



**PENERAPAN MATRIKS *LAPLACIAN* UNTUK MENENTUKAN  
BANYAKNYA POHON RENTANG PADA GRAF KINCIR,  
GRAF BUKU DAN GRAF MATAHARI**

**SKRIPSI**

Oleh  
**Wahyu Yakin Subroto**  
**NIM 071810101110**

**JURUSAN MATEMATIKA**  
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**  
**UNIVERSITAS JEMBER**  
**2012**



**PENERAPAN MATRIKS LAPLACIAN UNTUK MENENTUKAN  
BANYAKNYA POHON RENTANG PADA GRAF KINCIR,  
GRAF BUKU DAN GRAF MATAHARI**

**SKRIPSI**

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat  
untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1)  
dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

**Wahyu Yakin Subroto  
NIM 071810101110**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS JEMBER  
2012**

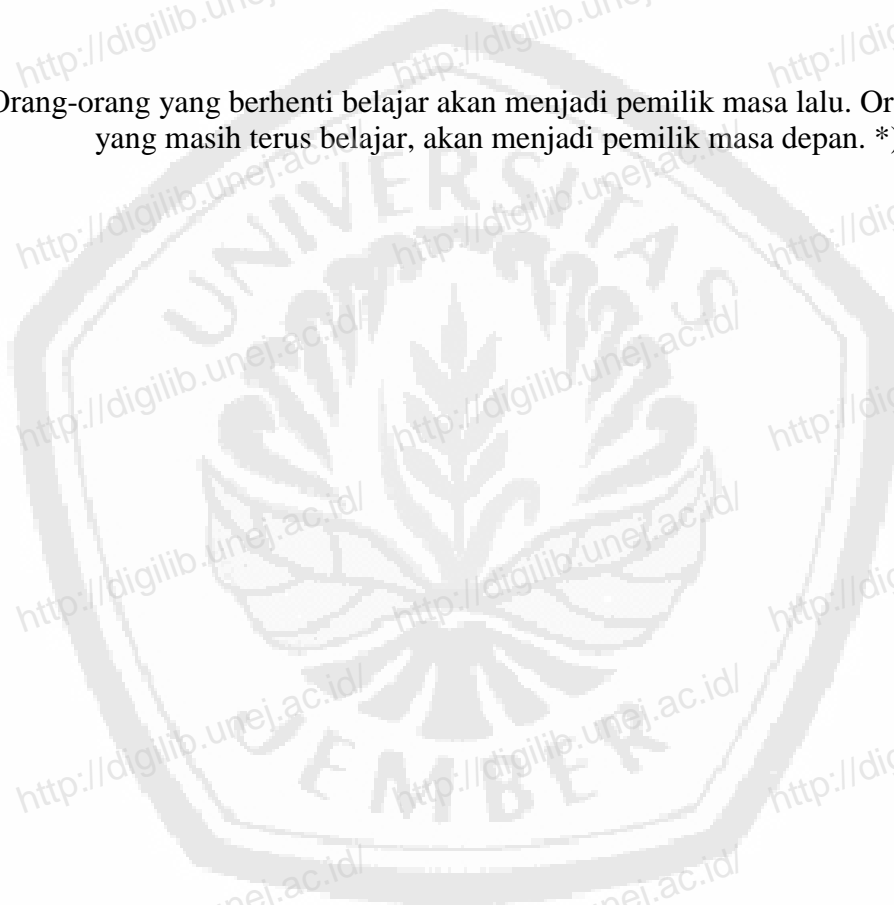
## **PERSEMBAHAN**

Skripsi ini saya persembahkan untuk:

1. Ibunda Nasihani dan Ayahanda Astamin yang tercinta, yang selalu memberikan do'a dan semangat yang tiada terkira hingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini;
2. adik-adik yang tersayang, Makmur Wahana Sudrajat (Alm), Sri Astuti, Reni Puspita Ayu, David Saputra, dan Niken Wahyu Handayani yang selalu memberikan support, semangat, dan keceriaan dalam hidupku;
3. guru-guruku sejak taman kanak-kanak sampai dengan perguruan tinggi;
4. Almamater Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

## MOTO

“Orang-orang yang berhenti belajar akan menjadi pemilik masa lalu. Orang-orang yang masih terus belajar, akan menjadi pemilik masa depan. \*)



---

\*) Teguh, M. 2006. *Becoming A Star*. Jakarta: PT. Syaamil Cipta Media.

## PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

nama : Wahyu Yakin Subroto

NIM : 071810101110

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa karya ilmiah yang berjudul “Penerapan Matriks *Laplacian* untuk Menentukan Banyaknya Pohon Rentang pada Graf Kincir, Graf Buku dan Graf Matahari” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi manapun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak mana pun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, ..... 2012

Yang menyatakan,

Wahyu Yakin Subroto  
NIM 071810101110

**SKRIPSI**

**PENERAPAN MATRIKS LAPLACIAN UNTUK MENENTUKAN  
BANYAKNYA POHON RENTANG PADA GRAF KINCIR,  
GRAF BUKU DAN GRAF MATAHARI**

Oleh  
Wahyu Yakin Subroto  
071810101110

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si.

Dosen Pembimbing Anggota : Kiswara Agung Santoso, M.Kom.

## PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul “Penerapan Matriks *Laplacian* untuk Menentukan Banyaknya Pohon Rentang pada Graf Kincir, Graf Buku dan Graf Matahari” telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji:

Ketua,

Sekretaris,

Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si.  
NIP 197408132000032004

Kiswara Agung Santoso, M.Kom  
NIP 197209071998031003

Penguji I,

Penguji II,

Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si.  
NIP 196908281998021001

Dr. Alfian Futuhul Hadi, S.Si., MSi.  
NIP 19740719 2000121001

Mengesahkan  
Dekan,

Prof. Drs. Kusno, DEA, Ph.D.  
NIP 196101081986021001

## RINGKASAN

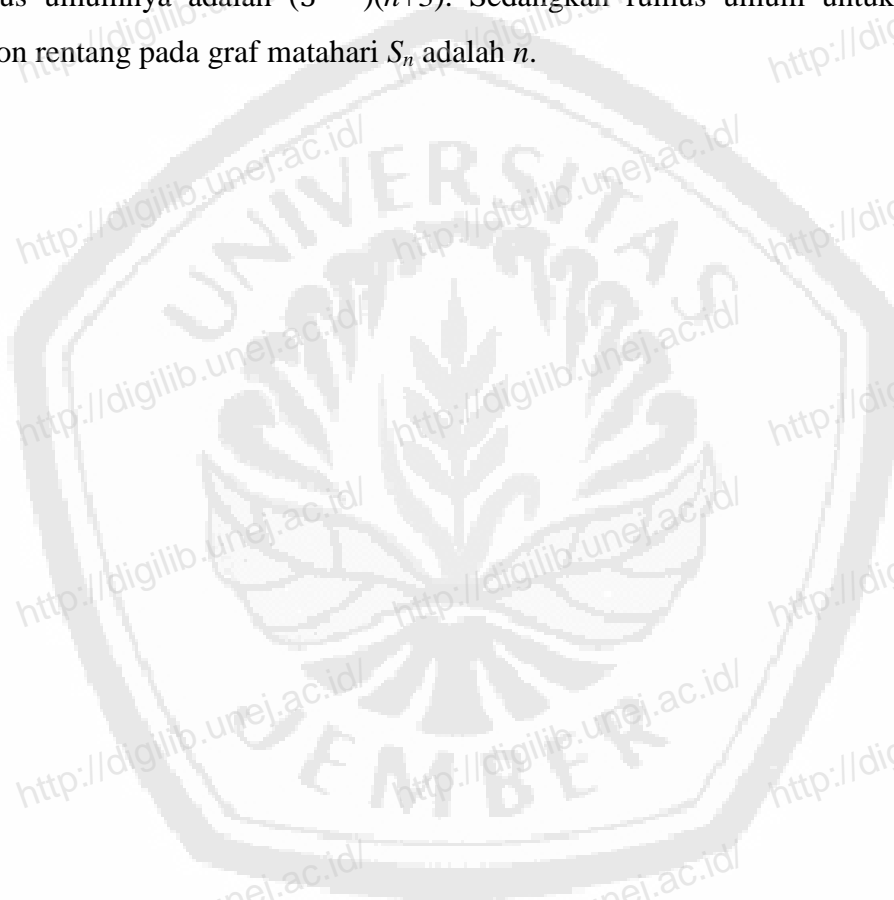
**Penerapan Matriks *Laplacian* untuk Menentukan Banyaknya Pohon Rentang pada Graf Kincir, Graf Buku dan Graf Matahari;** Wahyu Yakin Subroto, 071810101110; 2012: 38 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Graf berlabel pada titik adalah graf yang setiap titiknya diberi label. Untuk menentukan banyaknya unsur graf berlabel dapat dilakukan dengan membedakan mana graf yang tidak identik. Sehingga jumlah graf berlabel lebih banyak daripada jumlah graf yang tidak berlabel. Sebuah pohon yang terbentuk dari graf sederhana yang terhubung, dimana memuat semua titik pada graf tersebut dinamakan pohon rentang. Pohon rentang dari sebuah graf tidaklah tunggal. Dengan kata lain sebuah graf dapat mempunyai satu atau lebih pohon rentang. Untuk menentukan pohon rentang digunakan graf berlabel. Sedangkan untuk menentukan banyaknya pohon rentang pada graf kincir  $K_n^{(m)}$ , graf buku  $B_n$  dan graf matahari  $S_n$  menggunakan matriks *laplacian*. Dimana matriks *laplacian* didapat dari pengurangan matriks derajat dengan matriks *adjacent*. Tujuan penelitian adalah mengetahui cara mencari rumus umum untuk menentukan banyaknya pohon rentang pada graf kincir  $K_n^{(m)}$ , graf buku  $B_n$  dan graf matahari  $S_n$  dengan menggunakan matriks *laplacian*.

