



**PELABELAN TIPE $(1,0,0)$ WAJAH d -ANTIMAGIC PADA GRAF
ANTIPRISMA DAN GABUNGAN DUA GRAF ANTIPRISMA**

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi syarat-syarat
untuk menyelesaikan Program Studi Pendidikan Matematika (S1)
dan mencapai gelar Sarjana Pendidikan

Oleh:

**RIZA MOHAMAD ABDILLAH
NIM. 010210101237**

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER
2006**



**PELABELAN TIPE $(1,0,0)$ WAJAH d -ANTIMAGIC PADA GRAF
ANTIPRISMA DAN GABUNGAN DUA GRAF ANTIPRISMA**

SKRIPSI

Oleh:

**RIZA MOHAMAD ABDILLAH
NIM. 010210101237**

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER
2006**

PERSEMBAHAN

Kupersembahkan karyaku ini kepada:

1. ayahanda Saifullah dan ibunda Nurrohmah serta kakakku Yulia Nurlaili,S.Pd dan Dzurrotin Mahsusy,S.Pd, atas kasih sayang, cucuran keringat dan lantunan doa yang selalu mengiringku dalam meraih cita-cita, dan tak lupa adikku tersayang Nico Azharudin Hamid.
2. abah "Drs. KH. Sahilun A. Nasir,M.Pdi dan ibu Nyai " Hj. Lilik Istiqomah,SH", orang tuaku di "Rumah Kedua" atas bimbingan, tuntunan dan nasehat yang telah membantuku menghadapi persoalan hidup.
3. cahaya hidupku "Nurul", engkau membuat hidupku lebih indah.
4. my best friend "Hasan n Zone", terima kasih atas segala bantuan serta doanya, semoga Allah membalas segala kebaikan kalian, Amin.
5. teman-teman FKIP Matematika Angkatan 2001 (Dayat, Aries, Atiek S,Ika , Heru, Shubhan, Nanang).
6. sahabat santri di PPM Al-Jauhar "Kamar 6 (Gus Tonee, Imamovich, Hendro, Gus Wal, Agus "Kang Dokter", Mujib, Fuad"Nakata"), Ali Sufi dkk, Pak Modin, Zutas semua sahabat "LaSoesaH" (Laskar Santri Saroengan Al-Jauhar) di "Republik Santri" .
7. almamaterku yang kubanggakan

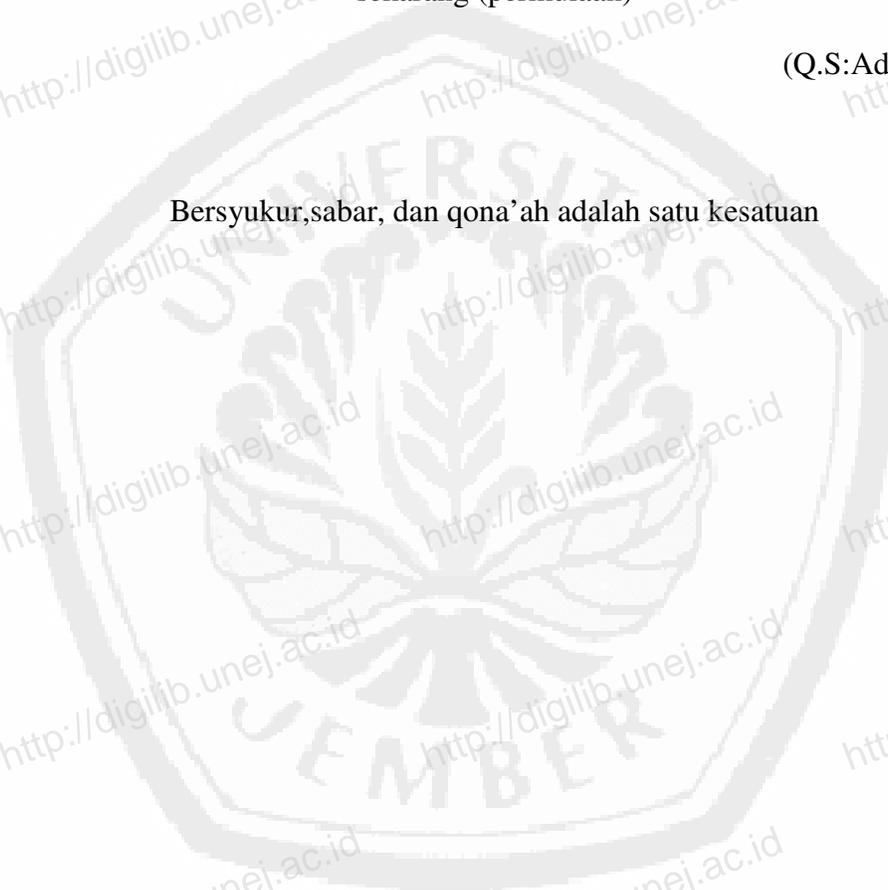
MOTTO

وَالْآخِرَةُ خَيْرٌ لَّكَ مِنَ الْأُولَىٰ

Artinya : Dan sesungguhnya hari kemudian itu lebih baik bagimu daripada yang sekarang (permulaan)

(Q.S:Adh-dhuhaa:4)

Bersyukur,sabar, dan qona'ah adalah satu kesatuan



PENGESAHAN

Skripsi ini diterima oleh Fakultas keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember pada:

hari :

tanggal : 2006

tempat : Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Jember

Tim penguji:

Ketua

Sekretaris

.....
NIP.

.....
NIP.

Anggota

1)
NIP.

(.....)

2)
NIP.

(.....)

Mengesahkan
Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Drs. H. Imam Muchtar, SH, M.Hum
NIP. 130 810 936

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama :Riza Mohamad Abdillah

NIM :010210101237

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa karya tulis ilmiah yang berjudul: “Pelabelan Tipe (1,0,0) Wajah d - antimagic pada Graf Antiprisma dan Gabungan dua Graf Antiprisma” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika disebutkan sumbernya dan belum pernah diajukan pada institusi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 4 April 2006

Yang menyatakan,

Riza Mohamad Abdillah

NIM. 010210101237

RINGKASAN

Pelabelan Tipe (1,0,0) Wajah d -antimagic pada Graf Antiprisma dan Gabungan Dua graf Antiprisma, Riza Mohamad Abdillah, 010210101237, 2006, 93 halaman.

Topik yang menarik perhatian dalam teori graf dan akan dibahas dalam penelitian ini adalah pelabelan graf, karena model-model yang ada pada pelabelan graf berguna untuk berbagai aplikasi. Model-model yang ada pada pelabelan graf dapat diaplikasikan dalam berbagai bidang ilmu. Hasil-hasil pelabelan tipe (1,0,0) belum banyak ditemukan, namun untuk pelabelan tipe (1,0,0) wajah magic pada graf prisma dan gabungan dua graf prisma telah berhasil ditemukan oleh M.H Hidayatullah dalam skripsinya (2005) Adapun yang akan di bahas di sini adalah *Pelabelan Tipe (1,0,0) Wajah d -antimagic pada Graf Antiprisma dan Gabungan graf Antiprisma.*

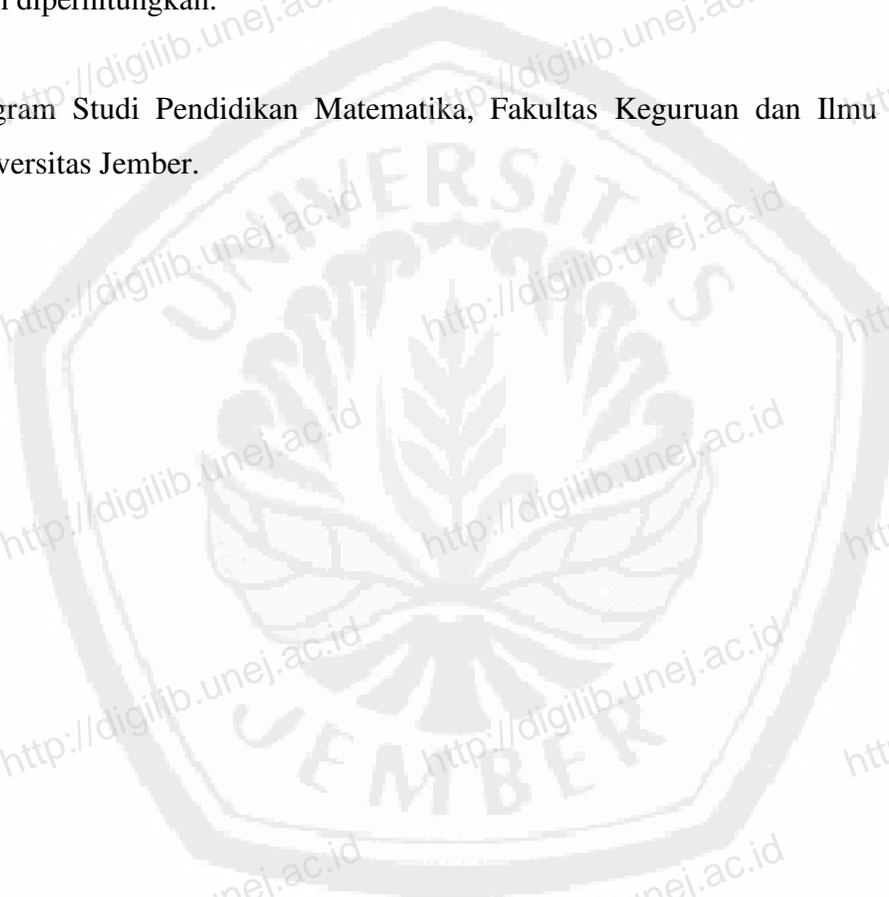
Graf antiprisma A_n mempunyai $v = 2n$ titik, $e = 4n$ sisi dan $f = 2n + 2$ wajah. Dengan demikian $v = 2n$, sehingga himpunan labelnya adalah $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$. Dari penjelasan tersebut, pelabelan tipe (1,0,0) wajah d -antimagic pada graf antiprisma dapat didefinisikan sebagai pemberian label titik pada graf A_n dengan bilangan positif $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$, sedemikian hingga jumlah label dari semua titik yang mengelilingi wajah (dengan jumlah sisi yang sama) membentuk suatu barisan aritmatika dengan beda d dan nilai awal a . Pelabelan tipe (1,0,0) wajah d -antimagic pada gabungan dua graf antiprisma yang akan dibahas dalam penelitian ini terfokus pada gabungan dua graf antiprisma yang isomorfis, dinotasikan dengan $2A_n$ sesuai dengan batasan masalah yang diberikan.

Gabungan dua graf antiprisma A_n adalah graf reguler dengan derajat 4 yang mempunyai $4n$ titik, $8n$ sisi dan $4n + 4$ wajah. Karena yang dilabeli hanya titik maka

himpunan labelnya adalah $\{1, 2, 3, \dots, 4n\}$. Sedemikian hingga untuk formulasi dari W_n, W_3, a_n, a_3, d maupun intervalnya isomorfis dengan formulasi tunggalnya.

Ada tidaknya pelabelan titik wajah d -antimagic pada graf antiprisma dan gabungan dua graf antiprisma $2A_n$ bisa ditentukan dengan cara memeriksa ada tidaknya bilangan bulat positif a, d , dan W yang memenuhi beberapa ketentuan yang telah diperhitungkan.

Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan,
Universitas Jember.



KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah Swt atas segala rahmat serta hidayah-Nya, sehingga penulisan skripsi berjudul: “Pelabelan Tipe $(1,0,0)$ Wajah d - Antimagic pada Graf Antiprisma dan Gabungan Dua Graf Antiprisma” dapat terselesaikan dengan baik. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat dalam menyelesaikan pendidikan Strata satu (S1) pada Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

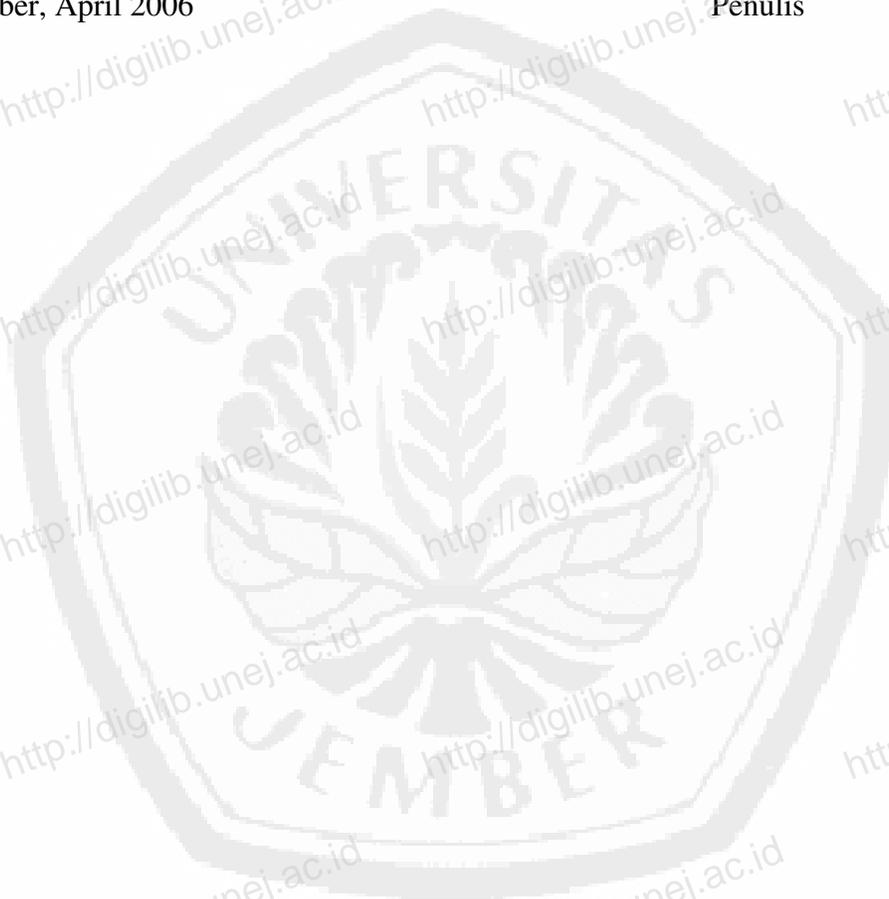
Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingannya dalam penulisan skripsi ini terutama kepada yang terhormat:

1. Drs. H. Imam Muchtar, SH, M.Hum, selaku Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
2. Drs. Singgih Bektiarso, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Pendidikan MIPA Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
3. Drs. Antonius C.P,M.App.Sc, selaku Ketua Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
4. Drs. Didik Sugeng Pambudi, M.S, selaku Ketua Laboratorium Komputer Program Studi Pendidikan Matematika Jurusan Pendidikan MIPA Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
5. Drs. Slamain, M.Comp.Sc, Ph.D selaku Dosen Pembimbing I dan Drs. Susanto, M.Pd Selaku Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktu dan pikiran serta perhatiannya guna memberikan bimbingan dan pengarahan demi terselesaikannya penulisan skripsi ini;
6. seluruh Dosen dan Karyawan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.
7. semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan serta dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah Swt dan mendapat balasan yang setimpal. Akhirnya semoga skripsi ini bermanfaat bagi semua.

Jember, April 2006

Penulis



DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSEMBAHAN	ii
HALAMAN MOTTO	iii
HALAMAN PERNYATAAN	iv
HALAMAN PENGESAHAN	v
KATA PENGANTAR	vi
RINGKASAN	vii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR LAMPIRAN	xv
DAFTAR ARTI LAMBANG	xvi
I. PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan Penelitian	3
1.5 Manfaat Penelitian	4
II. TINJAUAN PUSTAKA	
2.1 Graf	5
2.2 Terminologi Dasar pada Graf	6
2.3 Keisomorfisan graf	12
2.4 Graf –graf Khusus	13
2.5 Graf antiprisma	17
2.6 Gabungan dua Graf	19
2.6.1 Definisi Gabungan dua graf	19
2.6.2 Gabungan dua graf antiprisma	20

2.7 Pelabelan Graf	20
2.7.1 Definisi Pelabelan graf.....	20
2.7.2 Pelabelan tipe (1,0,0).....	21
2.7.3 Pelabelan Tipe (1,0,0) wajah d - antimagic.....	22
2.7.4 Pelabelan Tipe (1,0,0) wajah d - antimagic pada graf antiprisma	23
2.7.4 Pelabelan Tipe (1,0,0) wajah d - antimagic pada gabungan dua graf antiprisma.....	25

III. METODE PENELITIAN

3.1 Metode Penelitian	28
3.2 Rancangan Penelitian	28
3.2.1 penggabungan dua graf antiprisma	28
3.2.2 indikator penelitian.....	29
3.3 Definisi Operasional	29
3.4 Teknik Penelitian	30

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Beda antar bobot (d) yang ditetapkan dan suku awal (a_s) pada pelabelan tipe (1,0,0) wajah d-antimagic pada graf antiprisma (A_n).....	33
4.1.1 Mencari Nilai Suku Awal Wajah dengan 3-sisi (a_3).....	35
4.1.2 Mencari nilai Suku Awal Wajah dengan n -sisi (a_n).....	36
4.2 Pelabelan Tipe (1,0,0) Wajah 1–Antimagic pada Graf antiprisma A_n	37
4.2.1 Pelabelan Tipe (1,0,0) Wajah 1–Antimagic pada Graf antiprisma A_5	37
4.2.2. Pelabelan Tipe (1,0,0) Wajah 1–Antimagic pada Graf A_7	38
4.2.3. Pelabelan Tipe (1,0,0) Wajah 1–Antimagic pada Graf A_9	39

4.2.4. Pelabelan Tipe (1,0,0) Wajah I -Antimagic pada Graf A_{11} ...	40
4.3 Formulasi Pelabelan Tipe (1,0,0) Wajah 1-Antimagic pada Graf antiprisma	41
4.4 Beda antar bobot (d) yang ditetapkan dan suku awal (a_s) pada pelabelan tipe (1,0,0) wajah d-antimagic pada gabungan dua graf Antiprisma ($2A_n$)	52
4.4.1 Mencari Nilai Suku Awal Wajah dengan 3-sisi (a_3).....	54
4.4.2 Mencari Nilai Suku Awal Wajah dengan n -sisi (a_n).....	55
4.5 Pelabelan Tipe (1,0,0) Wajah I-Antimagic pada Gabungan Dua Graf Antiprisma $2A_n$	57
4.5.1 Pelabelan Tipe (1,0,0) Wajah I -Antimagic pada Gabungan Dua Graf Antiprisma $2A_5$	58
4.5.2 Pelabelan Tipe (1,0,0) Wajah I -Antimagic pada Gabungan Dua Graf Antiprisma $2A_7$	59
4.5.3 Pelabelan Tipe (1,0,0) Wajah I -Antimagic pada Gabungan Dua Graf Antiprisma $2A_9$	60
4.5.4 Pelabelan Tipe (1,0,0) Wajah I -Antimagic pada Gabungan Dua Graf Antiprisma $2A_{11}$	61
4.6 Formulasi Pelabelan Tipe (1,0,0) Wajah 1-Antimagic pada Gabungan Dua Graf antiprisma ($2A_n$)	62
V. KESIMPULAN DAN SARAN	
4.1 Kesimpulan	83
4.2 Saran	85
DAFTAR PUSTAKA	86
LAMPIRAN-LAMPIRAN	87

DAFTAR GAMBAR

No	Nama Gambar	Halaman
	Jumlah penduduk	1
	Graf secara umum	5
	Graf kosong N_5	6
	Graf dengan 5 titik dan 1 titik terisolasi.....	6
	Graf reguler berderajat 3	8
	Graf dengan 6 titik	9
	Contoh subgraf (G_1) dan subgraf perentang (G_2).....	10
	Komplemen graf.....	10
	Graf terhubung (G_1) dan graf tak terhubung (G_2).....	11
	Graf terpotong	12
	Keisomorfisan graf.....	12
	Graf siklus C_6	13
	Graf lengkap K_5	13
	Graf dua partisi $G(V_1, V_2)$ dan dua partisi lengkap $K_{3,3}$	14
	Graf Petersen $P(5,2)$	15
	Graf bintang S_8	15
	Graf roda W_6	16
	Graf matahari M_8	16
	Graf prisma D_6	17
	Graf antiprisma $A_4, A_5, dan A_6$	17
	Graf antiprisma A_n	18
	Contoh gabungan dua graf prisma dan graf matahari	19
	Contoh gabungan dua graf antiprisma	20
	Tipe-tipe pelabelan pada graf.....	21
	Contoh gabungan dua graf antiprisma $2A_5$	28
	Pelabelan Tipe (1,0,0) 1-Antimagic pada Graf A_5 dengan $a_3=12$ dan $a_5=27$...	38

Pelabelan Tipe (1,0,0) 1-Antimagic pada Graf A_7 dengan $a_3=16$ dan $a_7=52$	39
Pelabelan Tipe (1,0,0) 1-Antimagic pada Graf A_9 dengan $a_3=20$ dan $a_9=85$	40
Pelabelan Tipe (1,0,0) 1-Antimagic pada Graf A_{11} dengan $a_3=24$ dan $a_9=126$	41
Pelabelan Tipe (1,0,0) 1-Antimagic pada Graf $2A_5$ dengan $a_3=22$ dan $a_5=51$	59
Pelabelan Tipe (1,0,0) 1-Antimagic pada Graf $2A_7$ dengan $a_3=30$ dan $a_7=100$	60
Pelabelan Tipe (1,0,0) 1-Antimagic pada Graf $2A_9$ dengan $a_3=38$ dan $a_9=165$	61
Pelabelan Tipe (1,0,0) 1-Antimagic pada Graf $2A_{11}$ dengan $a_3=46$ dan $a_5=246$	62

DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Matrik Penelitian.....	87
Tabel Formulasi Titik Siklus Luar (y_i) pada graf antiprisma.....	88
Tabel Formulasi Titik Siklus Dalam (x_i) pada graf antiprisma.....	89
Tabel Formulasi Titik Siklus Luar (y_i) pada gabungan dua graf antiprisma G_1	90
Tabel Formulasi Titik Siklus Dalam (x_i) pada gabungan dua graf antiprisma G_1	91
Tabel Formulasi Titik Siklus Luar (y_i) pada gabungan dua graf antiprisma G_2	92
Tabel Formulasi Titik Siklus Dalam (x_i) pada gabungan dua graf antiprisma G_2	93

ARTI LAMBANG

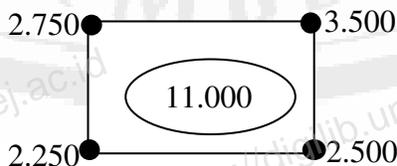
G	= sembarang graf
e	= edge, sisi pada graf
E	= himpunan sisi pada graf
$E(G)$	= himpunan sisi pada graf G
v	= vertex, titik pada graf
V	= himpunan titik pada graf
$V(G)$	= himpunan titik pada graf G
A_n	= simbol graf antiprisma dengan $2n$ titik
x_i	= titik siklus dalam pada graf antiprisma
y_i	= titik siklus luar pada graf antiprisma
$x_i x_{i+1}$	= sisi siklus dalam pada graf antiprisma
$y_i y_{i+1}$	= sisi siklus luar pada graf antiprisma
$x_i y_i$	= jari-jari
a	= suku awal
d	= beda
S_v	= jumlah label titik pada graf
W_s	= jumlah bobot wajah dengan s-sisi pada graf bidang
W_n	= jumlah bobot wajah dengan n-sisi pada graf antiprisma
a_s	= suku awal wajah dengan s-sisi pada graf bidang
a_n	= suku awal wajah dengan n-sisi pada graf antiprisma
f_s	= jumlah wajah dengan s-sisi pada graf bidang
\in	= anggota atau elemen suatu unsur
\notin	= bukan elemen suatu unsur
N	= himpunan bilangan asli

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Suatu model matematika dapat digunakan untuk mengidentifikasi berbagai masalah atau situasi dalam kehidupan sehari-hari. Konstruksi dari model matematika tersebut dapat dibuat dalam berbagai cara dengan permasalahan yang berbeda-beda. Salah satu model matematika yang sudah cukup dikenal dan bisa mencakup berbagai permasalahan adalah teori graf (*Graph Theory*).

