



# **KETERATURAN GRAF BERARAH DERAJAT KELUAR EMPAT DIAMETER TIGA DENGAN ORDE KURANG DUA DARI BATAS MOORE**

**Skripsi**

Oleh:

**Ikhsanul Halikin**

**NIM: 050210101241**

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA  
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN  
UNIVERSITAS JEMBER**

**2010**

## HALAMAN PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah yang maha pengasih lagi maha penyayang, serta sholawat atas Nabi Muhammad S.A.W, kupersembahkan suatu kebahagiaan penggalan bait dalam perjalanan hidupku teriring rasa terima kasih kepada:

1. Almarhumah Ibunda tercinta Nurhayati;
2. Ayahanda Syamsuri dan Ibu Saniya, serta Kakaku Ilham Wahyudi yang senantiasa mengalirkan rasa cinta dan kasih sayangnya serta cucuran keringat dan doa yang tiada pernah putus yang selalu mengiringiku dalam meraih cita-cita, tidak lupa pula Adikku Imranul Adim dan Nur Indah Sari yang senantiasa memberikan dorongan, semangat, dan doa selama masa studiku;
3. Bapak Sanjata Trisula sekeluarga yang merupakan keluarga kedua bagiku yang telah banyak membantuku selama menuntut ilmu di Universitas Jember;
4. Bapak Drs. Slamir, M.Comp, Ph.D dan Bapak Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D selaku pembimbing skripsi yang dengan sabar telah memberikan ilmu dan bimbingan selama menyelesaikan skripsiku;
5. Teman-teman angkatan 2005 FKIP Matematika: (Afandi, Muhammad Akarudin, Ika Fajrin Aisyah, Lutfiatul Laeli, Ahmad Faisol, dan semuanya) yang senantiasa membantuku dan kebersamaan kita adalah kenangan yang tak terlupakan,
6. Teman - teman FKIP Matematika: (Kiki Riski Susanti, David, Riris, Dini Kerisa dan semuanya), terima kasih atas dorongan semangat dan bantuannya selama masa proses penyelesaian skripsiku;
7. Almamater Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

## HALAMAN MOTTO

“Lakona Lakone Kennengnganna Kennengnge”

Artinya, “Pekerjaannya kerjakan, tempatnya tempati”

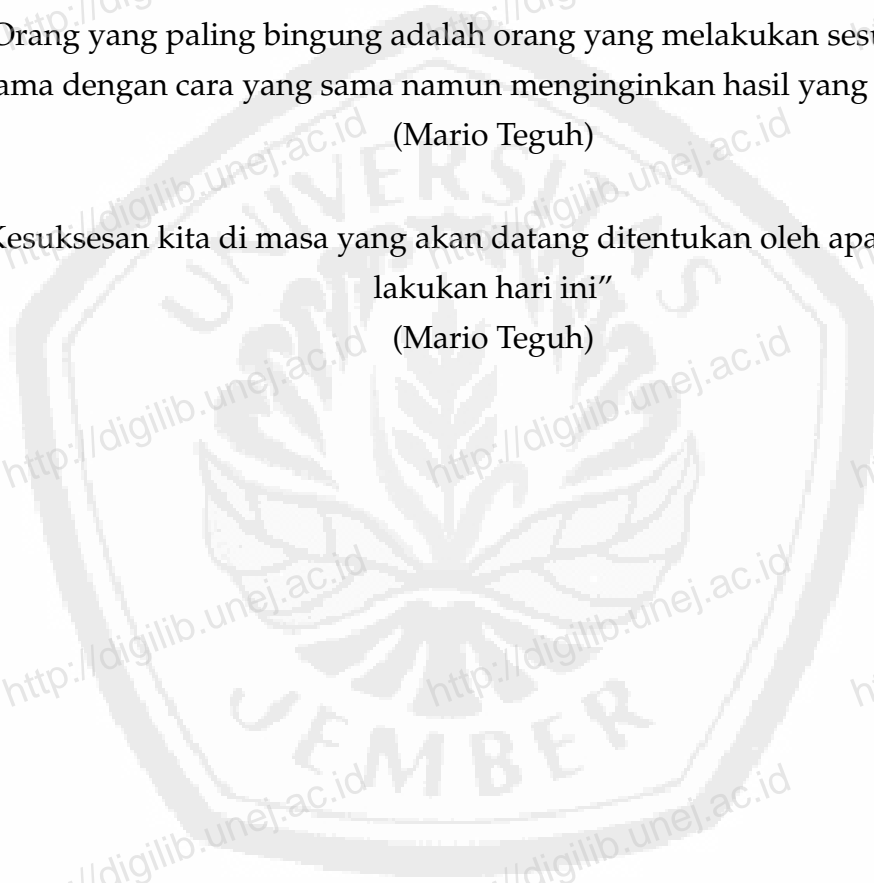
Dari sekian makna yang terkandung dalam motto ini, salah satunya berupa ajaran untuk fokus pada apa yang kita kerjakan dengan tetap memegang teguh aturan yang sudah ada.

