PELABELAN TITIK TAK-TERATUR JARAK INKLUSIF PADA GRAF *MUSHROOM* DAN GABUNGANNYA

diajukan untuk memenuhi sebagian persyaratan memperoleh gelar Sarjana pada Program Studi Matematika

SKRIPSI

Oleh

Jenni Alfa Nanda Arianti
201810101094

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS JEMBER
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
JURUSAN MATEMATIKA
JEMBER
2024

PERSEMBAHAN

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala rahmat dan hidayah-Nya, sehingga saya dapat menyelesaikan tugas akhir ini yang saya persembahkan sebagai ungkapan terima kasih kepada :

1. Kedua orang tua saya tercinta, yang senantiasa mendoakan serta memberikan dukungan selama ini.
2. Adek, Nenek, dan Keluarga besar yang selalu memberikn semangat serta motivasi kepada saya.
3. Guru dan dosen yang dengan sabar dan ikhlas telah membagikan banyak ilmunya.
4. Almamater Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember, SMA Negeri 1 Grogol, SMP Negeri 1 Grogol, SD Negeri 1 Grogol, dan TK Dharma Wanita.

MOTTO

"Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya."

(QS. Al-Baqarah : 286)[1]

"*Don't rush the process. Good things take a time*"

[1] Al-Baqarah : 286. https://litequran.net/al-baqarah

PERNYATAAN ORISINALITAS

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Jenni Alfa Nanda Arianti

NIM : 201810101094

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul : *Pelabelan Titik Tak-Teratur Jarak Inklusif pada Graf Mushroom dan Gabungannya* adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum pernah diajukan pada institusi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember,

Yang menyatakan,

(Jenni Alfa Nanda Arianti)

NIM 201810101094

HALAMAN PERSETUJUAN

Skripsi berjudul *Pelabelan Titik Tak-Teratur Jarak Inklusif pada Graf Mushroom dan Gabungannya* telah diuji dan disetujui pada

Hari :

Tanggal :

Tempat : Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji

Ketua,	Anggota I,
Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si. NIP 198610142014041001	Kusbudiono, S.Si., M.Si. NIP 197704302005011001
Anggota II,	Anggota III,
Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si. NIP 197408132000032004	Dr. Alfian Futuhul Hadi, S.Si., M.Si. NIP 197407192000121001

ABSTRACT

Distance irregular labeling is defined as labeling each vertex of a graph with a number $1, 2, \ldots, k$*, such that the vertex-wights is different. The vertex-wights in this labeling is obtained by summing up the labels of the neighboring vertex and the vertex's own label. The problem in this labeling is to find the minimum value of the largest k labels on a graph which is called the distance irregularity strength and is denoted by* $\widehat{dis}(G)$*. This research discusses distance-inclusive irregular vertex labeling on mushroom graphs*(Mr_n) *and their joins*$(2Mr_n)$*. A mushroom graph is the result of the attachment of a fan graph and a star graph, while its join of two mushroom graph is the union of two equal mushroom graphs. The methods used are axiomatic deductive method and pattern detection. The axiomatic deductive method is a method that uses definitions and derivation of exiting theorems to prove the new theorem of distance irregular labeling on mushroom graph and the join of two mushroom graph. The pattern detection method is a technique for finding a pattern to formulate an distance irregular labeling pattern. The result of this research is to find the value of distance irregularity strength and prove that the vertex-wights in the mushroom graph and the join of two mushroom graph has a different value. The value of distance irregularity strength on mushroom graph*(Mr_n) *and the join of two mushroom graph*$(2Mr_n)$ *that is* $\widehat{dis}(Mr_n) = n$ *for* $n \geq 3$ *and* $\widehat{dis}(2Mr_n) = n + 1$ *for* $3 \leq n \leq 11$*.*

Keywords: Distance Irregular Labeling, Distance Irregularity Strength

RINGKASAN

Pelabelan Titik Tak-Teratur Jarak Inklusif pada Graf *Mushroom* dan Gabungannya; Jenni Alfa Nanda Arianti, 201810101094; 2024: 42 Halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pelabelan graf merupakan pemberian label pada unsur graf, yaitu titik, sisi, atau keduanya dengan aturan tertentu. Salah satu pelabelan dengan domain titik yaitu pelabelan titik tak-teratur jarak inklusif. Pelabelan titik tak-teratur jarak inklusif merupakan pemberian label pada setiap titik graf dengan bilangan $1, 2, \dots, k$, sedemikian sehingga bobot yang diperolah pada setiap titik bernilai berbeda. Pelabelan ini dikatakan tak-teratur karena label yang diberikan pada setiap titik boleh berulang. Bobot titik pada pelabelan ini didapatkan dengan menjumlahkan label titik yang bertetangga dengan titik tersebut dan label titik itu sendiri. Permasalahan pada pelabelan ini yaitu mencari nilai minimum dari label k terbesar pada sebuah graf. Nilai k yang demikian disebut sebagai *distance irregularity strength* dan dinotasikan dengan $\widehat{dis}(G)$.

