



**PELABELAN *EDGE GRACEFUL*  
PADA BEBERAPA KELAS GRAF**

**SKRIPSI**

Oleh:

**Tety Anisa Kasumasari  
NIM 0418101013**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS JEMBER  
2009**



**PELABELAN *EDGE GRACEFUL*  
PADA BEBERAPA KELAS GRAF**

**SKRIPSI**

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat  
untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1)  
dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

**Tety Anisa Kasumasari**  
**NIM 041810101013**

**JURUSAN MATEMATIKA**  
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**  
**UNIVERSITAS JEMBER**  
**2009**

## **PERSEMBAHAN**

Dengan penuh rasa syukur kehadirat Allah SWT, sholawat serta salam kepada Nabi besar Muhammad SAW, skripsi ini kupersembahkan untuk:

1. Ayahanda Slamet Bambang S. dan Ibunda Titik Suparti N. yang telah mendoakan dan memberi kasih sayang serta pengorbanan selama ini;
2. Mas Yudi, Mbak Luluk, Mas Sony, Mbak Rini, Adik Agiel, Adik Aisyah, Dita, Azriel, Lanang, dan Syafa yang telah memberikan dukungan dan semangat;
3. Guru-guru sejak Taman Kanak-kanak sampai Perguruan Tinggi, yang telah memberi ilmu, mendidik dan membimbing dengan penuh kesabaran;
4. Almamater Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

## **MOTTO**

**“Jadikan sabar dan shalat sebagai penolongmu,  
sesungguhnya Allah beserta orang-orang yang sabar.”**

**(Terjemah Q.S. Al-Baqarah Ayat 153)**

**“Jika nasib adalah titik dan usaha adalah garis,  
maka hidup adalah sebuah graf.”**

**(Slamin)**

## PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Tety Anisa Kasumasari

NIM : 041810101013

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: *Pelabelan Edge Graceful pada Beberapa Kelas Graf* adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum pernah diajukan pada institusi mana pun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak mana pun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 15 September 2009

Yang menyatakan,

Tety Anisa Kasumasari

NIM 041810101013

**SKRIPSI**

**PELABELAN *EDGE GRACEFUL*  
PADA BEBERAPA KELAS GRAF**

Oleh

**Tety Anisa Kasumasari  
NIM 041810101013**

**Pembimbing**

**Dosen Pembimbing Utama : Kristiana Wijaya, S.Si, M.Si**

**Dosen Pembimbing Anggota : Firdaus Ubaidillah, S.Si, M.Si**

## PENGESAHAN

Skripsi berjudul *Pelabelan Edge Graceful pada Beberapa Kelas Graf* telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA)

Universitas Jember pada:

hari :

tanggal :

tempat : FMIPA Universitas Jember

### Tim Penguji

Ketua,

Sekretaris,

Kristiana Wijaya, S.Si, M.Si  
NIP 132258180

Firdaus Ubaidillah, S.Si, M.Si  
NIP 132213838

Anggota I,

Anggota II,

Prof. Drs. I Made Tirta, M.Sc., Ph.D.  
NIP 131474500

Kosala Dwidja Purnomo, S.Si, M.Si  
NIP 132206019

Mengesahkan  
Dekan FMIPA,

Prof. Drs. Kusno, DEA, Ph.D.  
NIP 131592357

## RINGKASAN

**Pelabelan *Edge Graceful* pada Beberapa Kelas Graf;** Tety Anisa Kasumasari, 041810101013; 2009; 50 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Misal  $G$  graf dengan  $p$  titik dan  $q$  sisi. Pelabelan *edge graceful* pada graf  $G$  adalah pemberian nilai pada sisinya dengan bilangan bulat positif  $\{1, 2, 3, \dots, q\}$  sedemikian hingga titiknya mendapat label dari penjumlahan label sisi yang menempel pada titik tersebut dalam modulo  $p$  yang berbeda semua, yaitu  $f(v) = \sum_{w \in E} f(w) \pmod{p}$  untuk setiap  $v \in V$ . Dengan demikian pelabelan titiknya memenuhi sifat *bijektif* dari himpunan  $V(G)$  ke himpunan bilangan bulat tak negatif  $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ . Syarat perlu dari suatu graf  $G$  dengan  $p$  titik dan  $q$  sisi memenuhi pelabelan *edge graceful* adalah  $\left[ \frac{p(p-1)}{2} \equiv q(q+1) \pmod{p} \right]$ . Sebuah graf  $G$  dikatakan *edge graceful* jika setiap sisi dan titik pada graf  $G$  dapat diberi label menurut aturan *edge graceful*.