Topik yang menarik perhatian dalam teori graf dan akan dibahas dalam penelitian ini adalah pelabelan graf, karena model-model yang ada pada pelabelan graf berguna untuk berbagai aplikasi. Model-model yang ada pada pelabelan graf dapat diaplikasikan dalam berbagai bidang ilmu. Salah satu aplikasi pelabelan graf yaitu dalam sistem jaringan komunikasi. Sebagai ilustrasi, misalnya graf dalam gambar 1.1 menunjukkan jumlah penduduk pada daerah yang dibatasi oleh 4 kecamatan dalam kabupaten Jember. Kecamatan direpresentasikan oleh titik (*vertex*) dan keberteranggaan dengan kecamatan yang lain direpresentasikan dengan sisi (*edge*), sedangkan jumlah penduduk pada setiap kecamatan direpresentasikan oleh label atau angka yang terletak pada titik yang bersangkutan.



Gambar 1.1 : Jumlah Penduduk

Sesuai gambar 1.1 dapat dimisalkan jumlah penduduk pada kecamatan Balung 2.500 jiwa, kecamatan Bangsalsari 2.750 jiwa, kecamatan Rambipuji 3.500 jiwa, dan kecamatan Umbulsari 2.250 jiwa.

Dengan menggunakan pelabelan graf, kita dapat mengetahui jumlah penduduk pada daerah yang dibatasi oleh keempat kecamatan tersebut, yaitu dengan cara menentukan jumlah bobot wajahnya ditinjau dari jumlah label titiknya. Jadi jumlah penduduk pada daerah tersebut adalah 11.000 jiwa.

Pelabelan graf pertama kali muncul pada pertengahan tahun 1960-an yang diawali sebuah hipotesis oleh Ringel dan Rosa (dalam Slamin, 2001:287). Pada tahun 1967 Rosa menyebut pelabelan ini sebagai valuasi β dari graf G dengan e sisi, jika terdapat fungsi λ yang memetakan satu-satu dari himpunan titik $V(G)$ ke himpunan bilangan bulat $\{0,1,2,\dots,e\}$ sedemikian hingga setiap sisi (x,y) di G mendapat label $|\lambda(x) - \lambda(y)|$ yang berbeda untuk setiap sisi pada graf G (Wijaya, 2000:14).

Terdapat berbagai jenis tipe pelabelan dalam graf, salah satu diantaranya adalah pelabelan tipe $(1,0,0)$. Pelabelan tipe $(1,0,0)$ ada dua jenis yaitu pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah magic dan pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah d -antimagic. Pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah d -antimagic adalah pelabelan titik sedemikian hingga jumlah label (bobot) dari semua titik yang mengelilingi wajah membentuk sebuah barisan aritmetika yang dimulai dari a dan mempunyai beda setiap bobotnya adalah d (Sugeng, Miller, Lin dan Baca:Submitted). Sedangkan pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah ajaib adalah pelabelan titik dari sebuah graf G dengan himpunan bilangan bulat positif $\{1, 2, 3, \dots, v\}$ dimana v adalah banyaknya titik dalam graf G . Sedemikian hingga jumlah label (bobot) dari semua titik yang mengelilingi wajah (dengan jumlah sisi yang sama) mempunyai bobot yang sama (Baca, dkk:Submitted).

Hasil-hasil pelabelan tipe $(1,0,0)$ belum banyak ditemukan, namun untuk pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah magic pada graf prisma dan gabungan dua graf prisma telah berhasil ditemukan oleh M.H Hidayatullah dalam skripsinya (2005). Pada karya ilmiahnya diperoleh teorema yang merupakan langkah untuk melabeli graf tersebut.

Untuk pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah d -antimagic khususnya pada gabungan dua graf antiprisma, merupakan pengetahuan baru dalam pelabelan graf dan hasil-hasilnya belum banyak yang diketahui, maka hal ini mendorong penulis untuk meneliti adakah pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah d -antimagic pada graf antiprisma dan gabungan dua graf antiprisma dan jika ada bagaimana cara melabeli graf antiprisma dan gabungan dua graf antiprisma dengan pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah d -antimagic.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini yaitu:

- 1) adakah pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah d -antimagic pada graf antiprisma dan gabungan dua graf antiprisma ?
- 2) jika ada, bagaimana cara melabeli graf antiprisma dan gabungan dua graf antiprisma dengan pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah d -antimagic ?

1.3 Batasan Masalah

Untuk menghindari meluasnya permasalahan yang akan dipecahkan, maka dalam penelitian ini masalahnya dibatasi pada:

- 1) pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah d -antimagic pada graf antiprisma dengan $n \geq 4$;
- 2) pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah d -antimagic pada gabungan dua graf antiprisma $2A_n$ yang isomorfis dengan $n \geq 4$.

1.4 Tujuan Penelitian

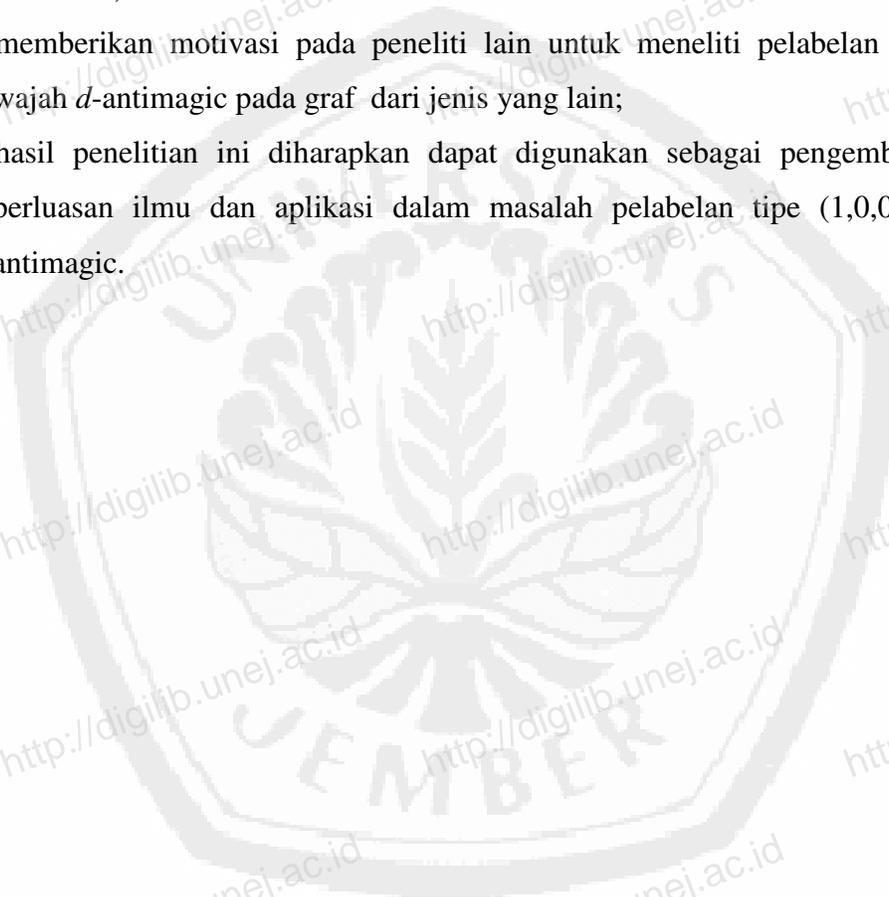
Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

- 1) untuk mengetahui ada tidaknya pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah d -antimagic pada graf antiprisma dan gabungan dua graf antiprisma;
- 2) jika ada, maka dicari cara melabeli graf antiprisma dan gabungan dua graf antiprisma dengan pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah d -antimagic.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah:

- 1) menambah pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya dalam ruang lingkup pelabelan graf, yaitu mengetahui ada tidaknya pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah d -antimagic pada graf antiprisma dan gabungan dua graf antiprisma yang isomorfis;
- 2) memberikan motivasi pada peneliti lain untuk meneliti pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah d -antimagic pada graf dari jenis yang lain;
- 3) hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan atau perluasan ilmu dan aplikasi dalam masalah pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah d -antimagic.

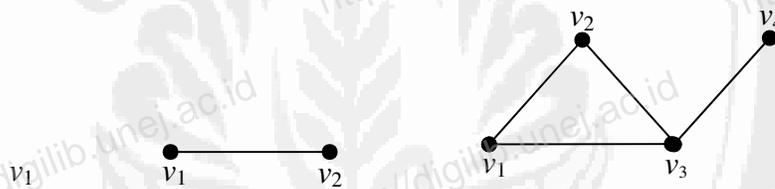


II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Graf

Definisi 2.1.1 (Hartfield dan Ringel, 1994: 7). Graf G adalah pasangan himpunan (V,E) dimana V adalah himpunan tidak kosong dari elemen yang disebut titik (*vertex*), dan E adalah himpunan (boleh kosong) dari pasangan tak terurut dua titik (v_1, v_2) dimana $v_1, v_2 \in V$, yang disebut sisi (*edges*). V disebut himpunan titik dari G , dan E disebut himpunan sisi dari G .

Beberapa contoh graf disajikan pada Gambar 2.1.

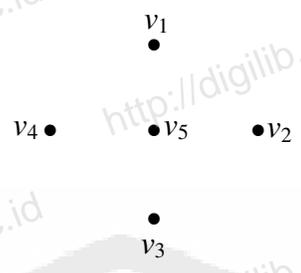


Gambar 2.1: Graf secara umum

Dalam definisi 2.2.1 dinyatakan bahwa V tidak kosong, sedangkan E boleh kosong. Sehingga, sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buahpun, tetapi titiknya harus ada, minimal satu. Maka dapat dinyatakan definisi dari graf kosong.

Definisi 2.1.2 (Munir, 2001: 192). Graf kosong (*null graph* atau *empty graph*), dinotasikan dengan N_n , dimana n adalah jumlah titik pada graf, adalah graf dengan E merupakan himpunan kosong.

Gambar 2.2 menunjukkan contoh graf kosong dengan 5 titik yang dinotasikan dengan N_5 .

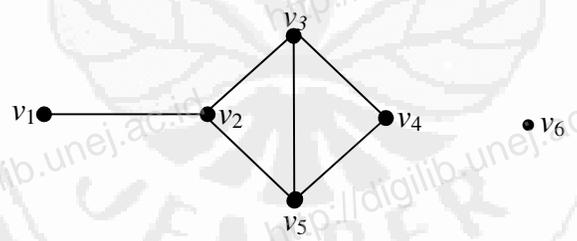


Gambar 2.2: Graf kosong N_5

2.2 Terminologi Dasar pada Graf

Definisi 2.2.1 (Slamin, 2001: 288). Dua titik pada graf dikatakan bertetangga (*adjacent*), jika terdapat sisi e diantara keduanya.

Titik v_1 bertetangga dengan v_2 pada graf G , kadang-kadang v_2 disebut tetangga dari v_1 . Dengan kata lain, kedua titik v_1 dan v_2 menempel (*incident*) pada sisi e . Untuk selanjutnya sisi (v_1, v_2) dinotasikan dengan v_1v_2 . Gambar 2.3 merupakan contoh graf dengan 6 titik.



Gambar 2.3: Graf dengan 5 titik dan 1 titik terisolasi

Dari Gambar 2.3 dapat dilihat bahwa titik v_1 bertetangga dengan titik v_2 ; titik v_2 bertetangga dengan titik v_1, v_3 , dan v_5 ; titik v_3 bertetangga dengan titik v_2, v_4 , dan v_5 ; titik v_4 bertetangga dengan titik v_3 dan v_5 ; titik v_5 bertetangga dengan titik v_2, v_3 , dan v_4 . Sedangkan titik v_1 menempel pada sisi v_1v_2 ; titik v_2 menempel pada sisi v_1v_2, v_2v_3 , dan v_2v_5 ; titik v_3 menempel pada sisi v_2v_3, v_3v_4 , dan v_3v_5 ; titik v_4 menempel pada sisi v_3v_4 dan v_4v_5 ; titik v_5 menempel pada sisi v_2v_5, v_3v_5 , dan v_4v_5 .

Definisi 2.2.2 (Hartfield dan Ringel, 1994: 8). Derajat (*degree*) dari suatu titik pada graf, dinotasikan dengan d_i , index i menunjukkan titik ke- i pada graf adalah jumlah sisi yang menempel pada titik tersebut.

