PELABELAN *FELICITOUS* PADA GRAF ULAR BERLIPAT

diajukan untuk memenuhi sebagian persyaratan memperoleh gelar Sarjana pada program studi Matematika

SKRIPSI

Oleh
Sella Septiana
191810101014

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS JEMBER
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
JURUSAN MATEMATIKA
JEMBER
2023

PERSEMBAHAN

Puji syukur kehadirat Allah SWT, sebagai ungkapan kebahagiaan skripsi ini saya persembahkan kepada:

1. Bapak Sutrisno dan Ibu Sumiati, yang senantiasa memberikan dukungan selama ini, serta doa dan didikan kepada saya hingga saat ini.
2. Adik Dimas Ardi Prayoga, An-An Amelin Ramadani, Sehan Hafizah Ababil, dan Aska Audriananta tersayang yang tidak pernah berhenti memberi dukungan dan menjadi semangat untuk menyelesaikan tugas akhir.
3. Sahabat-sahabat saya Andini, Anggi, Fitri, Hikma, dan Nelly yang telah memberikan dukungan dan semangat selama ini.
4. Seluruh guru, dosen, yang telah memberikan ilmunya sejak Taman Kanak-Kanak hingga Perguruan Tinggi.

MOTTO

"Hargai dirimu. Apresiasi dirimu. Bersikap baik kepada dirimu. Berterima kasihlah kepada dirimu".

(Jerome Polin)

---

https://www.instagram.com/p/Ct6Yh4PPP00/?igshid=NTc4MTIwNjQ2YQ= [Diakses 25 Juni 2023]

PERNYATAAN ORISINALITAS

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Sella Septiana

NIM : 191810101014

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul "*Pelabelan Felicitous pada Graf Ular Berlipat"* adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum pernah diajukan pada institusi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juli 2023

Yang menyatakan,

Sella Septiana

NIM 191810101014

HALAMAN PERSETUJUAN

Skripsi berjudul "*Pelabelan Felicitous pada Graf Ular Berlipat*" telah diuji dan disetujui pada

Hari : Rabu
Tanggal : 12 Juli 2023
Tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji:

Ketua,	Anggota I,
Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si. NIP. 197408132000032004	Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si. NIP. 198610142014041001
Anggota II,	Anggota III,
Kusbudiono, S.Si., M.Si. NIP. 197704302005011001	Dr.Alfian Futuhul Hadi, S.Si., M.Si. NIP. 197407192000121001

ABSTRACT

Felicitous labeling of a graph G on q edge is an injective function $f: V(G) \rightarrow \{0,1,2,\ldots,q\}$*, so that each edge gets a label from the sum of the two vertex labels adjacent to that edge modulo q. A graph G that obeys the rules of felicitous labeling is called a felicitous graph. This research discusses the felicitous labeling of folded snake graphs* $(C_{4,2}^{k}(r))$*. Folded snake graph is a graph obtained from the join of* k*-complate bipartite graphs* $K_{2,2r}$ *with a connecting point between the graph* $K_{2,2r}$ *to-*i *and* $K_{2,2r}$ *to-*$i+1$ *which is vertebrae points 2. The purpose of this research is to find out whether the folded snake graph*$(C_{4,2}^{k}(r))$ *with* $k \geq 1$ *and* $r \geq 1$ *is a felicitous graph or not. The results of this research prove that the folded snake graphs* $(C_{4,2}^{k}(r))$ *with* $k \geq 1$ *and* $r \geq 1$ *is a felicitous graph.*

Keywords: Felicitous Labeling, Folded Snake Graphs $(C_{4,2}^{k}(r))$

RINGKASAN

Pelabelan *Felicitous* pada Graf Ular Berlipat; Sella Septiana, 191810101014; 2023; 15 halaman; Jurusan Matematika Fakultas matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pelabelan graf merupakan suatu fungsi yang memasangkan titik, sisi ataupun keduanya ke bilangan bulat tak negatif yang memeuhi syarat tertentu. Pemberian label pada titik dalam graf disebut pelabelan titik, pemberian label pada sisi disebut pelabelan sisi, dan pemberian label pada keduanya disebut pelabelan total. Salah satu jenis pelabelan yaitu pelabelan *felicitous.* Pelabelan *felicitous* pada graf dengan q sisi didefinisikan sebagai fungsi *injektif* $f: V(G) \rightarrow \{0,1,2,3, \dots, q\}$, sehingga setiap sisi mendapatkan label dari penjumlahan dua label titik yang bersisian dengan sisi tersebut dalam modulo q. Penelitian ini membahas tentang pelabelan *felicitous* pada graf ular berlipat. Graf ular berlipat dinotasikan sebagai $C_{4,2}^k(r)$ merupakan graf yang diperoleh dari k-buah graf bipartit lengkap $K_{2,2r}$ dengan titik penghubung antara graf $K_{2,2r}$ ke-i dan $K_{2,2r}$ ke-$i+1$ yang disebut dengan titik *vertebrae* yang berjarak 2.

Langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini yaitu melabeli setiap titik pada graf ular berlipat $C_{4,2}^k(r)$ yang memenuhi fungsi *injektif*. Selanjutnya, menghitung label sisi dengan menjumlahkan dua label titik yang bersisian dengan sisi tersebut dalam modulo q. Kemudian, memeriksa apakah label sisi berbeda semua. Jika label sisi berbeda semua maka graf ular berlipat $C_{4,2}^k(r)$ merupakan graf *felicitous*. Tujuan dari penelitian ini yaitu membuktikan apakah graf ular berlipat $\left(C_{4,2}^k(r)\right) k \geq 1$ dan $r \geq 1$ merupakan graf *felicitous* atau bukan. Hasil dari penelitian ini terbukti bahwa graf ular berlipat $(C_{4,2}^k(r))$ dengan $k \geq 1$ dan $r \geq 1$ merupakan graf *felicitous*.

