceful* atau bukan.
b. Merumuskan pelabelan *edge graceful* secara umum pada kelas-kelas graf yang telah disebutkan dalam perumusan masalah jika kelas-kelas graf tersebut merupakan graf *edge graceful*.

1.4 Manfaat

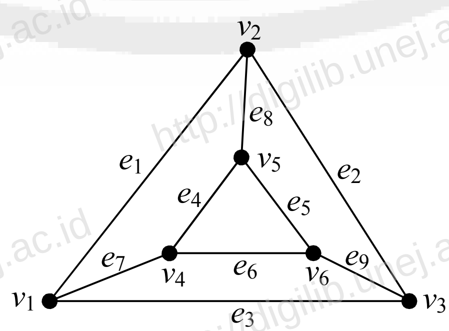
Manfaat yang diharapkan dalam penulisan skripsi ini adalah menambah pengetahuan baru dalam bidang teori graf yaitu pelabelan graf khususnya dalam pelabelan *edge graceful* pada graf roda W_n, graf *superstar* $S_{m,3}$, graf *dragon* $D_{3,n}$, graf *grid* $P_4 \times P_n$, dan graf kincir angin $K_n^{(m)}$.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dijelaskan definisi tentang konsep dasar graf, perbedaan graf terhubung dan graf tak terhubung, operasi pada graf yang diperlukan pada skripsi ini, kelas-kelas graf yang akan dibahas pada skripsi ini, dan pelabelan *edge graceful*. Definisi diambil dari Chartrand dan Lesniak (1996) kecuali jika disebutkan sumbernya.

2.1 Definisi dan Terminologi Dasar Graf

Sebuah graf G didefinisikan sebagai pasangan dua himpunan ($V(G)$, $E(G)$), yaitu himpunan tak kosong $V(G)$ yang anggotanya disebut titik (*vertex*) dan himpunan $E(G)$ yang anggotanya boleh kosong dari pasangan tak terurut $(u,v) = uv$ dari titik-titik u dan v di $V(G)$ yang disebut sisi (*edge*). Kardinalitas $p = |V(G)|$, yaitu banyaknya titik yang ada di G adalah orde dari G, sedangkan kardinalitas $q = |E(G)|$, yaitu banyaknya sisi yang ada di G adalah ukuran dari G. Sebagai ilustrasi, Graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$ dapat direpresentasikan seperti pada Gambar 2.1.

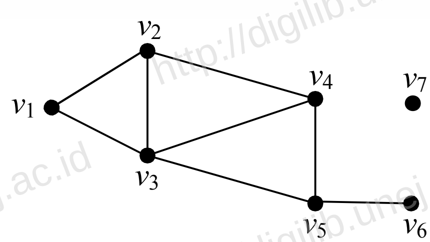


Gambar 2.1 Graf G

Dari Gambar 2.1 terlihat bahwa $e_1 = v_1v_2$, $e_2 = v_1v_3$, $e_3 = v_4v_6$, $e_4 = v_4v_5$, $e_5 = v_2v_5$, $e_6 = v_3v_6$, $e_7 = v_1v_4$, $e_8 = v_2v_5$, dan $e_9 = v_3v_6$. Jadi pada graf *G* kardinalitas himpunan titik dan sisinya adalah $|V(G)| = 6$ dan $|E(G)| = 9$.

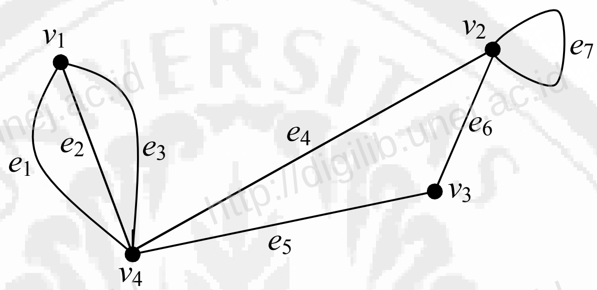
Misalkan titik *u* dan *v* adalah titik pada *G*, titik *u* dan *v* dikatakan bertetangga (*adjacent*) jika terdapat sisi $e = uv$ yang menghubungkan kedua titik tersebut. Sedangkan sisi $e = uv$ dikatakan menempel (*incident*) dengan titik *u* dan *v*. Pada Gambar 2.1 titik v_3 bertetangga dengan titik $v_1, v_2,$ dan v_6 sedangkan titik v_3 tidak bertetangga dengan titik v_5 dan sisi e_7 menempel pada titik v_1 dan v_4 tetapi tidak menempel pada titik v_3.

Derajat dari titik *v* di graf *G* adalah banyaknya sisi yang menempel dengan titik *v* di *G*, dan dapat dinotasikan sebagai $d(v)$ atau *deg* (*v*). Derajat masing-masing titik pada graf *G* pada Gambar 2.1 adalah $d(v_1) = d(v_2) = d(v_3) = d(v_4) = d(v_5) = d(v_6) = 3$. Sebuah titik *v* yang memiliki derajat nol (berarti *v* tidak bertetangga dengan semua titik lainnya di *G*) disebut titik terisolasi. Sebuah titik yang berderajat satu disebut titik ujung. Pada Gambar 2.2 titik v_6 disebut titik ujung dan titik v_7 disebut titik terisolasi. Jika setiap titik *v* di *G* mempunyai derajat yang sama, maka graf *G* dinamakan graf reguler. Gambar 2.1 adalah graf reguler dimana derajat setiap titiknya adalah 3, sedangkan Gambar 2.2 bukan graf reguler, karena ada titik di *G* yang mempunyai derajat tidak sama yaitu $d(v_1) = 2$ sedangkan $d(v_3) = 4$.



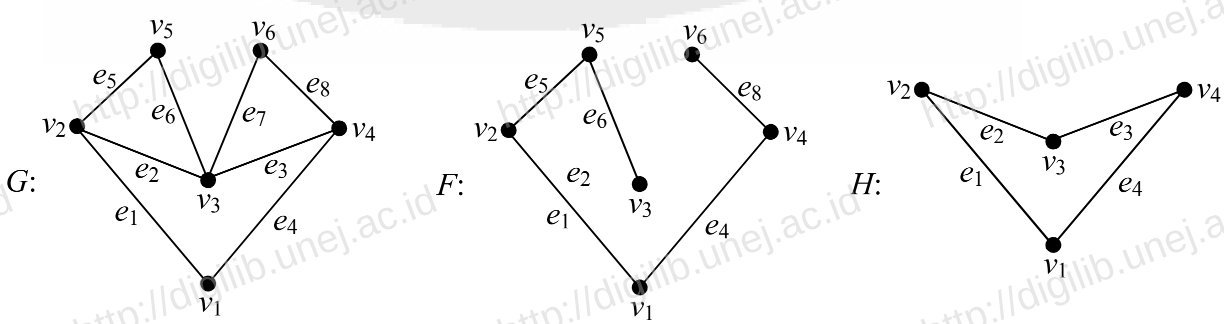
Gambar 2.2 Bukan graf reguler

Loop pada graf G adalah sisi yang menghubungkan sebuah titik v di G dengan dirinya sendiri. Sisi rangkap (*multiple edge*) terjadi apabila terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik yang sama di G. Sebuah graf G yang mengandung *loop* atau sisi rangkap (*multiple edge*) disebut graf tidak sederhana, sedangkan sebuah graf G yang tidak mengandung *loop* dan sisi rangkap (*multiple edge*) disebut graf sederhana. Untuk selanjutnya, graf yang dibahas dalam skripsi ini adalah graf sederhana. Gambar 2.3 adalah contoh yang menunjukkan e_7 adalah *loop* dan e_1, e_2, e_3 adalah sisi rangkap.



Gambar 2.3 Graf untuk mengilustrasikan *loop* dan sisi rangkap

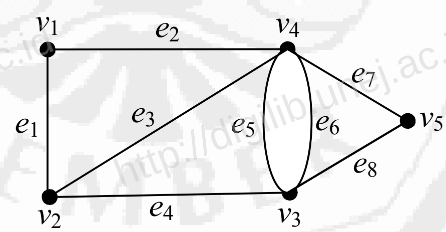
Misalkan $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$. G_1 dikatakan subgraf dari G_2, jika $V_1 \subseteq V_2$ (himpunan titik V_1 merupakan himpunan bagian dari himpunan titik V_2) dan $E_1 \subseteq E_2$ (himpunan sisi E_1 merupakan himpunan bagian dari himpunan sisi E_2). Untuk selanjutnya, G_1 subgraf dari G_2 dinotasikan dengan $G_1 \subseteq G_2$. Misalkan graf G dengan p titik dan q sisi, kemungkinan subgraf dari graf G sebanyak $2^q - 1$. Gambar 2.4 menunjukkan graf F dan H merupakan subgraf dari graf G.



Gambar 2.4 Graf G dengan beberapa subgrafnya

2.2 Graf Terhubung dan Graf Tak Terhubung

Sebuah jalan (*walk*) di graf G yang dinotasikan $W(G)$ adalah barisan hingga yang diawali dan diakhiri oleh titik, yang unsur – unsurnya bergantian antara titik dan sisi, yaitu $W(G) := v_1, e_1, v_2, e_2, ..., v_{k-1}, e_k, v_k \quad (k \geq 1)$ sedemikian hingga $e_i = v_i v_{i+1}$ adalah sisi untuk $i = 1,2,3,..., k-1$. Jalan $W(G)$ dikatakan tertutup jika $v_1 = v_k$ dan terbuka jika $v_1 \neq v_k$. Jejak (*trail*) adalah jalan $W(G)$ yang semua sisinya berbeda (sisinya tidak berulang). Bila pada *trail* titik awal sama dengan titik akhir ($v_1 = v_k$), maka *trail* itu disebut *trail* tertutup atau sirkuit. Jika pada suatu *trail* semua titiknya berbeda, maka *trail* itu disebut lintasan (*path*). Jika pada *path* titik awal sama dengan titik akhir ($v_1 = v_k$), maka *path* itu disebut *path* tertutup atau sikel (*cycle*). Pada Gambar 2.5 diberikan contoh suatu graf G dengan $v_2, e_1, v_1, e_2, v_4, e_5, v_3, e_6, v_4, e_6, v_3, e_8, v_5$ adalah jalan, $v_1, e_2, v_4, e_3, v_2, e_4, v_3, e_5, v_4, e_7, v_5$ adalah jejak, $v_2, e_4, v_3, e_8, v_5, e_7, v_4, e_2, v_1$ adalah lintasan, $v_1, e_2, v_4, e_5, v_3, e_6, v_4, e_3, v_2, e_1, v_1$ adalah sirkuit, dan $v_4, e_7, v_5, e_8, v_3, e_4, v_2, e_3, v_4$ adalah sikel.



Gambar 2.5 Graf untuk mengilustrasikan jalan, jejak, lintasan, sirkuit, dan sikel

Graf $G = (V(G), E(G))$ dikatakan terhubung jika untuk setiap dua titik u, v berbeda di G, terdapat lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut. Sebaliknya, jika tidak demikian maka graf G dikatakan graf tak terhubung. Sebagai contoh, Gambar 2.5 adalah graf terhubung sedangkan Gambar 2.2 adalah graf tak terhubung karena untuk titik v_6 dan v_7 tidak ada lintasan yang menghubungkan.

2.3 Hasil Kali Kartesius Dua Graf

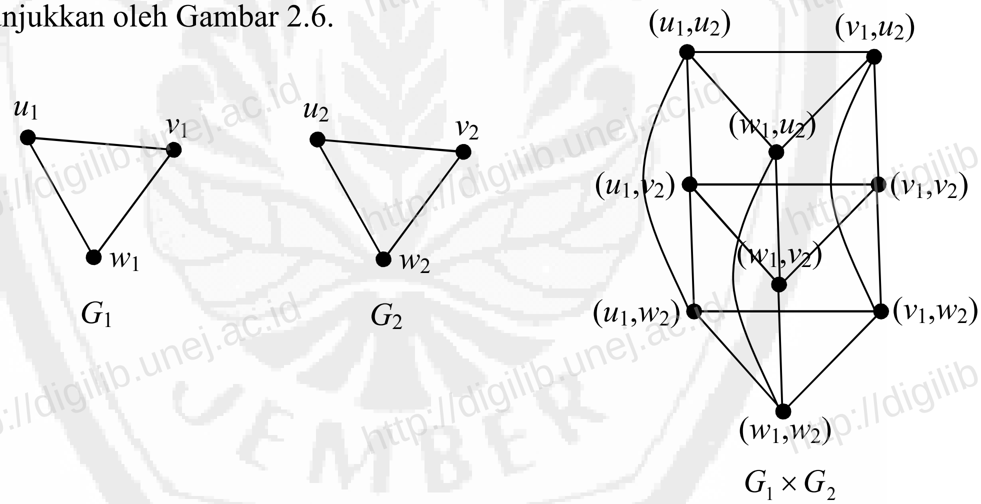
Berikut diberikan operasi pada graf yang diperlukan pada skripsi ini. Misalkan diberikan dua graf $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$. Graf hasil kali kartesius G antara G_1 dan G_2 yang dinotasikan dengan $G_1 \times G_2$ adalah suatu graf dengan $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$ dan untuk setiap titik $u = (u_1, u_2)$ dan $v = (v_1, v_2)$ di $V(G)$, u bertetangga dengan v di G jika

$$u_1 = v_1 \text{ dan } v_2 u_2 \in E(G_2)$$

atau

$$u_2 = v_2 \text{ dan } v_1 u_1 \in E(G_1).$$

Untuk memberikan gambaran tentang operasi hasil kali kartesius dari dua graf akan ditunjukkan oleh Gambar 2.6.



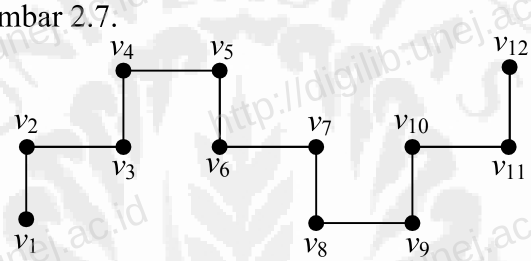
Gambar 2.6 Operasi hasil kali kartesius dari dua graf

2.4 Klasifikasi Graf

Graf diklasifikasikan dalam beberapa kelas. Dalam skripsi ini, kelas graf yang akan dibahas yaitu graf roda W_n, graf *superstar* $S_{m,3}$, graf *dragon* $D_{3,n}$, graf *grid* $P_4 \times P_n$, dan graf kincir angin $K_n^{(m)}$ yang semuanya merupakan graf sederhana yang terhubung. Berikut akan didefinisikan beberapa graf yaitu graf lintasan P_n, graf sikel

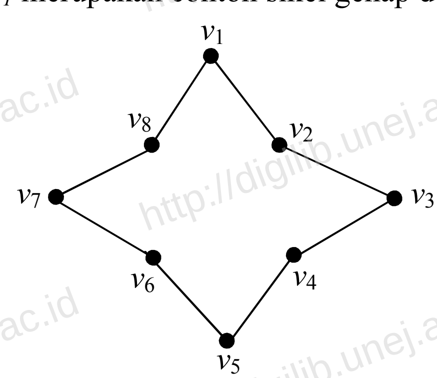
C_n, graf pohon T_n, graf bipartit, dan graf bintang S_n untuk mendefinisikan graf-graf yang akan dibahas.

Graf lintasan $P_n = (V,E)$ adalah graf berorde n dan titik-titiknya dapat diurutkan menjadi barisan $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}, v_n$ sedemikian sehingga $E = \{v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{n-1}v_n\}$. Dalam hal ini $v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}$ dinamakan titik internal, dan v_1 dan v_n dinamakan titik ujung lintasan. Panjang lintasan didefinisikan sebagai banyaknya sisi di lintasan (Taufik, 2008). Semua titik pada P_n yang berderajat 2 disebut titik intenal sedangkan kedua titik ujung lintasan berderajat 1. Dengan demikian graf lintasan P_n dengan $n \geq 2$ mempunyai n titik dan n-1 sisi. Contoh graf lintasan P_{12} ditunjukkan pada Gambar 2.7.



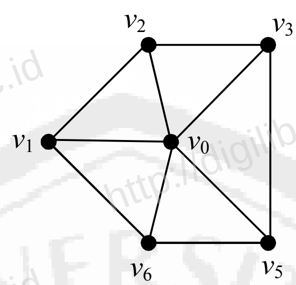
Gambar 2.7 Graf Lintasan P_{12}

Graf sikel (V,E) adalah graf sederhana berorde n yang titik-titiknya dapat diurutkan menjadi barisan $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}, v_1$ sedemikian sehingga $E = \{ v_1 v_2, v_2 v_3, \ldots, v_{n-1} v_n, v_n v_1\}$. Dengan dimikian setiap titik pada graf sikel berderajat dua. Ukuran atau panjang dari graf sikel dinyatakan dengan banyaknya titik atau banyaknya sisi pada sikel. Jika banyaknya sikel adalah genap maka disebut sikel genap, dan jika panjang sikel tersebut ganjil maka disebut sikel ganjil. Sikel dengan panjang n, untuk $n \geq 3$ dinotasikan dengan C_n (Zuchri, 2009). Pada Gambar 2.8, C_8 : $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_1$ merupakan contoh sikel genap dengan panjang 8.



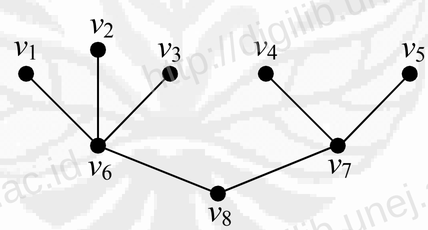
Gambar 2.8 Graf sikel C_8

Graf roda yang dinotasikan dengan W_n adalah graf yang dihasilkan dari graf sikel C_n dan satu titik yang bertetangga dengan semua titik di C_n yang disebut titik pusat (Gallian, 2009). Dengan demikian graf roda W_n dengan $n \geq 3$ mempunyai $n + 1$ titik dan $2n$ sisi. Gambar 2.9 adalah contoh dari graf roda W_5.



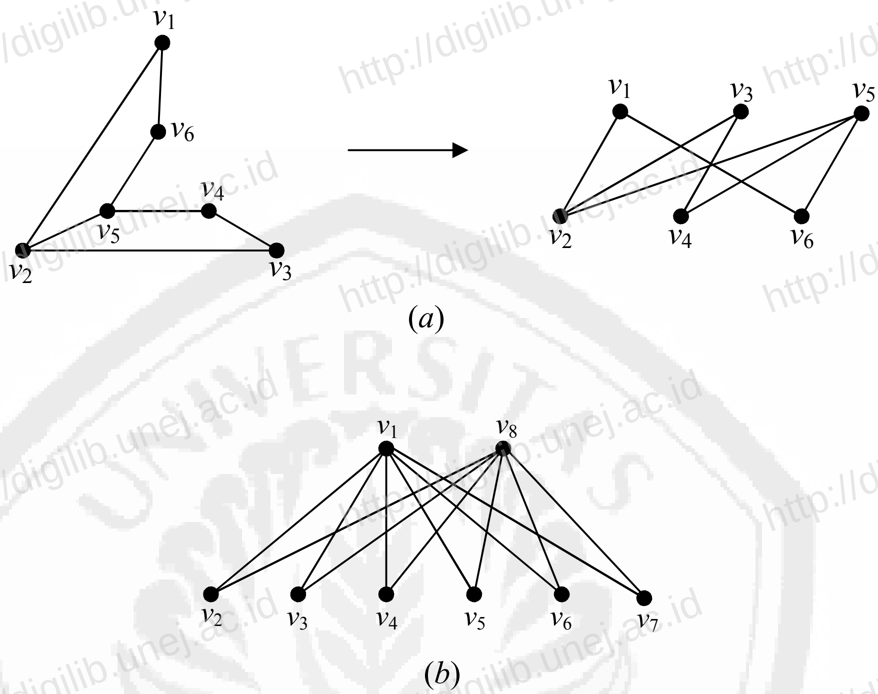
Gambar 2.9 Graf roda W_5

Graf pohon T_n adalah graf terhubung berorde n yang tidak memuat sikel sebagai subgrafnya. Titik-titik berderajat satu pada pohon dinamakan daun. Contoh graf pohon T_8 dapat dilihat pada Gambar 2.10.