Dalam Gambar 2.3 dapat dilihat bahwa derajat dari v_2 adalah 3 ($d_2 = 3$ atau $\text{deg } v_2 = 3$), karena ada 3 sisi yang menempel, yaitu v_1v_2 , v_2v_3 , dan v_2v_5 . Derajat dari v_3 adalah 3 ($d_3 = 3$ atau $\text{deg } v_3 = 3$), karena ada 3 sisi yang menempel, yaitu v_2v_3 , v_3v_4 , dan v_3v_5 . Derajat dari v_5 adalah 3 ($d_5 = 3$ atau $\text{deg } v_5 = 3$), karena ada 3 sisi yang menempel, yaitu v_2v_5 , v_3v_5 , dan v_4v_5 . Derajat dari v_6 adalah 0 ($d_6 = 0$ atau $\text{deg } v_6 = 0$), karena tidak ada sisi yang menempel, sedangkan derajat dari v_1 adalah 1 ($d_1 = 1$ atau $\text{deg } v_1 = 1$), karena hanya ada 1 sisi yang menempel, yaitu v_1v_2 . Maka dapat dinyatakan definisi dari titik terisolasi dan titik bandul.

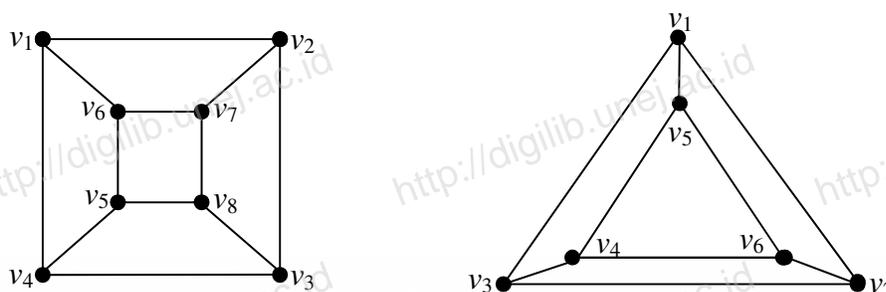
Definisi 2.2.3 (Hartfield dan Ringel, 1994: 8). Sebuah titik pada graf disebut titik terisolasi, jika mempunyai derajat 0 (nol), artinya titik tersebut tidak mempunyai tetangga.

Definisi 2.2.4 (Hartfield dan Ringel, 1994: 8). Titik akhir (*end-vertex*) atau titik bandul (*pendant*) pada graf adalah titik yang mempunyai derajat 1 (satu).

Dalam Gambar 2.3 dapat dilihat bahwa derajat dari v_1 adalah 1 sehingga disebut dengan titik bandul (*pendant*), dan derajat dari v_6 adalah 0 (nol) sehingga disebut titik terisolasi.

Definisi 2.2.5 (Hartfield dan Ringel, 1994: 9). Suatu graf G dikatakan graf reguler jika setiap titik dari graf tersebut mempunyai derajat yang sama.

Gambar 2.4 mengilustrasikan graf reguler dengan derajat 3.



Gambar 2.4: Graf reguler berderajat 3

Definisi 2.2.6 (Hartfield dan Ringel, 1994: 16). Jalan (*walk*) dari suatu graf, dinotasikan dengan $v_0 v_1 v_2 v_3 \dots v_n$ adalah barisan titik dan sisi terhingga dan bergantian dari titik-titik dan sisi-sisi dalam suatu graf.

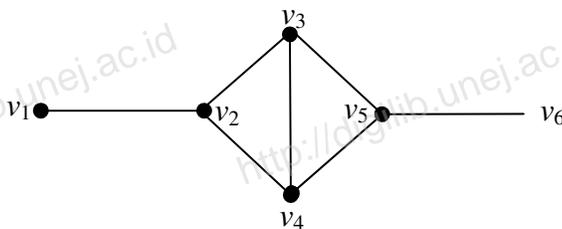
Jalan pada suatu graf dibentuk dari barisan titik dan sisi terhingga dan bergantian dari titik-titik dan sisi-sisi dalam suatu graf, dimana titik dan sisinya boleh diulang. Tetapi jika titik dan sisi yang dilalui hanya satu kali, maka berarti titik dan sisi pada jalan tersebut berbeda semua. Hal ini menyatakan definisi dari lintasan.

Definisi 2.2.7 (Hartfield dan Ringel, 1994: 16). Sebuah jalan dikatakan lintasan (*path*), jika titik-titik dan sisi-sisi pada jalan $v_0 v_1 v_2 v_3 \dots v_n$ berbeda semua.

Jika lintasan tersebut berawal dan berakhir pada titik yang sama, maka membentuk lintasan tertutup yang disebut siklus. Berikut ini dinyatakan definisi dari siklus.

Definisi 2.2.8 (Hartfield dan Ringel, 1994: 16). Sebuah lintasan dikatakan tertutup, Jika $v_0 = v_n$ yang biasa disebut siklus (*cycle*).

Panjang sebuah jalan $v_0 v_1 v_2 v_3 \dots v_n$ dihitung dari banyaknya sisi yang dilintasi oleh jalan tersebut. Gambar 2.5 merupakan contoh graf dengan 6 titik.



Gambar 2.5: Graf dengan 6 titik

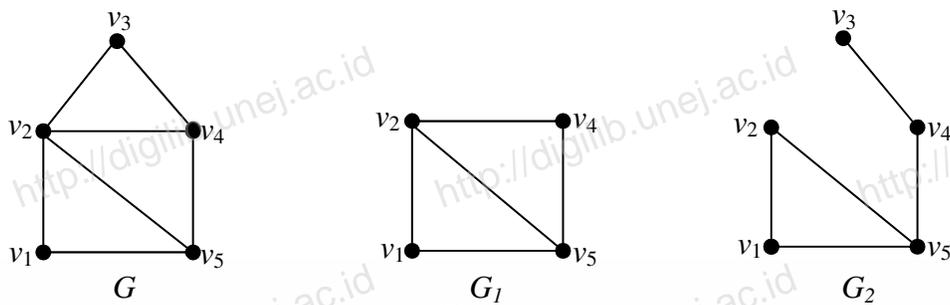
Dalam Gambar 2.5, $v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_5v_4$ merupakan jalan yang mempunyai panjang 7 yang bukan lintasan, $v_1v_2v_3v_4v_5v_6$ merupakan lintasan dengan panjang 5, sedangkan $v_2v_3v_4v_5v_4v_2$ merupakan siklus.

Definisi 2.2.9 (Hartfield dan Ringel, 1994: 13). Sebuah graf H merupakan subgraf dari graf G jika setiap titik pada graf H adalah titik pada graf G dan setiap sisi pada graf H adalah sisi pada graf G . Dengan kata lain $V(H) \subset V(G)$ dan $E(H) \subset E(G)$.

Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf, $G_1 = (V_1, E_1)$ adalah subgraf dari G , jika $V_1 \subset V$ dan $E_1 \subset E$. Dan jika G_1 mengandung semua titik dari G , maka G_1 disebut subgraf perentang. Berikut ini dinyatakan definisi dari subgraf perentang.

Definisi 2.2.10 (Hartfield dan Ringel, 1994: 20). Sebuah subgraf H merupakan subgraf perentang (*spaning subgraf*) dari graf G jika graf H memuat semua titik dari graf G . Dengan kata lain, $V(H) = V(G)$.

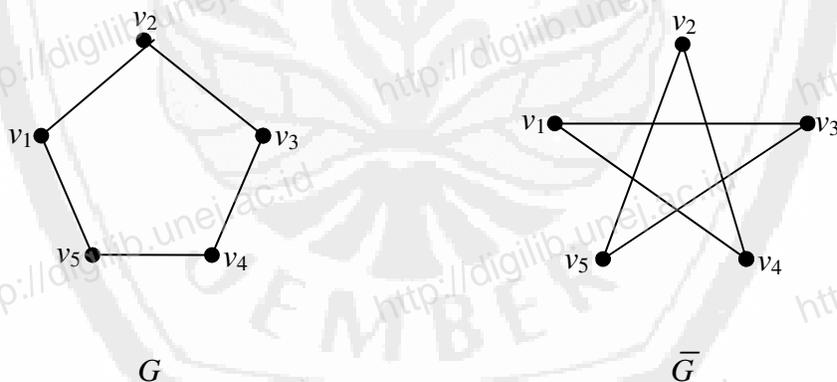
Gambar 2.6 menunjukkan contoh graf, subgraf perentang (*spaning subgraf*) dan subgraf. Graf G_2 merupakan subgraf perentang dari graf G karena mengandung semua titik dari graf G . Graf G_1 merupakan subgraf dari graf G tetapi bukan subgraf perentang karena tidak memuat titik v_3 .



Gambar 2.6: Contoh subgraf (G_1) dan subgraf perentang (G_2)

Definisi 2.2.11 (Hartfield dan Ringel, 1994: 20). Komplement dari sebuah graf G , dinotasikan dengan \bar{G} adalah sebuah graf dengan himpunan titik $V(G)$ sedemikian hingga dua titik u dan v adalah tetangga jika dan hanya jika dua titik tersebut bukan tetangga pada graf G .

Sebagai contoh terlihat pada Gambar 2.7, graf \bar{G} adalah komplement dari G .

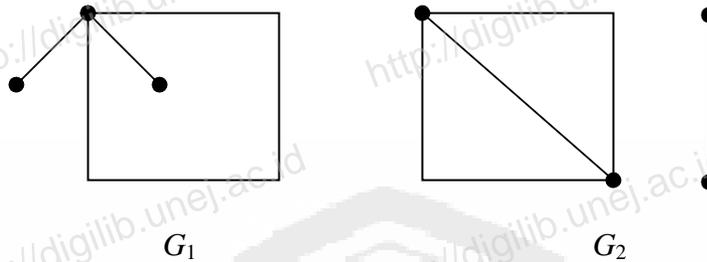


Gambar 2.7: Komplement graf.

Definisi 2.2.12 (Wijaya, 2000: 7). Misal u, v , sembarang dua titik berbeda di G . Suatu graf G dikatakan terhubung, jika ada lintasan dari u ke v .

Graf ini dikatakan terhubung jika ada lintasan dari u ke v untuk setiap sepasang titik u, v pada G , dan jika tidak ada lintasan dari u ke v disebut graf tak

terhubung. Sebagai contoh, G_1 dan G_2 pada Gambar 2.8 secara berturut-turut adalah graf terhubung dan graf tak terhubung yang mempunyai 4 komponen.



Gambar 2.8: Graf terhubung(G_1) dan graf tak terhubung(G_2).

Komponen dari graf G merupakan sebuah subgraf terhubung maksimal dari G . Jadi graf tak terhubung merupakan graf yang sedikitnya mempunyai dua komponen. Jika e merupakan sisi pada graf G , maka $G - \{e\}$ adalah sebuah graf yang dihasilkan dari graf G yang dihapus sisi e -nya. Sehingga dapat dinyatakan definisi dari jembatan (*bridge*).

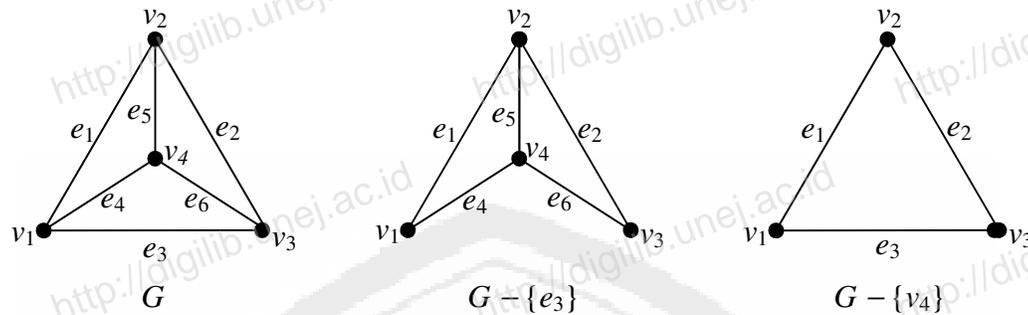
Definisi 2.2.13 (Chartrand dan Oellermann, 1993: 22). Misal $e \in G$, sebuah e pada G dikatakan jembatan (*bridge*), jika $G - \{e\}$ adalah tidak terhubung.

Misal v adalah titik pada sebuah graf G , dengan $G - \{v\}$ adalah sebuah graf yang dihasilkan dari G dengan menghapus titik v dan semua sisi yang menempel pada v . Maka dapat dinyatakan definisi dari titik terpotong (*cut-vertex*).