PRAKATA

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir yang berjudul "*Pelabelan Felicitous pada Graf Ular Berlipat*". Tugas akhir ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan Pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Penyusunan tugas akhir ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak, oleh karena itu dengan segala hormat penulis menyampaikan terimakasih kepada :

1. Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing utama dan Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si., selaku dosen pembimbing anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan tenaga dalam penulisan tugas akhir ini.
2. Kusbudiono, S.Si., M.Si. dan Dr. Alfian Futuhul Hadi, S.Si., M.Si., selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik dan saran demi kesempurnaan tugas akhir ini.
3. Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing akademik yang telah memberikan dukungan serta saran selama menempuh perkeliahan.
4. Kedua orang tua dan keluarga besar yang telah memberikan do'a dan dukungan dalam menyelesaikan pendidikan.
5. Sahabat saya Andini, Anggi, Fitri, Hikma, dan Nelly yang telah memberikan semangat, do'a dan memberikan kecerian selama ini.
6. Semua pihak yang tidak dapat saya sebutkan satu per satu.

Penulis juga menerima kritik dan saran semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat untuk kita semua.

Jember, Juli 2023

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

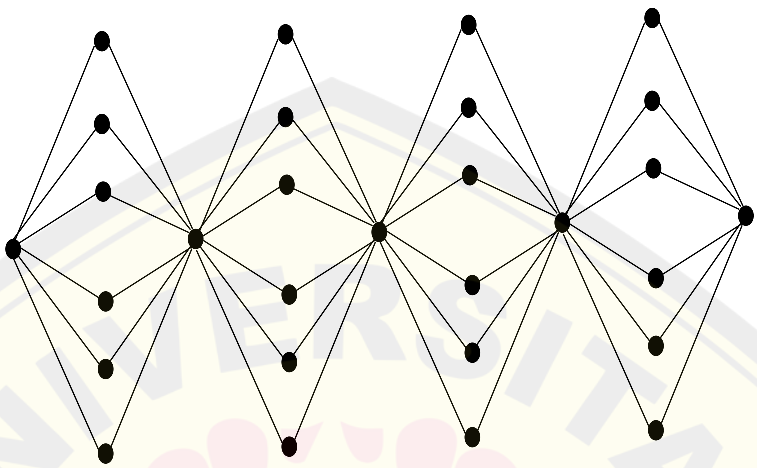
Pelabelan graf merupakan suatu fungsi yang memasangkan titik, sisi ataupun keduanya ke bilangan bulat tak negatif yang memenuhi syarat tertentu. Pelabelan dibedakan menjadi tiga yaitu pelabelan titik, pelabelan sisi, serta pelabelan sisi dan titik (pelabelan total). Pemberian label pada titik dalam graf disebut pelabelan titik, pemberian label pada sisi disebut pelabelan sisi, dan pemberian label pada keduanya disebut pelabelan total (Chartrand et al., 2019).

Pelabelan yang digunakan dalam penelitian ini yaitu pelabelan *felicitous*. Menurut (Gallian, 2022), pelabelan *felicitous* pada graf G dengan p titik dan q sisi merupakan pemetaan *injektif* $f: V(G) \rightarrow \{0,1,2,3, \dots, q\}$, sehingga setiap sisi mendapatkan label dari penjumlahan dua label titik yang bersisian dengan sisi tersebut dalam modulo q yang harus berbeda semua. Secara matematis untuk mencari label sisi $uv \in E(G)$, yaitu $f^*(uv) = [f(u) + f(v)](mod\ q)$. Graf yang memenuhi syarat pelabelan *felicitous* disebut graf *felicitous*.

Beberapa penelitian yang telah dilakukan berkaitan dengan pelabelan *felicitous* diantaranya yaitu, (Lusianita, 2010) yang melakukan penelitian mengenai pelabelan *felicitous* pada graf piramida $P_n \times C_3$ untuk $n \geq 3$, graf prisma $P_2 \times C_n$ untuk n ganjil, dan graf prisma $P_2 \times C_n$ untuk $n = 4, 6,$ dan 8. (Gomathi et al., 2012) yang melakukan penelitian mengenai pelabelan *felicitous* pada graf lintasan H_n. (Selvaraju et al., 2013) yang melakukan penelitian mengenai pelabelan *felicitous* pada graf duplikasi $D_2(K_1, n)$ dan graf split bintang $spl(K_1, n)$.

Pengkajian pelabelan *felicitous* termasuk materi dalam teori graf yang sederhana, hal ini menjadikan banyak peneliti tertarik untuk mengkaji pelabelan ini. Terdapat salah satu graf yang belum dilakukan pada pelabelan *felicitous,* graf tersebut yaitu graf ular berlipat. Graf ular berlipat $\left(C_{4,2}^k(r)\right)$ didefinisikan sebagai graf yang diperoleh dari k-buah graf bipartit lengkap $K_{2,2r}$ dengan titik penghubung antara graf $K_{2,2r}$ ke-i dan $K_{2,2r}$ ke-$i+1$ yang disebut titik *vertebrae* yang berjarak

2. Gambar 1.1, merupakan contoh graf ular berlipat $(C_{4,2}^{4}(2))$. Berdasarkan hal tersebut,memilih graf ular berlipat dan menentukan graf berlipat $\left(C_{4,2}^{k}(r)\right)$ dapat dilabeli dengan aturan pelabelan *felicitous*.