Pada penelitian ini, akan dicari nilai $\widehat{dis}(G)$ pada graf *mushroom* dan gabungannya dengan $n \geq 3$. Langkah-langkah dalam penelitian ini dimulai dengan mencari nilai batas bawah pelabelan tak-teratur titik jarak inklusif. Selanjutnya melabeli graf berdasarkan batas bawah. Jika tidak sesuai dengan syarat pelabelan, maka menambahkan satu nilai batas bawh sehingga bobotnya berbeda. Kemudian membuktikan $\widehat{dis}(G)$ dengan membuktikan bahwa nilai bobotnya berbeda berdasarkan fungsi yang telah dirumuskan. Penelitian ini mendapatkan hasil bahwa nilai ketidakteraturan titik jarak inklusif pada graf *mushroom* (Mr_n) adalah $\widehat{dis}(Mr_n) = n$ dan gabungan graf *mushroom* $(2Mr_n)$ adalah $\widehat{dis}(2Mr_n) = n + 1$ untuk $3 \leq n \leq 11$.

PRAKATA

Puji syukur kehadirat Allah SWT. Atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir dengan ju dul "Pelabelan Titik Tak-Teatur Jarak Inklusif pada Graf *Mushroom* dan Gabungannya". Penyusunan tugas akhir ini untuk memenuhi syarat pendidikan Strata Satu (S1) Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Penyusunan tugas akhir ini tidak lepas dari bimbingan dan dukungan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada :

1. Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si. dan Kusbudiono, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing yang telah meluangkan waktu untuk memberikan ilmu, arahan, dan bimbingan dalam penyelesaian tugas akhir;
2. Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si. dan Dr. Alfian selaku Dosen Penguji yang telah memberikan kritik dan saran demi penyempurnaan tugas akhir;
3. Drs. Moh. Hasan, M.Sc., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah memberi bimbingan selama menjadi mahasiswa;
4. Dosen dan karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
5. Orang tua serta keluarga besar yang senantiasa memberikan dukungan;
6. Teman-teman pemodelan graf, angkatan 2020 Jurusan Matematika, KKN 06 Bercak, dan teman-teman BEMF MIPA 2022 Universitas Jember yang saling memberi semangat dan motivasi dalam penyelesaian tugas akhir;
7. Teman-teman seperjuangan Ulfie, Shelly, Essa, May, Nur, dan Sukma
8. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per-satu.

Penulis menerima kritik dan saran dari semua pihak demi penyempurnaan tugas akhir ini serta berharap agar tugas akhir ini dapat bermanfaat bagi pembaca.

Jember, 2024

Penulis

DAFTAR ISI

DIGITAL REPOSITORY UNIVERSITAS JEMBER

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan ilmu yang dapat digunakan untuk merepresentasikan suatu objek dan hubungan antar objek. Salah satu pembahasan teori graf yaitu pelabelan graf. Pelabelan graf merupakan fungsi yang memasangkan elemen graf ke himpunan bilangan dengan syarat tertentu. Berdasarkan domainnya, pelabelan graf dibagi menjadi pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total. Pelabelan titik (*vertex labeling*) merupakan pelabelan dari suatu graf yang domainnya berupa himpunan titik. Pelabelan sisi (*edge labeling*) merupakan pelabelan dari suatu graf yang domainnya berupa himpunan sisi. Pelabelan total (*total labeling*) merupakan pelabelan dari suatu graf yang domainnya berupa himpunan titik dan sisi. Salah satu pelabelan dengan domain titik yaitu pelabelan titik tak-teratur jarak.

Pelabelan tak-teratur didefinisikan sebagai pemetaan setiap elemen suatu graf ke himpunan bilangan bulat yang memungkinkan pengulangan label. Slamin (2017) memperkenalkan modifikasi pelabelan tak-teratur yang disebut sebagai pelabelan titik tak-teratur jarak non-inklusif. Pelabelan titik tak-teratur jarak non-inklusif didefinisikan sebagai pemberian label pada titik dengan himpunan bilangan bulat $\{1, 2, \ldots, k\}$ sedemikian sehingga nilai bobot yang dihasilkan di setiap titiknya berbeda. Pelabelan ini dikatakan tak-teratur karena pemberian label titiknya boleh berulang atau sama dengan label titik lain. Bobot titik pada pelabelan titik tak-teratur jarak inklusif didapatkan dengan menjumlahkan label titik yang bertetangga. Pemberian label pada setiap titik graf dilakukan dengan memperhatikan jarak antar titik.