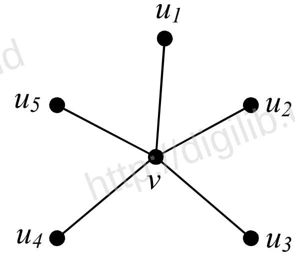
Gambar 2.10 Graf pohon T_8

Suatu graf G dikatakan bipartit jika himpunan titik $V(G)$ dapat dipartisi menjadi dua himpunan yaitu $V_1(G)$ dan $V_2(G)$ sehingga setiap sisi dari G menghubungkan sebuah titik di V_1 dan V_2. Jika setiap titik di V_1 bertetangga dengan setiap titik di V_2, maka graf G disebut graf bipartit lengkap. Jika $|V_1| = m$ dan $|V_2| = n$, maka graf bipartit lengkap dinotasikan dengan $K_{m,n}$. Gambar 2.11 (*a*) merupakan contoh graf bipartit karena himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi dua bagian dengan $V_1(G) = \{v_1, v_3, v_5\}$ dan $V_2(G) = \{v_2, v_4, v_6\}$, dan Gambar 2.11 (*b*) merupakan graf bipartit lengkap $K_{2,6}$ karena setiap titik di V_1 bertetangga dengan setiap titik di V_2 dimana $V_1(G)=\{v_1, v_8\}$ dan $V_2(G)=\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$.



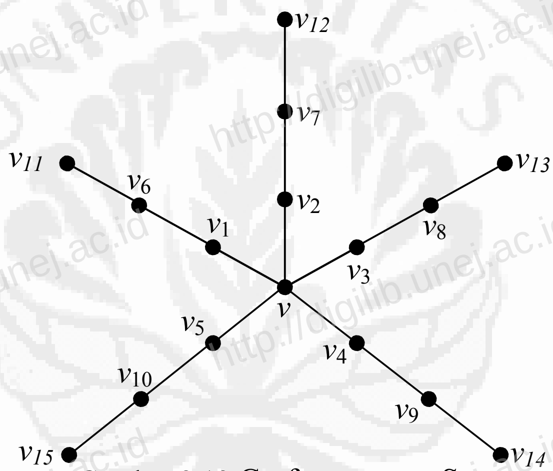
Gambar 2.11 (a) Graf bipartit dan (b) graf bipartit lengkap $K_{2,6}$

Graf bintang S_n adalah graf pohon berorde n+1 dan memiliki 1 titik berderajat n. Untuk mempermudah pembahasan, titik $v \in S_n$ berderajat n dinamakan pusat bintang, dan setiap $P_2 \subseteq S_n$ dinamakan sinar bintang (Taufik, 2008). Graf bintang S_n merupakan bentuk khusus dari graf bipartit lengkap $K_{1,n}$ atau $K_{n,1}$. Pada Gambar 2.12 dapat dilihat graf bintang S_5 dengan pusat bintang v_1 dan 5 buah sinar bintang, yakni $vu_1, vu_2, vu_3, vu_4, vu_5$.



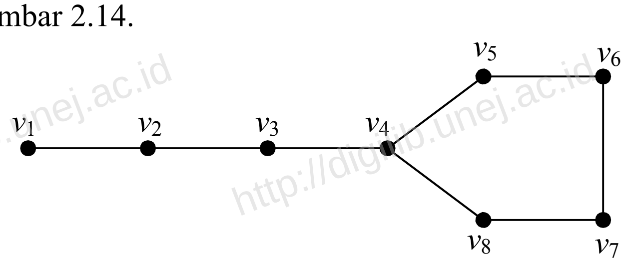
Gambar 2.12 Graf bintang S_5

Graf *superstar* adalah graf yang dibentuk dari gabungan m buah graf lintasan P_n dengan satu titik pusat yaitu titik v, dimana tepat satu titik yang berderajat satu dari m buah graf lintasan P_n dihubungkan ke titik v. Dengan demikian Graf *superstar* mempunyai satu titik berderajat m, m buah titik berderajat satu, dan $m(n-1)$ buah titik berderajat dua. Untuk selanjutnya graf *superstar* dinotasikan $S_{m,n}$ dengan m adalah banyaknya lintasan dan n adalah banyaknya titik di setiap lintasan, sehingga graf *superstar* $S_{m,n}$ mempunyai $mn+1$ titik dan mn sisi (Shiu, 1998). Contoh graf *superstar* $S_{5,3}$ dapat dilihat pada Gambar 2.13.



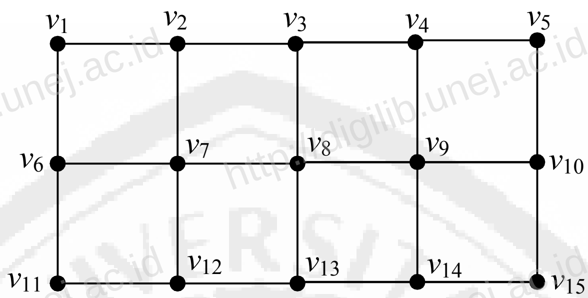
Gambar 2.13 Graf *superstar* $S_{5,3}$

Graf *dragon* $D_{m,n}$ adalah graf yang dibentuk dengan menempelkan salah satu titik ujung pada graf lintasan P_n untuk $n \geq 2$ dengan satu buah titik pada sebuah graf sikel C_m untuk $m \geq 3$ (Gallian, 2009). Dengan demikian graf *dragon* $D_{m,n}$ mempunyai $(m+n-1)$ titik dan $(m+n-1)$ sisi. Contoh graf *dragon* $D_{5,4}$ diberikan pada Gambar 2.14.



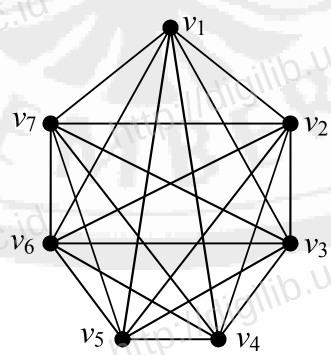
Gambar 2.14 Graf *dragon* $D_{5,4}$

Graf *grid* $P_m \times P_n$ adalah suatu graf yang terbentuk dari hasil kali kartesius dua graf lintasan yaitu graf lintasan P_m dan graf lintasan P_n. Graf *grid* $P_m \times P_n$ yang terdiri dari m baris titik mempunyai mn titik. Gambar 2.15 adalah graf *grid* $P_3 \times P_5$.



Gambar 2.15 Graf *grid* $P_3 \times P_5$

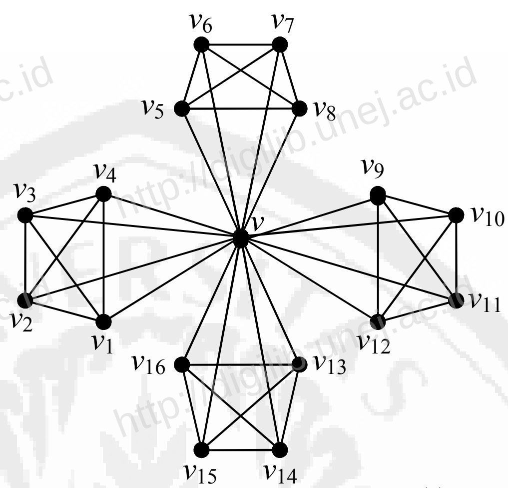
Graf lengkap K_n adalah sebuah graf sederhana yang setiap titiknya saling bertetangga dengan titik lainnya dan masing – masing titik berderajat $n-1$. Dengan demikian graf lengkap K_n mempunyai n titik dan $\frac{n(n-1)}{2}$ sisi. Gambar 2.16 merupakan contoh graf lengkap K_7.



Gambar 2.16 Graf lengkap K_7

Graf kincir angin $K_n^{(m)}$ dengan $m \geq 2$ dan $n > 3$ adalah graf yang dibentuk dari gabungan m buah graf lengkap K_n dengan satu titik pusat yaitu titik v (Weisstein, 1999).

Setiap graf lengkap K_n pada graf kincir angin $K_n^{(m)}$ mempunyai $n-1$ sisi yang menempel dengan titik pusat. Dengan demikian graf kincir angin $K_n^{(m)}$ mempunyai $mn-m+1$ titik dan $\frac{mn^2-mn}{2}$ sisi. Contoh graf kincir angin $K_5^{(4)}$ dapat dilihat pada Gambar 2.17.



Gambar 2.17 Graf kincir angin $K_5^{(4)}$

2.5 Fungsi

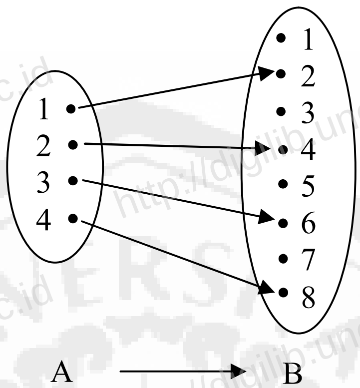
Suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu relasi yang memasangkan setiap elemen dari A secara tunggal dengan elemen pada B. Himpunan A dinamakan daerah asal (*domain*) dari fungsi f dan himpunan B dinamakan daerah kawan (*kodomain*) dari fungsi f, sedangkan himpunan dari semua peta di B dinamakan daerah hasil (*range*) dari fungsi f (Bartle dan Sherbert, 2000).

Dengan memperhatikan elemen-elemen pada masing-masing himpunan A dan B yang direlasikan dalam suatu fungsi, maka terdapat tiga sifat fungsi yaitu sebagai berikut.

a. Fungsi satu-satu (*injektif*)

Fungsi f dikatakan satu-satu (*injektif*) apabila fungsi f tersebut mempunyai sifat bahwa setiap elemen yang berbeda pada daerah asal memiliki peta yang berbeda pada daerah hasil (*range*) sehingga untuk $\forall p,q \in A$ jika $p \neq q$ maka $f(p) \neq f(q)$

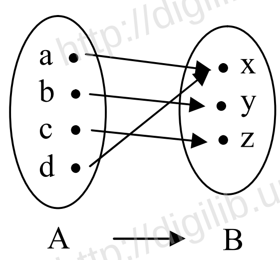
(Bartle dan Sherbert, 2000). Fungsi pada *A*={bilangan asli} yang didefinisikan dengan $f(x) = 2x$ adalah fungsi satu-satu (*injektif*), sebab kelipatan dua dari setiap dua bilangan yang berlainan di *A* adalah berlainan pula seperti yang diilustrasikan dengan diagram panah pada Gambar 2.18.



Gambar 2.18 Contoh fungsi satu-satu (*injektif*)

b. Fungsi onto (*surjektif*)

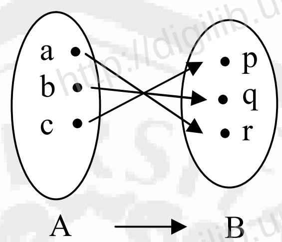
Fungsi f dikatakan onto (*surjektif*) apabila $f(A) = B$ yang berarti setiap elemen di *B* merupakan peta dari sekurang-kurangnya satu di *A*, atau dengan kata lain fungsi f dikatakan onto (*surjektif*) apabila fungsi f tersebut memiliki sifat bahwa setiap elemen dari daerah kawan (*kodomain*) memiliki prapeta dalam daerah asal (*domain*) (Bartle dan Sherbert, 2000). Misal $A = \{a, b, c, d\}$ dan $B = \{x, y, z\}$ dan fungsi $f: A \longrightarrow B$ yang didefinisikan dengan diagram panah pada Gambar 2.19 adalah suatu fungsi onto (*surjektif*) karena daerah hasil (*range*) f adalah sama dengan daerah kawan (*kodomain*) dari f (himpunan *B*).



Gambar 2.19 Contoh fungsi onto (*surjektif*)

c. Fungsi *bijektif*

Fungsi f dikatakan *bijektif* apabila fungsi tersebut memenuhi fungsi satu-satu (*injektif*) dan fungsi onto (*surjektif*) (Bartle dan Sherbert, 2000). Relasi dari $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{p, q, r\}$ yang didefinisikan sebagai diagram panah pada Gambar 2.20 adalah fungsi *bijektif*.



Gambar 2.20 Contoh fungsi *bijektif*

2.6 Pelabelan *Edge Graceful*

Pelabelan graf adalah fungsi yang mengaitkan himpunan titik atau sisi pada graf ke himpunan bilangan bulat yang disebut label. Pada Bab 1 telah disinggung beberapa jenis pelabelan yaitu pelabelan titik, pelabelan sisi dan pelabelan total. Pelabelan titik adalah pelabelan dengan *domain* himpunan titik. Pelabelan sisi adalah pelabelan dengan *domain* himpunan sisi. Pelabelan total adalah pelabelan dengan *domain* gabungan himpunan titik dan himpunan sisi. Salah satu pelabelan sisi yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah pelabelan *edge graceful*. Dalam Gallian (2009), disebutkan bahwa pelabelan *edge graceful* diperkenalkan oleh *Lo* pada tahun 1985. Definisi dan teorema tentang pelabelan *edge graceful* berikut ini diambil dari Gallian (2009).

Definisi 2.1

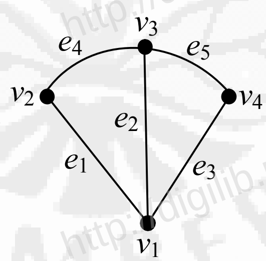
Misal G graf dengan p titik dan q sisi. Pelabelan *edge graceful* pada graf G adalah pemberian nilai pada sisinya dengan bilangan bulat positif $\{1, 2, 3, ..., q\}$ sedemikian hingga titiknya mendapat label dari penjumlahan label sisi yang menempel pada titik tersebut dalam modulo p yang berbeda semua, yaitu $f(v) = \sum_{uv \in E} f(uv) \pmod{p}$ untuk setiap $v \in V$. Dengan demikian pelabelan titiknya memenuhi sifat *bijektif* dari himpunan $V(G)$ ke himpunan bilangan bulat tak negatif $\{0, 1, 2, ..., p\text{-}1\}$. Sebuah graf G dikatakan *edge graceful* jika setiap sisi dan titik pada graf G dapat diberi label menurut aturan *edge graceful*.

Teorema 2.1

Syarat perlu dari suatu graf G dengan p titik dan q sisi memenuhi pelabelan edge graceful adalah $\left[\frac{p(p-1)}{2} \equiv q(q+1)\right] \pmod{p}$.

Bukti dari Teorema 2.1 dapat dilihat pada Alifah (2005).

Sebagai contoh, berikut akan diberikan pelabelan *edge graceful* pada graf kipas F_3 yang sebelumnya telah dikaji oleh Kasumasari (2009). Graf kipas F_3 mempunyai himpunan titik $V(F_3) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E(F_3) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$. Gambar 2.21 merupakan graf kipas F_3.



Gambar 2.21 Graf kipas F_3

Pada Gambar 2.20 graf kipas F_3 mempunyai 4 titik dan 5 sisi. Langkah-langkah yang diperlukan untuk melabeli graf kipas F_3 dengan aturan pelabelan *edge graceful* adalah sebagai berikut.

a. Menyelidiki apakah graf kipas F_3 dengan 4 titik dan 5 sisi memenuhi syarat perlu pelabelan *edge graceful* atau tidak. Menurut Teorema 2.1 didapatkan

1) Ruas kiri (titik)

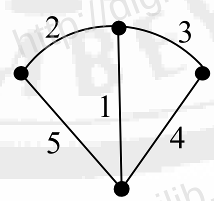
$$\frac{p(p-1)}{2} \bmod p = \frac{4(3)}{2} \pmod 4$$
$$= 6 \pmod 4$$
$$= 2$$

2) Ruas kanan (sisi)

$$q(q+1) \bmod p = 5(6) \pmod 4$$
$$= 30 \pmod 4$$
$$= 2$$

karena ruas kiri sama dengan ruas kanan, maka graf kipas F_3 memenuhi syarat perlu pelabelan *edge graceful*.

b. Karena graf kipas F_3 memenuhi syarat perlu pelabelan *edge graceful*, maka langkah selanjutnya memberi label pada setiap sisi pada graf kipas F_3 dengan himpunan bilangan bulat positif $\{1,2,3,4,5\}$ yang berbeda semua. Pada Gambar 2.20 sisi e_1 diberi label 5, sisi e_2 diberi label 1, sisi e_3 diberi label 4, sisi e_4 diberi label 2, dan sisi e_5 diberi label 3 sehingga seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.22.



Gambar 2.22 Label sisi cara satu pada graf kipas F_3

c. Memberi label pada setiap titik pada graf kipas F_3 dengan cara menjumlahkan label sisi yang menempel pada titik tersebut.

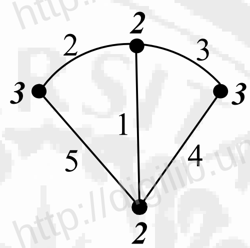
$$f(v_1) = \left(f(e_1) + f(e_2) + f(e_3)\right) \bmod 4 = (5+1+4) \bmod 4 = 2$$

$f(v_2) = (f(e_1) + f(e_4)) \bmod 4 = (5+2) \bmod 4 = 3$

$f(v_3) = (f(e_2) + f(e_4) + f(e_5)) \bmod 4 = (1+2+3) \bmod 4 = 2$

$f(v_4) = (f(e_3) + f(e_5)) \bmod 4 = (3+4) \bmod 4 = 3$

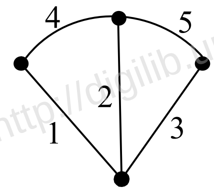
Dengan demikian pada Gambar 2.15 titik v_1 mendapat label 2, titik v_2 mendapat label 3, titik v_3 mendapat label 2, dan titik v_4 mendapat label 3 seperti pada Gambar 2.23 berikut.



Gambar 2.23 Label titik cara satu pada graf kipas F_3

d. Dari Gambar 2.23 terlihat pada setiap titik yang berbeda terdapat label yang sama yaitu $f(v_2) = f(v_4) = 3, f(v_1) = f(v_3) = 2$, sehingga label titiknya tidak memenuhi sifat *bijektif* dari himpunan titik $V(F_3)$ ke himpunan bilangan bulat tak negatif $\{0,1,2,3\}$.

e. Mengulangi langkah b yaitu memberi label kembali pada setiap sisi pada graf kipas F_3 dengan himpunan bilangan bulat positif $\{1,2,3,4,5\}$ yang berbeda semua dengan cara yang lain yaitu pada Gambar 2.21 sisi e_1 diberi label 1, sisi e_2 diberi label 2, sisi e_3 diberi label 3, sisi e_4 diberi label 4, dan sisi e_5 diberi label 5 sehingga seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.24.



Gambar 2.24 Label sisi cara dua pada graf kipas F_3

f. Memberi label pada setiap titik pada graf kipas F_3 dengan cara menjumlahkan label sisi yang menempel pada titik tersebut.

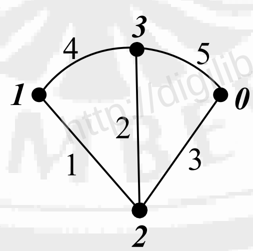
$f(v_1) = (f(e_1) + f(e_2) + f(e_3)) \bmod 4 = (1+2+3) \bmod 4 = 2$

$f(v_2) = (f(e_1) + f(e_4)) \bmod 4 = (1+4) \bmod 4 = 1$

$f(v_3) = (f(e_2) + f(e_4) + f(e_5)) \bmod 4 = (2+4+5) \bmod 4 = 3$

$f(v_4) = (f(e_3) + f(e_5)) \bmod 4 = (3+5) \bmod 4 = 0$

Dengan demikian pada Gambar 2.20 titik v_1 mendapat label 2, titik v_2 mendapat label 1, titik v_3 mendapat label 3, dan titik v_4 mendapat label 0 seperti Gambar 2.25 berikut.