Gambar 1. 1 Graf ular berlipat $(C_{4,2}^{4}(2))$

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, rumusan masalah pada penelitian ini yaitu menyelidiki apakah graf ular berlipat $(C_{4,2}^{k}(r))$ merupakan graf *felicitous* atau bukan graf *felicitous*.

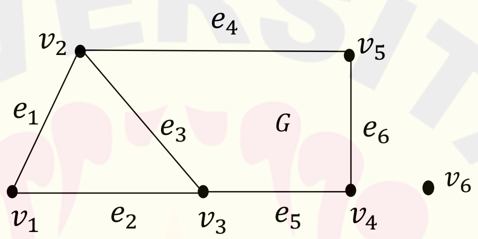
1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan pada penelitian ini yaitu membuktikan apakah graf ular berlipat $(C_{4,2}^{k}(r))$ merupakan graf *felicitous* atau bukan.

BAB 2. TINJAUAN TEORI

2.1 Konsep Dasar Graf

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ merupakan himpunan tak kosong dari unsur-unsur yang disebut titik (*vertex*) dan $E(G)$ merupakan himpunan sisi (*edge*) yang menghubungkan titik-titik di graf G, yaitu $e = (u, v)$ dengan $u, v \in V(G)$ (Chartrand et al., 2016). Gambar 2.1 merupakan salah satu contoh dari suatu graf dengan himpunan titik $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$.

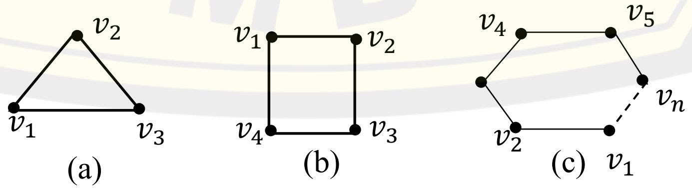


Gambar 2. 1 Graf dengan himpunan titik $\{v_1, v_2, \dots, v_6\}$

Dua titik u dan v pada graf G dikatakan saling bertetangga *(adjacent)* jika kedua titik tersebut dihubungkan oleh sebuah sisi yaitu $e = (u, v)$, sedangkan sisi e pada suatu graf G dikatakan bersisian (*incident*) dengan titik u dan v. Pada Gambar 2.1 titik v_1 bertetangga dengan titik v_2 dan v_3, tetapi titik v_3 tidak bertetangga dengan titik v_5, sedangkan sisi e_2 bersisian dengan titik v_1 dan v_3, tetapi sisi e_5 tidak bersisian dengan titik v_1 dan v_3.

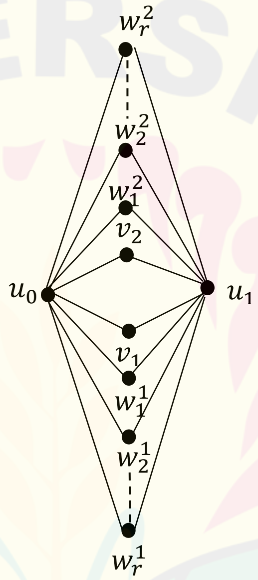
2.2 Graf Ular Berlipat

Graf lingkaran merupakan graf sederhana terhubung yang setiap titiknya mempunyai derajat dua. Graf lingkaran dengan n titik dinotasikan dengan C_n. Gambar 2.2 merupakan contoh graf lingkaran C_3, C_4, dan C_n.



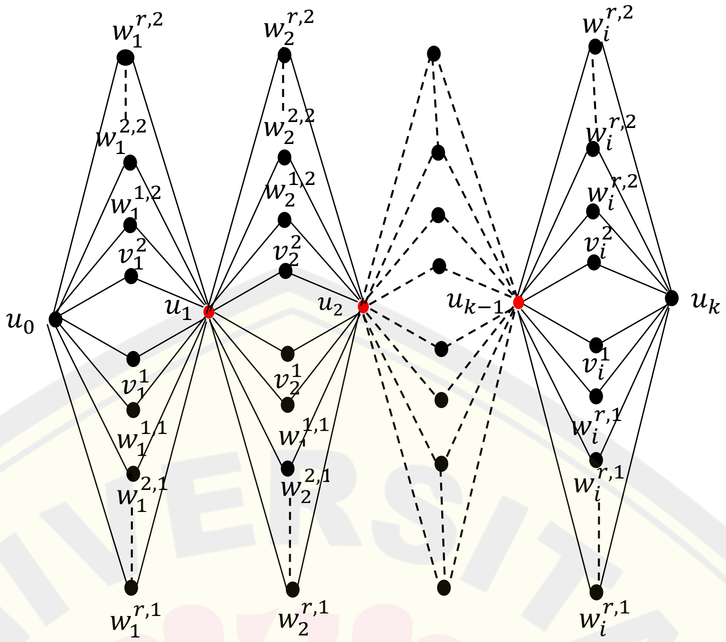
Gambar 2. 2 Graf lingkaran (a) C_3; (b) C_4; (c) C_n

Suatu graf $G = (V, E)$ merupakan bipartit jika himpunan titik V dapat dipartisi menjadi dua himpunan bagian saling asling V_1 dan V_2 sehingga setiap sisi di E menghubungkan sebuah titik di V_1 dan V_2. Graf G dapat dikatakan bipartit lengkap jika terdapat sisi diantara setiap pasang titik V_1 dan V_2. Bipartit lengkap yang terdiri dari m dan n titik dinotasikan dengan $K_{m,n}$, dengan $m = |V_1|$ dan $n = |V_2|$. Contoh graf bipartit lengkap $K_{2,2r}$ dengan $r \geq 1$ dengan himpunan V_1 yaitu $\{u_0$ dan $u_1\}$ dan himpunan V_2 yaitu $\{v_1, w_1^1, w_2^1, \ldots, w_r^1$ dan $v_2, w_1^2, w_2^2, \ldots, w_r^2\}$ ditunjukkan pada Gambar 2.3.



