



**KETERATURAN GRAF BERARAH DERAJAT KELUAR EMPAT  
DENGAN ORDE KURANG DUA DARI BATAS MOORE**

**TESIS**

**Oleh**

**Ikhsanul Halikin  
NIM. 091820101001**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS JEMBER**

**2012**



**KETERATURAN GRAF BERARAH DERAJAT KELUAR EMPAT  
DENGAN ORDE KURANG DUA DARI BATAS MOORE**

**TESIS**

**Oleh**

**Ikhsanul Halikin  
NIM. 091820101001**

**JUSUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS JEMBER**

**2012**

## HALAMAN PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah yang maha pengasih lagi maha penyayang, serta sholawat atas Nabi Muhammad S.A.W, kupersembahkan suatu kebahagiaan penggalan bait dalam perjalanan hidupku teriring rasa terima kasih kepada:

1. Almarhumah Ibunda tercinta Nurhayati;
2. Ayahanda Syamsuri dan Ibu Saniya, serta Kakaku Ilham Wahyudi yang senantiasa mengalirkan rasa cinta dan kasih sayangnya serta cucuran keringat dan doa yang tiada pernah putus yang selalu mengiringiku dalam meraih cita-cita, tidak lupa pula Adikku Imranul Adim dan Nur Indah Sari yang senantiasa memberikan dorongan, semangat, dan doa selama masa kuliah;
3. Drs. Slamim, M.Comp, Ph.D yang telah banyak membantu dan dengan sabar telah memberikan ilmu dan bimbingan selama menyelesaikan studi;
4. Bapak Sanjata Trisula sekeluarga yang merupakan keluarga kedua bagiku yang telah banyak membantuku selama menuntut ilmu di Universitas Jember;
5. Teman-teman S2 Matematika angkatan 2009 yang senantiasa membantu dan memberikan motivasi;
6. Almamater Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

## HALAMAN MOTO

”Lakona Lakone Kennengnganna Kennengnge”

Makna yang terkandung dalam moto ini, untuk kata ”lakona lokone” berupa ajaran untuk fokus pada pekerjaan yang kita kerjakan sedangkan untuk kata ”kennengnganna kennengnge” memiliki makna yang hampir sama dengan moto *the right man in the right place*



## HALAMAN PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ikhsanul Halikin

NIM : 091820101001

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa tesis yang berjudul: **Keteraturan Graf Berarah Derajat Keluar Empat Dengan Orde Kurang Dua dari Batas Moore** adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 31 Januari 2012

Yang menyatakan,

Ikhsanul Halikin

NIM. 0918201001

## HALAMAN PERSETUJUAN

### KETERATURAN GRAF BERARAH DERAJAT KELUAR EMPAT DENGAN ORDE KURANG DUA DARI BATAS MOORE

#### TESIS

Diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program S2 Jurusan Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Oleh:

Nama : Ikhsanul Halikin  
NIM : 091820101001  
Tempat dan Tanggal Lahir : Sumenep, 14 Oktober 1986  
Program Studi : Magister Matematika  
Jurusan : Matematika

Disetujui oleh:

Pembimbing Utama,

Pembimbing Anggota,

Drs. Slamim, M.Comp.Sc., Ph.D.

NIP. 196704201992011001

Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si.

NIP. 197408132000032004

## HALAMAN PENGESAHAN

Tesis berjudul Keteraturan Graf Berarah Derajat Keluar Empat Dengan Orde Kurang Dua dari Batas Moore telah diuji dan disahkan pada:

Hari/tanggal :

Tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam Universitas  
Jember

Tim Penguji :

Ketua,

Sekretaris,

Drs. Slamir, M.Comp.Sc., Ph.D.

NIP. 197003071995122001

Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si.

NIP. 197408132000032004

Anggota I,

Anggota II,

Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

NIP. 196808021993031004

Yuliani Setia Dewi, S.Si., M.Si.

NIP. 197407162000032001

Mengetahui,

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Jember

Prof. Drs. Kusno, DEA., Ph.D.