Gambar 2.25 Label titik cara dua pada graf kipas F_3

g. Dari Gambar 2.25 terlihat setiap titik yang berbeda mendapat label yang berbeda yaitu $f(v_1) = 2, f(v_2) = 1, f(v_3) = 3,$ dan $f(v_4) = 0$. Dengan demikian label titiknya memenuhi sifat *bijektif* dari himpunan titik $V(F_3)$ ke himpunan bilangan bulat tak negatif $\{0,1,2,3\}$. Jadi, graf kipas F_3 merupakan graf *edge graceful*.

BAB 3. METODE PENELITIAN

Pada bab ini akan dijelaskan prosedur untuk mendapatkan pelabelan *edge graceful* pada graf roda W_n, graf bintang yang diperumum S_n^2, graf *dragon* $D_{3,n}$, graf *grid* $P_4 \times P_n$, dan graf kincir angin $K_n^{(m)}$ dengan aturan pelabelan *edge graceful*.

3.1 Metodologi

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

a. Metode deduktif aksiomatik

Metode ini dilakukan dengan menurunkan Teorema 2.1 (umum) ke graf yang akan diselidiki pelabelan *edge graceful*nya yaitu graf roda W_n, graf *superstar* $S_{m,3}$, graf *dragon* $D_{3,n}$, graf *grid* $P_4 \times P_n$, dan graf kincir angin $K_n^{(m)}$ (khusus) untuk mengetahui apakah syarat perlu pelabelan *edge graceful* pada graf-graf tersebut terpenuhi atau tidak.

b. Metode coba dan salah (*trial and error*)

Metode ini digunakan setelah menggunakan metode deduktif aksiomatik (jika syarat perlu terpenuhi), dimana metode ini mencoba kemungkinan-kemungkinan dalam melabeli sisi pada graf roda W_n, graf *superstar* $S_{m,3}$, graf *dragon* $D_{3,n}$, graf *grid* $P_4 \times P_n$, dan graf kincir angin $K_n^{(m)}$ sedemikian hingga titiknya mendapat label yang memenuhi aturan pelabelan *edge graceful*.

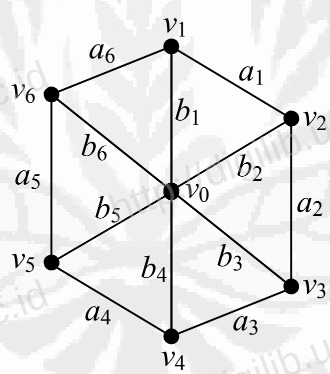
c. Metode pendeteksian pola (*pattern recognition*)

Apabila ditemukan label sisi dan titik yang memenuhi aturan pelabelan *edge graceful* pada graf roda W_n, graf *superstar* $S_{m,3}$, graf *dragon* $D_{3,n}$, graf *grid* $P_4 \times P_n$, dan graf kincir angin $K_n^{(m)}$ maka metode yang selanjutnya digunakan adalah metode pendeteksian pola untuk merumuskan pola label sisi sehingga nantinya didapatkan perumusan label titik pada graf roda W_n, graf *superstar* $S_{m,3}$, graf *dragon* $D_{3,n}$, graf *grid* $P_4 \times P_n$, dan graf kincir angin $K_n^{(m)}$ secara umum.

3.2 Rancangan Penelitian

3.2.1 Penotasian Titik dan Sisi pada Graf Roda W_n

Misalkan graf roda W_n mempunyai himpunan titik $V(W_n) = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ dengan $deg(v_0) = n$ dan $deg(v_i) = 3$ untuk $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ dan himpunan sisi $E(W_n) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ dengan $a_i = v_i v_{i+1}$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $a_n = v_n v_1$ dan $b_i = v_o v_i$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$. Pada Gambar 3.1 diberikan contoh penotasian titik dan sisi pada graf roda W_6.

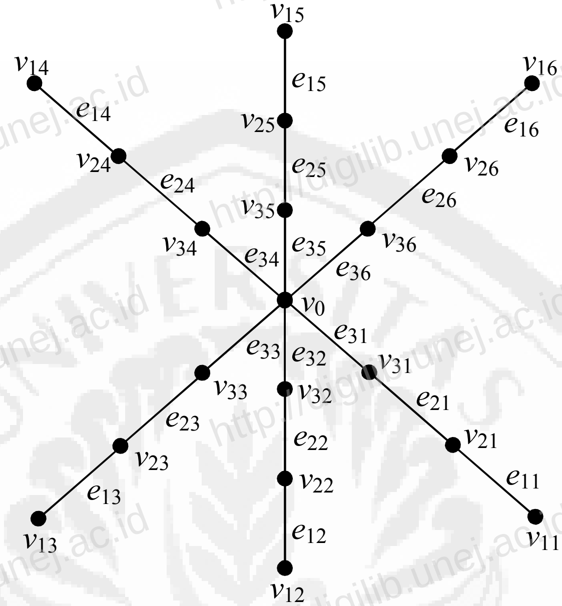


Gambar 3.1 Penotasian titik dan sisi pada graf roda W_6

3.2.2 Penotasian Titik dan Sisi pada Graf *Superstar* $S_{m,3}$

Misalkan graf bintang *superstar* $S_{m,3}$ mempunyai himpunan titik $V(S_{m,3}) = v_0, v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{ij}, \ldots, v_{3n}$ dimana v_{ij} adalah titik ke-i dari lintasan ke-j untuk $i = 1,2,3$ dan $j = 1,2,\ldots,n$ dengan $deg(v_{ij}) = 1$ untuk $i = 1,\ j = 1,2,\ldots,n$, $deg(v_{ij}) = 2$ untuk $i = 2,3,\ j = 1,2,\ldots,n$, dan $deg(v_0) = n$ dan himpunan sisi $E(S_{m,3}) = e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{ij}, \ldots, e_{3n}$ dimana e_{ij} adalah sisi ke-i dari lintasan ke-j untuk

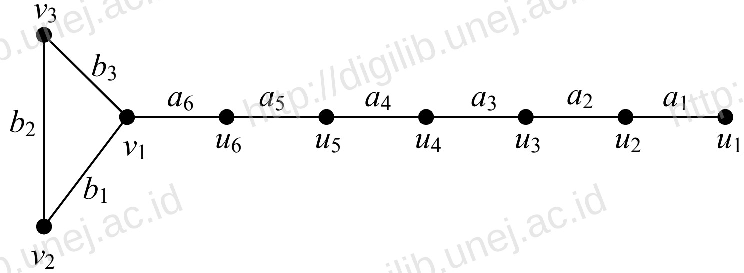
$i = 1,2,3$ dan $j = 1,2,...,n$ dengan $e_{ij} = v_{ij}v_{(i+1)j}$ untuk $i = 1,2,\ j = 1,2,...,n$ dan $e_{ij} = v_0 v_j$ untuk $i = 3,\ j = 1,2,...,n$. Sebagai ilustrasi, Gambar 3.2 menunjukkan penotasian titik dan sisi pada graf *superstar* $S_{6,3}$



Gambar 3.2 Penotasian titik dan sisi pada graf *superstar* $S_{6,3}$

3.2.3 Penotasian Titik dan Sisi pada Graf *Dragon* $D_{3,n}$

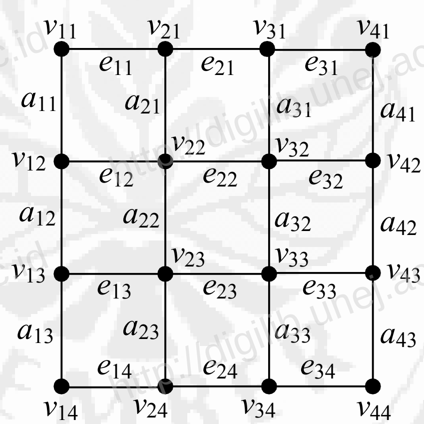
Misalkan graf *dragon* $D_{3,n}$ mempunyai himpunan titik $V(D_{3,n}) = \{u_1, u_2, ..., u_{n-1}, v_1, v_2, v_3\}$ dengan $deg(u_1) = 1$, $deg(u_i) = 2$ untuk $i = 2,3,...,n-1$, $deg(v_1) = 3$, dan $deg(v_i) = 2$ untuk $i = 2,3$ dan himpunan sisi $E(D_{3,n}) = \{a_1, a_2, ..., a_{n-1}, b_1, b_2, b_3\}$ dengan $a_i = u_i u_{i+1}$ untuk $i = 1,2,...,n-2$, $a_{n-1} = v_1 u_{n-1}$, $b_i = v_i v_{i+1}$ untuk $i = 1,2$, dan $b_3 = v_1 v_3$. Ilustrasi penotasian titik dan sisi pada graf *dragon* $D_{3,7}$ disajikan pada Gambar 3.3.



Gambar 3.3 Penotasian titik dan sisi pada graf *dragon* $D_{3,7}$

3.2.4 Penotasian Titik dan Sisi pada Graf *grid* $P_4 \times P_n$

Misalkan graf *grid* $P_4 \times P_n$ mempunyai himpunan titik $V(P_4 \times P_n) = \{v_{11}, v_{12}, ..., v_{ij}, ..., v_{n4}\}$ dimana v_{ij} adalah titik ke-*i* dari baris ke-*j* untuk $i = 1, 2, ..., n$ dan $j = 1, 2, 3, 4$ dengan $deg(v_{ij}) = 2$ untuk $i = 1, n$ dan $j = 1, 4$ $deg(v_{ij}) = 3$ untuk $i = 2, 3, ..., n-1$ dan $j = 1, 4$, $deg(v_{ij}) = 3$ untuk $i = 1, n$ dan $j = 2, 3$, dan $deg(v_{ij}) = 4$ untuk $i = 2, 3, ..., n-1$ dan $j = 2, 3$. Sedangkan himpunan sisi dari graf $P_4 \times P_n$ adalah $E(P_4 \times P_n) = \{e_{11}, e_{12}, ..., e_{ij}, ..., e_{(n-1)4}, a_{11}, a_{12}, ..., a_{ij}, ..., a_{n3}\}$ dengan $e_{ij} = v_{ij} v_{(i+1)j}$ untuk $i = 1, 2, ..., n-1$ dan $j = 1, 2, 3, 4$ dan $a_{ij} = v_{ij} v_{i(j+1)}$ untuk $i = 1, 2, ..., n$ dan $j = 1, 2, 3$. Gambar 3.4 mengilustrasikan penotasian titik dan sisi dari graf *grid* $P_4 \times P_4$.

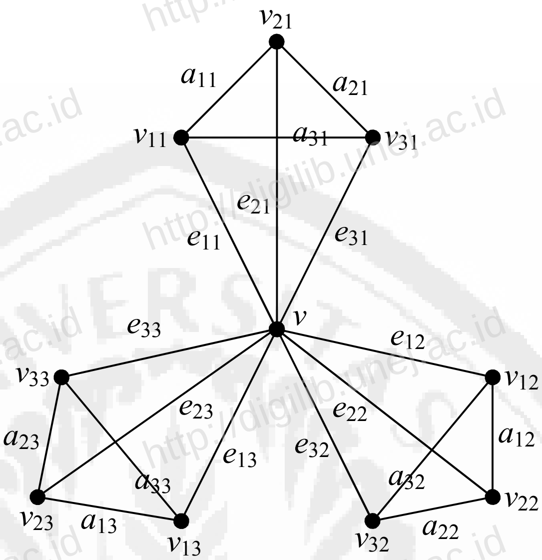


Gambar 3.4 Penotasian titik dan sisi pada graf *grid* $P_4 \times P_4$

3.2.5 Penotasian Titik dan Sisi pada Graf kincir angin $K_n^{(m)}$

Misalkan graf kincir angin $K_n^{(m)}$ mempunyai himpunan titik $V(K_n^{(m)}) = (v_{11}, v_{12}, ..., v_{ij}, ..., v_{(n-1)m})$ untuk $i = 1, 2, ..., (n-1)$ dan $j = 1, 2, ..., m$ dengan $deg(v_1) = (n-1)m$ dan $deg(v_i) = n-1$ untuk $i = 2, 3, ..., mn - m + 1$ dan himpunan sisi $E(K_n^{(m)}) = \{e_{11}, e_{12}, ..., e_{(n-1)m}, a_{11}, a_{12}, ..., a_{(n-1)m}\}$ dengan $e_{ij} = v v_{ij}$ untuk $i = 1, 2, ..., n-1$

dan $j = 1, 2, ..., m$ dan $a_{ij} = v_{ij} v_{(i+1)j} \pmod{n-1}$ untuk $i = 1, 2, ..., n-1$ dan $j = 1, 2, ..., m$. Ilustrasi penotasian titik dan sisi pada graf kincir angin $K_4^{(3)}$ ditunjukkan pada Gambar 3.5.



Gambar 3.5 Penotasian titik dan sisi pada graf kincir angin $K_4^{(3)}$

3.3 Langkah-langkah Penelitian

Langkah-langkah penelitian yang dilakukan untuk memperoleh suatu pelabelan *edge graceful* pada graf G dengan p titik dan q sisi hingga mendapatkan perumusan pelabelannya secara umum adalah sebagai berikut.

a. Menyelidiki apakah graf G dengan p titik dan q sisi memenuhi syarat perlu pelabelan *edge graceful* yaitu: $\left[\frac{p(p-1)}{2} \equiv q(q+1)\right] \pmod{p}$. Jika ya maka melanjutkan ke langkah b, tetapi jika tidak maka graf G tersebut bukan graf *edge graceful*. Jumlah titik dan sisi kelas-kelas graf yang akan diselidiki pelabelan *edge graceful*nya dalam skripsi ini akan disajikan dalam Tabel 3.1.

Tabel 3.1 Kelas-kelas graf dengan jumlah titik dan sisi

Kelas Graf	Notasi	Jumlah Titik	Jumlah Sisi
Graf roda	W_n	$n+1$	$2n$
Graf *superstar*	$S_{m,3}$	$3m+1$	$3m$
Graf *dragon*	$D_{3,n}$	$n+2$	$n+2$
Graf hasil kali kartesius dari graf lintasan P_4 dan graf lintasan P_n	$P_4 \times P_n$	$4n$	$7n-4$
Graf kincir angin	$K_n^{(m)}$	$mn-m+1$	$\frac{mn^2-mn}{2}$

b. Melabeli graf G dengan p titik dan q sisi dengan aturan pelabelan *edge graceful* yang langkahnya sebagai berikut.

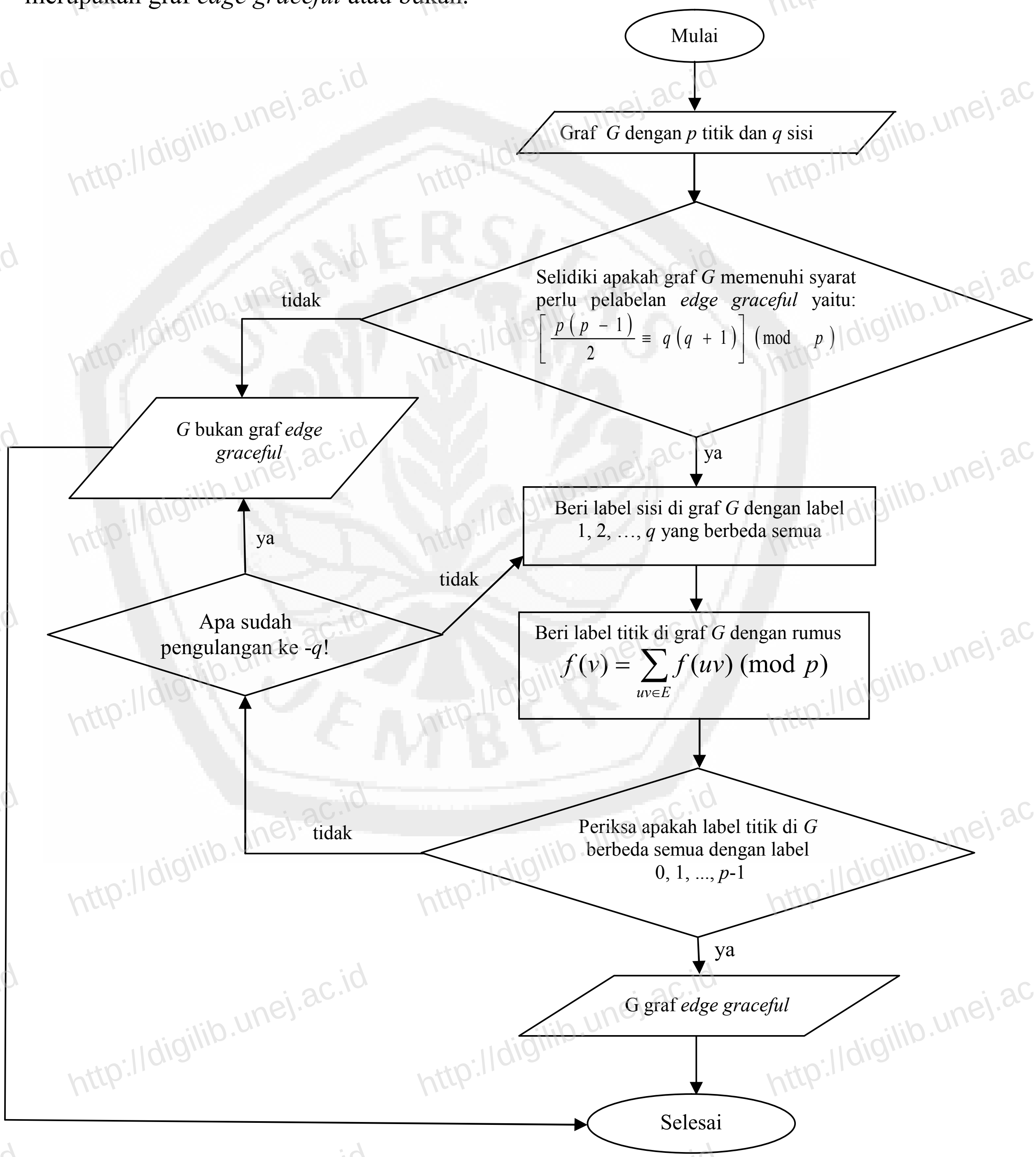
1) Memberi label pada setiap sisi pada graf G dengan himpunan bilangan bulat positif $\{1, 2, 3, ..., q\}$ yang berbeda semua.

2) Mendapatkan label pada setiap titiknya dengan cara menjumlahkan label sisi yang telah diperoleh pada langkah 2) yang menempel pada titik tersebut, yaitu $f(v) = \left[\sum_{uv \in E} f(uv)\right] (\text{mod } p)$ untuk setiap $v \in V$.

3) Menyelidiki label titiknya, apakah berbeda semua yaitu memenuhi sifat *bijektif* dari himpunan titik $V(G)$ ke himpunan bilangan bulat tak negatif {0, 1, 2, ..., p-1}. Jika ya maka graf G adalah graf *edge graceful* dan melanjutkan ke langkah 4), tetapi jika tidak maka kembali ke langkah 2). Jika proses melabeli sisi pada langkah 2) sudah dilakukan sebanyak q! dengan label berbeda tetapi tidak ditemukan label titik yang berbeda semua dengan label {0, 1, 2, ..., p-1} maka dapat disimpulkan bahwa graf G bukan merupakan graf *edge graceful*.

4) Membentuk suatu perumusan secara umum untuk label sisi dan label titik yang didapatkan dari langkah 2) dan 3).

Gambar 3.6 adalah *flow chart* untuk menyelidiki graf G dengan p titik dan q sisi merupakan graf *edge graceful* atau bukan.