(Bača et al., 2018) memperkenalkan konsep pelabelan yang disebut dengan pelabelan titik tak-teratur jarak inklusif. Perbedaan antara pelabelan ini dengan pelabelan titik tak-teratur jarak non-inklusif terletak pada cara menentukan nilai bobot di setiap titiknya. Bobot titik yang terdapat di pelabelan tak-teratur jarak inklusif diperoleh dengan menjumlahkan label titik-titik yang bertetangga dengan label titik itu sendiri. Permasalahan dalam pelabelan ini adalah melabeli titik-titik dalam graf G dengan bilangan bulat $1, 2, 3, \dots, k$. Nilai k yang dipilih adalah k yang paling minimum, sehingga diperoleh bobot titik yang berbeda. Nilai k minimum yang demikian disebut dengan nilai kekuatan tak-teratur jarak inklusif (*distance irregularity strength*) dan dinotasikan dengan $\widehat{dis}(G)$.

Penelitian berkaitan dengan pelabelan tak-teratur titik jarak inklusif yang telah diteliti sebelumnya yaitu pada graf *path* oleh (Bong & Lin, 2017) menghasilkan nilai $\widehat{dis}(G) = \frac{n}{3} + 1$ dan graf bintang menghasilkan nilai $\widehat{dis}(G) = n$. (Utami et al., 2018) melakukan penelitian mengenai nilai tak-teratur jarak titik pada graf *triangular ladder* yang menghasilkan nilai $\widehat{dis}(G) = \left\lceil \frac{(2n+2)}{5} \right\rceil$. (Halikin et al., 2020) mendapatkan nilai tak-teratur jarak titik pada graf *firecracker* yaitu $\widehat{dis}(G) = n + 1$. Penelitian pelabelan tak-teratur jarak titik dilakukan oleh (Susanto et al., 2021) pada graf $3S_n$ yang menghasilkan nilai $\widehat{dis}(G) = \left\lceil \frac{(3n+1)}{2} \right\rceil$. (Al'ayyubbi , 2022) melakukan penelitian mengenai nilai tak-teratur jarak titik pada graf *firecracker* $F_{2,n}$ yang menghasilkan nilai $\widehat{dis}(G) = n + 1$. Berdasarkan penelitian mengenai pelabelan titik tak-teratur jarak inklusif pada graf kipas F_n dan graf bintang S_n, penulis ingin melanjutkan penelitian mengenai hasil pelekatan kedua graf yaitu pelabelan titik tak-teratur jarak inklusif pada graf *mushroom* (Mr_n).

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, rumusan masalah pada penelitian ini adalah bagaimana pelabelan titik tak-teratur jarak inklusif pada graf *mushroom* (Mr_n) dan gabungannya?

1.3 Batasan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah yang telah diuraikan, batasan masalah yang digunakan pada penelitian ini adalah graf *mushroom* Mr_n dengan $n \geq 3$ dan gabungan graf *mushroom* $2Mr_n$ yang merupakan gabungan dari dua graf *mushroom* yang sama.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah diuraikan, tujuan pada penelitian ini yaitu untuk menganalisis pelabelan titik tak-teratur jarak inklusif pada graf *mushroom* (Mr_n) dan gabungannya

1.5 Manfaat Penelitian

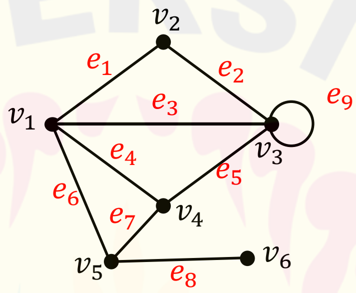
Manfaat yang diperoleh dari adanya penelitian ini adalah sebagai berikut.

a. Bagi peneliti, diharapkan dengan adanya penelitian ini akan memberikan wawasan baru terhadap peneliti lain mengenai pelabelan titik tak-teratur jarak inklusif pada graf *mushroom* (Mr_n) dan gabungan graf *mushroom* $(2Mr_n)$.
b. Bagi mahasiswa, diharapkan dengan adanya penelitian ini akan menjadi referensi tambahan untuk penelitian kelas graf lainnya pada topik pelabelan titik tak-teratur jarak inklusif.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Graf

Graf G didefinisikan sebagai pasangan terurut $\left(V(G), E(G)\right)$. $V(G)$ adalah himpunan tak kosong yang setiap elemennya disebut dengan titik dan $E(G)$ adalah himpunan dari pasangan tak terurut titik di V yang disebut dengan sisi (Chartrand et al., 2016). Gambar 2.1 adalah graf G yang terdiri dari 6 titik dan 6 sisi dengan himpunan titik $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$.