NIP. 196101081986021001



## RINGKASAN

**Keteraturan Graf Berarah Derajat Keluar Empat Dengan Orde Kurang Dua Dari Batas Moore**; Ikhsanul Halikin, 091820101001, 2012, 65 Halaman; Program Studi Magister Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Teori graf merupakan cabang matematika diskrit yang dapat diaplikasikan secara luas dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu aplikasi graf adalah dalam memodelkan permasalahan perancangan jaringan komunikasi dalam skala besar. Dalam perancangan suatu jaringan, permasalahannya adalah bagaimana membangun sebuah jaringan jika jumlah simpul pada jaringan sebanyak mungkin, jumlah hubungan yang disambungkan ke suatu simpul dibatasi, dan rute komunikasi antara dua sebarang simpul pada jaringan dibuat sependek mungkin. Dalam teori graf, permasalahan ini dikenal dengan *degree/diameter problem* yaitu bagaimana membangun sebuah graf berarah besar dengan batasan tertentu. Batasan ini kemudian dikenal dengan nama *out-degree* (derajat keluar), diameter, dan orde.

Untuk mengetahui keberadaan sebuah graf berarah dengan derajat keluar, diameter, dan orde tertentu, salah satu jalan yaitu dengan meneliti keteraturan dari graf berarah itu. Penelitian tentang keteraturan graf berarah sudah banyak dilakukan oleh peneliti lainnya. Sejauh ini, keteraturan dari graf berarah kurang dua dari batas Moore dengan derajat keluar  $d = 4$  dan diameter  $k \geq 4$  atau derajat keluar  $d \geq 5$  dan diameter  $k \geq 3$  masih belum diketahui dan merupakan masalah terbuka.

Dalam penelitian ini, peneliti telah melakukan penelitian terhadap keteraturan graf berarah kurang dua dari batas Moore dengan derajat keluar 4 dan diameter  $k \geq 4$  dengan hasil akhir bahwa graf berarah tersebut adalah teratur. Dalam melakukan penelitian tersebut, peneliti menggunakan metode deduktif, induktif, dan brute force. Untuk mengetahui keteraturan dari graf berarah, pembahasannya harus ditinjau dari dua aspek yaitu bagaimanakah keteraturan keluarnya dan bagaimanakah keteraturan masuknya. Jika suatu graf berarah



dinyatakan teratur masuk dan teratur ke luar, maka graf berarah tersebut dapat dinyatakan sebagai graf berarah teratur.

Baskoro membuktikan bahwa semua graf berarah adalah teratur keluar, sehingga penelitian tentang keteraturan graf berarah hanya difokuskan untuk mempelajari bagaimanakah keteraturan masuknya. Dalam mempelajari keteraturan masuk dari graf berarah, pembahasannya dimulai dengan mengasumsikan bahwa graf berarah tersebut tidak teratur masuk yang dapat direpresentasikan dengan barisan derajat masuk. Sehingga, jika graf berarah kurang dua dari batas Moore dengan derajat keluar 4 dan diameter  $k \geq 4$  tidak teratur masuk, maka graf berarah tersebut akan memiliki barisan derajat masuk:  $\{3,3,3,3,4,\dots,4,4,5,5,5,5\}$ ,  $\{3,3,3,3,4,\dots,4,4,4,5,5,6\}$ ,  $\{3,3,3,3,4,\dots,4,4,4,4,6,6\}$ ,  $\{3,3,3,3,4,\dots,4,4,4,5,7\}$ ,  $\{3,3,3,3,4,\dots,4,4,4,4,8\}$ . Setelah melakukan penelitian, peneliti membuktikan bahwa kelima barisan derajat masuk itu tidak mungkin terjadi. Sehingga dengan demikian dapat disimpulkan bahwa graf berarah kurang dua dari batas Moore dengan derajat keluar 4 dan diameter  $k \geq 4$  teratur.

## PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Allah Swt atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis yang berjudul *Keteraturan Graf Berarah Derajat Keluar Empat Dengan Orde Kurang Dua Dari Batas Moore*. Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan program strata dua (S2) pada jurusan Matematika Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih dan penghargaan yang sebesar-besarnya atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan Tesis ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Drs. Slamain, M.Comp.Sc., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing Utama dan Kristiana Wijaya, S.Si.,M.Si. selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan tesis ini;
2. Drs. Dafik, M.Sc.,Ph.D. dan Yuliani Setia Dewi, S.Si., M.Si. selaku dosen penguji yang telah memberikan masukan, saran, dan kritik yang membangun dalam penulisan tesis ini.
3. Teman-teman S2 Matematika yang telah memberikan motivasi dalam penyusunan tesis ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menyadari bahwa tesis ini masih belum sempurna, oleh karena itu penulis mengharapkan kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan tesis ini. Akhirnya penulis berharap, semoga tesis ini dapat bermanfaat.