Gambar 2.3 Graf bipartit lengkap $K_{2,2r}$

Graf ular berlipat $\left(C_{4,2}^k(r)\right)$ dengan $k \geq 1$ dan $r \geq 1$ didefinisikan sebagai graf yang diperoleh dari k-buah graf bipartit lengkap $K_{2,2r}$ dengan titik penghubung antara graf $K_{2,2r}$ ke-i dan $K_{2,2r}$ ke-$i+1$ yang disebut titik *vertebrae* yang berjarak 2. Jadi, graf ular berlipat $C_{4,2}^k(r)$ mempunyai $k(3+2r)+1$ titik dan $4k(1+r)$ sisi. Gambar graf ular berlipat $C_{4,2}^k(r)$ dengan titik *vertebrae* u_1,$u_2, \ldots, u_{k-1}$ dengan jarak 2 ditunjukkan pada Gambar 2.4



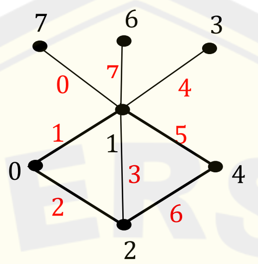
Gambar 2.4 Graf ular berlipat $C_{4,2}^{k}(r)$ dengan titik *vertebrae* u_1,$u_2, \dots, u_{k-1}$ dengan jarak 2

2.3 Fungsi *Injektif*

Misalkan A dan B merupakan himpunan tak kosong. Pemetaan dari himpunan A ke himpunan B dinotasikan dengan $f: A \rightarrow B$ adalah suatu cara atau aturan yang memasangkan setiap anggota dari himpunan A dengan tepat satu anggota himpunan B. Himpunan A disebut juga daerah asal (*domain*) dan himpunan B disebut juga daerah kawan (*kodomain*). Sedangkan nilai yang diperoleh dari himpunan fungsi f disebut dengan daerah hasil (*range*). Salah satu sifat fungsi yaitu fungsi *injektif,* dapat dikatakan sebagai fungsi *injektif* jika setiap dua elemen yang berbeda di A akan dipetakkan pada dua elemen yang berbeda di B. Fungsi *injektif* dapat dinotasikan dengan $\forall x, y \in A, f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$ (Bartle dan Sherbert, 2000).

2.4 Pelabelan *Felicitous*

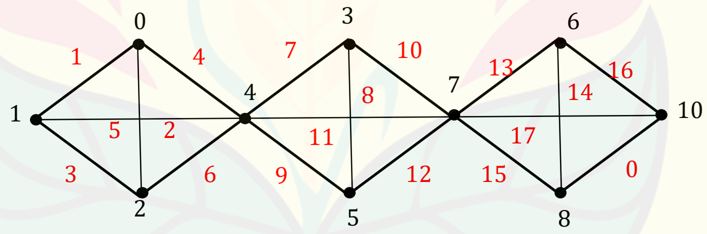
Pelabelan *felicitous* adalah sebuah pelabelan titik dengan bentuk fungsi domainnya berupa himpunan titik. Pelabelan *felicitous* pada graf G dengan p titik dan q sisi merupakan suatu pemetaan *injektif* $f: V(G) \rightarrow \{0,1,2,3, \dots, q\}$ maka setiap sisinya mendapatkan label dari penjumlahan dua label titik yang bersisian dengan sisi tersebut dalam modulo q sehingga menghasilkan label sisi yang berbeda semua, yaitu $f^*(uv) = [f(u) + f(v)](mod\ q)$. Graf G yang memenuhi aturan pelabelan *felicitous* disebut graf *felicitous* (Gallian, 2022). Pada Gambar 2.4 dapat dilihat contoh pelabelan *felicitous* graf dengan 7 titik dan 8 sisi dengan label titik (0,1,2,3,4,6,7) dan label sisi (0,1,2,3,4,5,6,7), maka graf tersebut merupakan graf *felicitous*.



Gambar 2.5 Pelabelan *felicitous* pada graf dengan 7 titik dan 8 sisi

2.5 Penelitian Pelabelan *Felicitous* Terdahulu

(Gomathi et al., 2016) telah melakukan penelitian mengenai pelabelan *felicitous* pada graf $P_m(K_4)$. Hasil yang diperoleh yaitu bahwa graf $P_m(K_4)$ merupakan graf *felicitous*. Pelabelan dari graf $P_m(K_4)$ diberikan pada Gambar 2.5.



Gambar 2.6 Pelabelan *felicitous* pada graf $P_4(K_4)$

Hasil penelitian terdahulu pada graf dengan pelabelan *felicitous* dapat dilihat pada Tabel 2.1.