Penelitian dilakukan dalam beberapa langkah. Langkah pertama adalah menentukan matriks *laplacian* dari graf kincir  $K_n^{(m)}$ , graf buku  $B_n$  dan graf matahari  $S_n$  dengan. Langkah kedua adalah menghapus baris pertama dan kolom pertama pada matriks *laplacian*. Langkah ketiga adalah menghitung determinan dari matriks yang telah dihapus baris pertama dan kolom pertama.



Berdasarkan kajian yang telah dilakukan, didapatkan hasil bahwa dengan menghapus salah satu sisi pembuat siklus pada graf matahari maka akan didapatkan pohon rentang dari graf tersebut. Sedangkan dari perhitungan matriks *laplacian* didapatkan rumus umum untuk banyaknya pohon rentang pada graf kincir  $K_n^{(m)}$  adalah  $n^{nm-2m}$ . Untuk banyaknya pohon rentang pada graf buku  $B_n$  didapat rumus umumnya adalah  $(3^{n-1})(n+3)$ . Sedangkan rumus umum untuk banyaknya pohon rentang pada graf matahari  $S_n$  adalah  $n$ .



## PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Penerapan Matriks *Laplacian* untuk Menentukan Banyaknya Pohon Rentang pada Graf Kincir, Graf Buku dan Graf Matahari”. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Penulisan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si., dan Kiswara Agung Santoso, M.Kom., selaku Dosen Pembimbing yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
2. Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si., dan Dr. Alfian Futuhul Hadi, S.Si., M.Si., selaku dosen penguji yang telah memberi masukan dalam skripsi ini;
3. ibu dan bapak serta keluarga di rumah yang telah memberikan doa;
4. teman-teman angkatan 2007, Riski, Silvi, Wasil, Yasin, Sintia, Khorirotus, Wiji, Hamid dan Risha serta teman-teman yang lainnya, terima kasih atas kebersamaan selama waktu kuliah dan telah memberikan semangat dan motivasi;
5. semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, September 2012