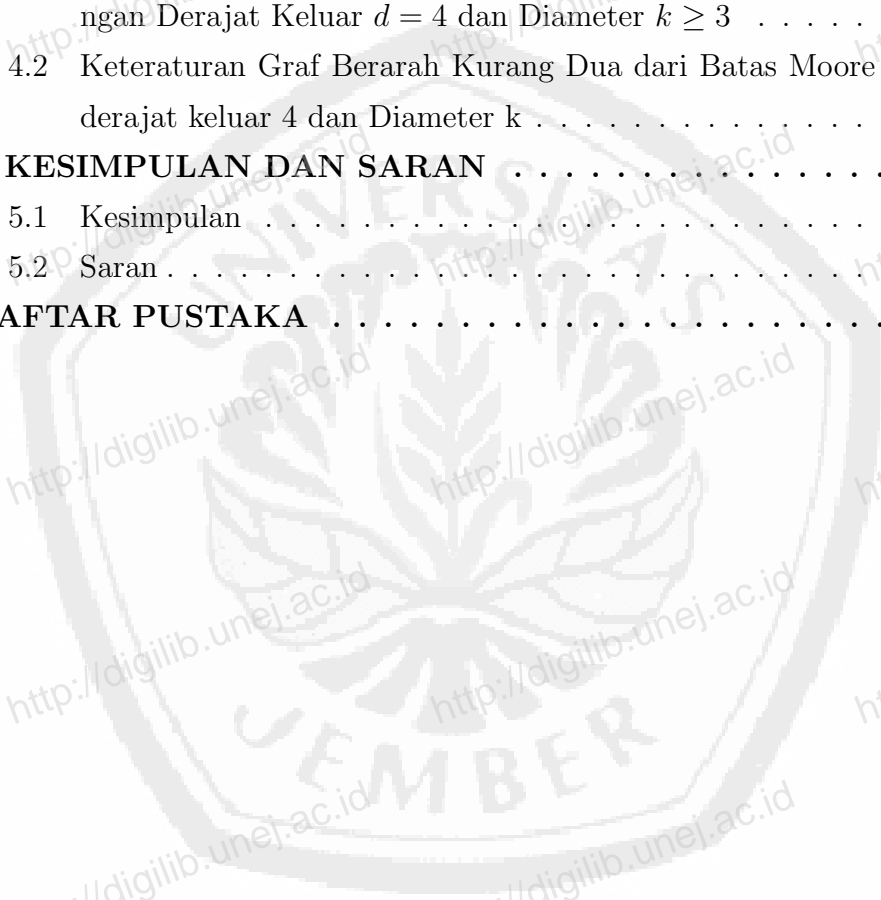
Jember, 31 Januari 2012

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b> . . . . .	i
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b> . . . . .	ii
<b>HALAMAN MOTO</b> . . . . .	iii
<b>HALAMAN PERNYATAAN</b> . . . . .	iv
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b> . . . . .	v
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b> . . . . .	vi
<b>RINGKASAN</b> . . . . .	vii
<b>PRAKATA</b> . . . . .	ix
<b>DAFTAR ISI</b> . . . . .	xi
<b>DAFTAR GAMBAR</b> . . . . .	xiii
<b>DAFTAR TABEL</b> . . . . .	xiv
<b>DAFTAR LAMBANG</b> . . . . .	xv
<b>1 PENDAHULUAN</b> . . . . .	1
1.1 Latar Belakang Masalah . . . . .	1
1.2 Rumusan Masalah . . . . .	4
1.3 Tujuan Penelitian . . . . .	5
1.4 Manfaat Penelitian . . . . .	5
<b>2 TINJAUAN PUSTAKA</b> . . . . .	6
2.1 Konsep Dasar Graf Berarah . . . . .	6
2.2 Keberadaan Graf Berarah Besar . . . . .	9
2.2.1 Graf Berarah Moore . . . . .	10
2.2.2 Graf Berarah Mendekati Batas Moore . . . . .	11
2.2.3 Struktur <i>Repeat</i> . . . . .	14
2.3 Teknik Konstruksi Graf Berarah . . . . .	17
2.3.1 Teknik Penghapusan Titik . . . . .	18
2.4 Keteraturan Graf Berarah . . . . .	19
2.4.1 Keteraturan Graf Berarah Moore . . . . .	19
2.4.2 Keteraturan Graf Berarah Kurang dari Batas Moore . . . . .	20