“Orang yang paling bingung adalah orang yang melakukan sesuatu yang sama dengan cara yang sama namun menginginkan hasil yang berbeda”

(Mario Teguh)

“Kesuksesan kita di masa yang akan datang ditentukan oleh apa yang kita lakukan hari ini”

(Mario Teguh)



## HALAMAN PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ikhsanul Halikin

NIM : 050210101241

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: Keteraturan Graf Berarah Derajat Keluar Empat Diameter Tiga Dengan Orde Kurang Dua dari Batas Moore adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 15 Januari 2010

Yang menyatakan,

Ikhsanul Halikin

NIM. 050210101241

## HALAMAN PENGANTAR

### KETERATURAN GRAF BERARAH DERAJAT KELUAR EMPAT DIAMETER TIGA DENGAN ORDE KURANG DUA DARI BATAS MOORE

#### SKRIPSI

Diajukan untuk dipertahankan di depan Tim Penguji sebagai salah satu persyaratan untuk menyelesaikan Program Pendidikan Sarjana Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam dengan Program Studi Pendidikan Matematika pada Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember

Oleh:

Nama : Ikhsanul Halikin  
NIM : 050210101241  
Tempat dan Tanggal Lahir : Sumenep, 14 Oktober 1986  
Jurusan / Program : Pendidikan MIPA / P. Matematika

Disetujui oleh:

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Drs. Slamun, M.Comp Sc Phd  
NIP. 19670420 199201 1 001

Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D  
NIP. 19680802 199303 1 004

y6

## HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi berjudul Keteraturan Graf Berarah Derajat Keluar Empat Diameter Tiga Dengan Orde Kurang Dua dari Batas Moore telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan pada:

Hari : Jumat

Tanggal : 15 Januari 2010

Tempat : Gedung 3 FKIP UNEJ

Tim Penguji :

Ketua,

Sekretaris,

Susi Setiawani, S.Si, M.Sc  
NIP. 19700307 199512 2 001

Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D  
NIP. 19680802 199303 1 004

Anggota:

1. Drs. Slamini, M.Comp Sc Phd (.....)  
NIP.19670420 199201 1 001
2. Drs. Antonius C.P, M.App.Sc (.....)  
NIP.19690928 199302 1 001

Mengetahui,

Dekan Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan  
Universitas Jember

Drs. H. Imam Muchtar, SH, M.Hum  
NIP. 19540712 198003 1 005

## RINGKASAN

**KETERATURAN GRAF BERARAH DERAJAT KELUAR EMPAT DIAMETER TIGA DENGAN ORDE KURANG DUA DARI BATAS MOORE, Ikhsanul Halikin, 050210101241, 2010, 92 Halaman**

Graf merupakan salah satu cabang matematika yang penting dan banyak manfaatnya. Topologi sebuah jaringan merupakan salah satu dari sekian banyak contoh yang dapat dimodelkan dengan graf. Seiring dengan beragam permasalahan yang muncul dalam perancangan sebuah jaringan berskala besar, maka hal ini juga berdampak bagi pengembangan teori graf, salah satunya yaitu bagaimana membangun sebuah graf berarah besar dengan batasan tertentu. Batasan ini kemudian dikenal dengan nama *out-degree* (derajat keluar), diameter, dan orde.

Untuk mengetahui keberadaan sebuah graf berarah dengan *out-degree*, diameter, dan orde tertentu, salah satu jalan yaitu dengan meneliti keteraturan dari graf berarah itu. Penelitian tentang keteraturan graf berarah sudah banyak dilakukan oleh peneliti lainnya. Sejauh ini, keteraturan dari graf berarah kurang dua dari batas Moore dengan *out-degree*  $d = 3$  dan diameter  $k \geq 4$  atau *out-degree*  $d \geq 4$  dan diameter  $k \geq 3$  masih belum diketahui dan merupakan masalah terbuka.