Tabel 2. 1 Hasil penelitian pelabelan *felicitous* pada beberapa graf

Graf	Peneliti
$K_{m,n}$ untuk setiap $m,n \geq 1$ K_n jika $n \leq 4$ C_n untuk $n\ ganjil$ dan $n = 4k, k = 1,2,\ldots$ $C_{2k+1} \odot S_m$ untuk semua k dan m $C_{2k+1} * S_m$ untuk semua k dan m $P_n \cup C_{2k+1}$ untuk semua $n \geq 4$	(Lee *et al*., 1991)

Graf	Peneliti
$P_n \times C_3$ untuk $n \geq 3$ $P_2 \times C_n$ untuk n ganjil $P_2 \times C_n$ untuk $n = 4, 6$, dan 8	(Lusianita, 2010)
$n - dimensional\ cube\ Q_n$ untuk $n \geq 4$	(Ichishima dan Oshima, 2010)
T_m untuk $m \geq 1$	(Selvam et al., 2011)
H_n dan $H_n \odot S_m$	(Gomathi et al., 2012)
$\langle C_n, K_{1,m} \rangle$ untuk semua m $\langle C_n * K_1, m \rangle$ untuk semua m $(C_4 C_4)_{2n}$ untuk semua $n \geq 1$ $C_n \odot K_{1,n}$ untuk semua $n \geq 3$	(Gomathi, 2012)
$T_{(2n)}$ untuk $n \geq 1$ $S^1(P_{2n})$ $P_{2n}; S_m)$ untuk $n \geq 1$	(Gomathi et al., 2013)
$D_2(K_1, n)$ $spl\ (K_1, n)$	(Selvaraju et al., 2013)
$P_m(K_4)$ $Spl(B_{n,n})$ untuk semua n $Pl_{m,n}$ untuk semua m dan n $C_{2k+1} \odot S_m$ untuk semua $k \geq 1$ dan $m \geq 1$	(Gomathi et al., 2016)
$(C_n)_v$ untuk $n \geq 4$ (C_n) untuk $n \geq 4$ $B^2_{n,n}$ untuk $n \geq 2$	(Gomathi dan Nagarajan, 2016)
$C(5,2)\Delta S_n$ untuk setiap n bilangan positif $C(5,2)\oplus S_n$ untuk setiap n bilangan positif $C(6,3)\oplus S_n$ untuk setiap n bilangan positif $C(6,3)\Delta S_n$ untuk setiap n bilangan positif $K_4 \oplus S_n$ untuk setiap n bilangan positif	(Sriram dan Kavithanandhi, 2022)

BAB 3. METODOLOGI PENELITIAN

Langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini yaitu sebagai berikut.

a. Melabeli setiap titik pada graf ular berlipat $C_{4,2}^{k}(r)$ dengan label yang memenuhi fungsi *injektif*, yaitu $f: V(G) \rightarrow \{0,1,2,3, \ldots, 4k(1+r)\}$.

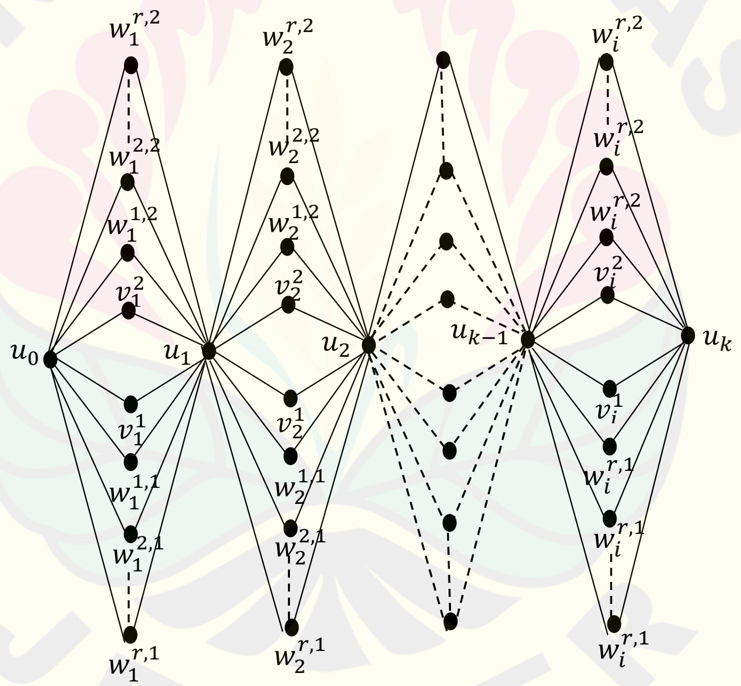
b. Menghitung label sisi $e = uv$ dengan menjumlahkan dua label titik yang bersisian dengan sisi tersebut, yaitu $f^*(e) = f^*(uv) = (f(u) + f(v)$ (mod $4k(1+r)$).

c. Memeriksa apakah label sisi berbeda semua. Jika label sisi berbeda semua maka graf ular berlipat $C_{4,2}^{k}(r)$ merupakan graf *felicitous* dan proses pelabelan selesai. Jika ada label sisi bernilai sama, proses pelabelan kembali ke langkah pertama dengan mencari kemungkinan label titik yang lain, apabila tetap terdapat label sisi yang sama maka dapat disimpulkan bahwa graf ular berlipat $C_{4,2}^{k}(r)$ bukan graf *felicitous*.

BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini membahas tentang hasil penelitian yaitu perumusan pelabelan *felicitous* pada graf ular berlipat $C_{4,2}^k(r)$ dengan $k \geq 1$ dan $r \geq 1$.