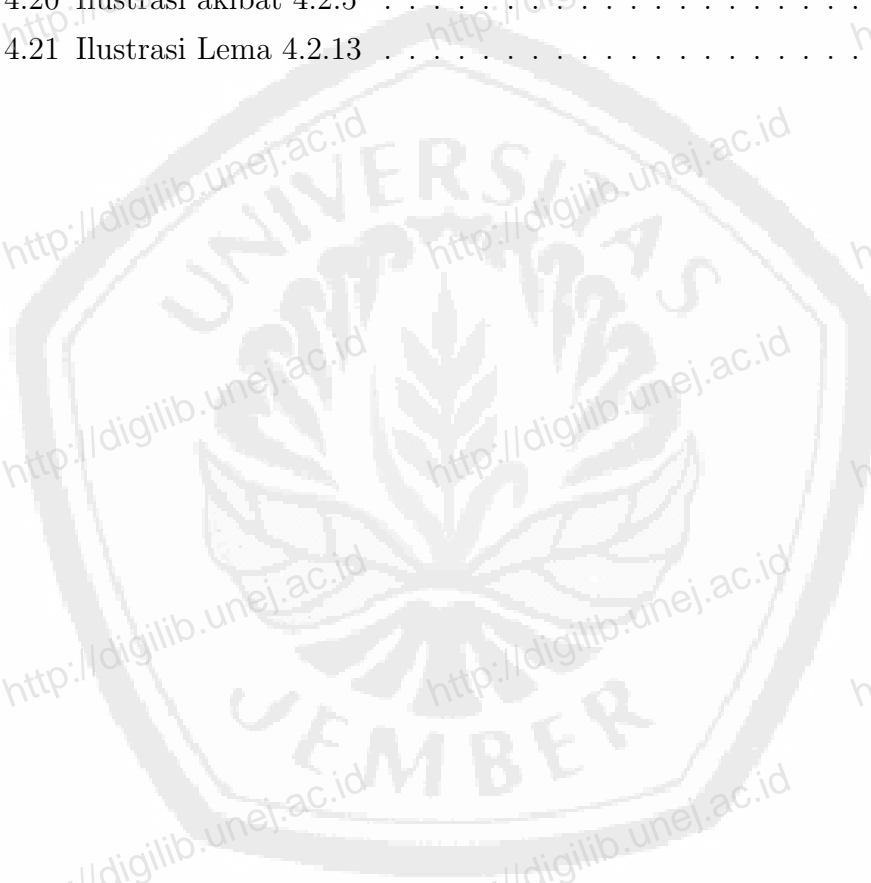
2.4.3	Sifat Keteraturan $(d, k, 2)$ - graf berarah, untuk $d \geq 3$ dan $k \geq 2$ . . . . .	22
<b>3</b>	<b>METODE PENELITIAN</b> . . . . .	26
3.1	Jenis Penelitian . . . . .	26
3.2	Metode Penelitian . . . . .	26
3.3	Rancangan Penelitian . . . . .	27
<b>4</b>	<b>HASIL DAN PEMBAHASAN</b> . . . . .	28
4.1	Struktur <i>Repeat</i> Graf Berarah Kurang Dua dari Batas Moore dengan Derajat Keluar $d = 4$ dan Diameter $k \geq 3$ . . . . .	28
4.2	Keteraturan Graf Berarah Kurang Dua dari Batas Moore dengan derajat keluar 4 dan Diameter $k$ . . . . .	33
<b>5</b>	<b>KESIMPULAN DAN SARAN</b> . . . . .	62
5.1	Kesimpulan . . . . .	62
5.2	Saran . . . . .	62
	<b>DAFTAR PUSTAKA</b> . . . . .	64