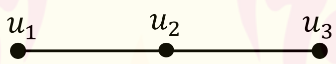


Gambar 2.1 Graf dengan 6 titik dan 9 sisi

Misalkan G adalah sebuah graf dan $(u, v) \in G$, titik u dan v dikatakan bertetangga atau *adjacent* jika terdapat suatu sisi e yang menghubungkan titik u dan v. Titik v dikatakan bersisian atau *incident* dengan sisi e jika titik v adalah ujung dari sisi e. Himpunan tetangga dari titik v pada suatu graf G dinotasikan dengan $N(v)$. Gambar 2.1 menunjukkan bahwa titik v_1 bertetangga dengan v_2, v_3, v_4, dan v_5. Titik v_6 bersisian dengan e_8. Suatu sisi yang terbentuk dari satu titik yang dihubungkan ke titik itu sendiri disebut dengan gelang (*loop*). Sisi e_9 merupakan *loop*. Derajat dari sebuah titik v pada graf G dinotasikan dengan $deg(v)$ dan didefinisikan sebagai banyaknya sisi yang bersisian dengan titik v. Titik yang memiliki derajat satu disebut daun (*leaf*) atau titik *pendant*. Sisi ganda adalah dua sisi atau lebih yang menghubungkan dua titik yang sama. Jalan (*walk*) merupakan suatu istilah dalam graf yang didefinisikan sebagai barisan berhingga titik dan sisi secara bergantian yang diawali dan diakhiri dengan titik, sedemikian sehingga titik yang berurutan dalam barisan tersebut bertetangga. Lintasan (*path*) adalah suatu jalan yang semua titiknya berbeda. Jarak (*distance*) titik v_1 ke titik v_2 adalah panjang lintasan terpendek dari titik v_i ke titik v_j dan dinotasikan $d(v_i, v_j)$. Graf G dikatakan graf terhubung (*connected graph*) untuk setiap dua titik pada graf yang terdapat lintasan. Sedangkan jika tidak terdapat lintasan yang menghubungan dua titik berbeda pada graf G, maka graf G merupakan graf tidak terhubung (*disconnected graph*).

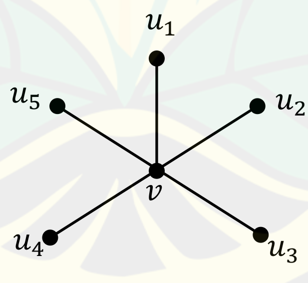
2.2 Graf *Mushroom*

Graf sederhana merupakan graf yang tidak memiliki sisi ganda maupun gelang. Graf lintasan (*path*) adalah graf pohon dengan berderajat titik maksimal dua. Graf lintasan dengan n titik dinotasikan dengan P_n. Graf lintasan P_n memiliki n titik dan $n-1$ sisi. Gambar 2.2 merupakan contoh graf lintasan P_3



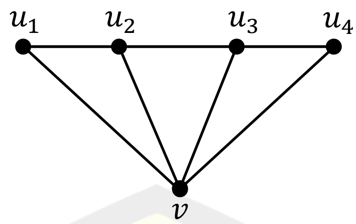
Gambar 2.2 Graf lintasan P_3

Graf bintang (*star graph*) merupakan suatu graf terhubung yang dibangun dari satu titik pusat dengan sejumlah daun pada titik pusat tersebut (Huda & Amri, 2012). Graf bintang dengan $n+1$ titik dinotasikan dengan S_n. Graf bintang S_n memiliki $n+1$ titik dan n sisi. Gambar 2.3 merupakan contoh graf bintang S_5.



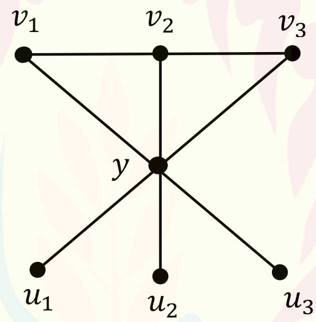
Gambar 2.3 Graf bintang S_5

Graf kipas (*fan graph*) adalah graf yang didapat dengan menghubungkan setiap titik pada graf lintasan dengan sebuah sisi ke satu titik sebagai pusat (Azizah, 2014). Graf kipas dengan $n+1$ titik dinotasikan dengan F_n. Graf kipas F_n memiliki $n+1$ titik dan $2n-1$ sisi. Gambar 2.4 merupakan contoh graf kipas F_4.



Gambar 2.4 Graf kipas F_4

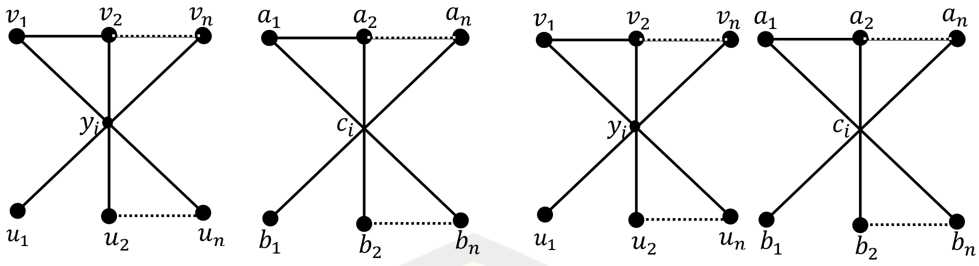
Graf *mushroom* merupakan graf yang diperoleh dari hasil melekatkan titik pusat graf kipas F_n dengan titik pusat graf bintang S_n (Nurhakim, 2020). Graf *mushroom* dengan $2n + 1$ titik dinotasikan Mr_n dengan n menyatakan jumlah titik berderajat satu. Graf *mushroom* memiliki $2n + 1$ titik dan $2(n + 1)$ sisi. Berikut merupakan contoh dari graf *mushroom* Mr_3 dengan 7 titik.