Misalkan graf ular berlipat $C_{4,2}^k(r)$ dengan $k \geq 1$ dan $r \geq 1$ mempunyai himpunan titik $V\left(C_{4,2}^k(r)\right) = \{u_i | 0 \leq i \leq k\} \cup \left\{v_i^j \middle| 1 \leq i \leq k, j = 1,2\right\} \cup \{w_i^{r,j} | 1 \leq i \leq r, r \geq 1, j = 1,2\}$ dan himpunan sisi $E\left(C_{4,2}^k(r)\right) = \left\{u_i v_{(i+1)}^j \middle| 0 \leq i \leq k, j = 1,2\right\} \cup \{u_i v_i^j | 1 \leq i \leq k, j = 1,2\} \cup \{u_i w_{(i+1)}^{r,j} | 0 \leq i \leq k, r \geq 1, j = 1,2\} \cup \{u_i w_i^{r,j} | 1 \leq i \leq k, r \geq 1, j = 1,2\}$. Ilustrasi penotasian titik graf ular berlipat $C_{4,2}^k(r)$ dapat dilihat pada Gambar 4.1.



Gambar 4. 1 Notasi titik dari graf ular berlipat $C_{4,2}^k(r)$

Untuk menunjukkan bahwa graf ular berlipat $C_{4,2}^k(r)$ untuk $k \geq 1$ dan $r \geq 1$ merupakan graf *felicitous* maka harus memenuhi sifat berikut, yaitu :

a. Semua titik harus memiliki label yang berbeda, sehingga label titik didefinisikan dengan $f: V\left(C_{4,2}^k(r)\right) \to \{0,1,2,3, \ldots, 4k(1+r)\}$.

b. Label sisi diperoleh dari $f^*(uv) = (f(u) + f(v) \bmod (4k(1+r))$, label sisi didefinisikan dengan $f^*: E\left(C_{4,2}^k(r)\right) \rightarrow \{0,1,2,3, \ldots, 4k(1+r1) - 1\}$ dengan label yang berbeda semua.

Berikut ini diberikan teorema yang berkaitan dengan pelabelan *felicitous* pada graf ular berlipat $C_{4,2}^k(r)$.

Teorema 4.1 Graf ular berlipat $C_{4,2}^k(r)$ untuk $k \geq 1$ dan $r \geq 1$ adalah graf *felicitous*.

Bukti :

Untuk membuktikan pelabelan *felicitous* pada graf ular berlipat $C_{4,2}^k(r)$ untuk $k \geq 1$ dan $r \geq 1$, pertama didefinsikan fungsi pelabelan titik yaitu $f: V(G) \rightarrow \{0,1,2, \ldots, 4k(1+r)\}$ sebagai berikut.

$f(u_i) = i,$ untuk $0 \leq i \leq k$ .... (4.1)

$f(v_i^1) = k + i,$ untuk $1 \leq i \leq k$ .... (4.2)

$f(v_i^2) = 3k + i,$ untuk $1 \leq i \leq k$ .... (4.3)

$f(w_i^{r,j}) = (2j + 4r - 1)k + i,$ untuk $1 \leq i \leq k\,; j = 1,2$ .... (4.4)

Akan ditunjukkan bahwa setiap titik yang berbeda memiliki label yang berbeda. Berdasarkan Persamaan (4.1) sampai dengan Persamaan (4.2) diperoleh:

$f(u_i) \in \{0,1,2, \ldots, k\}$

$f(v_i^1) \in \{k+1,\ k+2, \ldots, 2k\}$

$f(v_i^2) \in \{3k+1, 3k+2, \ldots, 4k\}$

$f(w_i^{r,j}) \in \{5k+1, 5k+2, \ldots, 4k(r+1)\}$

dengan demikian $f(u_i) < f(v_i^1) < f(v_i^2) < f(w_i^{r,j})$. Jadi label titik berbeda semua. Terbukti bahwa $f(u_i), f(v_i^1), f(v_i^2)$, dan $f(w_i^{r,j})$ memenuhi syarat fungsi *injektif.*

Setelah menjukkan fungsi pelabelan titik memenuhi fungsi *injektif*, langkah selanjutnya menghitung label sisi dengan cara menjumlahkan dua label titik pada Persamaan (4.1) sampai dengan Persamaan (4.2) yang bersisian dengan sisi tersebut sebagai berikut.

$$f^*(u_iv_i^1) = f(u_i) + f(v_i^1)\ (\text{mod } 4k(1+r))$$
$$= i + k + i\ (\text{mod } 4k(1+r))$$
$$= 2i + k\ (\text{mod } 4k(1+r))$$
$$= 2i + k$$

$$f^*(u_iv_i^2) = f(u_i) + f(v_i^2)\ (\text{mod } 4k(1+r))$$
$$= i + 3k + i\ (\text{mod } 4k(1+r))$$
$$= 2i + 3k\ (\text{mod } 4k(1+r))$$
$$= 2i + 3k$$

$$f^*(u_iv_{(i+1)}^1) = f(u_i) + f(v_{(i+1)}^1)\ (\text{mod } 4k(1+r))$$
$$= i + (k + (i+1))\ (\text{mod } 4k(1+r))$$
$$= 2i + k + 1\ (\text{mod } 4k(1+r))$$
$$= 2i + k + 1$$

$$f^*(u_iv_{(i+1)}^2) = f(u_i) + f(v_{(i+1)}^2)\ (\text{mod } 4k(1+r))$$
$$= i + (3k + (i+1))\ (\text{mod } 4k(1+r))$$
$$= 2i + 3k + 1\ (\text{mod } 4k(1+r))$$
$$= 2i + 3k + 1$$

$$f^*(u_iw_i^{r,j}) = f(u_i) + f(w_i^{r,j})(\text{mod } 4k(1+r))$$
$$= i + (2j + 4r - 1)k + i\ (\text{mod } 4k(1+r))$$
$$= (2j + 4r - 1)k + 2i\ \ (\text{mod } 4k(1+r))$$

$$f^*\left(u_iw_{(i+1)}^{r,j}\right) = f(u_i) + f\left(w_{(i+1)}^{r,j}\right)(\text{mod } 4k(1+r))$$
$$= i + (2j + 4r - 1)k + i + 1(\text{mod } 4k(1+r))$$
$$= (2j + 4r - 1)k + 2i + 1\ \ (\text{mod } 4k(1+r))$$