Dalam penelitian ini, peneliti telah melakukan penelitian terhadap keteraturan graf berarah kurang dua dari batas Moore dengan *out-degree* 4 dan diameter 3 dengan hasil akhir bahwa graf berarah tersebut adalah *diregular* (teratur). Dalam melakukan penelitian tersebut, peneliti menggunakan metode deduktif, induktif, dan brute force. Untuk mengetahui keteraturan dari graf berarah, pembahasannya harus ditinjau dari dua aspek yaitu bagaimanakah *out-regularity*-nya dan bagaimanakah *in-regularity*-nya. Jika suatu graf berarah dinyatakan *in-regular* (teratur masuk) dan *out-regular* (teratur keluar), maka graf berarah tersebut dapat dinyatakan sebagai graf berarah *diregular*. Peneliti lain telah membuktikan bahwa graf berarah dengan *out-degree*  $d \geq 2$  dan di-

ameter  $k \geq 2$  adalah *out-regular*. Sedangkan untuk mengetahui suatu graf berarah adalah *in-regular*, maka harus dibuktikan bahwa barisan - barisan *in-degree* dari graf berarah tersebut tidak mungkin ada.

Dalam mempelajari *in-regularity* dari graf berarah, pembahasannya dimulai dengan mengasumsikan bahwa graf berarah tersebut tidak *in-regular*. Jika suatu graf berarah tidak *in-regular* maka graf berarah tersebut pasti memiliki barisan *in-degree*. Sehingga, jika graf berarah kurang dua dari batas Moore dengan *out-degree* 4 dan diameter 3 tidak *in-regular*, maka graf berarah tersebut akan memiliki salah satu dari barisan *in-degree*:  $\{3,3,3,3,4,\dots,4,4,5,5,5,5\}$ ,  $\{3,3,3,3,4,\dots,4,4,4,5,5,6\}$ ,  $\{3,3,3,3,4,\dots,4,4,4,4,6,6\}$ ,  $\{3,3,3,3,4,\dots,4,4,4,5,7\}$ ,  $\{3,3,3,3,4,\dots,4,4,4,4,8\}$ . Setelah melakukan penelitian, peneliti membuktikan bahwa kelima barisan *in-degree* itu tidak ada. Sehingga dengan demikian dapat disimpulkan bahwa graf berarah kurang dua dari batas Moore dengan *out-degree* 4 dan diameter 3 adalah *diregular*.

Program studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan,  
Universitas Jember.



## KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah Swt atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul Keteraturan Graf Berarah Derajat Keluar Empat Diameter Tiga Dengan Orde Kurang Dua Dari Batas Moore. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih dan penghargaan yang sebesar-besarnya atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Pendidikan MIPA Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
3. Ketua Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
4. Ketua Laboratorium Komputer Program Studi Pendidikan Matematika Jurusan Pendidikan MIPA FKIP;
5. Drs. Slamir, M.Comp.Sc.PhD selaku Dosen Pembimbing I sekaligus Dosen Pembimbing Akademik dan Drs. Dafik, M.Sc.Ph.D selaku Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
6. Dosen dan Karyawan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
7. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu,

penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, 15 Januari 2010

Penulis



# DAFTAR ISI

<b>Halaman Judul</b>	<b>i</b>
<b>Halaman Persembahan</b>	<b>ii</b>
<b>Halaman Motto</b>	<b>iii</b>
<b>Halaman Pernyataan</b>	<b>iv</b>
<b>Halaman Pengajuan</b>	<b>v</b>
<b>Halaman Pengesahan</b>	<b>vi</b>
<b>Ringkasan</b>	<b>vii</b>
<b>Kata Pengantar</b>	<b>ix</b>
<b>Daftar Isi</b>	<b>xiii</b>
<b>Daftar Gambar</b>	<b>xvi</b>
<b>Daftar Tabel</b>	<b>xvii</b>
<b>Daftar Lambang</b>	<b>xviii</b>
<b>1 PENDAHULUAN</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang Masalah . . . . .	1
1.2 Rumusan Masalah . . . . .	4
1.3 Tujuan Penelitian . . . . .	4
1.4 Manfaat Penelitian . . . . .	4
<b>2 TINJAUAN PUSTAKA</b>	<b>6</b>