Definisi 2.2.14 (Chartrand dan Oellermann, 1993: 22). Sebuah titik $v \in G$ disebut titik terpotong (*cut-vertex*), jika $G - \{v\}$ adalah tidak terhubung

Secara umum, jika E_1 adalah himpunan sisi dalam G maka $G - E_1$ adalah graf yang dihasilkan dari G dengan menghapus semua sisi E_1 . Dan jika V_1 adalah himpunan titik pada G maka $G - V_1$ adalah graf yang dihasilkan dari G dengan menghapus semua titik pada V_1 dan semua sisi yang menempel pada titik tersebut.

Gambar 2.9 menunjukkan contoh graf $G - \{e_3\}$ adalah hasil penghapusan sisi e_3 dari G dan graf $G - \{v_4\}$ adalah hasil penghapusan titik v_4 dari G .

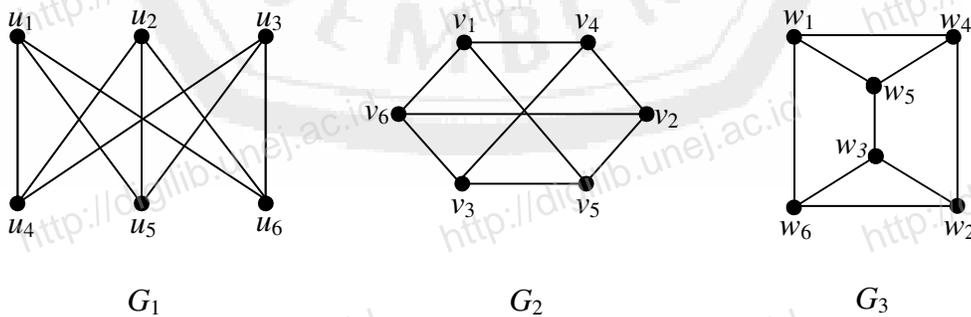


Gambar 2.9: Graf terpotong

2.3 Keisomorfisan Graf

Definisi 2.3.1 (Wijaya, 2000: 9). Dua graf G_1 dan G_2 disebut isomorfis, jika ada pemetaan satu-satu dan pada $f : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ yang menunjukkan semua keterhubungan (*adjacencies*), yaitu $(uv) \in E(G_1)$ jika dan hanya jika $(f(u)f(v)) \in E(G_2)$.

Gambar 2.10 menunjukkan bahwa graf G_1 isomorfis dengan graf G_2 dibawah pemetaan $u_i \rightarrow v_i$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, 6$. Graf G_3 tidak isomorfis dengan G_1 maupun G_2 . Karena w_2 bertetangga w_3 dan w_4 bertetangga dengan w_5 .



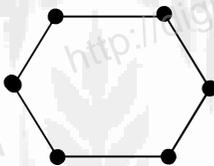
Gambar 2.10: Keisomorfisan graf

2.4 Graf-graf Khusus

Dari definisi graf secara umum, terdapat beberapa jenis graf, diantaranya adalah graf antiprisma. Sebelum membahas tentang graf antiprisma akan disajikan definisi dari beberapa jenis graf lain.

Definisi 2.4.1 (Munir, 2001: 204). Graf siklus, dinotasikan dengan C_n adalah graf reguler yang berderajat dua, artinya pada graf siklus untuk setiap titiknya mempunyai derajat dua, sehingga dalam graf siklus jumlah titik dan jumlah sisinya sama. Graf siklus C_n hanya dapat dibentuk dengan $n \geq 3$.

Gambar 2.11 menunjukkan contoh graf siklus dengan 6 titik yang dinotasikan dengan C_6

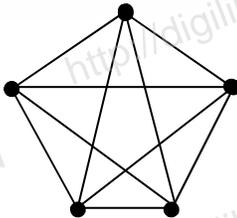


Gambar 2.11: Graf siklus C_6

Definisi 2.4.2 (Slamin, 2001: 288). Graf lengkap dinotasikan dengan K_n adalah sebuah graf yang setiap titiknya berhubungan dengan titik-titik yang lain.

Jumlah sisi pada graf lengkap yang terdiri dari n buah titik adalah $\frac{n(n-1)}{2}$.

Gambar 2.12 menunjukkan contoh graf lengkap dengan 5 titik yaitu K_5

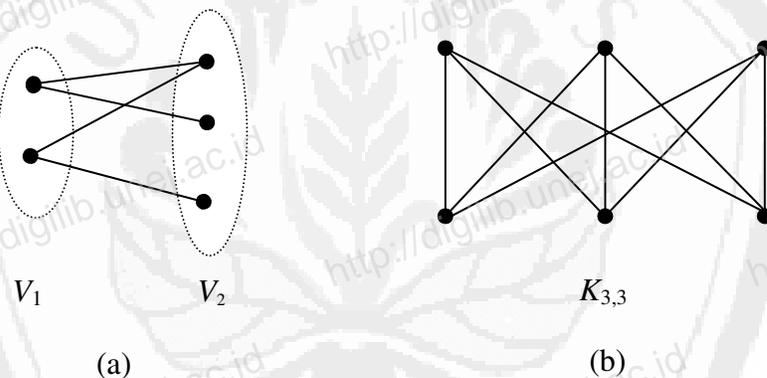


Gambar 2.12: Graf lengkap K_5

Definisi 2.43 (Slamin, 2001: 288-289). Sebuah graf G disebut graf dua partisi yang dinotasikan dengan $G(V_1, V_2)$, jika himpunan titik pada graf G dapat dipisah menjadi dua himpunan bagian V_1 dan V_2 , sehingga sisi pada graf G menghubungkan suatu titik di V_1 dengan titik di V_2 .

Definisi 2.44 (Slamin, 2001: 288-289). Graf G disebut graf dua partisi lengkap, dinotasikan dengan $K_{m,n}$ dimana $m = |V_1|$ dan $n = |V_2|$, Jika setiap titik di V_1 bertetangga dengan setiap titik di V_2

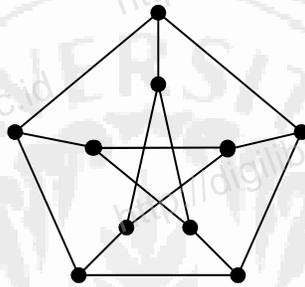
Gambar 2.13 (a) menunjukkan contoh graf dua partisi $G(V_1, V_2)$ dan (b) graf dua partisi lengkap dengan $m = 3$ dan $n = 3$ yang dinotasikan dengan $K_{3,3}$.



Gambar 2.13: Graf dua partisi $G(V_1, V_2)$ dan dua partisi lengkap $K_{3,3}$

Definisi 2.45 (Slamin, 2001: 289). Generalisasi graf Petersen dinotasikan $P(n, m)$ dengan $n \geq 3$ dan $1 \leq m \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ adalah graf reguler yang terdiri dari n sisi luar yang berupa siklus, sisi dalam yang menghubungkan titik $v_i v_{i+n}$ dengan indeks diambil dari modulo n dan sisi antara yang menghubungkan titik luar dan titik dalam yang mempunyai indeks sama. Catatan bahwa $\lfloor x \rfloor$ adalah bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari x .

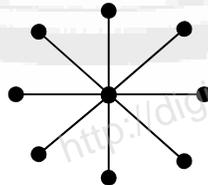
Generalisasi graf Petersen $P(n,m)$, $n \geq 3$ dan $1 \leq m \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ mempunyai himpunan titik $V = \{u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ dan himpunan sisi $E = \{u_i u_{i+1}, u_i v_{i+1}, v_i v_{i+m} \mid \text{dengan } i \text{ pada modulo } n\}$, dimana $u_i =$ titik bagian luar dari generalisasi graf Petersen dan $v_i =$ titik bagian dalam dari generalisasi graf Petersen. Generalisasi graf Petersen ini merupakan pengembangan dari graf Petersen seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.14.



Gambar 2.14 : Graf Petersen $P(5,2)$

Definisi 2.4.7 (Wijaya, 2000: 11). Graf bintang, dinotasikan dengan S_n adalah sebuah graf yang terdiri dari n sisi dan $n + 1$ titik, dimana satu titik sebagai titik pusat, yaitu titik yang berderajat n .

Graf bintang S_n merupakan bentuk khusus dari graf dua partisi lengkap $K_{m,n}$ dengan $m = 1$. Gambar 2.16 menunjukkan contoh graf bintang S_8

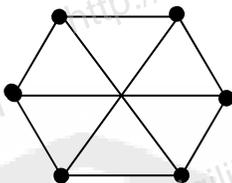


Gambar 2.15: Graf bintang S_8

Definisi 2.4.8 (Slamin, 2001: 289). Graf roda, dinotasikan dengan W_n adalah sebuah graf yang memuat n siklus dengan satu titik pusat yang bertetangga dengan semua

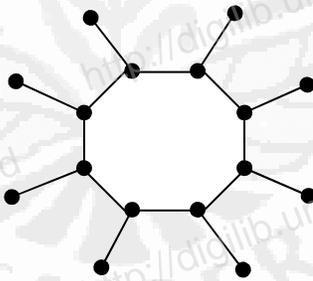
titik di n siklus. Sehingga graf roda W_n terdiri dari $n + 1$ titik yaitu: $c, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ dan $2n$ sisi, yaitu : $cx_i, 1 \leq i \leq n, x_i x_{i+1}, 1 \leq i \leq n - 1$ dan $x_n x_1$.

Gambar 2.17 menunjukkan contoh dari graf roda W_6 .



Gambar 2.16: Graf roda W_6

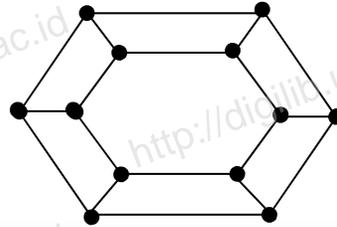
Definisi 2.4.9 (Wallis, Baskoro, Miller, dan Slamin, 2000: 185). Graf matahari, dinotasikan dengan M_n , adalah sebuah graf yang dibentuk dari graf siklus dengan n titik, C_n , yang pada setiap titiknya terdapat bandul, sedemikian hingga jika v_j adalah titik ke- j dari C_n dan a_j adalah titik pada bandul ke- j , maka $(v_j a_j)$ adalah sisi bandul ke- j untuk setiap $j = 1, 2, \dots, n$. Gambar 2.18 menunjukkan contoh graf matahari M_8 .



Gambar 2.17: Graf matahari M_8

Definisi 2.4.6 (Lin, Slamin, Baca, dan Miller, 2001: 3). Graf prisma adalah sebuah graf yang terdiri dari sebuah siklus luar dengan n titik $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ dan sebuah siklus dalam dengan n titik $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ dan antara siklus luar dengan siklus dalam dihubungkan n jari-jari $x_i y_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Graf prisma mempunyai $2n$ titik dan $3n$ sisi serta merupakan generalisasi graf Petersen $P(n, m)$ dengan $m = 1$. Gambar 2.15 menunjukkan contoh graf prisma D_6 .

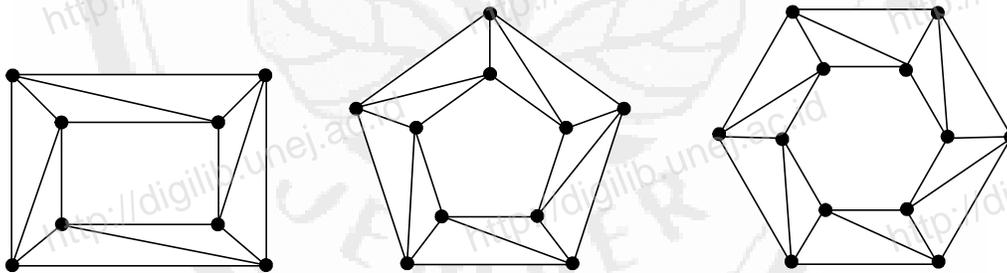


Gambar 2.18: Graf prisma D_6

2.5 Graf Antiprisma

Definisi 2.4.10 (Lin, Slamim dan Miller:Submitted). Graf antiprisma adalah sebuah graf reguler berderajat 4 yang terdiri dari sebuah siklus luar dengan n titik $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ dan sebuah siklus dalam dengan n titik $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ dan antara siklus luar dengan siklus dalam dihubungkan n jari-jari $x_i y_i$ dan $x_{i+1} y_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Graf antiprisma (dinotasikan dengan A_n) mempunyai $2n$ titik, $4n$ sisi dan $2n + 2$ wajah. Gambar-gambar di bawah ini menunjukkan contoh dari graf antiprisma A_4, A_5 dan A_6 .