Gambar 3.6 *Flow chart* untuk menyelidiki graf G dengan p titik dan q sisi merupakan graf *edge graceful* atau bukan

BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas tentang bagaimana menentukan pelabelan *edge graceful* pada graf roda W_n, graf bintang yang diperumum S_n^2, graf kincir angin $K_n^{(m)}$, graf *dragon* $D_{3,n}$, dan graf $P_4 \times P_n$. Berikut akan diselidiki apakah graf roda W_n, graf *superstar* $S_{m,3}$, graf kincir angin $K_n^{(m)}$, graf *dragon* $D_{3,n}$, dan graf $P_4 \times P_n$ merupakan graf *edge graceful* atau bukan.

4.1 Pelabelan *Edge Graceful* pada Graf Roda W_n

Berikut diberikan Teorema 4.1 untuk membahas pelabelan *edge graceful* pada graf roda W_n.

Teorema 4.1

Graf roda W_n adalah graf edge graceful hanya untuk n = 3.

Bukti:

Graf roda W_n memiliki $n + 1$ titik dan $2n$ sisi. Berikut diselidiki syarat perlu graf roda W_n memenuhi pelabelan *edge graceful* atau tidak.

a. Untuk n ganjil.

   Tulis $n = 2k + 1$ untuk suatu $k = 1, 2, 3, ...$. Dengan demikian $p = 2k + 2$ dan $q = 4k + 2$. Menurut Teorema 2.1, yaitu Teorema tentang syarat perlu suatu graf G dengan p titik dan q sisi memenuhi pelabelan *edge graceful* yaitu $\left[\frac{p(p-1)}{2} = q(q+1)\right](\bmod\ p)$, didapatkan

1) Ruas kiri (titik)

$$\frac{p(p-1)}{2} \pmod p = \frac{(2k+2)(2k+1)}{2}$$
$$= (k+1)(2k+1)$$
$$= 2k^2 + 3k + 1$$
$$= (k(2k+2)) + k + 1 \qquad (\text{mod } 2k+2)$$
$$= \begin{cases} 2 & \text{untuk} \quad k = 1 \\ k+1 & \text{untuk} \quad k \text{ yang lain} \end{cases}$$

2) Ruas kanan (sisi)

$$q(q+1) \pmod p = (4k+2)(4k+3)$$
$$= 16k^2 + 20k + 6$$
$$= ((8k+2)(2k+2)) + 2 \quad (\text{mod } 2k+2)$$
$$= 2$$

Ruas kiri akan sama dengan ruas kanan hanya pada $k = 1$, sehingga graf roda W_n untuk n ganjil yang memenuhi syarat perlu pelabelan *edge graceful* hanya pada $n = 3$ yaitu graf roda W_3

b. Untuk n genap.

Tulis $n = 2k$ untuk suatu $k = 2, 3, \ldots$. Dengan demikian $p = 2k+1$ dan $q = 4k$. Menurut Teorema 2.1 didapatkan

1) Ruas kiri (titik)

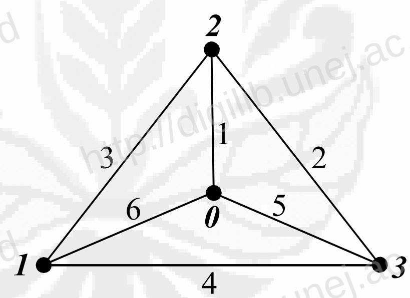
$$\frac{p(p-1)}{2} \pmod p = \frac{(2k+1)(2k)}{2}$$
$$= (2k+1)(k) \qquad (\text{mod } 2k+1)$$
$$= 0$$

2) Ruas kanan (sisi)

$$q(q+1) \pmod p = (4k)(4k+1)$$
$$= 16k^2 + 4k$$
$$= ((8k-2)(2k+1)) + 2 \quad (\text{mod } 2k+1)$$
$$= 2$$

Karena ruas kiri tidak sama dengan ruas kanan, maka graf roda W_n untuk n genap tidak memenuhi syarat perlu suatu graf memenuhi pelabelan *edge graceful*. Dengan demikian, graf roda W_n untuk n genap bukan graf *edge graceful.*

Selanjutnya diselidiki apakah graf roda W_3 merupakan graf *edge graceful* atau bukan dengan cara melabeli graf roda W_3 dengan aturan pelabelan *edge graceful*. Pelabelan *edge graceful* pada graf roda W_3 adalah fungsi *bijektif* dari himpunan sisi $E(W_3)$ ke $\{1,2,...,6\}$ sedemikian hingga titiknya mendapat label $\{0,1,2,3\}$. Label titik 0 didapat dari penjumlahan label sisi 1, 5, dan 6 dalam modulo 4. Label titik 1 didapat dari penjumlahan label sisi 3, 4, dan 6 dalam modulo 4. Label titik 2 didapat dari penjumlahan label sisi 1, 2, dan 3 dalam modulo 4. Label titik 3 didapat dari penjumlahan label sisi 2, 4, dan 5 dalam modulo 4 seperti pada Gambar 4.1 berikut.



Gambar 4.1 Pelabelan *edge graceful* pada graf roda W_3

Dari Gambar 4.1, terlihat bahwa pelabelan pada graf roda W_3 memenuhi aturan pelabelan *edge graceful*. Dengan demikian graf roda W_3 adalah graf *edge graceful*.□

4.2 Pelabelan *edge graceful* pada Graf *Grid* $P_4 \times P_n$

Pelabelan *edge graceful* pada graf *grid* $P_4 \times P_n$ dibahas pada Teorema 4.2 berikut.

Teorema 4.2

Graf grid $P_4 \times P_n$ *adalah graf edge graceful hanya untuk* $n = 3$ dan 4.

Bukti:

Graf *grid* $P_4 \times P_n$ memiliki $4n$ titik dan $7n-4$ sisi. Berikut diselidiki syarat perlu graf *grid* $P_4 \times P_n$ memenuhi pelabelan *edge graceful* atau tidak.

a. Untuk n ganjil.

Tulis $n = 2k+1$ untuk suatu $k = 1, 2, 3, \ldots$. Dengan demikian $p = 8k+4$ dan $q = 14k+3$. Menurut Teorema 2.1 didapatkan

1) Ruas kiri (titik)

$$
\begin{aligned}
\frac{p(p-1)}{2} \pmod p &= \frac{(8k+4)(8k+3)}{2} \\
&= (4k+2)(8k+3) \\
&= 32k^2 + 28k + 6 \\
&= ((8k+4)(4k+1)) + 4k + 2 \qquad (\bmod\ 8k+4) \\
&= \begin{cases} 6 & \text{untuk} \quad k = 1 \\ 4k+2 & \text{untuk} \quad k \text{ yang lain} \end{cases}
\end{aligned}
$$

2) Ruas kanan (sisi)

$$
\begin{aligned}
q(q+1) \pmod p &= (14k+3)(14k+4) \\
&= 196k^2 + 98k + 12 \\
&= ((8k+4)(24k)) + 4k^2 + 2k + 12 \qquad (\bmod\ 8k+4) \\
&= \begin{cases} 6 & \text{untuk} \quad k = 1 \\ 4k^2 + 2k + 12 & \text{untuk} \quad k \text{ yang lain} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Ruas kiri akan sama dengan ruas kanan hanya pada $k = 1$, sedangkan untuk k yang lain akan dibuktikan apakah ruas kiri sama dengan ruas kanan atau tidak.

Andaikan $4k+2=4k^2+2k+12$

$$\Leftrightarrow 4k^2-2k+10=0.$$

Nilai diskriminan dari persamaan tersebut negatif, maka nilai k imajiner. Hal ini tidak mungkin karena k merupakan bilangan bulat positif. Dengan demikian untuk k yang lain ruas kiri tidak sama dengan ruas kanan. Jadi, graf *grid* $P_4 \times P_n$ untuk n ganjil yang memenuhi syarat perlu pelabelan *edge graceful* hanya pada $n=3$ yaitu graf *grid* $P_4 \times P_3$.

b. Untuk n genap.

Tulis $n = 2k$ untuk suatu k =1, 2, 3, ... Dengan demikian $p=8k$ dan $q=14k-4$. Menurut Teorema 2.1 didapatkan

1) Ruas kiri (titik)

$$\begin{aligned}\frac{p(p-1)}{2} \pmod p &= \frac{(8k)(8k-1)}{2}\\ &= (4k)(8k-1)\\ &= 32k^2-4k \qquad \pmod{8k}\\ &= \begin{cases} 8 & \text{untuk } k=2\\ 4k & \text{untuk } k \text{ yang lain}\end{cases}\end{aligned}$$

2) Ruas kanan (sisi)

$$\begin{aligned}q(q+1) \pmod p &= (14k-4)(14k-3)\\ &= 196k^2-98k+12\\ &= ((8k)(24k-12))+4k^2-2k+12 \qquad \pmod{8k}\\ &= \begin{cases} 8 & \text{untuk } k=2\\ 4k^2-2k+12 & \text{untuk } k \text{ yang lain}\end{cases}\end{aligned}$$

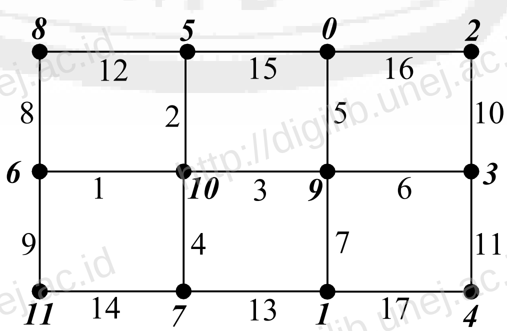
Ruas kiri akan sama dengan ruas kanan hanya pada $k=2$, sedangkan untuk k yang lain akan dibuktikan apakah ruas kiri sama dengan ruas kanan atau tidak.

Andaikan $4k = 4k^2 - 2k + 12$

$$\Leftrightarrow 4k^2 - 6k + 12 = 0 .$$

Nilai diskriminan dari persamaan tersebut negatif, maka nilai k imajiner. Hal ini tidak mungkin karena k merupakan bilangan bulat positif. Dengan demikian untuk k yang lain ruas kiri tidak sama dengan ruas kanan. Jadi, graf *grid* $P_4 \times P_n$ untuk n genap yang memenuhi syarat perlu pelabelan *edge graceful* hanya pada $n = 4$ yaitu graf *grid* $P_4 \times P_4$.

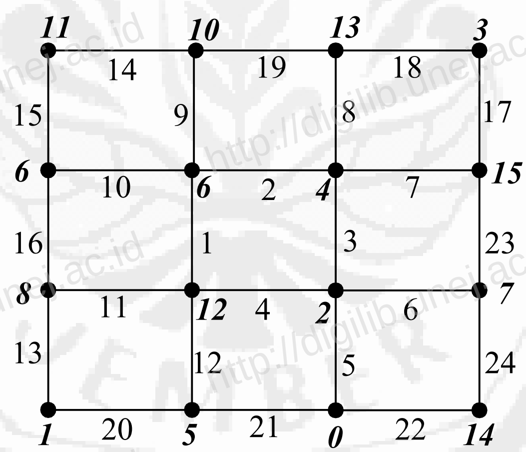
Selanjutnya diselidiki apakah graf *grid* $P_4 \times P_3$ dan graf *grid* $P_4 \times P_4$ merupakan graf *edge graceful* atau bukan dengan cara melabeli graf *grid* $P_4 \times P_3$ dan graf *grid grid* $P_4 \times P_4$ dengan aturan pelabelan *edge graceful*. Pelabelan *edge graceful* pada graf *grid* $P_4 \times P_3$ adalah fungsi *bijektif* dari himpunan sisi $E(P_4 \times P_3)$ ke $\{1, 2, ..., 17\}$ sedemikian hingga titiknya mendapat label $\{0, 1, 2, ..., 11\}$. Label titik 0 didapat dari penjumlahan label sisi 5, 15, dan 16 dalam modulo 12. Label titik 1 didapat dari penjumlahan label sisi 7, 13, dan 17 dalam modulo 12. Label titik 2 didapat dari penjumlahan label sisi 16 dan 10 dalam modulo 12. Label titik 3 didapat dari penjumlahan label sisi 6, 10, dan 11 dalam modulo 12. Label titik 4 didapat dari penjumlahan label sisi 11 dan 17 dalam modulo 12. Label titik 5 didapat dari penjumlahan label sisi 2,12, dan 15 dalam modulo 12. untuk label titik 6,7,..., 11 didapat dengan cara yang sama seperti pada Gambar 4.4 berikut.



Gambar 4.4 Pelabelan *edge graceful* pada graf $P_4 \times P_3$

Dari Gambar 4.4, terlihat bahwa pelabelan pada graf *grid* $P_4 \times P_3$ memenuhi aturan pelabelan *edge graceful*. Dengan demikian graf *grid* $P_4 \times P_3$ adalah graf *edge graceful*.

Pelabelan *edge graceful* pada graf *grid* $P_4 \times P_4$ adalah fungsi *bijektif* dari himpunan sisi $E(P_4 \times P_4)$ ke $\{1,2,...,24\}$ sedemikian hingga titiknya mendapat label $\{0,1,2,...,15\}$. Label titik 0 didapat dari penjumlahan label sisi 5, 21, dan 22 dalam modulo 16. Label titik 1 didapat dari penjumlahan label sisi 13 dan 17 dalam modulo 16. Label titik 2 didapat dari penjumlahan label sisi 3, 4, 5 dan 6 dalam modulo 16. Label titik 3 didapat dari penjumlahan label sisi 17 dan 18 dalam modulo 16. Label titik 4 didapat dari penjumlahan label sisi 2, 3, 7 dan 8 dalam modulo 16. Label titik 5 didapat dari penjumlahan label sisi 12,20, dan 21 dalam modulo 16. untuk label titik 6,7,..., 16 didapat dengan cara yang sama seperti pada Gambar 4.5 berikut.



Gambar 4.5 Pelabelan *edge graceful* $P_4 \times P_4$

Dari Gambar 4.5, terlihat bahwa pelabelan pada graf *grid* $P_4 \times P_4$ memenuhi aturan pelabelan *edge graceful*. Dengan demikian graf *grid* $P_4 \times P_4$ adalah graf *edge graceful*.□

4.3 Pelabelan *Edge Graceful* pada Graf *Superstar* $S_{m,3}$

Pelabelan *edge graceful* pada graf *superstar* $S_{m,3}$ dibahas pada Teorema 4.3 berikut.

Teorema 4.3

Graf superstar $S_{m,3}$ *untuk m genap adalah graf edge graceful.*

Bukti:

Graf *superstar* $S_{m,3}$ mempunyai $3m+1$ titik dan $3m$ sisi. Berikut diselidiki syarat perlu graf *superstar* $S_{m,3}$ memenuhi pelabelan *edge graceful* atau tidak.

a. Untuk *m* ganjil

Tulis $m = 2k+1$ untuk suatu k = 1, 2, 3, … , sehingga $p = 6k+4$ dan $q = 6k+3$.

Menurut Teorema 2.1 didapatkan

1) Ruas kiri (titik)

$$\begin{aligned}\frac{p(p-1)}{2} \pmod p &= \frac{(6k+4)(6k+3)}{2}\\ &= (3k+2)(6k+4)\\ &= 18k^2+21k+6\\ &= ((6k+4)(3k+1))+3k+2 \qquad (\text{mod } 6k+4)\\ &= 3k+2\end{aligned}$$

2) Ruas kanan (sisi)

$$\begin{aligned}q(q+1) \pmod p &= (6k+3)(6k+4) \qquad (\text{mod } 6k+4)\\ &= 0\end{aligned}$$

Karena ruas kiri tidak sama dengan ruas kanan, maka graf *superstar* $S_{m,3}$ untuk *m* ganjil tidak memenuhi syarat perlu pelabelan *edge graceful*. Dengan demikian, graf *superstar* $S_{m,3}$ untuk *n* ganjil bukan graf *edge graceful*.

b. Untuk *m* genap

Tulis $m = 2k$ untuk suatu k = 1, 2, 3, … , sehingga $p = 6k+1$ dan $q = 6k$.

Menurut Teorema 2.1 didapatkan

1) Ruas kiri (titik)

$$\frac{p(p-1)}{2} \pmod p = \frac{(6k+1)(6k)}{2}$$
$$= (6k+1)(3k) \qquad \pmod{6k+1}$$
$$= 0$$

2) Ruas kanan (sisi)

$$q(q+1) \pmod p = (6k)(6k+1) \qquad \pmod{6k+1}$$
$$= 0$$

Karena ruas kiri sama dengan ruas kanan, maka graf *superstar* $S_{m,3}$ untuk m genap memenuhi syarat perlu pelabelan *edge graceful*.

Selanjutnya diselidiki apakah graf *superstar* $S_{m,3}$ untuk m genap merupakan graf *edge graceful* atau bukan. Untuk membuktikan bahwa graf *superstar* $S_{m,3}$ untuk m genap merupakan graf *edge graceful* dengan cara melabeli graf *superstar* $S_{m,3}$ untuk m genap dengan aturan pelabelan *edge graceful*. Langkah yang pertama dilakukan yaitu memberi label pada setiap sisi pada graf *superstar* $S_{m,3}$ untuk m genap dengan himpunan bilangan bulat positif $\{1,2,...,3m\}$.

a. Label sisi

Perumusan label sisi secara umum pada graf *superstar* $S_{m,3}$ untuk m genap sebagai berikut. Cara memperolehnya dapat dilihat pada Lampiran A.

$$f(e_{1,j}) = \begin{cases} 3j-2 & \text{untuk} \quad j = 1,3,...,m-1 \\ 3j & \text{untuk} \quad j = 2,4,...,m \end{cases}$$

$$f(e_{2,j}) = 3j-1 \quad \text{untuk} \quad j = 1,2,...,m$$

$$f(e_{3,j}) = \begin{cases} 3j & \text{untuk} \quad j = 1,3,...,m-1 \\ 3j-2 & \text{untuk} \quad j = 2,4,...,m \end{cases}$$

Berikut dibuktikan bahwa setiap sisi memiliki label yang berbeda yaitu untuk setiap $e_{1,j}, e_{2,j}, e_{3j} \in E(S_{m,3})$ dengan $e_{1j} \neq e_{2j} \neq e_{3j}$ maka $f(e_{1j}) \neq f(e_{2j}) \neq f(e_{3j})$.

1) Untuk $j = 1,3,...,m-1$ dan $l = 2,4,...,m$ akan dibuktikan bahwa $3j-2 \neq 3l$.

   Karena j bernilai ganjil , maka $3j$ merupakan bilangan ganjil sehingga $3j-2$ bernilai ganjil. Selanjutnya $3l$ merupakan bilangan genap karena l bernilai genap. Jadi, terbukti bahwa $3j-2 \neq 3l$ dengan $j = 1,3,...,m-1$ dan $l = 2,4,...,m$.

2) Untuk $j = 1,3,...,m-1$ dan $l = 1,2,...,m$ akan dibuktikan bahwa $3j-2 \neq 3l-1$.

   Andaikan $3j-2 = 3l-1$ dengan $j = 1,3,...,n-1$ dan $l = 1,2,...,n$, maka

$$3j-2 = 3l-1$$
$$\Leftrightarrow 3j-3l = 1$$
$$\Leftrightarrow j-l = \frac{1}{3}$$

   Hal ini tidak mungkin, karena j dan l merupakan bilangan bulat positif sehingga $j-l$ juga merupakan bilangan bulat positif. Sehingga pengandaian $3j-2 = 3l-1$ dengan $j = 1,3,...,m-1$ dan $l = 1,2,...,m$ tidak benar. Jadi, terbukti bahwa $3j-2 \neq 3l-1$ dengan $j = 1,3,...,m-1$ dan $l = 1,2,...,m$.