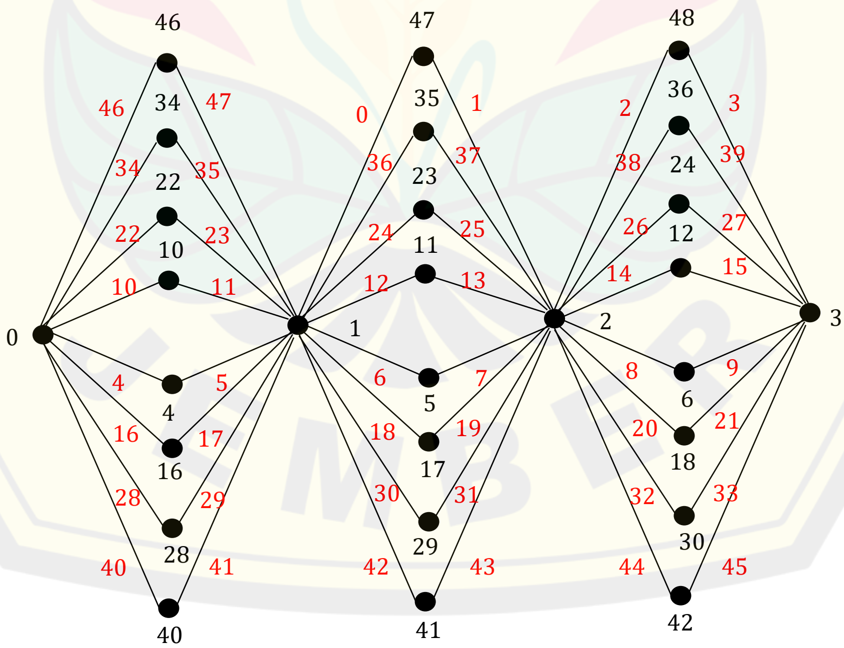
Dari penjumlahan label titik di atas diperoleh fungsi pelabelan sisi sebagai berikut.

$$f^*(u_iv_i^1) = 2i + k\,, \qquad 1 \le i \le k \tag{4.5}$$
$$f^*(u_iv_i^2) = 2i + 3k, \qquad 1 \le i \le k \tag{4.6}$$
$$f^*(u_iv_{(i+1)}^1) = 2i + k + 1, \qquad 0 \le i \le k-1 \tag{4.7}$$
$$f^*(u_iv_{(i+1)}^2) = 2i + 3k + 1, \qquad 0 \le i \le k-1 \tag{4.8}$$
$$f^*(u_iw_i^{r,j}) = ((2j + 4r - 1)k + 2i)\ (\text{mod } 4k(1+r)), \qquad 1 \le i \le k; j = 1,2 \tag{4.9}$$
$$f^*\left(u_iw_{(i+1)}^{r,j}\right) = ((2j + 4r - 1)k + 2i + 1)\ (\text{mod } 4k(1+r)), 0 \le i \le k-1; j = 1,2 \tag{4.10}$$

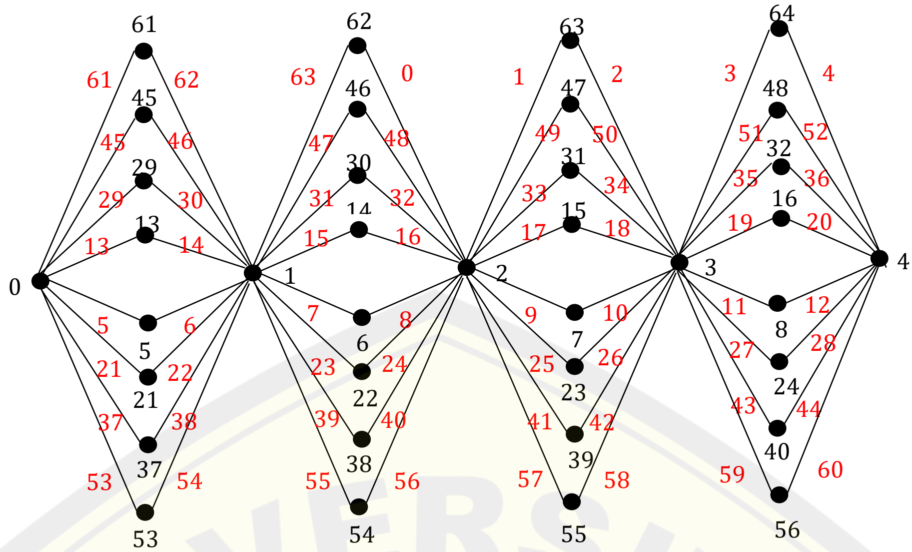
Akan dibuktikan setiap sisi pada graf $C_{4,2}^{k}(r)$ $k \geq 1$ dan $r \geq 1$ memiliki label sisi yang berbeda yaitu sebagai berikut.