Permasalahan yang dibahas adalah menentukan apakah graf lengkap  $K_n$ , graf matahari  $M_n$ , graf *double star*  $DS_n$ , graf kipas  $F_n$ , graf buku  $B_n$ , graf *friendship*  $f_n$ , graf bipartit lengkap  $K_{m,n}$ , graf bunga matahari (*sunflower*)  $SF_n$ , serta gabungan dari graf sikel dan graf lintasan  $(C_n \cup P_3)$  memenuhi syarat perlu pelabelan *edge graceful* atau tidak. Jika memenuhi syarat perlu pelabelan *edge graceful*, menyelidiki apakah kelas-kelas graf tersebut merupakan graf *edge graceful* atau tidak dengan cara melabeli kelas-kelas graf tersebut dengan aturan pelabelan *edge graceful*.

Langkah-langkah untuk menyelesaikan permasalahan diatas sebagai berikut. Langkah pertama, yaitu selidiki apakah graf  $G$  dengan  $p$  titik dan  $q$  sisi memenuhi syarat perlu pelabelan *edge graceful*. Jika ya maka lanjutkan ke langkah kedua, tetapi jika tidak maka graf  $G$  tersebut tidak *edge graceful*. Langkah kedua yaitu beri label



setiap sisi pada graf  $G$  dengan himpunan bilangan bulat positif  $1, 2, 3, \dots, q$  yang berbeda semua. Langkah ketiga yaitu beri label pada setiap titik dengan cara menjumlahkan label sisi yang menempel pada titik tersebut, yaitu  $f(v) = \sum_{uv \in E} f(uv) \pmod{p}$  untuk setiap  $v \in V$ . Langkah keempat yaitu selidiki label titiknya, apakah berbeda semua, yaitu memenuhi sifat *bijektif* dari himpunan titik  $V(G)$  ke himpunan bilangan bulat tak negatif  $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ . Jika ya maka  $G$  adalah graf *edge graceful* dan proses pelabelan selesai, tetapi jika tidak maka kembali ke langkah kedua. Jika proses melabeli sisi pada langkah kedua sudah dilakukan sebanyak  $q!$  dengan label berbeda tetapi tidak ditemukan label titik yang berbeda semua dengan label  $0, 1, \dots, p-1$  maka graf  $G$  bukan merupakan graf *edge graceful*.

Hasil dari penelitian ini adalah sebagai berikut. Kelas graf lengkap  $K_n$  untuk  $n \equiv 2 \pmod{4}$ , graf kipas  $F_n$  untuk  $n \neq 2, 3, 11$ , graf  $(C_n \cup P_3)$  dan graf bunga matahari  $SF_n$  untuk  $n$  ganjil, graf matahari  $M_n$ , graf *double star*  $DS_n$ , graf buku  $B_n$ , dan graf *friendship*  $f_n$  untuk setiap  $n$ , dan graf bipartit lengkap  $K_{m,n}$  untuk setiap  $m$  dan  $n$  adalah bukan graf *edge graceful* karena tidak memenuhi syarat perlu pelabelan *edge graceful*. Kelas graf lengkap  $K_n$  untuk  $n = 3, 4, 5$ , dan  $7$ , graf kipas  $F_2, F_3$ , dan  $F_{11}$ , graf  $(C_n \cup P_3)$  untuk  $n = 6, 8, 12$ , dan  $14$ , dan graf bunga matahari (*sunflower*)  $SF_n$  untuk  $n = 4, 6, 8$ , dan  $10$  adalah graf *edge graceful* karena memenuhi syarat perlu pelabelan *edge graceful*. Sedangkan kelas graf  $C_4 \cup P_3$  dan  $C_{10} \cup P_3$  bukan graf *edge graceful* walaupun memenuhi syarat perlu pelabelan *edge graceful*.