Gambar 2.5 Graf *mushroom* Mr_3

2.3 Gabungan Graf *Mushroom*

Operasi graf merupakan suatu cara untuk memeroleh graf baru dengan cara mengombinasikan graf. Operasi graf yang digunakan pada penelitian ini, yaitu operasi gabungan. Misalkan terdapat dua graf, yaitu graf F dan graf G. Gabungan antara graf F dan graf G dinotasikan dengan $F \cup G$. Graf $F \cup G$ didefinisikan sebagai graf dengan himpunan titik $V(F \cup G) = V(F) \cup V(G)$ dan himpunan sisi $E(F \cup G) = E(F) \cup E(G)$ (Henning & Van Vuuren, 2022). Operasi gabungan graf yang digunakan pada penelitian ini yaitu gabungan dari dua graf *mushroom* yang sama. Gambar 2.6 adalah contoh gabungan graf *mushroom* $F \cup G$.



Graf F Graf G Graf $F \cup G$

Gambar 2.6 Gabungan graf *mushroom*

2.4 Pelabelan Titik Tak-Teratur Jarak Inklusif

Pelabelan suatu graf merupakan fungsi yang memasangkan elemen graf ke himpunan bilangan dengan syarat tertentu. Pada pelabelan graf terdapat istilah bobot yang merupakan hasil penjumlahan label yang terkait, baik dari himpunan titik atau himpunan sisi pada suatu graf (Slamin, 2019). Bobot pada graf dibedakan menjadi bobot titik, bobot sisi, dan bobot total. Bobot pada graf G dinotasikan dengan $wt(G)$.

Pelabelan tak-teratur didefinisikan sebagai pemetaan $f: V(G) \to \{1,2,\dots,k\}$ sedemikian sehingga menghasilkan bobot setiap titik berbeda. (Slamin, 2017) memperkenalkan modifikasi pelabelan tak-teratur yang disebut sebagai pelabelan tak-teratur titik non-inklusif. Pelabelan ini dikatakan tak-teratur karena label setiap titiknya boleh berulang. Pelabelan tak-teratur jarak titik non-inklusif didefinisikan sebagai pelabelan pada suatu graf G dengan memasangkan himpunan titik ke bilangan bulat $\{1, 2, \dots, k\}$ sedemikian sehingga bobot titik yang diperoleh semuanya berbeda. Misalkan v merupakan suatu titik pada graf G, bobot titik $v \in V(G)$ diperoleh dengan menjumlahkan semua label titik yang bertetangga dengan titik tersebut atau dapat dituliskan dalam rumus berikut

$$wt(v) = \sum_{u \in N(v)} f(u) \qquad (2.1)$$

$N(v)$ merupakan himpunan tetangga titik v.

Konsep pelabelan tak-teratur titik kemudian dikembangkan oleh (Bača et al., 2018 yang selanjutnya disebut dengan pelabelan tak-teratur titik jarak inklusif.

Perbedaan antara pelabelan titik tak-teratur jarak non-inklusif dengan inklusif yaitu cara mendapatkan nilai bobot setiap titiknya. Bobot titik $v \in V(G)$ pada pelabelan titik tak-teratur jarak inklusif diperoleh dengan menjumlahkan label titik yang bertetangga termasuk titik itu sendiri, dapat dituliskan dalam rumus berikut

$$wt(v) = \sum_{u \in N(v)} f(u) + f(v) \tag{2.2}$$

Himpunan titik graf G diberi label bilangan $1, 2, \dots, k$ dengan nilai k sebagai label terbesar. Nilai k yang disebut sebagai nilai kekuatan tak-teratur titik jarak inklusif adalah nilai k minimum.

2.5 Nilai Kekuatan Titik Tak-Teratur Jarak Inklusif

Nilai kekuatan tak-teratur titik jarak inklusif atau *distance irregularity strength* dari graf G dinotasikan dengan $\widehat{dis}(G)$. *Distance irregularity strength* adalah bilangan bulat positif terkecil dari label terbesar yang digunakan dalam pelabelan titik tak-teratur jarak inklusif pada suatu graf.