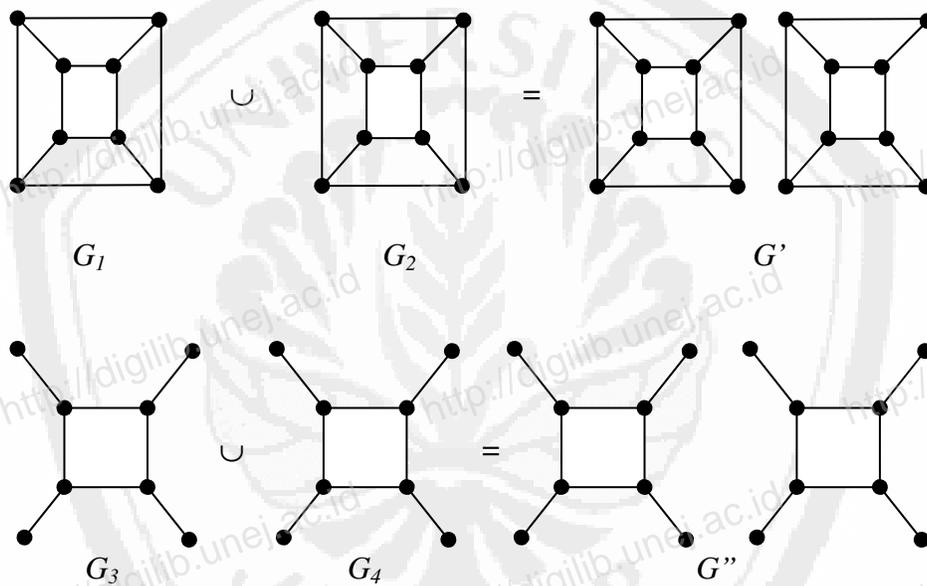


Gambar 2.19: Graf antiprisma A_4, A_5 dan A_6 .

2.6 Gabungan Dua Graf

Definisi 2.5.1 (Chartrand dan Oellermann, 1993: 29). Gabungan dari dua graf G_1 dan G_2 , dinotasikan dengan $G_1 \cup G_2$, didefinisikan sebagai graf dengan himpunan titik $V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G_1) \cup E(G_2)$.

Gambar 2.20 menunjukkan contoh-contoh gabungan dua graf dari graf-graf khusus yaitu graf prisma dan graf matahari. Graf G_1 dan G_2 adalah graf prisma yang masing-masing memiliki delapan titik dan dua belas sisi, sehingga $G' = G_1 \cup G_2$ merupakan gabungan dua graf prisma yang terdiri dari enam belas titik dan dua puluh empat sisi. Demikian juga dengan graf G_3 dan G_4 adalah graf matahari yang masing-masing memiliki delapan titik dan delapan sisi, sehingga $G'' = G_3 \cup G_4$ merupakan gabungan dua graf matahari yang terdiri dari enam belas titik dan enam belas sisi. Hal ini sesuai dengan definisi 2.6.1



Gambar 2.20: Gabungan dua graf prisma dan gabungan dua graf matahari

2.5.1 Gabungan Dua Graf Antiprisma

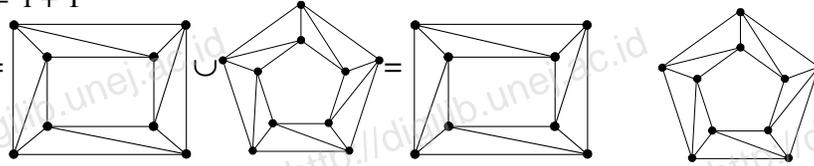
Gabungan graf antiprisma (bA_n) didefinisikan sebagai gabungan saling lepas dari b buah graf antiprisma A_{n_i} diasumsikan $bA_n : A_{n_1} \cup A_{n_2} \cup \dots \cup A_{n_b}$. Bilamana $i = i + 1$ maka dapat ditulis sebagai bA_n

Gabungan dua graf antiprisma ($2A_n$) didefinisikan sebagai gabungan saling lepas dari dua graf antiprisma A_n , dengan n sama, sehingga dapat dinotasikan sebagai:

$$2A_n = A_n \cup A_n$$

bA_n dengan $i \neq i + 1$

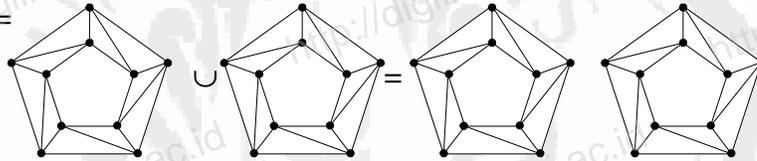
1). $A_4 \cup A_5 =$



dimana : $n_1 \neq n_2$

bA_n dengan $i = i + 1$

2). $A_5 \cup A_5 =$



dimana : $n_1 = n_2$

Gambar 2.21 : Contoh gabungan dua graf antiprisma

2.6 Pelabelan Graf

2.6.1 Definisi Pelabelan Graf

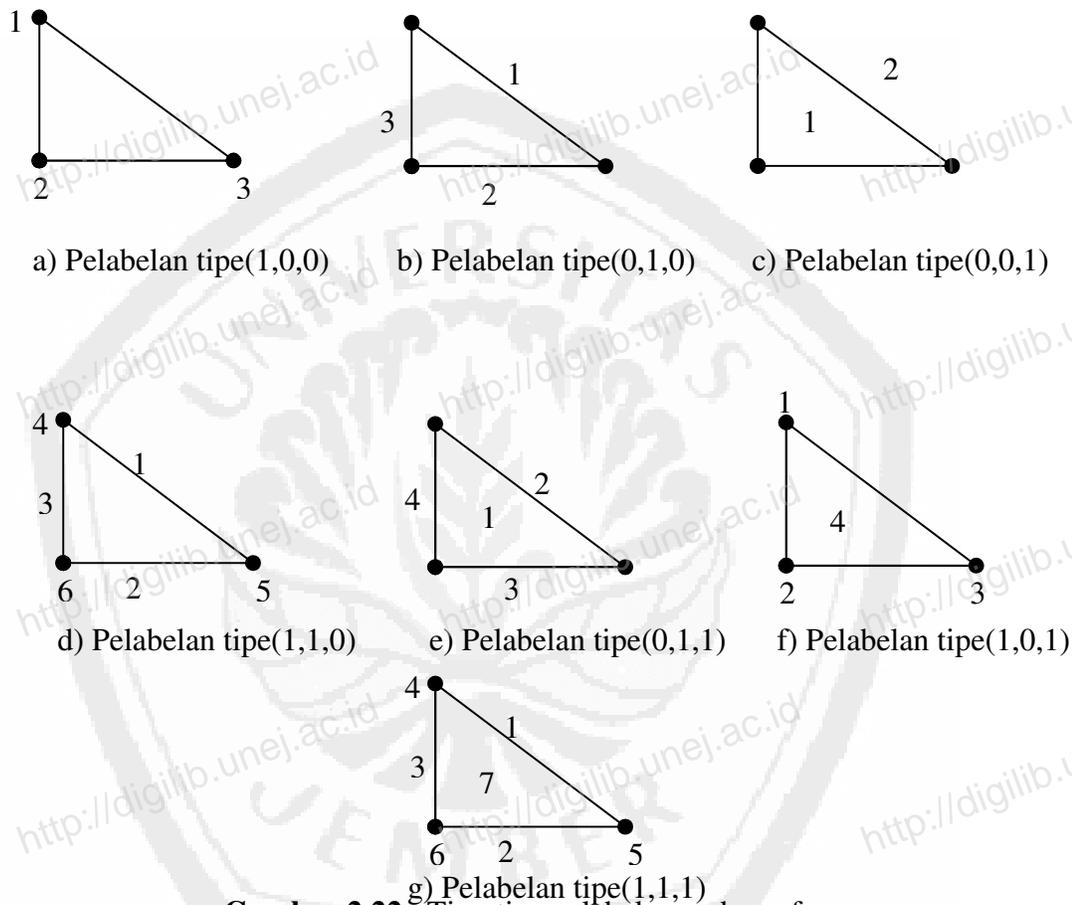
Pelabelan tipe (a,b,c) adalah pemetaan satu-satu yang membawa elemen dari graf G ke himpunan bilangan $\{1, 2, 3, \dots, av + be + cf\}$, dengan v , e , dan f berturut-turut adalah titik (*vertex*), sisi (*edge*) dan wajah (*face*) pada suatu graf.

2.6.2 Pelabelan Tipe (1,0,0)

Dengan mengasumsikan $a,b,c \in \{0,1\}$ maka pelabelan tipe $(1,0,0)$ adalah pemetaan satu-satu yang membawa titik dari graf G ke himpunan bilangan $\{1,2,3, \dots, v\}$, disebut juga pelabelan titik.

Sehingga pelabelan tipe $(0,1,0)$ atau $(0,0,1)$ secara berturut-turut disebut juga pelabelan, sisi atau wajah. Jika komponen titik dan sisi yang dilabeli $(1,1,0)$ maka disebut juga pelabelan total, jika komponen titik dan wajah yang dilabeli $(1,0,1)$ maka disebut pelabelan titik-wajah, jika komponen sisi dan wajah yang dilabeli $(0,1,1)$

maka disebut dengan pelabelan sisi-wajah, sedangkan jika yang dilabeli titik, sisi dan wajah $(1,1,1)$ maka disebut juga pelabelan supertotal (Baca, dkk:Submitted).



Gambar 2.22 : Tipe-tipe pelabelan pada graf

2.6.2 Pelabelan Tipe $(1,0,0)$ Wajah d -Antimagic

Pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah d - antimagic adalah pelabelan titik dari sebuah graf G dengan himpunan bilangan bulat positif $\{1, 2, 3, \dots, v\}$ dengan v adalah banyaknya titik dalam graf G , sedemikian hingga jumlah label dari semua titik yang menempel pada wajah (dengan jumlah sisi yang sama) membentuk suatu barisan aritmatika.

Jumlah dari bobot wajahnya ;

$$W_s = a_s + (a_s + d) + (a_s + 2d) + \dots + a_s + (f_s - 1)d \dots\dots\dots (2.1)$$

untuk beberapa anggota bilangan bulat a_s (nilai awal bobot pada s-sisi), d (beda) dan f_s adalah wajah dengan s-sisi.

Sehingga untuk batas bawah a_s diperoleh $a_s \geq 1 + 2 + \dots + s$.

Pada pelabelan ini terdapat pemetaan satu-satu λ dari $E \cup V$ ke bilangan bulat positif $\{1, 2, 3, \dots, v\}$. Jika S_v adalah jumlah dari semua label titik dan W_s adalah jumlah dari bobot wajahnya, dimana $W_s = \{a_s, a_s + d, \dots, a_s + (f_s - 1)d\}$ sehingga:

$$S_v = 1 + 2 + 3 \dots + v$$

$$S_v = v + (v - 1) + (v - 2) + \dots + 1$$

$$2S_v = (v + 1) + (v + 1) + (v + 1) + \dots + (v + 1)$$

$$S_v = \frac{v(v + 1)}{2} \dots\dots\dots (2.2)$$

Pada pelabelan tipe (1,0,0) wajah d-antimagic ini label titik (digunakan) sejumlah derajat titik tersebut. Jika graf yang akan dilabeli merupakan graf reguler dengan derajat r , maka diperoleh:

$$W_s = rS_v \dots\dots\dots (2.3)$$

2.6.3 Pelabelan Tipe (1,0,0) Wajah d-Antimagic pada Graf Antiprisma

Graf antiprisma A_n mempunyai $v = 2n$ titik, $e = 4n$ sisi dan $f = 2n + 2$ wajah. Dengan demikian $v = 2n$, sehingga himpunan labelnya adalah $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$. Dari penjelasan tersebut, pelabelan tipe (1,0,0) wajah d-antimagic pada graf antiprisma dapat didefinisikan sebagai pemberian label titik pada graf A_n dengan bilangan positif $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$, sedemikian hingga jumlah label dari semua titik yang

mengelilingi wajah (dengan jumlah sisi yang sama) membentuk suatu barisan aritmatika dengan beda d dan nilai awal a .