Penulis

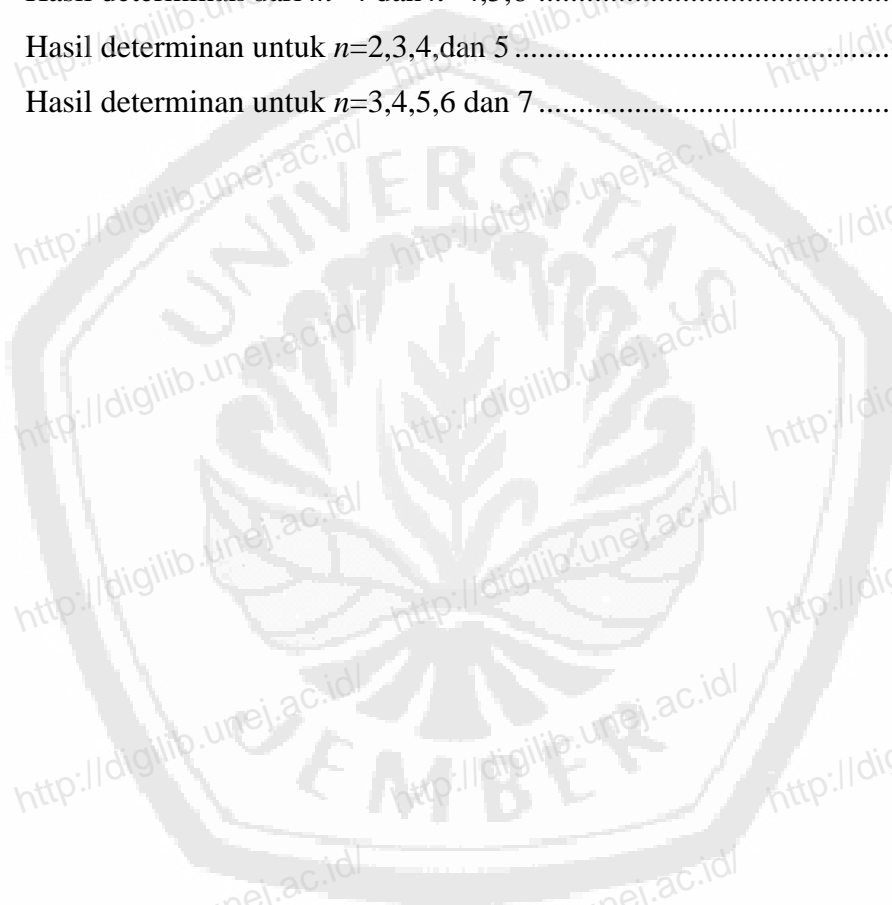
## DAFTAR ISI

	Halaman
<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	i
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b> .....	ii
<b>HALAMAN MOTO</b> .....	iii
<b>HALAMAN PERNYATAAN</b> .....	iv
<b>HALAMAN PEMBIMBINGAN</b> .....	v
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b> .....	vi
<b>RINGKASAN</b> .....	vii
<b>PRAKATA</b> .....	ix
<b>DAFTAR ISI</b> .....	x
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xii
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xiii
<b>BAB 1. PENDAHULUAN</b> .....	1
<b>1.1 Latar Belakang</b> .....	1
<b>1.2 Rumusan Masalah</b> .....	2
<b>1.3 Tujuan</b> .....	3
<b>1.4 Manfaat</b> .....	3
<b>BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA</b> .....	4
<b>2.1 Definisi Graf</b> .....	4
<b>2.2 Operasi Hasil Kali Kartesius Dua Graf</b> .....	7
<b>2.3 Penyajian Graf dalam Bentuk Matriks</b> .....	8
2.3.1 Matriks <i>Adjacent</i> .....	8
2.3.2 Matriks Derajat .....	8
2.3.3 Matriks <i>Incident</i> .....	9
<b>2.4 Determinan Matriks</b> .....	9
2.4.1 Mereduksi Baris .....	9
2.4.2 Ekspansi Kofaktor .....	10

<b>2.5</b>	<b>Matriks Elementer</b> .....	11
<b>2.6</b>	<b>Rank dan Kernel</b> .....	13
<b>2.7</b>	<b>Kelas-kelas Graf</b> .....	14
<b>2.8</b>	<b>Pohon Rentang</b> .....	16
<b>2.9</b>	<b>Matriks Laplacian</b> .....	17
<b>BAB 3. METODE PENELITIAN</b> .....		22
<b>BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN</b> .....		24
<b>4.1</b>	<b>Hasil</b> .....	24
4.1.1	Banyaknya Pohon Rentang pada Graf Kincir .....	24
4.1.2	Banyaknya Pohon Rentang pada Graf Buku $B_n$ .....	31
4.1.3	Banyaknya Pohon Rentang pada Graf Matahari $S_n$ .....	33
4.1.4	Menampilkan Pohon Rentang Graf Matahari $S_n$ .....	34
<b>4.2</b>	<b>Pembahasan</b> .....	35
<b>BAB 5. KESIMPULAN</b> .....		37
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....		38
<b>LAMPIRAN</b> .....		39

## DAFTAR TABEL

	Halaman
4.1 Hasil determinan dari $m=2$ dan $n=4,5,6$ .....	24
4.2 Hasil determinan dari $m=3$ dan $n=4,5,6$ .....	26
4.3 Hasil determinan dari $m=4$ dan $n=4,5,6$ .....	27
4.4 Hasil determinan untuk $n=2,3,4$ , dan 5 .....	31
4.5 Hasil determinan untuk $n=3,4,5,6$ dan 7 .....	33



## DAFTAR GAMBAR

	Halaman
2.1 Graf $G$ dengan 4 titik dan 5 sisi .....	4
2.2 Ilustrasi graf dengan <i>loop</i> dan sisi rangkap.....	4
2.3 Graf yang memuat <i>walk</i> , <i>trail</i> , lintasan, dan siklus .....	5
2.4 Graf identik dan graf <i>isomorphic</i> .....	6
2.5 (a) Graf terhubung dan (b) Graf tak terhubung.....	7
2.6 Hasil Perkalian Kartesius dua graf .....	7
2.7 Graf lintasan $P_6$ .....	14
2.8 (a) Graf siklus $C_6$ dan (b) Graf siklus $C_8$ .....	14
2.9 (a) Graf lengkap $K_5$ dan (b) Graf kincir $K_4^{(3)}$ .....	15
2.10 (a) Graf buku $B_3$ dan (b) Graf matahari $S_4$ .....	16
2.11 Graf pohon $T_6$ .....	16
2.12 Pohon rentang pada $G$ dengan 4 titik dan 5 sisi .....	17
4.1 Menentukan graf matahari dan <i>spaning tree</i> yang akan ditampilkan .....	34
4.2 Hasil output program .....	34
4.3 Graf matahari $S_4$ .....	35
4.4 Bentuk pohon rentang dari graf matahari $S_4$ .....	35