# DAFTAR ISI

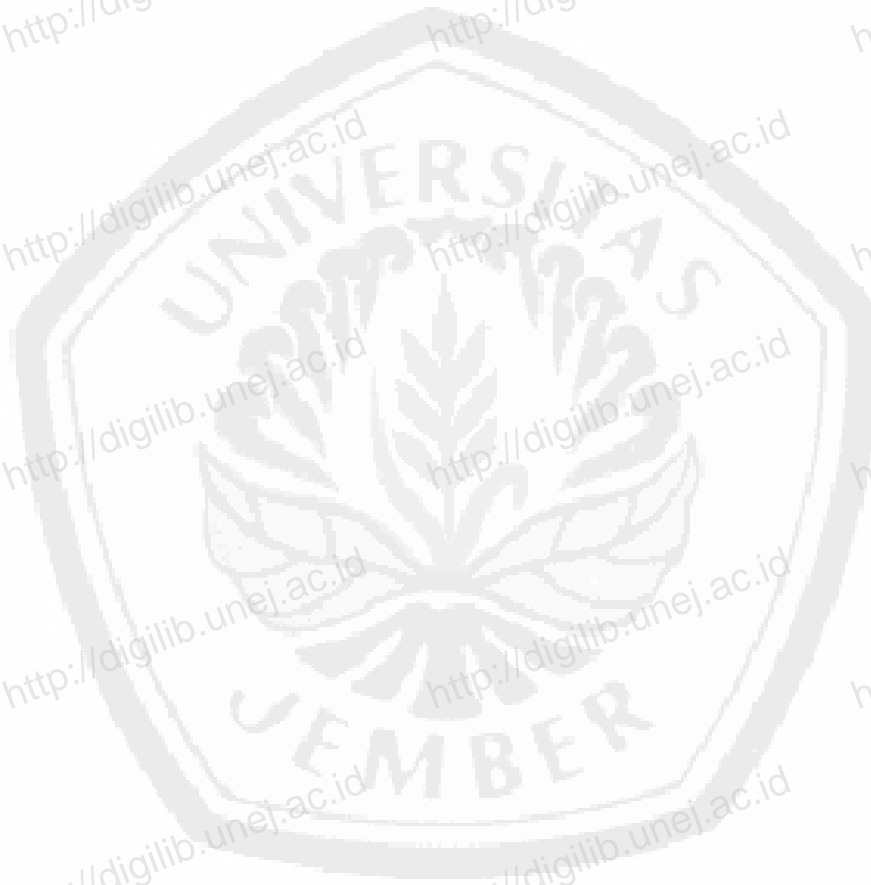
xii

2.1	Konsep Dasar Graf Berarah . . . . .	9
2.2	Keberadaan Graf Berarah Besar . . . . .	13
2.2.1	Graf Berarah Moore . . . . .	14
2.2.2	Graf Berarah Mendekati Batas Moore . . . . .	15
2.2.3	Struktur <i>Repeat</i> . . . . .	18
2.3	Teknik Konstruksi Graf Berarah . . . . .	21
2.3.1	Generalisasi Graf Berarah Kautz . . . . .	21
2.3.2	Teknik Penghapusan Titik . . . . .	22
2.4	Keteraturan Graf Berarah . . . . .	24
2.4.1	Keteraturan Graf Berarah Moore . . . . .	24
2.4.2	Keteraturan Graf Berarah Kurang dari Batas Moore . . . . .	24
2.4.3	Sifat Keteraturan ( $d, k, 2$ ) - <i>Digraph</i> , untuk $d \geq 3$ dan $k \geq 2$ . . . . .	26
<b>3</b>	<b>METODE PENELITIAN</b> . . . . .	<b>34</b>
3.1	Jenis Penelitian . . . . .	34
3.2	Metode Penelitian . . . . .	34
3.3	Definisi Operasional . . . . .	35
3.4	Rancangan Penelitian . . . . .	36
<b>4</b>	<b>HASIL DAN PEMBAHASAN</b> . . . . .	<b>38</b>
4.1	Hasil Penelitian . . . . .	38
4.1.1	Kontruksi Graf Berarah Kurang dari Batas Moore dengan <i>Out-degree</i> 4 dan Diameter 3 . . . . .	39
4.1.2	Struktur <i>Repeat</i> Graf Berarah Kurang Dua dari Batas Moore dengan <i>Out-degree</i> 4 dan Diameter 3 . . . . .	44