   Dengan cara yang sama, pembuktian dengan cara kontradiksi tersebut dapat digunakan untuk membuktikan bahwa:

   a) $3j \neq 3l-1$ dengan $l = 2,4,...,m$ dan $l = 1,2,...,m$
   b) $3j-1 \neq 3l-2$ dengan $j = 1,2,...,m$ dan $l = 2,4,...,m$
   c) $3j-1 \neq 3l$ dengan $j = 1,2,...,m$ dan $l = 1,3,...,m-1$

3) Untuk $3j-2 \neq 3l$ dengan $j,l = 1,3,...,n-1$ dan $3j \neq 3l-2$ dengan $j,l = 2,4,...,n$.

   Nilai $3j = 3l$ dipenuhi jika dan hanya jika $j = l$, maka untuk $j \neq l$ diperoleh $3j \neq 3l$ untuk setiap $j,l = 1,3,...,n-1$ dan $j,l = 2,4,...,n$. Kemudian karena

$-2 \neq 0$, dapat disimpulkan bahwa $3j-2 \neq 3l$ dengan $j,l = 1,3,...,n-1$ dan $3j \neq 3l-2$ dengan $j,l = 2,4,...,n$.

4) Jelas terlihat bahwa untuk $3j-2 \neq 3l-2$ dengan $j = 1,3,...,n-1$ dan $l = 2,4,...,n$ dan $3j \neq 3l$ dengan $j = 2,4,...,n$ dan $l = 1,3,...,n-1$ karena untuk setiap $j \neq l$ maka $f(j) \neq f(l)$.

Dari 1), 2), 3) dan 4) terbukti bahwa pelabelan sisi pada graf *superstar* $S_{m,3}$ untuk m genap memenuhi fungsi *injektif* karena untuk setiap $e_{1,j}, e_{2,j}, e_{3j} \in E(S_{m,3})$ dengan $e_{1j} \neq e_{2j} \neq e_{3j}$ maka $f(e_{1j}) \neq f(e_{2j}) \neq f(e_{3j})$. Karena himpunan label $\{1,2,...,3m\}$ habis dipasangkan pada himpunan sisi $E(S_{m,3})$ maka pelabelan sisinya juga memenuhi fungsi *surjektif*. Dengan demikian pelabelan sisinya memenuhi fungsi *bijektif* dari himpunan sisi $E(S_{m,3})$ ke himpunan bilangan bulat $\{1,2,...,3m\}$.

b. Label titik

Setelah label sisinya didapatkan dan terbukti berbeda semua, selanjutnya mendapatkan label titik dengan cara menjumlahkan label sisi yang menempel pada titik tersebut, yaitu $f(v) = \left[\sum_{uv \in E} f(uv)\right] (\text{mod } p)$.

1) Titik $v_{1,j}$

Sisi yang menempel pada titik $v_{1,j}$ hanya satu yaitu sisi $e_{1,j}$ dan titik $v_{1,j}$ berderajat satu, sehingga didapatkan perumusan secara umum untuk titik $v_{1,j}$ sebagai berikut.

$$f(v_{1,j}) = f(e_{1,j}) = \begin{cases} 3j-2 & \text{untuk} \quad j = 1,3,...,m-1 \\ 3j & \text{untuk} \quad j = 2,4,...,m \end{cases}$$

2) Titik $v_{2,j}$

Sisi yang menempel pada titik $v_{2,j}$ yaitu sisi $e_{1,j}$ dan $e_{2,j}$, sehingga didapatkan perumusan secara umum untuk titik $v_{2,j}$ sebagai berikut.

a) Untuk $j = 1,3,...,m-1$

$$\begin{aligned} f(v_{2,j}) &= (f(v_{1,j}v_{2,j}) + f(v_{2,j}v_{3,j})) && (\text{mod } 3m+1) \\ &= (f(e_{1,j}) + f(e_{2,j})) && (\text{mod } 3m+1) \\ &= ((3j-2) + (3j-1)) && (\text{mod } 3m+1) \\ &= 6j-3 && (\text{mod } 3m+1) \end{aligned}$$

b) Untuk $j = 2,4,...,m$

$$\begin{aligned} f(v_{2,j}) &= (f(v_{1,j}v_{2,j}) + f(v_{2,j}v_{3,j})) && (\text{mod } 3m+1) \\ &= (f(e_{1,j}) + f(e_{2,j})) && (\text{mod } 3m+1) \\ &= ((3j) + (3j-1)) && (\text{mod } 3m+1) \\ &= 6j-1 && (\text{mod } 3m+1) \end{aligned}$$

3) Titik $v_{3,j}$

Sisi yang menempel pada titik $v_{3,j}$ yaitu sisi $e_{2,j}$ dan $e_{3,j}$, sehingga didapatkan perumusan secara umum untuk titik $v_{3,j}$ sebagai berikut.

a) Untuk $j = 1,3,...,m-1$

$$\begin{aligned} f(v_{3,j}) &= (f(v_{2,j}v_{3,j}) + f(v_0v_j)) && (\text{mod } 3m+1) \\ &= (f(e_{2,j}) + f(e_{3,j})) && (\text{mod } 3m+1) \\ &= ((3j-1) + (3j)) && (\text{mod } 3m+1) \\ &= 6j-1 && (\text{mod } 3m+1) \end{aligned}$$

b) Untuk $j = 2,4,...,m$

$$\begin{aligned} f(v_{3,j}) &= (f(v_{2,j}v_{3,j}) + f(v_0v_j)) && (\text{mod } 3m+1) \\ &= (f(e_{2,j}) + f(e_{3,j})) && (\text{mod } 3m+1) \\ &= ((3j-1) + (3j-2)) && (\text{mod } 3m+1) \\ &= 6j-3 && (\text{mod } 3m+1) \end{aligned}$$

4) Titik v_0

Sisi yang menempel pada titik v_0 yaitu sisi $e_{3,j}$ dan titik v_0 berderajat m, sehingga didapatkan perumusan secara umum untuk titik v_0 sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
f(v_0) &= \left[\sum_{j=1}^{m} f(e_{3,j})\right] \pmod{3m+1} \\
&= \left[f(e_{3,1}) + f(e_{3,2}) + f(e_{3,3}) + f(e_{3,4}) + \dots + f(e_{3,(m-1)}) + f(e_{3,m})\right] \pmod{3m+1} \\
&= \left[(3.1) + (3.2-2) + (3.3) + (3.4-2) + \dots + (3m-3) + (3m-2)\right] \pmod{3m+1} \\
&= \left[3 + 4 + 9 + 10 + \dots + (3m-3) + (3m-2)\right] \pmod{3m+1} \\
&= \left[3 + 9 + \dots + (3m-3)\right] + \left[4 + 10 + \dots + (3m-2)\right] \pmod{3m+1} \\
&= \left[\left(\frac{3m^2}{4}\right) + \left(\frac{3m^2+2m}{4}\right)\right] \pmod{3m+1} \\
&= \left(\frac{6m^2+2m}{4}\right) \pmod{3m+1} \\
&= \frac{2m}{4}(3m+1) \pmod{3m+1} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, perumusan secara umum untuk pelabelan titik pada graf *superstar* $S_{m,3}$ adalah sebagai berikut.

$$f(v_0) = 0$$

$$f(v_{1,j}) = \begin{cases} 3j-2 & \text{untuk} \quad j = 1,3,\dots,m-1 \\ 3j & \text{untuk} \quad j = 2,4,\dots,m \end{cases}$$

$$f(v_{2,j}) = \begin{cases} 6j-3 \pmod{3m+1} & \text{untuk} \quad j = 1,3,\dots,m-1 \\ 6j-1 \pmod{3m+1} & \text{untuk} \quad j = 2,4,\dots,m \end{cases}$$

$$f(v_{3,j}) = \begin{cases} 6j-3 \pmod{3m+1} & \text{untuk} \quad j = 2,4,\dots,m \\ 6j-1 \pmod{3m+1} & \text{untuk} \quad j = 1,3,\dots,m-1 \end{cases}$$

Selanjutnya dibuktikan bahwa setiap titik memiliki label yang berbeda semua yaitu untuk setiap $v_0, v_{1,j}, v_{2,j}, v_{3,j} \in V(S_{m,3})$ dengan $v_0 \neq v_{1,j} \neq v_{2,j} \neq v_{3,j}$ maka $f(v_0) \neq f(v_{1,j}) \neq f(v_{2,j}) \neq f(v_{3,j})$.

a. Pembuktian bahwa label titik $v_{2,j}$ berbeda semua sebagai berikut.

Pelabelan $f(v_{2,j}) = 6j - 3 \pmod{3m+1}$ untuk $j = 1, 3, ..., m-1$ dan $f(v_{2,l}) = 6l - 1 \pmod{3m+1}$ untuk $l = 2, 4, ..., m$.

Andaikan $f(v_{2,j}) = f(v_{2,l})$ dalam mod $(3m+1)$, maka

$$\Leftrightarrow 6j - 3 = 6l - 1$$

$$\Leftrightarrow j - l = \frac{2}{6}.$$

Hal ini tidak mungkin, karena *j* dan *l* merupakan bilangan bulat positif sehinggga $j - l$ juga merupakan bilangan bulat positif. Jadi, $f(v_{2,j}) \neq f(v_{2,l})$.

b. Pembuktian bahwa label titik $v_{3,j}$ berbeda semua sebagai berikut.

Pelabelan $f(v_{3,j}) = 6j - 1 \pmod{3m+1}$ untuk $j = 1, 3, ..., m-1$ dan $f(v_{3,l}) = 6l - 3 \pmod{3m+1}$ untuk $l = 2, 4, ..., m$.

Andaikan $f(v_{3,j}) = f(v_{3,l})$ dalam mod $(3m+1)$, maka

$$\Leftrightarrow 6j - 1 = 6l - 3$$

$$\Leftrightarrow j - l = -\frac{2}{6}.$$

$-\frac{2}{6}$ merupakan bilangan negatif yang tidak bulat. Hal ini tidak mungkin karena *j* dan *l* merupakan bilangan bulat positif. Jadi, $f(v_{3,j}) \neq f(v_{3,l})$.

c. Pembuktian bahwa label titik $v_{1,j}$ dengan titik $v_{2,j}$ dan titik $v_{3,j}$ berbeda semua sebagai berikut.

Pelabelan $f(v_{1,j}) = 3j - 2$ dan $f(v_{2,l}) = 6l - 3 \pmod{3m+1}$ untuk $j, l = 1, 3, ..., m-1$.

Andaikan $f(v_{1,j}) = f(v_{2,l})$ dalam mod $(3m+1)$, maka

$$\Leftrightarrow 3j - 2 = 6l - 3$$

$$\Leftrightarrow\ j-2l=-\frac{1}{6}.$$

Nilai $j-2l$ merupakan bilangan negatif yang tidak bulat. Hal ini tidak mungkin karena j dan l merupakan bilangan bulat positif. Jadi, $f(v_{1,j}) \neq f(v_{2,l})$.

Dengan cara yang sama, pembuktian tersebut dapat digunakan untuk membuktikan bahwa:

1) $3j-2 \neq 6l-1 \pmod{3m+1}$ untuk $j=1,3,...,m-1$ dan $l=2,4,...,m$
2) $3j \neq 6l-3 \pmod{3m+1}$ untuk $j=2,4,...,m$ dan $l=1,3,...,m-1$
3) $3j \neq 6l-1 \pmod{3m+1}$ untuk $j,l=2,4,...,m$

dan juga membuktikan bahwa $f(v_{1,j}) \neq f(v_{3,l})$, yaitu:

1) $3j-2 \neq 6l-3 \pmod{3m+1}$ untuk $j=1,3,...,m-1$ dan $l=2,4,...,m$
2) $3j-2 \neq 6l-1 \pmod{3m+1}$ untuk $j,l=1,3,...,m-1$
3) $3j \neq 6l-3 \pmod{3m+1}$ untuk $j,l=2,4,...,m$
4) $3j \neq 6l-1 \pmod{3m+1}$ untuk $j=2,4,...,m$ dan $l=1,3,...,m-1$.

d. Pembuktian bahwa label titik $v_{2,j}$ dan $v_{3,j}$ berbeda semua, yaitu $f(v_{2,j}) \neq f(v_{3,l})$ adalah sebagai berikut.

1) Jelas terlihat bahwa $6j-3 \pmod{3m+1} \neq 6l-3 \pmod{3m+1}$ untuk $j=1,3,...,m-1$ dan $l=2,4,...,m$, $6j-1 \pmod{3m+1} \neq 6l-1 \pmod{3m+1}$ untuk $j=2,4,...,m$ dan $l=1,3,...,m-1$ karena setiap $j \neq l$ maka $f(j) \neq f(l)$. Jadi, $f(v_{2,j}) \neq f(v_{3,l})$.

2) Pelabelan $f(v_{2,j}) = 6j-3 \pmod{3m+1}$ dan $f(v_{3,l}) = 6l-1 \pmod{3m+1}$ untuk $j,l=1,3,...,m-1$.

   Dalam mod $(3m+1)$, nilai $6j=6l$ dipenuhi jika dan hanya jika $j=l$, maka untuk $j \neq l$ diperoleh $6j \neq 6l$ untuk setiap $j,l=1,3,...,m-1$. Kemudian karena $-3 \neq -1$, dapat disimpulkan bahwa

$6j-3\,(\text{mod } 3m+1) \neq 6l-1\,(\text{mod } 3m+1)$ untuk $j,l = 1,3,...,m-1$. Jadi, $f(v_{2,j}) \neq f(v_{3,l})$.

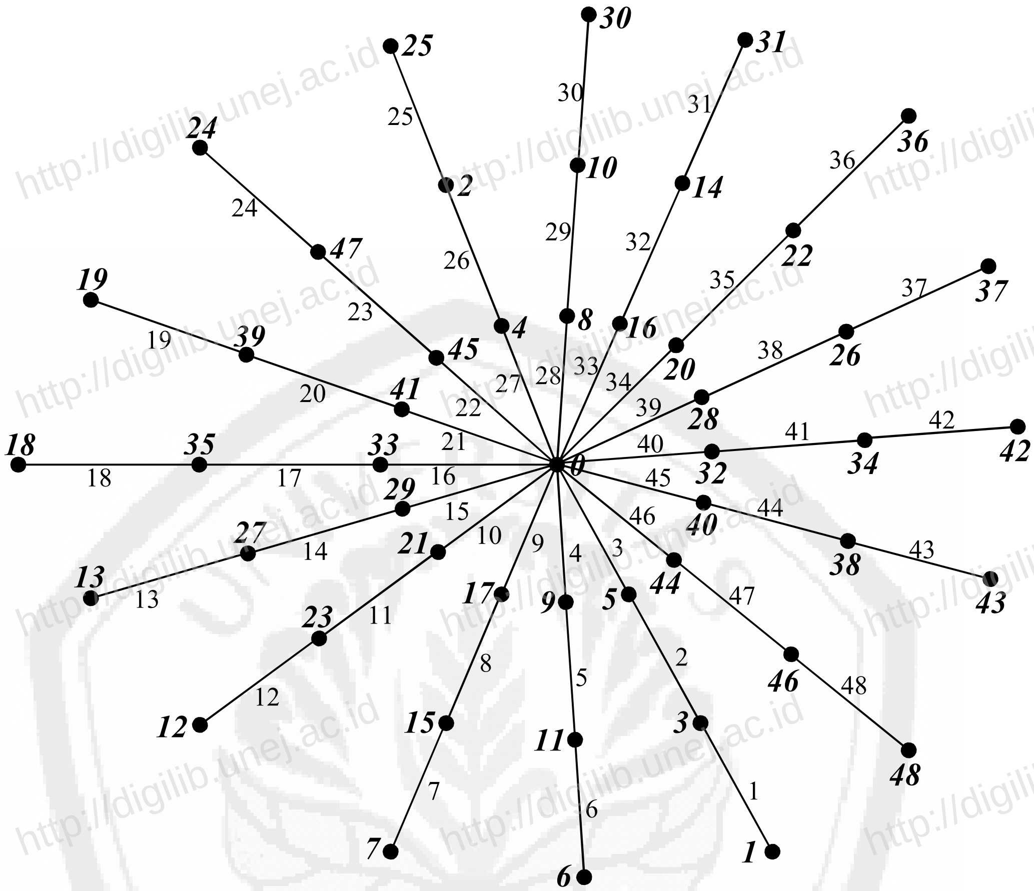
Dengan cara yang sama, pembuktian tersebut dapat digunakan untuk membuktikan bahwa $6j-1\,(\text{mod } 3m+1) \neq 6l-3(\text{mod } 3m+1)$ untuk $j,l = 2,4,...,m$.

e. Karena $f(v_0)=0$, jelas bahwa $f(v_0) \neq f(v_{1,j})$, $f(v_0) \neq f(v_{2,j})$, dan $f(v_0) \neq f(v_{3,j})$ karena $f(v_{1,j}), f(v_{2,j}), f(v_{3,j})$ bernilai tak nol.

Dari a, b, c, d, dan e didapatkan untuk setiap $v_0, v_{1,j}, v_{2,j}, v_{3,j} \in V(S_{m,3})$ dengan $v_0 \neq v_{1,j} \neq v_{2,j} \neq v_{3,j}$ maka $f(v_0) \neq f(v_{1,j}) \neq f(v_{2,j}) \neq f(v_{3,j})$. Karena itu, pelabelan titiknya memenuhi fungsi *injektif*. Karena himpunan label $\{0,1,2,3,...,3m\}$ habis dipasangkan pada himpunan titik $V(S_{m,3})$ maka pelabelan titiknya juga memenuhi fungsi *surjektif*. Dengan demikian pelabelan titiknya untuk memenuhi sifat *bijektif* dari himpunan titik $V(S_{m,3})$ ke himpunan bilangan bulat $\{0,1,2,3,...,3m\}$.

Jadi, pelabelan sisinya memenuhi sifat *bijektif* dari himpunan sisi $E(S_{m,3})$ ke himpunan bilangan bulat $\{1,2,3,...,3m\}$ dan pelabelan titiknya memenuhi sifat *bijektif* dari himpunan titik $V(S_{m,3})$ ke himpunan bilangan bulat $\{0,1,2,3,...,3m\}$. Dengan demikian pelabelan graf *superstar* $S_{m,3}$ untuk m genap memenuhi aturan pelabelan *edge graceful*, sehingga graf *superstar* $S_{m,3}$ untuk m genap adalah graf *edge graceful*. □

Gambar 4.2 merupakan contoh Pelabelan *edge graceful* pada graf *superstar* $S_{16,3}$ dengan label sisi dan label titik diperoleh dari perumusan yang telah dibuktikan pada Teorema 4.3.



Gambar 4.2 Pelabelan *edge graceful* pada graf *superstar* $S_{16,3}$

4.4 Pelabelan *Edge Graceful* pada Graf *Dragon* $D_{3,n}$

Pelabelan *edge graceful* pada graf *dragon* $D_{3,n}$ dibahas pada Teorema 4.4 berikut.

Teorema 4.4

Graf dragon $D_{3,n}$ *untuk n ganjil adalah edge graceful.*

Bukti:

Graf *dragon* $D_{3,n}$ mempunyai $n+2$ titik dan $n+2$ sisi. Berikut akan diselidiki syarat perlu graf dragon $D_{3,n}$ memenuhi pelabelan *edge graceful* atau tidak.

a. Untuk n ganjil.

Tulis $n = 2k+1$ untuk suatu k = 1, 2, 3, … , sehingga $p = 2k+3$ dan $q = 2k+3$.

Menurut Teorema 2.1 didapatkan

1) Ruas kiri (titik)

$$\begin{aligned}\frac{p(p-1)}{2} \pmod p &= \frac{(2k+3)(2k+2)}{2} \\ &= (2k+3)(k+1) \qquad \pmod{2k+3} \\ &= 0\end{aligned}$$

2) Ruas kanan (sisi)

$$\begin{aligned}q(q+1) \pmod p &= (2k+3)(2k+4) \qquad \pmod{2k+3} \\ &= 0\end{aligned}$$

Karena ruas kiri sama dengan ruas kanan, maka untuk n ganjil graf *dragon* $D_{3,n}$ memenuhi syarat perlu pelabelan *edge graceful*.

b. Untuk n genap.