## DAFTAR GAMBAR

2.1	Contoh graf berarah . . . . .	6
2.2	Contoh graf berarah yang teratur dan tidak teratur . . . . .	8
2.3	Keisomorfisan dalam graf berarah . . . . .	9
2.4	Ilustrasi diagram pada Moore digraph . . . . .	11
2.5	Tiga graf berarah teratur yang tidak isomorfis . . . . .	12
2.6	Lima graf berarah teratur yang tidak isomorfis . . . . .	12
2.7	Graf berarah tidak teratur yang tidak isomorfis . . . . .	13
2.8	Graf berarah teratur dengan orde $M_{3,2} - 2$ . . . . .	13
2.9	Empat graf berarah tidak teratur yang tidak isomorfis . . . . .	14
2.10	Graf berarah Alegree . . . . .	14
2.11	Struktur <i>repeat</i> graf berarah <i>defect</i> satu . . . . .	15
2.12	Ilustrasi dari $T_s^+(u)$ , $T_s^-(u)$ , $N_s^+(u)$ , dan $N_s^-(u)$ . . . . .	16
2.13	Graf berarah dengan orde $M_{2,2} - 2$ . . . . .	17
2.14	<i>Spanning tree</i> graf berarah dengan orde $M_{2,2} - 2$ . . . . .	18
2.15	Graf berarah orde 12 dan hasil konstruksi teknik penghapusan titik . . . . .	19
3.1	Rancangan penelitian . . . . .	27
4.1	Contoh tipe <i>repeat</i> graf berarah dengan orde $M_{2,2} - 2$ . . . . .	30
4.2	Struktur <i>repeat</i> graf berarah dengan orde $M_{4,k} - 2$ . . . . .	31
4.3	Struktur <i>repeat</i> graf berarah dengan orde $M_{4,4} - 2$ . . . . .	31
4.4	Contoh konstruksi graf berarah tidak teratur menggunakan struktur <i>repeat</i> . . . . .	32
4.5	Contoh konstruksi graf berarah teratur menggunakan struktur <i>repeat</i> . . . . .	33
4.6	Graf berarah teratur dengan orde $M_{4,2} - 1$ . . . . .	34
4.7	Graf berarah tidak teratur dengan orde $M_{4,2} - 2$ (Dafik, 2007) . . . . .	35
4.8	Graf berarah tidak teratur . . . . .	35
4.9	Ilustrasi tetangga masuk titik - titik $v_1$ , $v_2$ , $v_3$ , dan $v_4$ . . . . .	39
4.10	Ilustrasi tetangga masuk titik - titik $v_1$ dan $v_2$ . . . . .	41
4.11	Ilustrasi <i>multiset</i> titik $v_i$ . . . . .	43

4.12	Ilustrasi <i>Multiset</i> titik $v_3$ . . . . .	44
4.13	Ilustrasi <i>Multiset</i> titik $v_4$ . . . . .	45
4.14	Ilustrasi <i>Multiset</i> $y_2$ . . . . .	46
4.15	Ilustrasi Lema 4.2.8 . . . . .	49
4.16	Struktur <i>repeat</i> graf berarah <i>defect</i> empat . . . . .	52
4.17	Ilustrasi $T_k^-(x)$ . . . . .	53
4.18	Ilustrasi lema 4.2.11 . . . . .	55
4.19	Ilustrasi lema 4.2.12 . . . . .	56
4.20	Ilustrasi akibat 4.2.5 . . . . .	57
4.21	Ilustrasi Lema 4.2.13 . . . . .	58



## DAFTAR TABEL

2.1	Sajian batas atas dan batas bawah graf berarah . . . . .	15
2.2	Keteraturan graf berarah berderajat keluar $d$ , diameter $k$ , dan orde $n$ . . . . .	22