# DAFTAR ISI

xiii

4.1.3	Keteraturan Graf Berarah Kurang Dua dari Batas Moore dengan <i>Out-degree</i> 4 dan Diameter 3 . . . . .	47
4.2	Pembahasan . . . . .	89
<b>5</b>	<b>KESIMPULAN DAN SARAN</b>	<b>90</b>
5.1	Kesimpulan . . . . .	90
5.2	Saran . . . . .	90
	<b>Daftar Pustaka</b>	<b>91</b>



## DAFTAR GAMBAR

2.1 Topologi Jaringan . . . . .	7
2.2 Jaringan Komputer . . . . .	8
2.3 Contoh graf berarah . . . . .	9
2.4 Contoh <i>diregular</i> dan <i>non-diregular</i> . . . . .	11
2.5 Contoh aplikasi graf berarah dalam suster jaringan komputer .	12
2.6 Keisomorfisan dalam graf berarah . . . . .	12
2.7 Ilustrasi diagram pada Moore digraph . . . . .	14
2.8 Tiga graf berarah <i>direguler</i> yang non-isomorfis . . . . .	15
2.9 Lima graf berarah <i>diregular</i> yang tidak isomorfis . . . . .	16
2.10 Graf berarah non <i>diregular</i> yang tidak isomorfis . . . . .	16
2.11 Graf berarah <i>diregular</i> dengan orde $M_{3,2} - 2$ . . . . .	17
2.12 Empat graf berarah non <i>diregular</i> yang tidak isomorfis . . . . .	17
2.13 Alegree <i>digraph</i> . . . . .	18
2.14 Struktur <i>repeat</i> graf berarah <i>defect</i> satu . . . . .	19
2.15 Ilustrasi dari $T_s^+(u)$ , $T_s^-(u)$ , $N_s^+(u)$ , dan $N_s^-(u)$ . . . . .	20
2.16 Graf berarah dengan orde $M_{2,2} - 2$ . . . . .	20
2.17 <i>Spanning tree</i> graf berarah dengan orde $M_{2,2} - 2$ . . . . .	21
2.18 Graf berarah Kautz orde 9 dan <i>out-degree</i> 2 . . . . .	22
2.19 Graf berarah orde 12 dan hasil konstruksi teknik penghapusan titik . . . . .	23

# DAFTAR GAMBAR

2.20	Graf berarah yang tidak <i>in-regular</i> . . . . .	26
3.1	Rancangan penelitian 1 . . . . .	36
3.2	Rancangan penelitian 2 . . . . .	37
3.3	Rancangan penelitian 3 . . . . .	37
4.1	Graf berarah Kautz orde $M_{4,3} - 5$ . . . . .	41
4.2	Graf berarah orde $M_{4,3} - 6$ dengan penghapusan titik . . . . .	43
4.3	Struktur <i>repeat</i> graf berarah dengan orde $M_{4,3} - 2$ . . . . .	44
4.4	Contoh konstruksi graf berarah <i>non-diregular</i> menggunakan struktur <i>repeat</i> . . . . .	46
4.5	Contoh konstruksi graf berarah <i>diregular</i> menggunakan struktur <i>repeat</i> . . . . .	47
4.6	graf berarah <i>diregular</i> dengan orde $M_{4,2} - 1$ . . . . .	48
4.7	Graf berarah tidak <i>diregular</i> dengan orde $M_{4,2} - 2$ . . . . .	48
4.8	Graf berarah tidak teratur . . . . .	49
4.9	Ilustrasi <i>in-neighbour</i> titik - titik $v_1, v_2, v_3$ , dan $v_4$ . . . . .	52
4.10	Ilustrasi <i>multiset</i> titik $v_i$ . . . . .	56
4.11	Ilustrasi <i>out-neighbour</i> titik $v_3$ . . . . .	57
4.12	Ilustrasi <i>Multiset</i> titik $v_4$ . . . . .	58
4.13	Ilustrasi <i>Multiset</i> $y_2$ . . . . .	59
4.14	Ilustrasi $T_3^-(v_1)$ dan $T_3^-(v_2)$ . . . . .	62
4.15	Ilustrasi $T_3^-(v_1)$ . . . . .	63
4.16	Ilustrasi $T_2^-(y_1)$ dan $T_2^-(z_1)$ . . . . .	64
4.17	Ilustrasi <i>out-neighbour</i> $y_1$ dan $z_1$ . . . . .	65