Tulis $n = 2k$ untuk suatu k = 1, 2, 3, … , sehingga $p = 2k+2$ dan $q = 2k+2$.

Menurut Teorema 2.1 didapatkan

1) Ruas kiri (titik)

$$\begin{aligned}\frac{p(p-1)}{2} \pmod p &= \frac{(2k+2)(2k+1)}{2} \\ &= (k+1)(2k+1) \\ &= 2k^2+3k+1 \\ &= (k(2k+2))+k+1 \qquad \pmod{2k+2} \\ &= k+1\end{aligned}$$

2) Ruas kanan (sisi)

$$\begin{aligned}q(q+1) \pmod p &= (2k+2)(2k+3) \qquad \pmod{2k+2} \\ &= 0\end{aligned}$$

Karena ruas kiri tidak sama dengan ruas kanan, maka untuk n genap graf *dragon* $D_{3,n}$ tidak memenuhi syarat perlu pelabelan *edge graceful*. Dengan demikian, graf *dragon* $D_{3,n}$ untuk n genap bukan graf *edge graceful*.

Selanjutnya akan diselidiki apakah graf dragon $D_{3,n}$ untuk n ganjil merupakan graf *edge graceful* atau bukan dengan cara melabeli graf *dragon* $D_{3,n}$ untuk n ganjil dengan aturan pelabelan *edge graceful*. Langkah pertama yang dilakukan yaitu mendefinisikan suatu pelabelan untuk sisi-sisi graf *dragon* $D_{3,n}$ $f\colon E(D_{3,n}) \rightarrow \{1, 2, ..., n+2\}$.

a. Label sisi

Berikut akan diberikan perumusan label sisi yang cara mendapatkannya dapat dilihat pada Lampiran B.

$$f(a_i) = i \quad \text{untuk} \quad i = 1, 2, ..., n-1$$

$$f(b_i) = i + n - 1 \quad \text{untuk} \quad i = 1, 2, 3$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa setiap sisi memiliki label yang berbeda yaitu untuk setiap $a, b \in E(D_{3,n})$ dengan $a \neq b$ maka $f(a) \neq f(b)$.

Untuk $f(a_i) = i$ dengan $i = 1, 2, ..., n-1$ diperoleh $1 \leq f(a_i) \leq n-1$ sedangkan untuk $f(b_j) = i + n - 1$ dengan $j = 1, 2, 3$ diperoleh $n \leq f(b_j) \leq n+2$, sehingga $f(a_i) \leq n - 1 < n \leq f(b_j)$. Dengan demikian $f(a_i) < f(b_j)$, sehingga terbukti bahwa $f(a_i) \neq f(b_i)$.

Jadi, terbukti bahwa pelabelan sisi pada graf *dragon* $D_{3,n}$ untuk n ganjil memenuhi fungsi *injektif*. Karena himpunan label $\{1, 2, ..., n+2\}$ habis dipasangkan pada himpunan sisi $E(D_{3,n})$ maka pelabelan sisinya juga memenuhi fungsi *surjektif*. Dengan demikian pelabelan sisinya memenuhi fungsi *bijektif* dari himpunan sisi $E(D_{3,n})$ ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, ..., n+2\}$.

b. Label titik

Setelah label sisinya didapatkan dan terbukti berbeda semua, selanjutnya mendapatkan label titik dengan cara menjumlahkan label sisi yang menempel pada titik tersebut, yaitu $f(v) = \left[\sum_{uv \in E} f(uv)\right] (\text{mod } p)$.

1) Titik u_i

Sisi yang menempel pada titik u_i yaitu sisi a_{i-1} dan a_i , sehingga didapatkan perumusan secara umum untuk titik u_i sebagai berikut.

Untuk $i = 1, 2, ..., n-1$

$$\begin{aligned} f(u_i) &= [f(a_{i-1}) + f(a_i)] && (\text{mod } n+2) \\ &= [(i-1) + (i)] && (\text{mod } n+2) \\ &= 2i - 1 && (\text{mod } n+2) \end{aligned}$$

2) Titik v_i

Sisi yang menempel pada titik v_1 yaitu sisi b_1, b_3, dan a_{n-1}, sedangkan sisi yang menempel pada titik v_i untuk $i = 2, 3$ yaitu sisi b_{i-1} dan b_i, sehingga didapatkan perumusan secara umum untuk titik v_i sebagai berikut.

a) Untuk $i = 1$

$$\begin{aligned} f(v_1) &= [f(b_1) + f(b_3) + f(a_{n-1})] && (\text{mod } n+2) \\ &= [(n+1-1) + (n+3-1) + (n-1)] && (\text{mod } n+2) \\ &= [n + n + 2 + n - 1] && (\text{mod } n+2) \\ &= 3n + 1 && (\text{mod } n+2) \end{aligned}$$

b) Untuk $i = 2, 3$

$$\begin{aligned} f(v_i) &= [f(b_{i-1}) + f(b_i)] && (\text{mod } n+2) \\ &= [((i-1) + n - 1) + (i + n - 1)] && (\text{mod } n+2) \\ &= 2n + 2i - 3 && (\text{mod } n+2) \end{aligned}$$

Dengan demikian, perumusan secara umum untuk pelabelan titik pada graf *dragon* $D_{3,n}$ adalah sebagai berikut.

$$f(u_i) = 2i - 1 \quad (\text{mod } n+2) \quad \text{untuk} \quad i = 1,2,...,n-1$$

$$f(v_i) = \begin{cases} 3n+1 \quad (\text{mod } n+2) & \text{untuk} \quad i = 1 \\ 2n+2i-3 \quad (\text{mod } n+2) & \text{untuk} \quad i = 2,3 \end{cases}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa setiap titik memiliki label yang berbeda semua yaitu untuk setiap $u, v \in V(D_{3,n})$ dengan $u \neq v$ maka $f(u) \neq f(v)$.

(1) Pembuktian bahwa $f(u_i) = 2i - 1(\text{mod } n+2) \neq 3n+1(\text{mod } n+2) = f(v_j)$ untuk $i = 1,2,...,n-1$ dan $j = 1$ sebagai berikut

Andaikan $f(u_i) = f(v_j)$ dalam mod $(n+2)$, maka

$$\Leftrightarrow 2i - 1 = 3n + 1$$

$$\Leftrightarrow i = \frac{3n}{2} + 1.$$

Karena n ganjil maka nilai i merupakan bilangan tidak bulat. Hal ini tidak mungkin karena i merupakan bilangan bulat positif. Jadi, $f(u_i) \neq f(v_j)$.

(2) Untuk $i = 1,2,...,n-1$ dan $j = 2,3$ dibuktikan bahwa $f(u_i) = 2i - 1(\text{mod } n+2) \neq 2n+2j-3(\text{mod } n+2) = f(v_j)$.

Andaikan $f(u_i) = f(v_j)$ dalam mod $(n+2)$, maka

$$\Leftrightarrow 2i - 1 = 2n + 2j - 3$$

$$\Leftrightarrow i - j = n - 1.$$

Hal ini tidak mungkin karena untuk $i = 1,2,...,n-1$ dan $j = 2,3$ nilai $i - j < n - 1$. Jadi, $f(u_i) \neq f(v_j)$.

(3) Pembuktian $f(v_i) = 3n+1(\text{mod } n+2) \neq 2n+2i-3(\text{mod } n+2) = f(v_j)$ untuk $i = 1$ dan $j = 2,3$ sebagai berikut.

Andaikan $f(u_i) = f(v_j)$ dalam mod $(n+2)$, maka

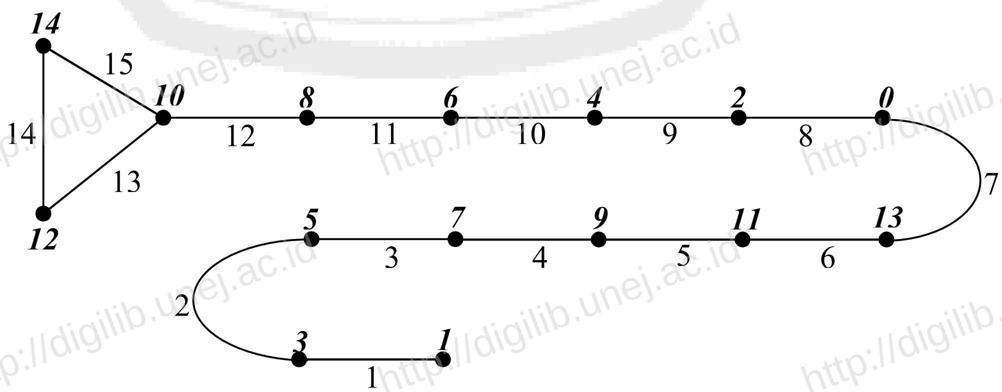
$$\Leftrightarrow 3n + 1 = 2n + 2i - 3$$

$$\Leftrightarrow i = \frac{n}{2} + 2.$$

Nilai i merupakan bilangan tidak bulat karena n ganjil. Hal ini tidak mungkin karena i merupakan bilangan bulat positif. Jadi, $f(u_i) \neq f(v_j)$.

Dari (1), (2), dan (3) didapatkan untuk setiap $u, v \in V(D_{3,n})$ dengan $u \neq v$ maka $f(u) \neq f(v)$. Karena itu, pelabelan titiknya memenuhi fungsi *injektif*. Karena himpunan label $\{0,1,2,3,...,n+1\}$ habis dipasangkan pada himpunan titik $V(D_{3,n})$ maka pelabelan titiknya juga memenuhi fungsi *surjektif*. Dengan demikian pelabelan titiknya memenuhi sifat *bijektif* dari himpunan titik $V(D_{3,n})$ ke himpunan bilangan bulat $\{0,1,2,3,...,n+1\}$.

Jadi, pelabelan sisinya memenuhi sifat *bijektif* dari himpunan sisi $E(D_{3,n})$ ke himpunan bilangan bulat $\{1,2,3,...,n+2\}$ dan pelabelan titiknya memenuhi sifat *bijektif* dari himpunan titik $V(D_{3,n})$ ke himpunan bilangan bulat $\{0,1,2,3,...,n+1\}$. Dengan demikian pelabelan graf *dragon* $D_{3,n}$ untuk n ganjil memenuhi aturan pelabelan *edge graceful*, sehingga graf *dragon* $D_{3,n}$ untuk n ganjil adalah graf *edge graceful*. □



Gambar 4.3 Pelabelan *edge graceful* pada graf *dragon* $D_{3,13}$

Gambar 4.3 merupakan contoh pelabelan *edge graceful* pada graf *dragon* $D_{3,13}$ dengan label sisi dan label titik diperoleh dari perumusan yang telah dibuktikan pada Teorema 4.4, sehingga didapatkan label sisi $\{1, 2, 3, ..., 13\}$ dan label titik $\{0, 1, 2, 3, ..., 12\}$.

4.5 Pelabelan *Edge Graceful* pada Graf Kincir Angin $K_n^{(m)}$

Teorema 4.5 berikut membahas mangenai pelabelan *edge graceful* graf kincir angin $K_n^{(m)}$.

Teorema 4.5

Graf kincir angin $K_n^{(m)}$ bukan graf edge graceful untuk setiap m dan n.

Bukti:

Graf kincir angin $K_n^{(m)}$ dengan mempunyai $mn - m + 1$ titik dan $\frac{mn^2 - mn}{2}$ sisi. Berikut diselidiki syarat perlu Graf kincir angin $K_n^{(m)}$ memenuhi pelabelan *edge graceful* atau tidak.

a. Untuk *m* dan *n* genap.

   Tulis $m = 2r$ dan $n = 2s$ untuk suatu r = 1, 2, … dan s = 2, 3, … , sehingga $p = 4rs - 2r + 1$ dan $q = 4rs^2 - 2rs$. Menurut Teorema 2.1 didapatkan

   1) Ruas kiri (titik)

$$\begin{aligned}\frac{p(p-1)}{2} \pmod p &= \frac{(4rs - 2r + 1)(4rs - 2r)}{2} \\ &= (4rs - 2r + 1)(2rs - r) \quad (\text{mod } 4rs - 2r + 1) \\ &= 0\end{aligned}$$

2) Ruas kanan (sisi)

$$\begin{aligned} q(q+1) \pmod p &= \left(4rs^2 - 2rs\right)\left(4rs^2 - 2rs + 1\right) \\ &= \left(\left(s(4rs - 2r + 1)\right) - s\right)\left(\left(s(4rs - 2r + 1)\right) - s + 1\right) \pmod{4rs - 2r + 1} \\ &= (-s)(-s+1) \\ &= s^2 - s \end{aligned}$$

Kemudian akan dibuktikan apakah ruas kiri sama dengan ruas kanan atau tidak.

Andaikan $s^2 - s = 0$

$\Leftrightarrow s(s-1) = 0$.

Solusi dari persamaan tersebut adalah $s = 0$ atau $s = 1$. Hal ini tidak mungkin karena $s \geq 2$. Jadi, ruas kiri tidak sama dengan ruas kanan. Dengan demikian untuk m dan n genap graf kincir angin $K_n^{(m)}$ tidak memenuhi syarat perlu pelabelan *edge graceful*, sehingga graf kincir angin $K_n^{(m)}$ untuk m dan n genap bukan graf *edge graceful*.

b. Untuk m dan n ganjil.

Tulis $m = 2r + 1$ dan $n = 2s + 1$ untuk suatu $r = 1, 2, \ldots$ dan $s = 2, 3, \ldots$, sehingga $p = 4rs + 2s + 1$ dan $q = 4rs^2 + 2rs + 2s^2 + s$. Menurut Teorema 2.1 didapatkan

1) Ruas kiri (titik)

$$\begin{aligned} \frac{p(p-1)}{2} \pmod p &= \frac{(4rs + 2s + 1)(4rs + 2s)}{2} \\ &= (4rs + 2s + 1)(2rs + s) \pmod{4rs + 2s + 1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

2) Ruas kanan (sisi)

$$\begin{aligned} q(q+1) \pmod p &= \left(4rs^2 + 2rs + 2s^2 + s\right)\left(4rs^2 + 2rs + 2s^2 + s + 1\right) \\ &= \left(\left(s(4rs + 2s + 1)\right) + 2rs\right)\left(\left(s(4rs + 2s + 1)\right) + 2rs + 1\right) \pmod{4rs + 2s + 1} \\ &= (2rs)(2rs + 1) \\ &= 4r^2s^2 + 2rs \end{aligned}$$

Kemudian akan dibuktikan apakah ruas kiri sama dengan ruas kanan atau tidak.

Andaikan $4r^2s^2 + 2rs = 0$

$$\Leftrightarrow (rs)(4rs + 2) = 0$$

$$\therefore \quad rs = 0 \text{ atau } rs = -\frac{2}{4}$$

Hal ini tidak mungkin karena r dan s merupakan bilangan bulat positif dengan $r \geq 1$ dan $s \geq 2$. Jadi, ruas kiri tidak sama dengan ruas kanan. Dengan demikian untuk m dan n ganjil graf kincir angin $K_n^{(m)}$ tidak memenuhi syarat perlu pelabelan *edge graceful*, sehingga graf kincir angin $K_n^{(m)}$ untuk m dan n ganjil bukan graf *edge graceful*.

c. Untuk m genap dan n ganjil.

Tulis $m = 2r$ dan $n = 2s + 1$ untuk suatu r = 1, 2, … dan s = 2, 3, … , sehingga $p = 4rs + 1$ dan $q = 4rs^2 + 2rs$. Menurut Teorema 2.1 didapatkan

1) Ruas kiri (titik)

$$\begin{aligned}\frac{p(p-1)}{2} \pmod p &= \frac{(4rs+1)(4rs)}{2} \\ &= (4rs+1)(2rs) \qquad (\text{mod } 4rs+1) \\ &= 0\end{aligned}$$

2) Ruas kanan (sisi)

$$\begin{aligned}q(q+1) \pmod p &= (4rs^2 + 2rs)(4rs^2 + 2rs + 1) \\ &= 16r^2s^4 + 16r^2s^3 + 4r^2s^2 + 4rs^2 + 2rs \\ &= ((4rs^3 + 4rs^2 + rs - s)(4rs + 1)) + rs + s^2 \qquad (\text{mod } 4rs+1) \\ &= rs + s^2\end{aligned}$$

Kemudian akan dibuktikan apakah ruas kiri sama dengan ruas kanan atau tidak.

Andaikan $rs + s^2 = 0$

$$\Leftrightarrow s(r + s) = 0$$

Solusi dari persamaan tersebut adalah $s = 0$ atau $r = -s$. Hal ini tidak mungkin karena r dan s merupakan bilangan bulat positif dengan $s \geq 2$. Jadi, ruas kiri tidak sama dengan ruas kanan. Dengan demikian untuk m genap dan n ganjil graf kincir angin $K_n^{(m)}$ tidak memenuhi syarat perlu pelabelan *edge graceful*, sehingga graf kincir angin $K_n^{(m)}$ untuk m genap dan n ganjil bukan graf *edge graceful*.

d. Untuk m ganjil dan n genap.

Tulis $m = 2r + 1$ dan $n = 2s$ untuk suatu r = 1, 2, … dan s = 2, 3, … , sehingga $p = 4rs + 2s - 2r$ dan $q = 4rs^2 - 2rs + 2s^2 - s$. Menurut Teorema 2.1 didapatkan

1) Ruas kiri (titik)

$$\begin{aligned} \frac{p(p-1)}{2} \pmod p &= \frac{(4rs + 2s - 2r)(4rs + 2s - 2r - 1)}{2} \\ &= (2rs + s - r)(4rs + 2s - 2r - 1) \qquad (\text{mod } 4rs + 2s - 2r) \\ &= (2rs + s - r)(-1) \\ &= -2rs - s + r \end{aligned}$$

2) Ruas kanan (sisi)

$$\begin{aligned} q(q+1) \pmod p &= (4rs^2 - 2rs + 2s^2 - s)(4rs^2 - 2rs + 2s^2 - s + 1) \\ &= ((s(4rs + 2s - 2r)) - s)((s(4rs + 2s - 2r)) - s + 1) \quad (\text{mod } 4rs + 2s - 2r) \\ &= (-s)(-s + 1) \\ &= s^2 - s \end{aligned}$$

Kemudian akan dibuktikan apakah ruas kiri sama dengan ruas kanan atau tidak.

Andaikan $-2rs - s + r = s^2 - s$

$\Leftrightarrow s^2 + 2rs - r = 0$

Solusi dari persamaan tersebut adalah $s = -r + \sqrt{r(r+1)}$ atau $s = -r - \sqrt{r(r+1)}$. Hal ini tidak mungkin karena s merupakan bilangan bulat positif. Jadi, ruas kiri tidak sama dengan ruas kanan. Dengan demikian untuk m ganjil dan n genap graf kincir angin $K_n^{(m)}$ tidak memenuhi syarat perlu pelabelan *edge graceful*, sehingga graf kincir angin $K_n^{(m)}$ untuk m ganjil dan n genap bukan graf *edge graceful*.

Jadi, untuk setiap m dan n graf kincir angin $K_n^{(m)}$ bukan graf *edge graceful*. $\square$

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Dari pembahasan sebelumnya dapat diambil kesimpulan bahwa:

a. Kelas graf yang bukan graf *edge graceful* yaitu graf roda W_n untuk $n \neq 3$, graf *grid* $P_4 \times P_n$ untuk $n \neq 3, 4$, graf *superstar* $S_{m,3}$ untuk *m* ganjil, graf *dragon* $D_{3,n}$ untuk *n* genap, dan graf kincir angin $K_n^{(m)}$ untuk setiap *m* dan *n* karena kelas-kelas graf tersebut tidak memenuhi syarat perlu pelabelan *edge graceful*.

b. Kelas graf yang merupakan graf *edge graceful* yaitu graf roda W_3, graf *grid* $P_4 \times P_n$ untuk $n = 3, 4$, graf *superstar* $S_{m,3}$ untuk *m* genap dan graf *dragon* $D_{3,n}$ untuk *n* ganjil.

c. Perumusan pelabelan *edge graceful* pada graf *superstar* $S_{m,3}$ untuk *m* genap sebagai berikut.