Graf antiprisma adalah graf reguler berderajat 4 yang terdiri dari sebuah siklus luar dengan n titik $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ dan sebuah siklus dalam dengan n titik $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ dan antara siklus luar dengan siklus dalam dihubungkan n jari-jari $x_i y_i$ dan $x_{i+1} y_i$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ (Lin, Slamin, dan Miller:Submitted). Jika S_v adalah jumlah semua label titik, maka jumlah semua label titiknya sebagai berikut:

dari persamaan (2.1) diperoleh:

$$S_v = \frac{2n(2n+1)}{2}$$

$$S_v = n(2n+1) \text{-----(2.3)}$$

Untuk wajah dengan 3-sisi (f_3) pada siklus tengah dan f_n , untuk wajah dengan n -sisi pada siklus dalam dan luar. Maka, total bobot dari masing-masing wajah W_3 dan W_n adalah sebagai berikut:

a) Untuk wajah dengan 3-sisi (f_3)

Dari persamaan (2.1), diperoleh:

$$W_3 = a_3 + (a_3 + d) + (a_3 + 2d) + \dots + (a_3 + (2n-1)d)$$

$$W_3 = a_3 + a_3 + a_3 + \dots + a_3 + d + 2d + 3d + \dots + (2n-1)d$$

$$W_3 = 2na_3 + (1 + 2 + 3 + \dots + (2n-1))d$$

$$W_3 = 2na_3 + \frac{(2n-1)(1+(2n-1))}{2}d$$

$$W_3 = 2na_3 + n(2n-1)d$$

$$W_3 = n(2a_3 + (2n-1)d) \text{-----(2.4)}$$

Label titik digunakan 3 kali. Sehingga dari persamaan (2.3) diperoleh:

$$W_3 = 3S_v$$

$$W_3 = 3n(2n+1) \text{ ----- (2.5)}$$

Dari persamaan (2.4) dan (2.5) dapat diperoleh:

$$n(2a_3 + (2n-1)d) = 3n(2n+1)$$

$$2a_3 + (2n-1)d = 3(2n+1)$$

$$a_3 = \frac{[3(2n+1) - (2n-1)d]}{2} \text{(2.6)}$$

Dengan cara yang hampir sama dapat juga diperoleh nilai d :

$$d = \frac{[3(2n+1) - 2a_3]}{(2n-1)} \text{(2.7)}$$

• Untuk batas bawah a_3 pada f_3 adalah $6 \leq a_3$. Sedangkan untuk batas atasnya :

Dari persamaan (2.4), nilai bobot wajah terbesar pada f_3 adalah

$a_3 + (2n-1)d$. Sedangkan bobot wajah pada f_3 tidak lebih dari $v + (v-1) + (v-2)$. Sedemikian hingga diperoleh;

$$a_3 + (2n-1)d \leq v + (v-1) + (v-2)$$

$$a_3 \leq 3v - 3 - (2n-1)d$$

$$a_3 \leq 3(v-1) - (2n-1)d; \text{ karena } v = 2n$$

$$a_3 \leq 3(2n-1) - (2n-1)d$$

$$a_3 \leq (2n-1)(3-d) \text{(2.8)}$$

Dari sini dapat ditentukan bahwa nilai d haruslah 1 atau 2 (≤ 3).

b) Untuk wajah dengan n -sisi (f_n).

Label titik S_v digunakan 1 kali. Sehingga diperoleh:

$$W_n = S_v = f_n a_n + \frac{f_n(f_n-1)d}{2} \text{(2.9)}$$

$$\frac{v(v+1)}{2} = \frac{f_n}{2}(2a_n + (f_n - 1)d), \text{ maka diperoleh:}$$

$$a_n = \frac{1}{2} \left[\frac{v(v+1)}{f_n} - (f_n - 1)d \right] \dots \dots \dots (2.9).$$

Karena $v = 2n$ dan $f_n = 2$, maka;

$$a_n = \frac{1}{2}(n(2n+1) - d) \dots \dots \dots (2.10).$$

sehingga ,

$$d = n(2n+1) - 2a_n \dots \dots \dots (2.11).$$

Untuk batas bawah a_n pada f_n yaitu:

$$s_v \leq a_n$$

$$\frac{1}{2}n(n+1) \leq a_n$$

Sedangkan untuk batas atas dari a_n yaitu:

$$a_n + d \leq v + (v-1) + (v-2) + (v-3) + \dots + (v-(n-1))$$

$$a_n + d \leq v + v + v \dots - ((1+2+3 \dots + (n-1)))$$

$$a_n + d \leq nv - \left(\frac{(n-1)n}{2} \right)$$

$$a_n + d \leq n \left(v - \frac{(n-1)}{2} \right)$$

$$a_n + d \leq n \left(2n - \frac{(n-1)}{2} \right)$$

$$a_n \leq \frac{(4n^2 - n^2 + n - 2d)}{2}$$

$$a_n \leq \frac{(3n^2 + n - 2d)}{2} \dots \dots \dots (2.12)$$

2.6.4 Pelabelan Tipe (1,0,0) Wajah d -Antimagic pada Gabungan Dua Graf Antiprisma

Pelabelan tipe (1,0,0) wajah d -antimagic pada gabungan dua graf antiprisma yang akan dibahas dalam penelitian ini terfokus pada gabungan dua graf antiprisma yang isomorfis, dinotasikan dengan $2A_n$ sesuai dengan batasan masalah yang diberikan.

Gabungan dua graf antiprisma A_n adalah graf reguler dengan derajat 4 yang mempunyai $4n$ titik, $8n$ sisi dan $4n + 4$ wajah. Karena yang dilabeli hanya titik maka himpunan labelnya adalah $\{1, 2, 3, \dots, 4n\}$. Sedemikian hingga untuk formulasi dari W_n, W_3, a_n, a_3, d maupun intervalnya isomorfis dengan formulasi tunggalnya.

Pada f_3 nilai bobot wajah $w_3 = 3s_v$, karena masing-masing titik digunakan 3 kali. Sedemikian hingga diperoleh ;

$$w_3 = 3 \frac{v(v+1)}{2} = a_3 + (a_3 + d) + (a_3 + 2d) + \dots + (a_3 + (f_3 - 1)d) \dots \dots (2.13)$$

Diketahui $v = 4n$ dan $f_3 = 4n$, maka;

$$\begin{aligned} w_3 &= \frac{3 \cdot 4n(4n+1)}{2} = f_3 a_3 + \frac{(f_3(f_3-1)d)}{2} \\ w_3 &= \frac{6n(4n+1)}{1} = 4na_3 + \frac{(4n(4n-1)d)}{2}, \text{ sehingga diperoleh} \\ 4na_3 &= 6n(4n+1) - 2n(4n-1)d \\ a_3 &= \frac{3(4n+1) - (4n-1)d}{2} \\ a_3 &= \frac{12n+3-4n-d}{2} \\ a_3 &= \frac{4n(3-d) + (3-d)}{2} \\ a_3 &= \frac{(3-d)(4n+1)}{2} \dots \dots \dots (2.14). \end{aligned}$$

Dapat ditentukan pula nilai d tidak boleh lebih dari 3.

Untuk nilai batas bawah dari a_3 pada f_3 ;

$$a_3 \geq 6$$

Sedangkan nilai batas atas dari a_3 dapat diperoleh dari persamaan (2.7), hanya perlu mengganti $2n$ dengan $4n$.

$$a_3 \leq (3-d)(4n-1) \dots\dots\dots(2.15)$$

Pada f_n , nilai jumlah bobot wajahnya;

$$w_n = s_v = a_n + (a_n + d) + (a_n + 2d) + (a_n + 3d) \dots\dots(2.16)$$

Sehingga diperoleh $w_n = \frac{v(1+v)}{2} = 4a_n + (1+2+3)d$.

$$w_n = \frac{4n(4n+1)}{2} = 4a_n + 6d$$

maka,
$$a_n = \frac{4n^2 + n - 3d}{2} \dots\dots\dots(2.17)$$

Untuk nilai batas bawah dari a_n adalah

$$a_n \geq 1 + 2 + 3 \dots + n$$

$$a_n \geq \frac{n(n+1)}{2}$$

Sedangkan untuk nilai batas atas dari a_n , dapat diperoleh dari persamaan (2.16). Sehingga,

$$a_n + 3d \leq v + (v-1) + (v-2) + \dots + (v-(n-1))$$

$$a_n + 3d \leq v + v + \dots - (1 + 2 + \dots + (n-1))$$

$$a_n + 3d \leq nv - \frac{n(n-1)}{2}$$

$$a_n + 3d \leq 4n^2 - \frac{n^2 - n}{2}$$

$$a_n + 3d \leq \frac{7n^2 + n}{2}$$

$$a_n \leq \frac{7n^2 + n - 6d}{2} \dots\dots\dots(2.18)$$

III. METODE PENELITIAN

3.1 Metode Penelitian

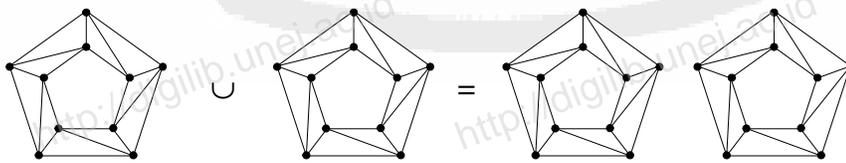
Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah deskriptif aksiomatik yang digunakan untuk menerapkan teorema yang telah ada, dalam hal ini pelabelan tipe (1,0,0) dan pelabelan antimagic. kemudian dilanjutkan dengan metode *trial and error*, dimana metode ini mencoba segala kemungkinan yang ada dalam melabeli titik pada graf antiprisma dan gabungan dua graf antiprisma dalam menemukan pelabelan tipe (1,0,0) wajah d -antimagic, langkah berikutnya adalah pendeteksian pola (*pattern recognition*)

3.2 Rancangan Penelitian

3.2.1 Penggabungan Dua Graf Antiprisma $2A_n$

Graf antiprisma dinotasikan dengan A_n adalah sebuah graf yang terdiri dari sebuah siklus luar $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$, sebuah siklus dalam $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ dan serangkaian n jari – jari $x_i y_i$ dan $x_{i+1} y_i$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Dengan demikian graf antiprisma mempunyai $2n$ titik, $4n$ sisi dan $2n + 2$ wajah. Adapun gabungan dua graf antiprisma $2A_n$ didefinisikan sebagai gabungan saling lepas dari dua graf antiprisma A_n sehingga dapat dinotasikan sebagai:

$$2A_n = A_n \cup A_n$$



Gambar 3.1 : Contoh gabungan dua graf Antiprisma $2A_5$

3.2.2 Indikator Penelitian

Dalam penelitian ini indikator yang menyatakan ada atau tidak adanya suatu pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah-antimagic pada graf antiprisma dan gabungan dua graf antiprisma adalah:

- 1) jumlah titik, sisi dan wajah, dimana pada graf antiprisma terdiri dari $v = 2n$, $e = 4n$ dan $f_3 + f_n = 2n + 2$ sedangkan pada gabungan dua graf antiprisma $v = 4n$, $e = 8n$ dan $f_3 + f_n = 4n + 4$;
- 2) adanya nilai awal a dan beda d pada graf antiprisma dan gabungan dua graf antiprisma.

Jika ada pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah d -antimagic pada graf antiprisma dan gabungan dua graf antiprisma maka penelitian akan dilanjutkan ke tahap selanjutnya yaitu tahap teknik penelitian, dan jika tidak ada maka penelitian dihentikan.

3.3 Definisi Operasional

Definisi operasional digunakan untuk memberikan gambaran secara sistematis dalam penelitian dan untuk menghindari terjadinya pengertian makna.