## PRAKATA

Puji syukur kehadiran Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul *Pelabelan Edge Graceful pada Beberapa Kelas Graf*. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak, oleh karena itu penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Ibu Kristiana Wijaya, S.Si, M.Si., dan Bapak Firdaus Ubaidillah, S.Si, M.Si selaku Dosen Pembimbing yang telah meluangkan waktu, pikiran dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
2. Bapak Prof. Drs. I Made Tirta, MSc, Ph.D., dan Bapak Kosala Dwidja Purnomo, S.Si, M.Si selaku Dosen Penguji yang telah memberikan masukan buat terselesaikannya skripsi ini;
3. Bapak Prof. Drs. Kusno, DEA, Ph.D, selaku Dosen Wali yang telah membimbing dan mengarahkan selama kegiatan perkuliahan;
4. Choiron, Angga, Budi, Mbak Diah, Mbak Tutut, Mbak Rosi, Amel, dan semua teman-teman angkatan 2004 yang telah memberikan dukungan dan semangat selama ini;
5. Semua pihak yang tidak bisa disebutkan satu persatu.

Akhirnya penulis berharap skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi penulis khususnya dan bagi pembaca umumnya.

Jember, September 2009

Penulis

## DAFTAR ISI

	Halaman
<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	i
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b> .....	ii
<b>HALAMAN MOTTO</b> .....	iii
<b>HALAMAN PERNYATAAN</b> .....	iv
<b>HALAMAN PEMBIMBINGAN</b> .....	v
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b> .....	vi
<b>RINGKASAN</b> .....	vii
<b>PRAKATA</b> .....	ix
<b>DAFTAR ISI</b> .....	x
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xii
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....	xiv
<b>BAB 1. PENDAHULUAN</b>	
<b>1.1 Latar Belakang</b> .....	1
<b>1.2 Rumusan Masalah</b> .....	2
<b>1.3 Tujuan</b> .....	2
<b>1.4 Manfaat</b> .....	2
<b>BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA</b>	
<b>2.1 Definisi dan Terminologi Dasar Graf</b> .....	3
<b>2.2 Klasifikasi Graf</b> .....	5
<b>2.3 Fungsi</b> .....	10
<b>2.4 Pelabelan <i>Edge Graceful</i></b> .....	11
<b>2.5 Aritmatika Modulo</b> .....	12
<b>BAB 3. METODE PENELITIAN</b> .....	13
<b>BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN</b>	
<b>4.1 Pelabelan <i>Edge Graceful</i> pada Graf Lengkap <math>K_n</math></b> .....	16
<b>4.2 Pelabelan <i>Edge Graceful</i> pada Graf Kipas <math>F_n</math></b> .....	21

<b>4.3 Pelabelan <i>Edge Graceful</i> pada Graf Gabungan <math>C_n</math> dan <math>P_3</math></b> <b><math>(C_n \cup P_3)</math> .....</b>	<b>25</b>
<b>4.4 Pelabelan <i>Edge Graceful</i> pada Graf Bunga Matahari</b> <b><i>(sunflower)</i> <math>SF_n</math> .....</b>	<b>33</b>
<b>4.5 Pelabelan <i>Edge Graceful</i> pada Graf Matahari <math>M_n</math> .....</b>	<b>38</b>
<b>4.6 Pelabelan <i>Edge Graceful</i> pada Graf <i>double star</i> <math>DS_n</math> .....</b>	<b>40</b>
<b>4.7 Pelabelan <i>Edge Graceful</i> pada Graf <i>Friendship</i> <math>f_n</math> .....</b>	<b>42</b>
<b>4.8 Pelabelan <i>Edge Graceful</i> pada Graf <i>Buku</i> <math>B_n</math> .....</b>	<b>44</b>
<b>4.9 Pelabelan <i>Edge Graceful</i> pada Graf Bipartit Lengkap <math>K_{m,n}</math> ....</b>	<b>46</b>
<b>BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN</b>	
<b>5.1 Kesimpulan .....</b>	<b>49</b>
<b>5.2 Saran .....</b>	<b>49</b>
<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>	<b>50</b>