   1) Label sisi

   $$f(e_{1,j}) = \begin{cases} 3j-2 & \text{untuk} \quad j = 1, 3, \ldots, m-1 \\ 3j & \text{untuk} \quad j = 2, 4, \ldots, m \end{cases}$$

   $$f(e_{2,j}) = 3j-1 \quad \text{untuk} \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

   $$f(e_{3,j}) = \begin{cases} 3j & \text{untuk} \quad j = 1, 3, \ldots, m-1 \\ 3j-2 & \text{untuk} \quad j = 2, 4, \ldots, m \end{cases}$$

   2) Label titik

   $$f(v_0) = 0$$

   $$f(v_{1,j}) = \begin{cases} 3j-2 & \text{untuk} \quad j = 1, 3, \ldots, m-1 \\ 3j & \text{untuk} \quad j = 2, 4, \ldots, m \end{cases}$$

$$f(v_{2,j})=\begin{cases}6j-3 & (\text{mod } 3m+1) \quad \text{untuk} \quad j=1,3,\ldots,m-1\\ 6j-1 & (\text{mod } 3m+1) \quad \text{untuk} \quad j=2,4,\ldots,m\end{cases}$$

$$f(v_{3,j})=\begin{cases}6j-3 & (\text{mod } 3m+1) \quad \text{untuk} \quad j=2,4,\ldots,m\\ 6j-1 & (\text{mod } 3m+1) \quad \text{untuk} \quad j=1,3,\ldots,m-1\end{cases}$$

d. Perumusan pelabelan *edge graceful* pada graf *dragon* $D_{3,n}$ untuk n ganjil sebagai berikut.

1) Label sisi

$$f(a_i)=i \quad \text{untuk} \quad i=1,2,\ldots,n-1$$

$$f(b_i)=i+n-1 \quad \text{untuk} \quad i=1,2,3$$

2) label titik

$$f(u_i)=2i-1 \quad (\text{mod } n+2) \quad \text{untuk} \quad i=1,2,\ldots,n-1$$

$$f(v_i)=\begin{cases}3n+1 & (\text{mod } n+2) \quad \text{untuk} \quad i=1\\ 2n+2i-3 & (\text{mod } n+2) \quad \text{untuk} \quad i=2,3\end{cases}$$

5.2 Saran

Masih terbuka kesempatan bagi peneliti lain untuk melakukan penelitian mengenai pelabelan *edge graceful* pada kelas graf yang berbeda lainnya dan disarankan untuk mengkaji pelabelan *edge graceful* pada kelas graf yang termasuk graf tak terhubung seperti $C_{2m+1} \cup C_{2n}$, mP_n, $C_n \cup S_n$, atau graf tak terhubung yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Alifah. 2005. “Pelabelan Edge Graceful pada Graf lintasan, Graf sikel, Graf Bintang, dan Graf Superstar”. Tidak dipublikasikan. Skripsi. Jember: Fakultas MIPA Umiversitas Jember.

Bartle, R. G. dan Sherbert, D. R. 2000. *Introduction To Real Analysis*. Third Edition. New York : John Wiley and Sons, Inc.

Chartrand, G. dan Lesniak, L. 1996. *Graph and Digraph*. Third Edition. London: Chapman dan Hall/CRC.

Gallian, J.A. 2009. A dynamic Survey of Graph Labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics*. 16: 143-150. http://www.combinatorics.org/Surveys/ds6.pdf. [20 Juli 2010]

Kasumasari, T. A. 2009. “Pelabelan Edge Graceful pada Beberapa Kelas Graf”. Tidak dipublikasikan. Skripsi. Jember: Fakultas MIPA Umiversitas Jember.

Shiu, W. C. 1998. *Some k-fold Edge-graceful Labellings of* (p; p - 1) - *graphs.* Hongkong: Hongkong Baptist University

Taufik, A. M. 2008. ”Pelabelan Total Sisi Ajaib pada Graf Bintang yang Diperumum”. Tidak dipublikasikan. Skripsi. Bandung: Fakultas MIPA Institut Teknologi Bandung.

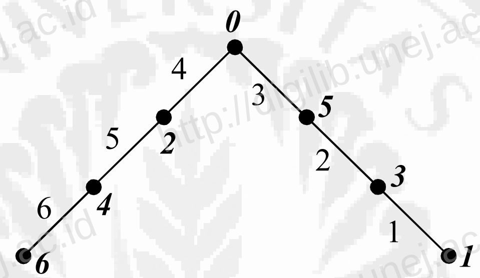
Weisstein, E. W. 1999. Windmill Graph. *From mathworld*. A Wolfram Web Resource. http:/mathworld.wolfram.com/WindmillGraph.html [20 Juli 2010]

Zuchri, S. “Pelabelan Total Tak Teratur Titik pada Graf Amalgamasi Siklus”. Tidak dipublikasikan. Skripsi. Bandung: Fakultas MIPA Institut Teknologi Bandung.

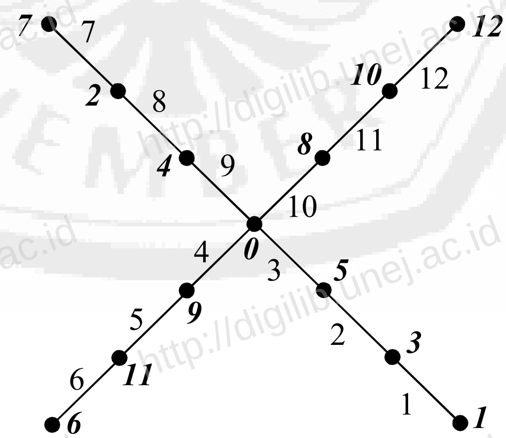
Lampiran A. Perumusan Pelabelan *Edge Graceful* pada Graf *Superstar* $S_{m,3}$

Berikut akan diberikan beberapa graf *superstar* $S_{m,3}$ dengan *m* genap yang telah dilabeli menurut definisi pelabelan *edge graceful* untuk memperoleh pola label sisi sehingga didapatkan perumusan pelabelan sisi secara umum seperti yang tertulis pada pembuktian Teorema 4.3.

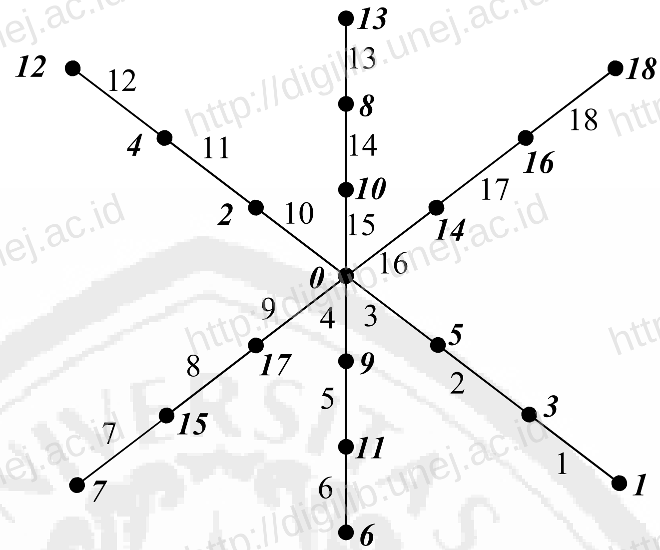
1) Pelabelan *edge graceful* pada graf *superstar* $S_{2,3}$



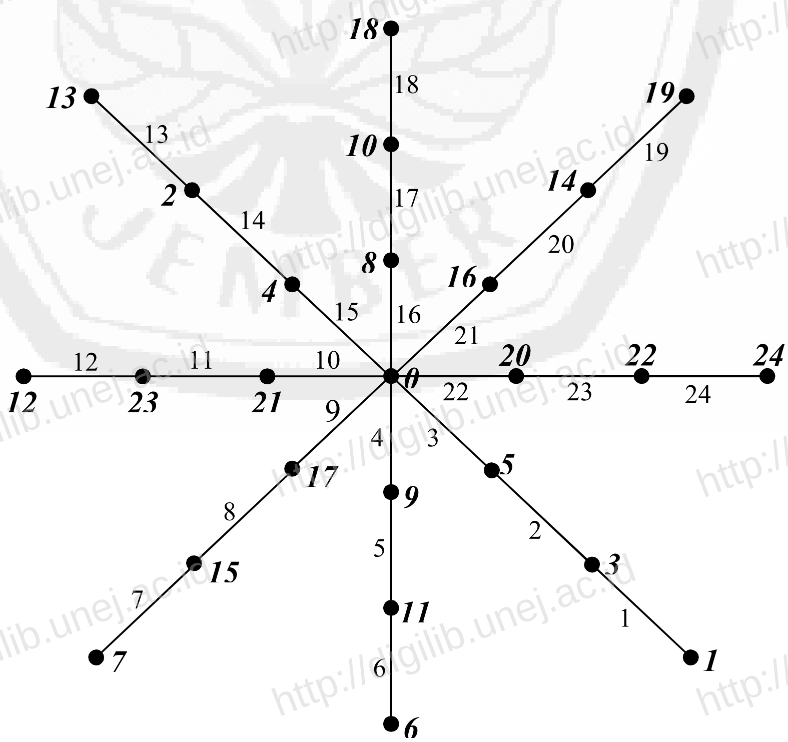
2) Pelabelan *edge graceful* pada graf *superstar* $S_{4,3}$



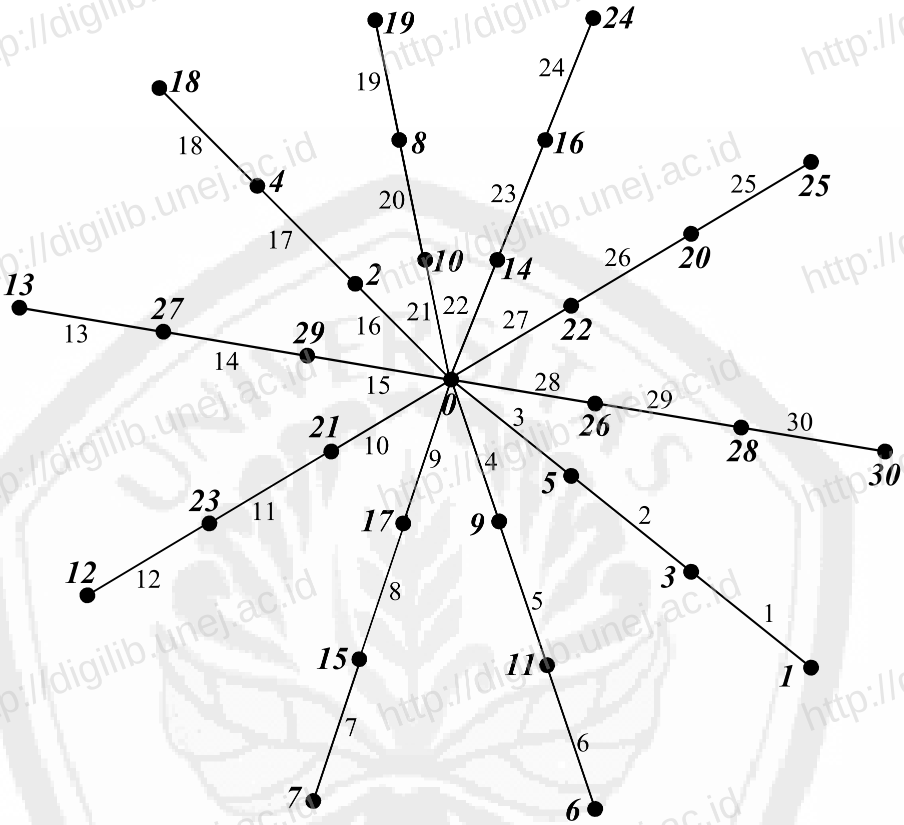
3) Pelabelan *edge graceful* pada graf *superstar* $S_{6,3}$



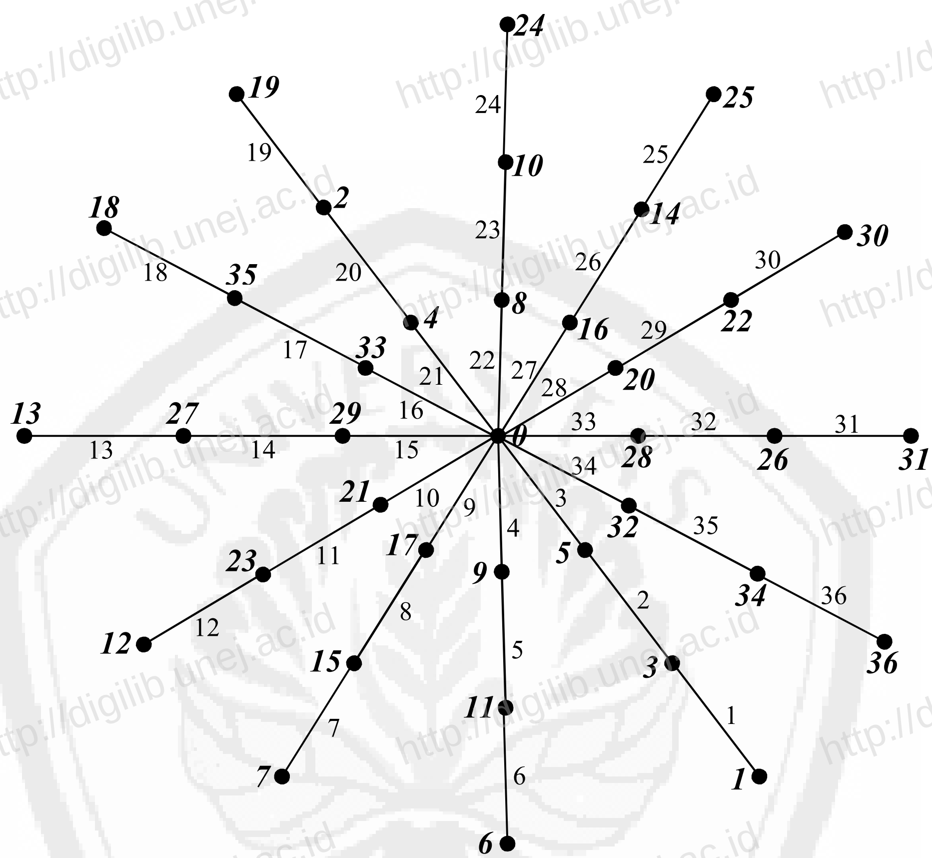
4) Pelabelan *edge graceful* pada graf *superstar* $S_{8,3}$



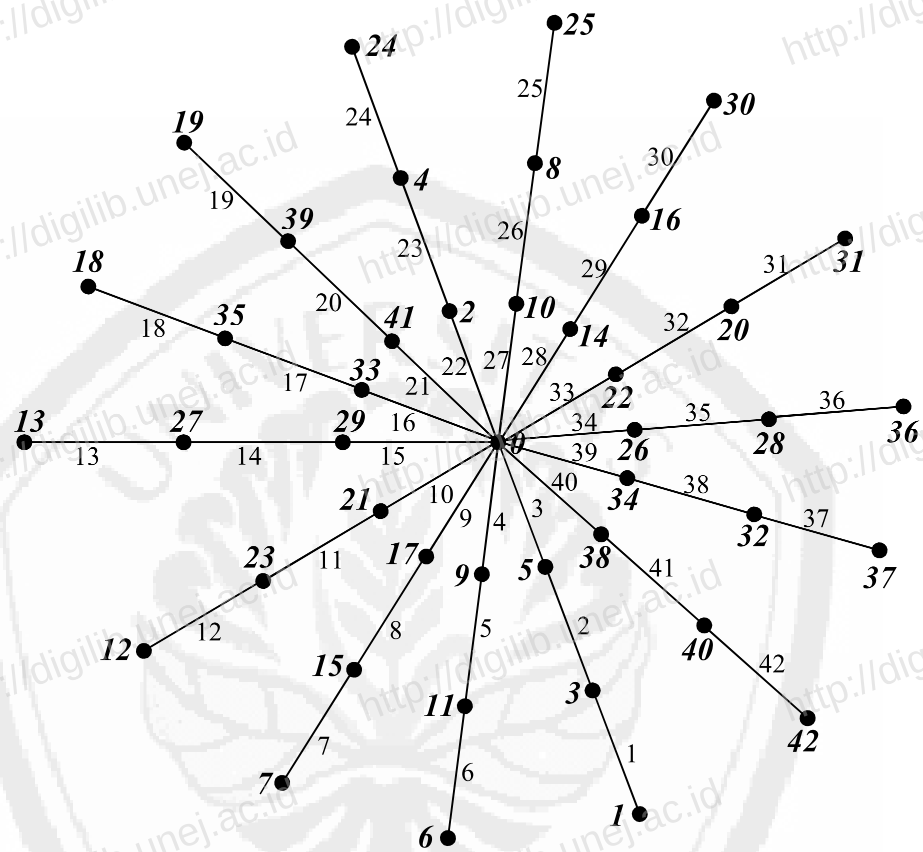
5) Pelabelan *edge graceful* pada graf *superstar* $S_{10,3}$



6) Pelabelan *edge graceful* pada graf *superstar* $S_{12,3}$



7) Pelabelan *edge graceful* pada graf *superstar* $S_{14,3}$



Pelabelan *edge graceful* pada graf *superstar* $S_{m,3}$ dengan $m = 2,4,6,8,10,12,14$ diatas dapat dituliskan dalam bentuk tabel berikut yang berupa barisan label sisi untuk mempermudah dalam mendapatkan perumusannya.

a) Label sisi $e_{1,j}$ (sisi ke-1 lintasan ke-*j*)

Tabel L.A.1 Pola label sisi pada graf *superstar* $S_{m,3}$ untuk m genap

m \ $e_{1,j}$	$e_{1,1}$	$e_{1,2}$	$e_{1,3}$	$e_{1,4}$	$e_{1,5}$	$e_{1,6}$	$e_{1,7}$	$e_{1,8}$	$e_{1,9}$	$e_{1,10}$	$e_{1,11}$	$e_{1,12}$	$e_{1,13}$	$e_{1,14}$	$\cdots$
2	1	6													
4	1	6	7	12											
6	1	6	7	12	13	18									
8	1	6	7	12	13	18	19	24							
10	1	6	7	12	13	18	19	24	25	30					
12	1	6	7	12	13	18	19	24	25	30	31	36			
14	1	6	7	12	13	18	19	24	25	30	31	36	37	42	
$\vdots$															

Berdasarkan Tabel L.A.1, untuk mempermudah membuat pola barisan label sisi $e_{1,j}$ maka *j* dibedakan menjadi ganjil dan genap seperti yang ditunjukkan pada Tabel L.A.2.

Tabel L.A.2 Pola label sisi $e_{1,j}$ pada graf *superstar* $S_{m,3}$ untuk m genap

m	$e_{1,j}$	
	j = 1, 3, …, m-1	j = 2, 4, …,m
2	1	6
4	1, 7	6, 12
6	1, 7, 13	6, 12, 18
8	1, 7, 13, 19	6, 12, 18, 24
10	1, 7, 13, 19, 25	6, 12, 18, 24, 30
12	1, 7, 13, 19, 25, 31	6, 12, 18, 24, 30, 36
14	1, 7, 13, 19, 25, 31, 37	6, 12, 18, 24, 30, 36, 42
⋮		
pola	$f(e_{1,j}) = 3j - 2$	$f(e_{1,j}) = 3j$

Berdasarkan Tabel L.A.2, didapatkan permusan untuk label sisi $e_{1,j}$ dengan cara sebagai berikut.