# DAFTAR GAMBAR

xvi

4.18	Ilustrasi <i>multiset</i> $n_7$ . . . . .	66
4.19	Ilustrasi <i>multiset</i> $n_7$ . . . . .	67
4.20	Ilustrasi <i>multiset</i> $n_7$ . . . . .	67
4.21	Ilustrasi <i>multiset</i> $m_7$ . . . . .	68
4.22	Ilustrasi $T_2^-(y_1)$ dan $T_2^-(z_1)$ . . . . .	70
4.23	Ilustrasi <i>out-neighbour</i> $y_1$ dan $z_1$ . . . . .	71
4.24	Ilustrasi <i>multiset</i> $n_7$ . . . . .	72
4.25	Ilustrasi <i>multiset</i> $n_7$ . . . . .	73
4.26	Ilustrasi <i>multiset</i> $m_7$ . . . . .	74
4.27	Struktur <i>repeat</i> graf berarah <i>defect</i> empat . . . . .	76
4.28	Ilustrasi $T_3^-(x)$ . . . . .	77
4.29	Ilustrasi $N^+(u)$ dan $N^+(t)$ . . . . .	79
4.30	Ilustrasi $T_2^+(w_2)$ . . . . .	81
4.31	Ilustrasi <i>out-neighbourhood</i> $z_8$ . . . . .	82
4.32	Ilustrasi $T_2^+(w_2)$ . . . . .	84
4.33	Ilustrasi <i>out-neighbourhood</i> $z_8$ . . . . .	84
4.34	Ilustrasi $T_3^+(x)$ . . . . .	86
4.35	Ilustrasi $T_3^-(b_4)$ . . . . .	87
4.36	Ilustrasi $T_3^+(w_{30})$ . . . . .	88



## DAFTAR TABEL

2.1 Sajian batas atas dan batas bawah graf berarah . . . . . 18

4.1 Keteraturan graf berarah berout-degree  $d$ , diameter  $k$ , dan orde  $n$  39



## DAFTAR LAMBANG

$G$	Sembarang graf berarah
$v$	Titik pada graf berarah
$V$	Himpunan titik pada graf berarah
$V(G)$	Himpunan titik pada graf berarah ( $G$ )
$e$	Sisi berarah pada graf berarah
$E$	Himpunan sisi berarah pada graf berarah
$E(G)$	Himpunan sisi berarah pada graf berarah ( $G$ )
$d$	Lambang untuk menyatakan <i>out-degree</i>
$k$	Lambang untuk menyatakan diameter
$N^-(v)$	Himpunan semua <i>in-neighbour</i> dari titik $v$
$N^+(v)$	Himpunan semua <i>out-neighbour</i> dari titik $v$
$d^-(v)$	Banyaknya <i>in-neighbour</i> dari titik $v$
$C_n$	Lambang graf berarah <i>cycle</i>
$K_n$	Lambang graf berarah komplit
$\epsilon$	Anggota suatu elemen atau unsur
$T_s^+(u)$	Keluarga himpunan semua titik akhir pada lintasan berarah di $G$ dengan panjang paling besar $s$ yang dimulai dari $u$ dengan $1 \leq s \leq k$
$T_s^-(u)$	Keluarga himpunan semua titik awal pada lintasan berarah di $G$ dengan panjang paling besar $s$ yang diakhiri di $u$
$N_s^+(u)$	Himpunan semua titik akhi pada lintasan berarah di $G$ dengan panjang $s$ yang dimulai dari $u$
$N_s^-(u)$	Himpunan semua titik awal pada lintasan berarah di $G$ dengan panjang $s$ yang diakhiri di $u$
$S$	Himpunan semua titik dalam graf berarah yang <i>in-degreenya</i> kurang dari $d$ dengan $d$ adalah <i>degree</i> dari graf berarah
$S'$	Himpunan semua titik dalam graf berarah yang <i>in-degreenya</i> lebih dari $d$ dengan $d$ adalah <i>degree</i> dari graf berarah