## DAFTAR LAMBANG

$G$	graf atau graf berarah
$C_{k+1}$	graf berarah <i>cycle</i> dengan diameter $k$ dan ordo $k + 1$
$K_{d+1}$	graf berarah <i>complete</i> dengan derajat keluar $d$ dan ordo $d + 1$
$V(G)$	himpunan titik dari graf berarah $G$
$E(G)$	himpunan sisi berarah dari graf berarah $G$
$d$	derajat keluar dari graf berarah
$k$	diameter atau jarak terjauh di antara sebarang dua titik pada graf berarah
$u$	titik pada graf berarah
$uv$	sisi berarah yang dimulai dari $u$ dan berakhir pada $v$
$N^+(u)$	himpunan semua tetangga keluar ( <i>out-neighbourhood</i> ) dari $u$
$d^+(u)$	jumlah semua tetangga keluar ( <i>out-degree</i> ) dari $u$
$N_s^+(u)$	himpunan titik yang berjarak tepat $s$ dari $u$
$T_s^+(u)$	himpunan titik (termasuk $u$ ) yang berjarak kurang dari atau sama dengan $s$ dari $u$
$N^-(u)$	himpunan semua tetangga masuk ( <i>in-neighbourhood</i> ) dari $u$
$d^-(u)$	jumlah semua tetangga masuk ( <i>in-degree</i> ) dari $u$
$N_s^-(u)$	himpunan titik yang mencapai $u$ dengan jarak tepat $s$
$T_s^-(u)$	himpunan titik (termasuk $u$ ) yang mencapai $u$ dengan jarak kurang dari atau sama dengan $s$
$\mathcal{G}(d, k, \delta)$	himpunan graf berarah dengan derajat keluar $d$ , diameter $k$ , dan ordo $\delta$ titik kurangnya dari batas Moore
$S$	himpunan titik dengan ukuran derajat masuk ( <i>in-degree</i> ) yang lebih kecil dari ukuran derajat keluar yang disepakati
$S'$	himpunan titik dengan ukuran derajat masuk ( <i>in-degree</i> ) yang lebih besar dari ukuran derajat keluar yang disepakati
$\uplus$	operasi pada dua himpunan $A$ dan $B$ dengan aturan jika $u$ muncul $n_1$ kali pada $A$ dan $n_2$ kali pada $B$ , maka $u$ akan muncul $n_1 + n_2$ kali

## BAB 1. PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang Masalah

Teori graf merupakan cabang matematika diskrit yang dapat diaplikasikan secara luas dalam kehidupan sehari-hari. Pada dasarnya graf diaplikasikan untuk memodelkan suatu fenomena atau permasalahan yang dapat dipandang sebagai kumpulan obyek dan relasi diantara obyek-obyek tersebut. Model yang dihasilkan berupa diagram yang terdiri dari titik (representasi obyek) dan sisi (representasi relasi). Contohnya, untuk menyelesaikan persoalan jalur transportasi yang menghubungkan tempat - tempat tertentu, seringkali digambarkan dengan bulatan untuk memvisualisasikan tempat dan garis untuk memvisualisasikan jalur / jalan. Representasi semacam ini juga merupakan suatu representasi dari graf.

Selain itu, graf juga digunakan untuk merancang rute penerbangan dengan menerapkan algoritma-algoritma pencarian jarak terpendek diantara dua buah titik (tempat tujuan penerbangan) pada graf (area penerbangan). Graf digunakan untuk mencari rute pemasaran dengan menerapkan konsep lintasan atau siklus Hamilton (suatu lintasan atau siklus pada graf atau graf berarah yang mencapai setiap titik tepat sekali). Graf dimanfaatkan untuk menghitung jumlah isomer senyawa hidrokarbon. Dan graf juga digunakan untuk merancang jaringan komunikasi yang optimal dipandang dari segi ukuran maupun kinerja dari jaringan yang dihasilkan. Diantara aplikasi-aplikasi graf yang telah disebutkan, penelitian ini berkaitan dengan topik tentang aplikasi graf dalam merancang jaringan komunikasi dalam skala besar. Kebutuhan terhadap rancangan jaringan komunikasi dalam skala besar timbul karena perkembangan perangkat teknologi digital yang terintegrasi dalam jumlah yang besar meningkat. Rancangan jaringan komunikasi bisa dimodelkan sebagai graf atau graf berarah (pada kasus jaringan berarah) dengan asumsi tiap elemen pemroses pada jaringan direpresentasikan oleh titik dan koneksi di antara dua elemen pemroses direpresentasikan oleh sisi atau sisi berarah (dalam kasus koneksi berarah).