Pelabelan titik tak-teratur jarak inklusif tidak dapat diterapkan pada semua graf. Graf yang tidak dapat dilabeli secara inklusif yaitu graf yang mempunyai minimal dua titik dengan himpunan tetangga yang sama termasuk dengan dirinya sendiri. Graf yang tidak dapat dilabeli secara inklusif dapat dikatakan bahwa nilai $\widehat{dis}(G) = \infty$. Berikut adalah teorema dalam pelabelan titik tak-teratur jarak inklusif.

Teorema 2.1 Suatu graf G berlaku $\widehat{dis}(G) = \infty$ jika dan hanya jika terdapat dua titik yang berbeda $u, v \in V(G)$ sehingga $N_G[u] = N_G[v]$ dengan $N_G[u]$ merupakan himpunan tetangga titik v termasuk titik v itu sendiri

Teorema 2.2 Misalkan G adalah sebuah graf terhubung yang mempunyai n titik dengan derajat minimum δ dan derajat maksimum Δ dan tidak ada titik yang mempunyai tetangga yang sama, maka :

$$\widehat{dis}(G) \geq \left\lceil \frac{n+\delta}{\Delta+1} \right\rceil$$

(Susanti et al., 2021) menambahkan batas bahwa untuk graf yang memiliki banyak daun

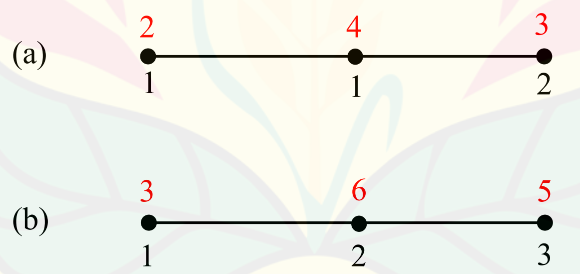
Teorema 2.3 Misalkan G adalah sebuah graf terhubung yang mempunyai n titik dengan derajat minimum δ dan derajat maksimum Δ dan n_i merupakan banyaknya titik berderajat i pada G untuk setiap $\delta \leq i \leq \Delta$, maka :

$$\widehat{dis}(G) \geq max_{\delta \leq i \leq \Delta} \left\{ \left\lceil \frac{\delta + \sum_{j=\delta}^{i} n_j}{i+1} \right\rceil \right\}$$

Berikut merupakan contoh pelabelan titik tak-teratur jarak inklusif pada graf *path* P_3. Langkah pertama yang dilakukan adalah menghitung nilai batas bawah berdasarkan Teorema 2.2.

$$\widehat{dis}(P_3) \geq \left\lceil \frac{n+\delta}{\Delta+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{3+1}{2+1} \right\rceil = 2$$

Selanjutnya melabeli semua titik menggunakan bilangan bulat. Kemudian menghitung bobot dengan menjumlahkan label titik yang bertetangga dengan titik itu sendiri dan dipilih pelabelan dengan k minimum.



Gambar 2.7 Pelabelan titik tak-teratur jarak inklusif graf *path* P_3 (a) $k = 2$ dan (b) $k = 3$

Gambar 2.7 (a) nilai k yang diperoleh adalah 2, sedangkan (b) nilai k yang diperoleh adalah 3, dengan label titik berwarna hitam dan bobot titik berwarna merah. Pelabelan titik tak-teratur jarak inklusif adalah pemberian label titik sehingga menghasilkan bobot yang berbeda dengan mengambil nilai label titik terbesar yang minimum. Oleh karena itu, pada graf *path* P_3 label terbesar yang minimum adalah 2, jadi $\widehat{dis}(P_3) = 2$ seperti pada Gambar 2.7 (a). Pelabelan titik tak-teratur jarak inklusif graf *path* P_3 dengan $k = 2$

2.6 Hasil Pelabelan Titik Tak-Teratur Jarak Inklusif Terdahulu

Pada penelitian sebelumnya, telah didapatkan pelabelan ketakteraturan titik jarak inklusif pada beberapa graf yang kemudian dapat digunakan sebagai rujukan penelitian ini. Berikut hasil-hasil penelitian terdahulu yang telah dirangkum dan disajikan dalam Tabel 2.1