(1) Cara mendapatkan perumusan label sisi $e_{1,j}$ untuk j = 1, 3, …, m-1

Untuk barisan j, maka

$$\begin{aligned} g(j) = U_j &= a + (j-1)b \\ &= 1 + (j-1)2 \\ &= 2j - 1 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Untuk barisan label sisi $e_{1,j}$, maka

$$\begin{aligned} (f \circ g)(j) = U_j &= a + (j-1)b \\ &= 1 + (j-1)6 \\ &= 6j - 5 \end{aligned} \tag{A.2}$$

Jika $f(j)$ dimisalkan dengan

$$f(j) = aj + b \tag{A.3}$$

maka berdasarkan persamaan (A.1) dan (A.2) diperoleh hubungan:

$$(f \circ g)(j) = f(g(j)) = f(2j-1)$$

$$\Leftrightarrow \qquad 6j - 5 = a(2j-1) + b$$

$$\Leftrightarrow \qquad 6j - 5 = 2aj - a + b \tag{A.4}$$

Dengan menggunakan sifat kesamaan suku banyak, dari persamaan (A.4) diperoleh:

$$6 = 2a \tag{A.5}$$

$$-a + b = -5 \tag{A.6}$$

Dari persamaan (A.5), diperoleh $a = 3$.

Kemudian subsitusikan $a = 3$ ke persamaan (A.6), sehingga diperoleh:

$$-3 + b = -5$$

$$b = -2.$$

Selanjutnya, subsitusikan $a = 3$ dan $b = -2$ ke persamaan (A.3) sehingga diperoleh perumusan label sisi $e_{1,j}$ untuk j = 1, 3, …, m-1 sebagai berikut.

$$f(e_{1,j}) = f(j) = 3j - 2$$

(2) Cara mendapatkan perumusan label sisi $e_{1,j}$ untuk j = 2, 4, …, m

Untuk barisan j, maka

$$\begin{aligned} g(j) = U_j &= a + (j-1)b \\ &= 2 + (j-1)2 \\ &= 2j \end{aligned} \tag{A.7}$$

Untuk barisan label sisi $e_{1,j}$, maka

$$\begin{aligned} (f \circ g)(j) = U_j &= a + (j-1)b \\ &= 6 + (j-1)6 \\ &= 6j \end{aligned} \tag{A.8}$$

Jika $f(j)$ dimisalkan dengan

$$f(j) = aj + b \tag{A.9}$$

maka berdasarkan persamaan (A.7) dan (A.8) diperoleh hubungan:

$$(f \circ g)(j) = f(g(j)) = f(2j)$$
$$\Leftrightarrow \qquad 6j = a(2j) + b$$
$$\Leftrightarrow \qquad 6j = 2aj + b \tag{A.10}$$

Dengan menggunakan sifat kesamaan suku banyak, dari persamaan (A.10) diperoleh:

$$6 = 2a \tag{A.11}$$
$$b = 0$$

Dari persamaan (A.11), diperoleh $a = 3$.

Kemudian subsitusikan $a = 3$ dan $b = 0$ ke persamaan (A.9) sehingga diperoleh perumusan label sisi $e_{1,j}$ untuk j = 2, 4, …, *m* sebagai berikut.

$$f\left(e_{1,j}\right) = f(j) = 3j$$

b) Label sisi $e_{2,j}$ (sisi ke-2 lintasan ke-*j*)

Tabel L.A.3 Pola label sisi $e_{2,j}$ pada graf *superstar* $S_{m,3}$ untuk m genap

m \ $e_{2,j}$	$e_{1,1}$	$e_{1,2}$	$e_{1,3}$	$e_{1,4}$	$e_{1,5}$	$e_{1,6}$	$e_{1,7}$	$e_{1,8}$	$e_{1,9}$	$e_{1,10}$	$e_{1,11}$	$e_{1,12}$	$e_{1,13}$	$e_{1,14}$	$\cdots$
2	2	5													
4	2	5	8	11											
6	2	5	8	11	14	17									
8	2	5	8	11	14	17	20	23							
10	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29					
12	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35			
14	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41	
$\vdots$															
pola	$f(e_{2,j}) = 3j-1$ untuk $j = 1, 2, \ldots, m$														

Berdasarkan Tabel L.A.3, barisan label sisi $e_{2,j}$ untuk $j = 1, 2, \ldots, m$ membentuk barisan aritmatika maka perumusan untuk label sisi $e_{2,j}$ untuk $j = 1, 2, \ldots, m$ didapatkan dengan cara sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f(e_{2,j}) = U_j &= a + (j-1)b \\ &= 2 + (j-1)3 \\ &= 3j - 1 \end{aligned}$$

c) Label sisi $e_{3,j}$ (sisi ke-3 lintasan ke-*j*)

Tabel L.A.4 Pola label sisi pada graf *superstar* $S_{m,3}$ untuk m genap

m \ $e_{3,j}$	$e_{1,1}$	$e_{1,2}$	$e_{1,3}$	$e_{1,4}$	$e_{1,5}$	$e_{1,6}$	$e_{1,7}$	$e_{1,8}$	$e_{1,9}$	$e_{1,10}$	$e_{1,11}$	$e_{1,12}$	$e_{1,13}$	$e_{1,14}$	$\cdots$
2	3	4													
4	3	4	9	10											
6	3	4	9	10	15	16									
8	3	4	9	10	15	16	21	22							
10	3	4	9	10	15	16	21	22	27	28					
12	3	4	9	10	15	16	21	22	27	28	33	34			
14	3	4	9	10	15	16	21	22	27	28	33	34	39	40	
$\vdots$															

Berdasarkan Tabel L.A.4, untuk mempermudah membuat pola barisan label sisi $e_{3,j}$ jika *j* dibedakan menjadi ganjil dan genap seperti yang ditunjukkan pada Tabel L.A.5.

Tabel L.A.5 Pola label sisi $e_{3,j}$ pada graf *superstar* $S_{m,3}$ untuk m genap

m	$e_{3,j}$	
	$j = 1, 3, \ldots, m\text{-}1$	$j = 2, 4, \ldots, m$
2	3	4
4	3, 9	4, 10
6	3, 9, 15	4, 10, 16
8	3, 9, 15, 21	4, 10, 16, 22
10	3, 9, 15, 21, 27	4, 10, 16, 22, 28
12	3, 9, 15, 21, 27, 33	4, 10, 16, 22, 28, 34
14	3, 9, 15, 21, 27, 33, 39	4, 10, 16, 22, 28, 34, 40
$\vdots$		
pola	$f(e_{3,j}) = 3j$	$f(e_{3,j}) = 3j - 2$

Berdasarkan Tabel L.A.5, didapatkan permusan untuk label sisi $e_{1,j}$ dengan cara sebagai berikut.

(1) Cara mendapatkan perumusan label sisi $e_{3,j}$ untuk j = 1, 3, …, m-1

Untuk barisan j, maka

$$g(j) = U_j = a + (j-1)b$$
$$= 1 + (j-1)2$$
$$= 2j - 1 \qquad \text{(A.12)}$$

Untuk barisan label sisi $e_{3,j}$, maka

$$(f \circ g)(j) = U_j = a + (j-1)b$$
$$= 3 + (j-1)6$$
$$= 6j - 3 \qquad \text{(A.13)}$$

Jika $f(j)$ dimisalkan dengan

$$f(j) = aj + b \qquad \text{(A.14)}$$

maka berdasarkan persamaan (A.12) dan (A.13) diperoleh hubungan:

$$(f \circ g)(j) = f(g(j)) = f(2j-1)$$
$$\Leftrightarrow \quad 6j - 3 = a(2j-1) + b$$
$$\Leftrightarrow \quad 6j - 3 = 2aj - a + b \qquad \text{(A.15)}$$

Dengan menggunakan sifat kesamaan suku banyak, dari persamaan (A.15) diperoleh:

$$6 = 2a \qquad \text{(A.16)}$$
$$-a + b = -3 \qquad \text{(A.17)}$$

Dari persamaan (A.16), diperoleh $a = 3$.

Kemudian subsitusikan $a = 3$ ke persamaan (A.17), sehingga diperoleh:

$$-3 + b = -3$$
$$b = 0.$$

Selanjutnya, subsitusikan $a = 3$ dan $b = 0$ ke persamaan (A.14) sehingga diperoleh perumusan label sisi $e_{3,j}$ untuk j = 1, 3, …, m-1 sebagai berikut.

$$f\left(e_{3,j}\right) = f(j) = 3j$$

(2) Cara mendapatkan perumusan label sisi $e_{1,j}$ untuk $j = 2, 4, \ldots, m$

Untuk barisan j, maka

$$\begin{aligned} g(j) = U_j &= a + (j-1)b \\ &= 2 + (j-1)2 \\ &= 2j \end{aligned} \tag{A.18}$$

Untuk barisan label sisi $e_{1,j}$, maka

$$\begin{aligned} (f \circ g)(j) = U_j &= a + (j-1)b \\ &= 4 + (j-1)6 \\ &= 6j - 2 \end{aligned} \tag{A.19}$$

Jika $f(j)$ dimisalkan dengan

$$f(j) = aj + b \tag{A.20}$$

maka berdasarkan persamaan (A.18) dan (A.19) diperoleh hubungan:

$$\begin{aligned} &(f \circ g)(j) = f(g(j)) = f(2j) \\ \Leftrightarrow \quad & 6j - 2 = a(2j) + b \\ \Leftrightarrow \quad & 6j - 2 = 2aj + b \end{aligned} \tag{A.20}$$

Dengan menggunakan sifat kesamaan suku banyak, dari persamaan (A.20) diperoleh:

$$\begin{aligned} 6 &= 2a \\ b &= -2 \end{aligned} \tag{A.21}$$

Dari persamaan (A.21), diperoleh $a = 3$.

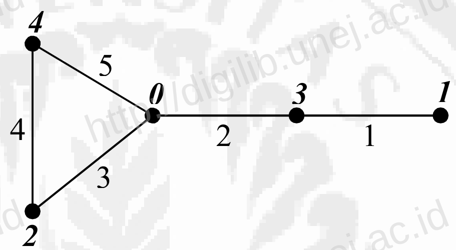
Kemudian subsitusikan $a = 3$ dan $b = -2$ ke persamaan (A.20) sehingga diperoleh perumusan label sisi $e_{3,j}$ untuk $j = 2, 4, \ldots, m$ sebagai berikut.

$$f\left(e_{3,j}\right) = f(j) = 3j - 2$$

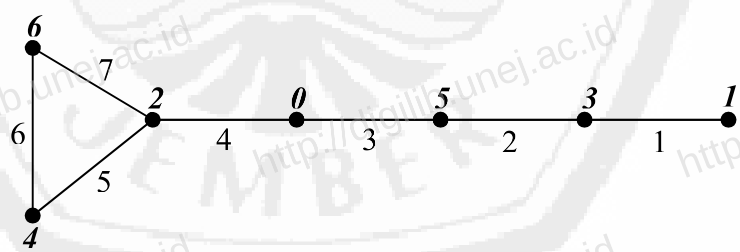
Lampiran B. Perumusan Pelabelan *Edge Graceful* pada Graf *Dragon* $D_{3,n}$

Berikut akan diberikan beberapa graf *Dragon* $D_{3,n}$ dengan *n* ganjil yang telah dilabeli menurut definisi pelabelan *edge graceful* untuk memperoleh pola label sisi sehingga didapatkan perumusan pelabelan sisi secara umum seperti yang tertulis pada pembuktian Teorema 4.4.

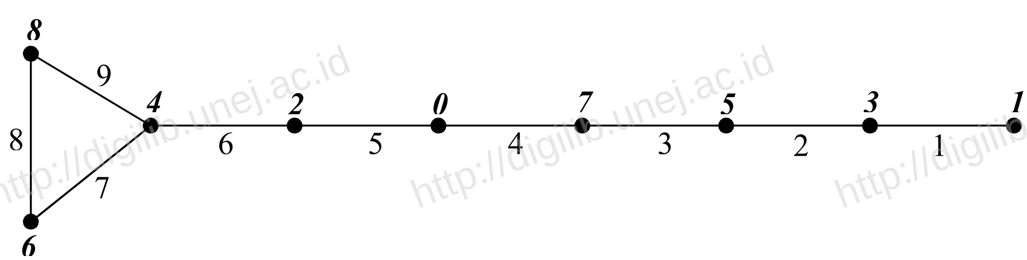
1) Pelabelan *edge graceful* pada graf *dragon* $D_{3,3}$



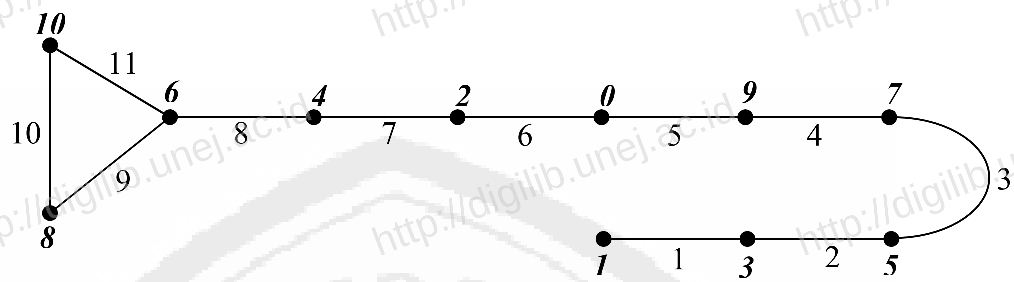
2) Pelabelan *edge graceful* pada graf *dragon* $D_{3,5}$



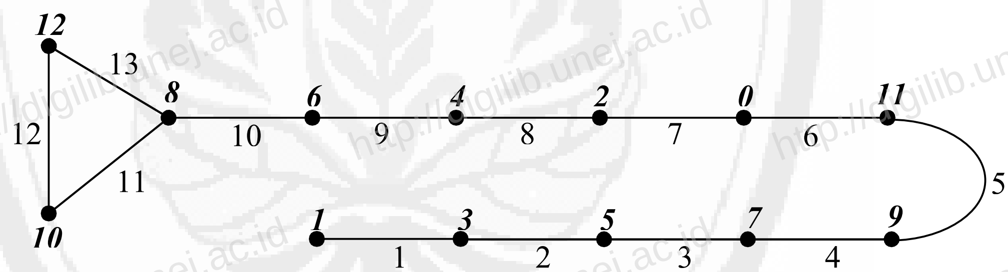
3) Pelabelan *edge graceful* pada graf *dragon* $D_{3,7}$



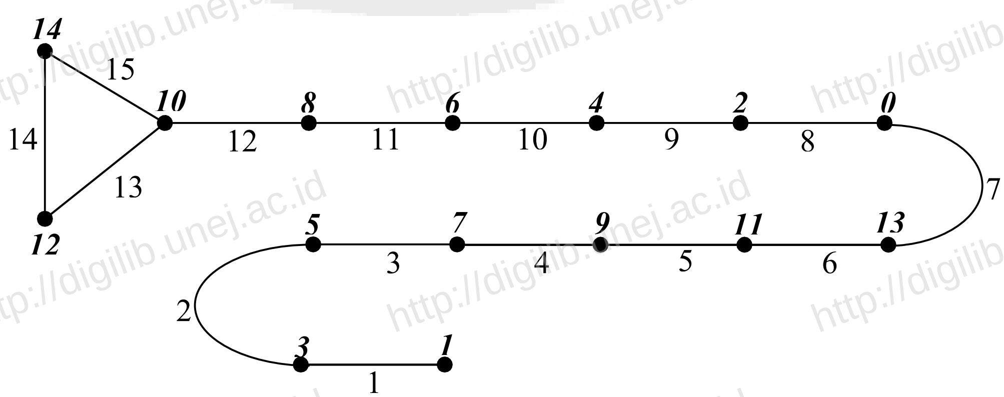
4) Pelabelan *edge graceful* pada graf *dragon* $D_{3,9}$



5) Pelabelan *edge graceful* pada graf *dragon* $D_{3,11}$



6) Pelabelan *edge graceful* pada graf *dragon* $D_{3,13}$



Pelabelan *edge graceful* pada graf *Dragon* $D_{3,n}$ dengan $n = 3,5,7,9,11,13$ diatas dapat dituliskan dalam bentuk tabel berikut yang berupa barisan label sisi untuk mempermudah dalam mendapatkan perumusannya.

a) Label sisi a_i

Tabel L.B.1 Pola label sisi a_i pada graf *Dragon* $D_{3,n}$ untuk n ganjil

n \ a_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	$\cdots$
3	1	2											
5	1	2	3	4									
7	1	2	3	4	5	6							
9	1	2	3	4	5	6	7	8					
11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			
13	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
$\vdots$													
pola	$f(a_i) = i$ untuk $i = 1,2,\ldots,n-1$												

b) Label sisi b_i

Tabel L.B.1 Pola label sisi b_i pada graf *Dragon* $D_{3,n}$ untuk n ganjil

n \ b_i	b_1	b_2	b_3
3	3	4	5
5	5	6	7
7	7	8	9
9	9	10	11
11	11	12	13
13	13	14	15
$\vdots$			
pola	$f(b_i) = i + n - 1$		

Cara mendapatkan perumusan untuk label sisi b_i pada graf *Dragon* $D_{3,n}$ untuk n ganjil sebagai berikut.

Untuk barisan n, maka

$$g(n) = u_n = 3 + (n-1)2$$

$$= 2n + 1 \qquad \text{(B.1)}$$

Berdasarkan Tabel L.B.1, barisan label sisi b_i untuk beberapa n-nya dapat dituliskan sebagai berikut.

- $n = 3$, ,

$$\left.\begin{array}{l} b_1 = 3 \\ b_2 = 4 \\ b_3 = 5 \end{array}\right\} i + 2n - 4 \qquad \text{(B.2a)}$$

- $$\left.\begin{array}{l} n=5, \\ b_1=5 \\ b_2=6 \\ b_3=7 \end{array}\right\} i+2n-6 \qquad \text{(B.2b)}$$

- $$\left.\begin{array}{l} n=7, \\ b_1=7 \\ b_2=8 \\ b_3=9 \end{array}\right\} i+2n-8 \qquad \text{(B.2c)}$$

- $$\left.\begin{array}{l} n=9, \\ b_1=7 \\ b_2=8 \\ b_3=9 \end{array}\right\} i+2n-10 \qquad \text{(B.2d)}$$

Dari persamaan B.2a – B.2d, barisan 4, 6, 8, 10, … dibentuk rumusan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} (f\circ g)(n) = u_n &= 4+(n-1)2 \\ &= 2n+2 \end{aligned} \qquad \text{(B.3)}$$

Jika $f(j)$ dimisalkan dengan

$$f(n) = an+b \qquad \text{(B.4)}$$

maka berdasarkan persamaan (B.1) dan (B.3) diperoleh hubungan:

$$\begin{aligned} & (f\circ g)(n) = f(g(n)) = f(2n+1) \\ \Leftrightarrow \quad & 2n+2 = a(2n+1)+b \\ \Leftrightarrow \quad & 2n+2 = 2aj+a+b \end{aligned} \qquad \text{(B.5)}$$

Dengan menggunakan sifat kesamaan suku banyak, dari persamaan (B.5) diperoleh:

$$2a = 2 \qquad \text{(B.6)}$$

$$a+b = 2 \qquad \text{(B.7)}$$

Dari persamaan (B.6), diperoleh $a = 1$.

Kemudian subsitusikan $a = 1$ ke persamaan (B.7), sehingga diperoleh:

$$1 + b = 2$$
$$b = 1$$

Selanjutnya, subsitusikan $a = 1$ dan $b = 1$ ke persamaan (B.4) maka diperoleh:

$$f(n) = n + 1 \tag{B.8}$$

Dengan demikian dari persamaan (B.8), persamaan B.2a – B.2d menjadi sebagai berikut.

$$(i + 2n) - (n + 1)$$
$$\Leftrightarrow i + 2n - n - 1$$
$$\Leftrightarrow i + n - 1 \tag{B.9}$$

Persamaan (B.9) merupakan perumusan untuk label sisi b_i pada graf *Dragon* $D_{3,n}$ untuk n ganjil.