Semua Persamaan (4.5) hingga Persamaan (4.10) membentuk barisan aritmatika dengan beda 2, dan suku pertamanya yaitu $k+2$ (Persamaan 4.5), $3k+2$ (Persamaan 4.6), $k+1$ (Persamaan 4.7), $3k+1$ (Persamaan 4.8), $5k+2$ (Persamaan 4.9), dan $5k+1$ (Persamaan 4.10). Karena $k \geq 1$ maka $k+2 \neq 3k+2 \neq k+1 \neq 3k+1 \neq 5k+1 \neq 5k+2$, dengan demikian label sisi $f^*(u_i v_i^1), f^*(u_i v_i^2), f^*\left(u_i v_{(i+1)}^1\right), f^*\left(u_i v_{(i+1)}^2\right), f^*\left(u_i w_i^{r,j}\right)$, dan $f^*\left(u_i w_{(i+1)}^{r,j}\right)$ berbeda semua. Dengan demikian terbukti bahwa fungsi pelabelan titik memenuhi fungsi *injektif*. Jadi, graf ular berlipat $C_{4,2}^{k}(r)$ dengan $k \geq 1$ dan $r \geq 1$ merupakan graf *felicitous*. ■

Sebagai contoh, pelabelan *felicitous* graf ular berlipat $C_{4,2}^{3}(3)$ diberikan pada Gambar 4.2 dan graf ular berlipat $C_{4,2}^{4}(3)$ diberikan pada Gambar 4.3, dengan label titik dengan warna hitam dan label sisi dengan warna merah. Pelabelan sisi pada graf ular berlipat $C_{4,2}^{3}(3)$ dalam modulo 48 dan pelabelan sisi pada graf ular berlipat $C_{4,2}^{4}(3)$ dalam modulo 64.



Gambar 4.2 Pelabelan *felicitous* pada graf ular berlipat $C_{4,2}^{3}(3)$



Gambar 4.3 Pelabelan *felicitous* pada graf ular berlipat $C_{4,2}^{4}(3)$

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan, graf ular berlipat $C_{4,2}^{k}(r)$ untuk $k \geq 1$ dan $r \geq 1$ dapat dilabeli dengan aturan pelabelan *felicitous*. Sehingga dapat disimpulkan bahwa graf ular berlipat $C_{4,2}^{k}(r)$ untuk $k \geq 1$ dan $r \geq 1$ merupakan graf *felicitous*.

5.2 Saran

Pada penelitian ini telah membahas mengenai pelabelan *felicitous* pada graf ular berlipat $C_{4,2}^{k}(r)$ untuk $k \geq 1$ dan $r \geq 1$. Berdasarkan hasil yang telah diperoleh, pelabelan *felicitous* masih bisa dikembangkan lebih lanjut bagi peneliti lain untuk melabeli dengan graf yang lain. Peneliti juga memberikan saran kepada pembaca untuk dapat melakukan penelitian pada graf ular berlipat $C_{n,m}^{k}(r)$ dengan $n \neq 4$ dan $m \neq 2$. Sehingga, pelabelan graf dapat terus dikembangkan.

DAFTAR PUSTAKA

Bartle, R., & Sherbert. R. (2000). *Introduction to Real Analysis 3 ed*. New York: John Willey and Sons. Inc.

Chartrand, G., Egan. C, & Zhang, P. (2019). *How to Label a Graph*. Switzerland: SpringerBriefs in Mathematics.

Chartrand, G., Lesniak, L., & Zhang, P. (2016). *Graf & Digraf (6th ed.)*. New York: CRC Press.

Gallian, J. A. (2022). A Dynamic Survey of Graph Labeling. *Electronic Journal of Combinatorics.*, #DS6.124-126.

Gomathi, V. L. A., Nagarajan, A., & Murugan, A. N. (2012). On Felicitous Labeling of Cycle Related Graphs. *International Journal of Mathematical Archive*, *9*, 3530–3538.

Gomathi, V. L. A., Nagarajan, A., & Murugan, A. N. (2012). On Felicitous Labeling of H_n dan $H_n \odot S_m$ graphs. *Ultra Scientist*, *24*(3), 441–448..

Gomathi, V. L. A., Nagarajan, A., & Murugan, A. N. (2013). On Felicitous Labelings of Special Classes of Graphs. *A Multi-Disciplinary Refereed Journal*, *VI*, 81–86.

Gomathi, V. L. A., Nagarajan, A., & Murugan, A. N. (2016). On Near Felicitous Labelings of Graphs. *International Journal of Mathematics and Soft Computing*, *2*, 93–97. https://doi.org/10.26708/ijmsc.2013.3.3.13

Gomathi, V. L. A., & Nagarajan, A. (2016). Felicitous Labelings of Some Graphs. *OUTREACH-A Multi-Disciplinary Refereed Journal*, *IX*, 132–139.

Ichishima, R., & Oshima, A. (2010). On Partitional Labelings of Graphs. *Mathematics in Computer Science*, *3*, 39–45. https://doi.org/10.1007/s11786-009-0008-7

Lee, S. M., Schmeichel, E., & Shee, S. C. (1991). On felicitous graphs. *Discrete Mathematics*, *93*(2–3), 201–209. https://doi.org/10.1016/0012-365X(91)90256-2

Lusianita, I. (2010). *Pelabelan Felicitous pada Graf Piramida dan Graf Prisma*. Jember: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Selvam, B., Thirusangu, K., & Ulaganathan, P. P. (2011). Felicitous Labeling in Extented Duplicate Graph of Twig T_m. *indian Journal of Science and Technology*, *4*(5), 586–589.

Selvaraju, P., Balaganesan, P., & Renuka, J. (2013). Path and star related graphs on even sequential harmonious, graceful, odd graceful and felicitous labelling. *International Journal of Pure and Applied Mathematics.*, *87*(5), 729–738. https://doi.org/10.12732/ijpam.v87i5.6

Sriram, S. & Kavithanandhi, S. (2022). Felicitous Labeling of Graphs Related with Star Merged with Shell Graph. *Advances and Applications in Mathematical Sciences*, *21*(8), 4523–4531.