Tabel 2.1 Hasil penelitian pelabelan ketakteraturan titik jarak inklusif

Graf	Nilai tak-teratur jarak ($dis(G)$)	Pustaka
Graf *path* P_n		
$n \equiv 0 \bmod 5$	$\frac{n}{3}+1$	
Graf *star* S_n	n	(Bong & Lin, 2017)
Graf *cycle* C_n		
$n > 13$	$\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+1$	
Graf lengkap K_n		
$n = 1$	1	
$n \geq 2$	∞	
Graf roda W_n		(Bača et al., 2018)
$n = 3$	∞	
$n = 4$	4	
$n \neq 2, 3, 4 \bmod 5, n \geq 5$	$\left\lceil\frac{n+2}{3}\right\rceil$	
Graf *triangular ladder* L_n		
$n = 4$	3	(Utami, 2018)
$n \neq 4 \bmod 5, n \geq 3$	$\left\lceil\frac{(2n+2)}{5}\right\rceil$	
Graf *firecracker* $F_{n,3}$		
$n \geq 3$	$n+1$	
Graf *broom* $Br_{3,m}$		
$m \geq 2$	m	(Halikin, 2020)
Graf *banana tree* $B_{2,m}$		
$m = 3$	4	
$m \geq 4$	m	
Graf *identical copies stars* $3S_n$		
$n = 3$	6	(Susanto, 2021)
$n \geq 4$	$\left\lceil\frac{3n+1}{2}\right\rceil$	
Graf *firecracker* $F_{2,n}$ dan $F_{3,n}$		
Untuk $F_{2,n}$ dengan $n \geq 3$	$n+1$	(Al'ayyubbi, 2022)

Untuk $F_{3,n}$ dengan $n \geq 3$	$\left\lceil \frac{1+3n}{2} \right\rceil$	
Graf persahabatan lengkap diperumum $Kf_{m,n}$ $n \geq 3$	$2(m-1)+n$	(Majid, 2023)
Graf buku Br_m $m > 3$	m	(Wahyu, 2023)

BAB 3. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Metode dan Data Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deduktif aksiomatik dan metode pendeteksian pola.

a. Metode deduktif aksiomatik

Metode deduktif aksiomatik adalah metode untuk menyelesaikan permasalahan dengan membuktikan sebuah kondisi menggunakan beberapa teorema yang telah ada. Penggunaan metode ini diawali dengan beberapa definisi. Berdasarkan definisi tersebut disusun lemma baru terkait pelabelan titik tak-teratur jarak inklusif pada graf *mushroom* dan gabungannya. Kemudian lemma yang dihasilkan dibuktikan secara deduktif.

b. Metode pendeteksian pola

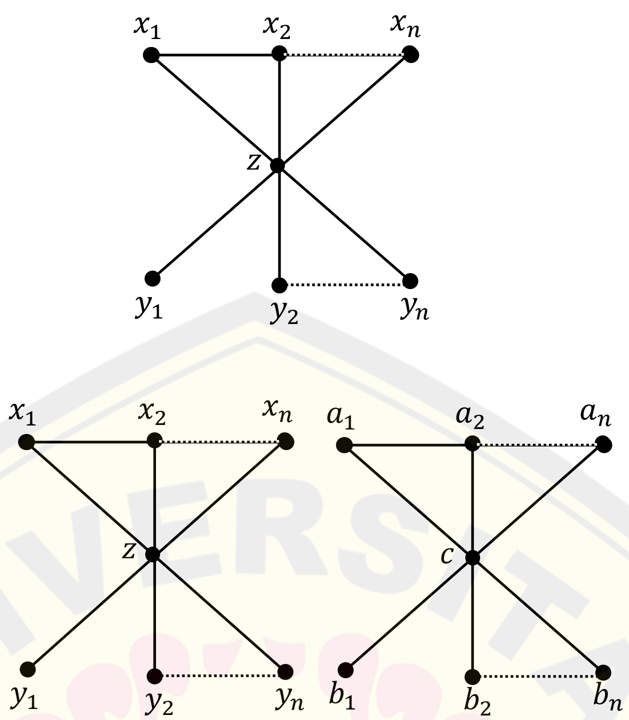
Metode pendeteksian pola yaitu metode untuk menemukan pola dari pelabelan titik tak-teratur jarak inklusif pada graf *mushroom* dan gabungannya. Penentuan pola diawali dengan graf dari n terkecil. Kemudian merumuskan pola tersebut menjadi suatu rumus fungsi.

3.2 Data Penelitian

Data penelitian yang digunakan adalah graf *mushroom* (Mr_n) dan gabungan graf *mushroom* $(2Mr_n)$ dengan $n \geq 3$. Himpunan titik graf *mushroom* (Mr_n) dinotasikan dengan $V(Mr_n) = \{x_i, z, y_i | 1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{n}\}$. Gabungan graf *mushroom* $(2Mr_n)$ mempunyai himpunan titik yaitu $V(2Mr_n) = \{x_i, z, y_i, a_i, c, b_i | 1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{n}\}$. Penotasian Graf *mushroom* (Mr_n) dan gabungannya dapat dilihat pada Gambar 3.1.