## DAFTAR GAMBAR

	Halaman
2.1 Graf $G$ dengan empat titik dan empat sisi .....	3
2.2 Graf $G$ dengan loop dan sisi rangkap .....	4
2.3 Graf untuk mengilustrasikan jalan, lintasan dan siklus .....	5
2.4 (a) Graf Terhubung dan (b) Graf Tak Terhubung .....	5
2.5 Graf lintasan ( <i>path</i> ) $P_3$ dan $P_5$ .....	6
2.6 Graf siklus ( <i>cycle</i> ) $C_6$ .....	6
2.7 Graf lengkap ( <i>complete graph</i> ) $K_3$ dan $K_4$ .....	6
2.8 Graf matahari $M_5$ .....	7
2.9 Graf bipartit lengkap $K_{2,5}$ .....	7
2.10 Graf <i>double star</i> $DS_6$ .....	8
2.11 Graf kipas $F_5$ .....	8
2.12 Graf <i>friendship</i> $f_3$ .....	8
2.13 Graf buku $B_3$ .....	9
2.14 Graf bunga matahari ( <i>sunflower</i> ) $SF_4$ .....	9
2.15 Graf $C_4 \cup P_3$ .....	10
2.16 Graf bintang $S_5$ .....	11
3.1 <i>Flowchart</i> untuk menyelidiki graf $G$ merupakan graf <i>edge graceful</i> atau bukan .....	14
4.1 Penotasian titik dan sisi pada graf lengkap $K_4$ .....	16
4.2 Pelabelan <i>edge graceful</i> pada $K_3$ .....	18
4.3 Pelabelan <i>edge graceful</i> pada $K_5$ .....	18
4.4 Pelabelan <i>edge graceful</i> pada $K_7$ .....	19
4.5 Pelabelan <i>edge graceful</i> pada $K_4$ .....	20
4.6 Penotasian titik dan sisi pada graf kipas $F_6$ .....	21

4.7 Pelabelan <i>edge graceful</i> pada $F_2$ .....	23
4.8 Pelabelan <i>edge graceful</i> pada $F_3$ .....	24
4.9 Pelabelan <i>edge graceful</i> pada $F_{11}$ .....	24
4.10 Penotasian titik dan sisi pada graf $C_3 \cup P_3$ .....	25
4.11 Pelabelan <i>edge graceful</i> pada $C_6 \cup P_3$ .....	29
4.12 Pelabelan <i>edge graceful</i> pada $C_8 \cup P_3$ .....	30
4.13 Pelabelan <i>edge graceful</i> pada $C_{12} \cup P_3$ .....	33
4.14 Pelabelan <i>edge graceful</i> pada $C_{14} \cup P_3$ .....	34
4.15 Penotasian titik dan sisi pada graf bunga matahari ( <i>sun flower</i> ) $SF_4$ .....	34
4.16 Pelabelan <i>edge graceful</i> pada graf bunga matahari ( <i>sun flower</i> ) $SF_4$ ....	37
4.17 Pelabelan <i>edge graceful</i> pada graf bunga matahari ( <i>sun flower</i> ) $SF_6$ ....	37
4.18 Pelabelan <i>edge graceful</i> pada graf bunga matahari ( <i>sun flower</i> ) $SF_8$ ....	38
4.19 Pelabelan <i>edge graceful</i> pada graf bunga matahari ( <i>sun flower</i> ) $SF_{10}$ ...	38
4.20 Penotasian titik dan sisi pada graf matahari $M_5$ .....	39
4.21 Penotasian titik dan sisi pada graf <i>double star</i> $DS_4$ .....	41
4.22 Penotasian titik dan sisi pada graf <i>friendship</i> $f_3$ .....	43
4.23 Penotasian titik dan sisi pada graf buku $B_3$ .....	45
4.24 Penotasian titik dan sisi pada graf bipartit lengkap $K_{2,3}$ .....	47

## DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
A. Kemungkinan Pelabelan <i>Edge Graceful</i> pada Graf $C_4 \cup P$ .....	51
B. Kemungkinan Pelabelan <i>Edge Graceful</i> pada Graf $C_{10} \cup P_3$ .....	54