(a)

(b)



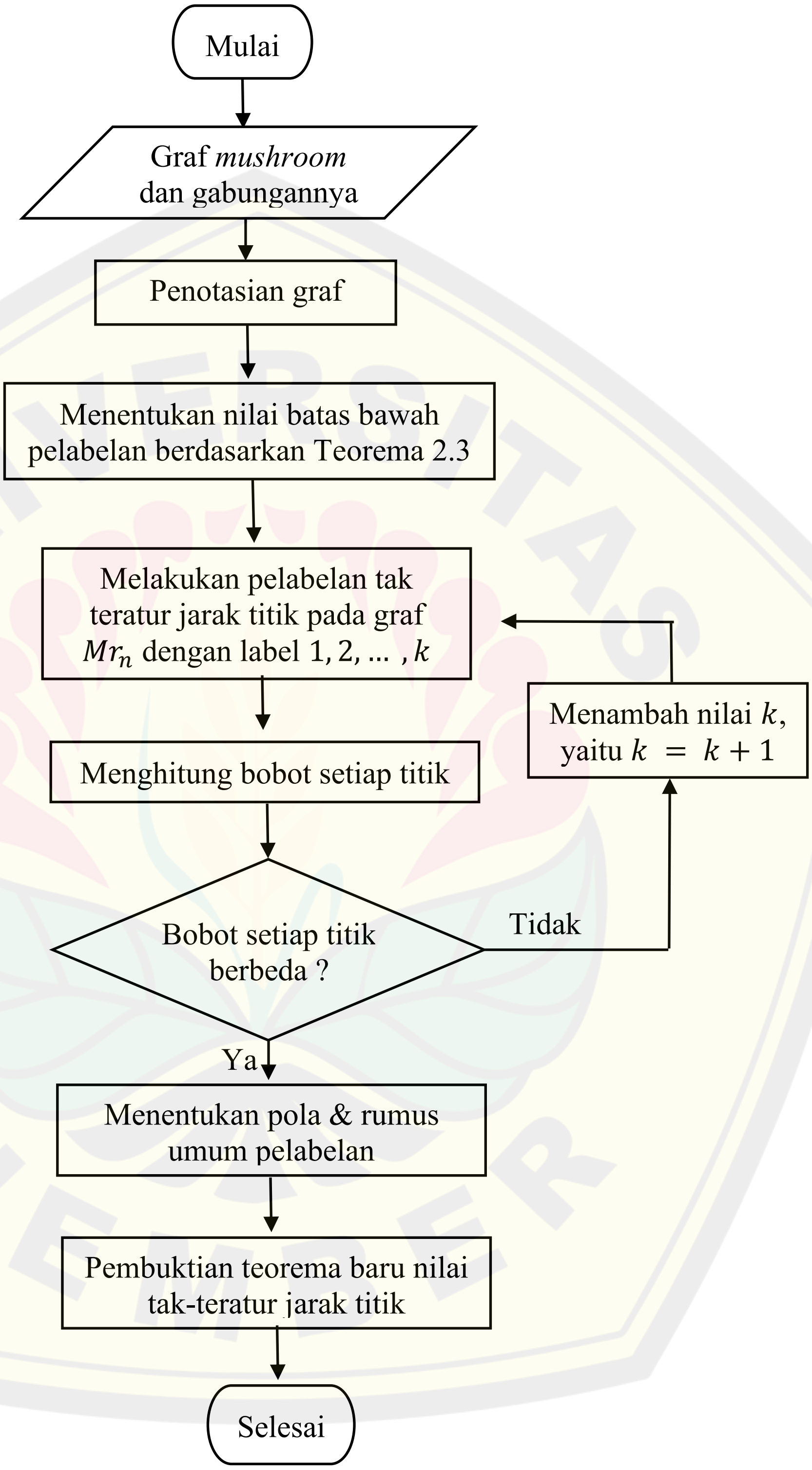
Gambar 3.1 Graf *mushroom* (a) Mr_n dan (b) $2Mr_n$

3.3 Langkah-Langkah Penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Menotasikan titik pada graf *mushroom* (Mr_n) dan gabungannya
2. Mencari nilai batas bawah $\widehat{dis}(G)$ berdasarkan Teorema 2.3
3. Memberi label graf *mushroom* (Mr_n) dan gabungannya berdasarkan batas bawah yang diperoleh pada langkah 2 sehingga bobot setiap titiknya berbeda
$$V(Mr_n) \rightarrow \{1,2,3,\ldots,\widehat{dis}(G)\}$$
4. Jika pelabelan yang digunakan tidak memenuhi syarat pelabelan titik tak-teratur jarak inklusif, maka kembali ke-langkah 2 dan menambahkan nilai batas bawah dengan $\widehat{dis}(G) = k + 1$
5. Menentukan pola pelabelan dan merumuskan bentuk umum pelabelan titik tak-teratur jarak inklusif graf *mushroom* (Mr_n) dan gabungannya
6. Membuktikan teorema baru nilai $\widehat{dis}(G)$ pada graf *mushroom* (Mr_n) dan gabungannya.

Langkah-langkah penelitian secara singkat diuraikan dalam diagram alir Gambar 3.1



Gambar 3.2 Diagram alir