Dalam penelitian ini hal yang perlu didefinisikan adalah:

- 1) pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah d -antimagic

Wajah adalah daerah yang dikelilingi oleh sisi dan titik. Pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah d -antimagic adalah pelabelan titik dari sebuah graf bidang G dengan himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3, \dots, v\}$ dengan v adalah banyaknya titik dalam graf bidang G . Sedemikian hingga jumlah label (bobot) dari semua titik yang mengelilingi wajah (dengan jumlah sisi yang sama) membentuk suatu barisan aritmatika dengan nilai awal a dan beda d ;

2) graf Antiprisma A_n

Graf antiprisma adalah graf reguler berderajat 4 yang terdiri dari sebuah siklus luar dengan n titik $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ dan sebuah siklus dalam dengan n titik $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ dan antara siklus luar dengan siklus dalam dihubungkan n jari-jari $x_i y_i$ dan $x_{i+1} y_i$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ (Lin, Slamin, dan Miller:Submitted). Pada graf ini wajah yang terbentuk ada dua macam yaitu $f_3 = 2n$, untuk wajah dengan 3-sisi pada siklus tengah dan $f_n = 2$, untuk wajah dengan n -sisi pada siklus dalam dan luar;

3) gabungan dua graf antiprisma ($2A_n$)

Gabungan dari dua graf G_1 dan G_2 , dinotasikan dengan $G_1 \cup G_2$ didefinisikan sebagai graf dengan himpunan titik $V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G_1) \cup E(G_2)$ (Chartrand dan Oellermann, 1993:29). Graf antiprisma dinotasikan dengan A_n adalah sebuah graf yang terdiri dari $2n$ titik, $4n$ sisi dan $2n + 2$ wajah. Gabungan dua graf antiprisma ($2A_n$) didefinisikan sebagai gabungan saling lepas dari dua graf antiprisma A_n yang isomorfis ditulis:

$$2A_n = A_n \cup A_n.$$

3.3 Teknik Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada graf antiprisma A_n dan gabungan dua graf antiprisma $2A_n$, jika pada graf antiprisma A_n dan gabungan dua graf antiprisma $2A_n$ ditemukan pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah d -antimagic maka dilanjutkan dengan pendeteksian pola (*pattern recognition*). Adapun tehnik penelitian adalah sebagai berikut :

1. menghitung jumlah titik, sisi dan wajah graf antiprisma A_n dengan menggunakan $v = 2n$, $e = 4n$, $f_3 = 2n$ dan $f_n = 2$, serta $2A_n$ dengan menggunakan $v = 4n$, $e = 8n$, $f_3 = 4n$ dan $f_n = 4$;

2. menentukan interval suku awal a_s pada graf antiprisma dan gabungan dua graf antiprisma .

Untuk batas atas dan batas bawah dari a_s pada graf antiprisma, sebagai berikut:

- 1) pada f_3 untuk batas bawah dari a_3

$$a_3 \geq 1 + 2 + 3$$

$$a_3 \geq 6$$

Sedangkan batas atas dari a_3

$$a_3 \leq (3 - d)(2n - 1)$$

- 2) pada f_n untuk batas bawah dari a_n

$$a_n \geq 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$a_n \geq \frac{n(1+n)}{2}$$

Sedangkan batas atas a_n

$$a_n \leq \frac{3n^2 + n - 2d}{2}$$

Untuk batas atas dan batas bawah dari a_s pada gabungan dua graf antiprisma sebagai berikut:

- 1) pada f_3 untuk batas bawah dari a_3

$$a_3 \geq 6$$

sedangkan batas atas dari a_3

$$a_3 \leq 3(4n - 1) - (4n - 1)d$$

$$a_3 \leq (4n - 1)(3 - d)$$

- 2) pada f_n untuk batas bawah dari a_n

$$a_n \geq 1 + 2 + \dots + n$$

$$a_n \geq \frac{n(1+n)}{2}$$

Sedangkan batas atas dari a_n

$$a_n \leq \frac{7n^2 + n}{2} - 3d$$

3. menentukan interval nilai beda d pada graf antiprisma dengan menggunakan perhitungan $a_3 \leq (3-d)(2n-1)$ dan gabungan dua graf antiprisma dengan menggunakan perhitungan $a_3 \leq (4n-1)(3-d)$.

4. Menghitung bobot untuk setiap wajah pada graf antiprisma dan gabungan dua graf antiprisma.

a) untuk wajah pada graf antiprisma sebagai berikut:

pada f_3 ;

$$w_3 = 3n(2n+1)$$

$$w_3 = 2na_3 + n(2n-1)d$$

pada f_n ;

$$w_n = 2a_n + d$$

b) untuk wajah pada gabungan dua graf antiprisma sebagai berikut:

pada f_3 ;

$$w_3 = 4na_3 + \frac{4n(4n-1)d}{2}$$

$$w_3 = 2n(2a_3 + (4n-1)d)$$

pada f_n ;

$$w_n = 4a_n + 6d$$

$$w_n = 2(2a_n + 3d)$$

5. ada tidaknya pelabelan titik wajah d -antimagic pada graf antiprisma dan gabungan dua graf antiprisma $2A_n$ bisa ditentukan dengan cara memeriksa ada tidaknya bilangan bulat positif a yang memenuhi persamaan :

a) pada garf antiprisma ;

$$a_3 = \frac{1}{2} [3(2n+1) - (2n-1)d]$$

pada wajah dengan n -sisi

$$a_n = \frac{1}{2} [n(2n+1) - d]$$

b) pada gabungan dua graf antiprisma;

pada f_3 ;

$$a_3 = \frac{(3-d)(4n+1)}{2}$$

pada f_n ;

$$a_n = \frac{4n^2 + n - 3d}{2}$$

6. jika ada nilai a yang terpenuhi, selanjutnya graf antiprisma dan gabungan dua graf antiprisma $2A_n$ (untuk $3 \leq n \leq 11$) dilabeli dengan menggunakan metode *trial and error* sesuai dengan nilai a yang sudah didapat dari perhitungan pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah d -antimagic tersebut.
7. menentukan suatu pola (*pattern recognition*) untuk melabeli graf antiprisma atau gabungan dua graf antiprisma yang dinyatakan dalam rumus yang berlaku secara umum.

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini akan menjelaskan hasil penelitian tentang pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah d -antimagic pada graf antiprisma dan gabungan dua graf antiprisma untuk $n \geq 4$. Langkah untuk mencari pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah d -antimagic pada graf antiprisma dan gabungan dua graf antiprisma tersebut adalah sebagai berikut :

1. mencari beda (d) yang mungkin antar bobot, kemudian ditetapkan nilai d sehingga dapat dicari nilai suku awal (a), akan dijelaskan pada sub bab 4.1 untuk graf antiprisma dan sub bab 4.4 untuk gabungan dua graf antiprisma;
2. mencari pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah d -antimagic yang akan dijelaskan pada sub bab 4.2 untuk graf antiprisma dan sub bab 4.5 untuk gabungan dua graf antiprisma dengan $n = 5, 7, 9$, dan 11 ;
3. menentukan formulasi pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah d -antimagic dalam bentuk teorema yang berlaku secara umum. Hal ini akan dijelaskan pada sub bab 4.3 untuk graf antiprisma A_n dan sub bab 4.6 untuk gabungan dua graf antiprisma $2A_n$.

4.1 Beda antar bobot (d) yang ditetapkan dan suku awal (a_s) pada pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah d -antimagic pada graf antiprisma (A_n)

Beda setiap bobot d pada pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah d -antimagic pada graf antiprisma (A_n) dapat diperoleh dengan menggunakan pertidaksamaan (2.?) :

$$a_3 \leq (3-d)(2n-1)$$

Agar a_3 bernilai positif dan tidak sama dengan nol, maka d haruslah kurang dari sama dengan 2.

$$d \leq 2, \quad d \in N$$

Berikut ini akan ditunjukkan bahwa hanya d yang bernilai 1, yang akan digunakan dalam pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah d -antimagic pada graf antiprisma (A_n).

Dari persamaan (9)

$$a_3 = \frac{1}{2}[3(2n+1) - (2n-1)d]$$

$$a_3 = \frac{6n+3-2nd+d}{2}$$

$$a_3 = \frac{2n(3-d)+3+d}{2}$$

$$a_3 = n(3-d) + \frac{3+d}{2}$$

Agar nilai a_3 bernilai bulat positif, maka $d=1$. Sehingga persamaan diatas menjadi;

$$a_3 = 2n + 2$$

jadi untuk setiap graf antiprisma A_n nilai $d=1$.

Teorema 4.1

Tidak ada pelabelan tipe (1,0,0) wajah 1-antimagic pada graf antiprisma

(A_n) untuk n genap dengan $a_3 = 2n + 2$ dan $a_n = \frac{n(2n+1)-1}{2}$.

BUKTI:

Dari persamaan (2...) dan $d=1$, maka:

$$a_n = \frac{n(2n+1)-d}{2}$$

$$a_n = \frac{n(2n+1)-1}{2}, a_n \in \mathbb{N}$$

Sehingga agar a_n bernilai bulat positif atau berupa bilangan asli, maka n haruslah bilangan ganjil positif. Jika n berupa bilangan genap, maka a_n akan berupa bilangan rasional dan bukan bilangan bulat.

Jadi, Tidak ada pelabelan tipe (1,0,0) wajah 1-antimagic pada graf antiprisma A_n untuk n genap dengan $a_3 = 2n + 2$ dan $a_n = \frac{n(2n+1)-1}{2}$.

4.1.1 Mencari Interval dan Nilai Suku Awal Wajah dengan 3-sisi (a_3)

Untuk mencari interval suku awal a_3 pada pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah d -antimagic pada graf antiprisma A_n adalah dengan menggunakan pertidaksamaan (2.22):

Karena $d = 1$, maka interval dari suku awal a_3

$$6 \leq a_3 \leq (3-1)(2n-1)$$

$$6 \leq a_3 \leq 2(2n-1)$$

Berikut ini akan dijabarkan interval suku awal a_3 pada pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah d -antimagic pada graf antiprisma A_n untuk $5 \leq n \leq 9$, n ganjil dengan beda $d=1$.

1. interval suku awal a_3 untuk A_5

$$6 \leq a_3 \leq 2(2n-1)$$

$$6 \leq a_3 \leq 2(2.5-1)$$

$$6 \leq a_3 \leq 2(10-1)$$

$$6 \leq a_3 \leq 18$$

jadi interval dari suku awal a_3 untuk A_5 adalah $6 \leq a_3 \leq 18$.

2. interval suku awal a_3 untuk A_7

$$6 \leq a_3 \leq 2(2n-1)$$

$$6 \leq a_3 \leq 2(2.7-1)$$

$$6 \leq a_3 \leq 2(14-1)$$

$$6 \leq a_3 \leq 26$$

jadi interval dari suku awal a_3 untuk A_7 adalah $6 \leq a_3 \leq 26$.

4.1.2 Mencari Interval Suku Awal Wajah dengan n -sisi (a_n)

Untuk mencari interval suku awal a_n pada pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah d -antimagic pada grafantiprisma D_n adalah dengan menggunakan pertidaksamaan (2.11.3) :

$$2n^2 + n \leq a_n \leq 8n^2 + n - d$$

untuk $d = 1$, maka interval dari suku awal a_n

$$2n^2 + n \leq a_n \leq 8n^2 + n - 1$$

untuk $d = 2$, maka interval dari suku awal a_n

$$2n^2 + n \leq a_n \leq 8n^2 + n - 2$$

untuk $d = 3$, maka interval dari suku awal a_n

$$2n^2 + n \leq a_n \leq 8n^2 + n - 3$$

Berikut ini akan dijabarkan interval suku awal a_n pada pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah d -antimagic pada grafantiprisma D_n untuk $3 \leq n \leq 9$, n genap dengan beda $d=2$.

1. interval suku awal a_n untuk D_4

$$2n^2 + n \leq a_n \leq 8n^2 + n - 2$$

$$2(16) + 4 \leq a_n \leq 8(16) + 4 - 2$$

$$36 \leq a_n \leq 130$$

jadi interval dari suku awal a_n untuk D_4 adalah $36 \leq a_n \leq 130$

2. interval suku awal a_n untuk D_6

$$2n^2 + n \leq a_n \leq 8n^2 + n - 2$$

$$2(36) + 6 \leq a_n \leq 8(36) + 6 - 2$$

$$78 \leq a_n \leq 292$$

jadi interval dari suku awal a_n untuk D_6 adalah $78 \leq a_n \leq 292$.

3. interval suku awal a_n untuk D_8

$$2n^2 + n \leq a_n \leq 8n^2 + n - 2$$

$$2(64) + 8 \leq a_n \leq 8(64) + 8 - 2$$

jadi interval dari suku awal a_n untuk D_8 adalah $136 \leq a_n \leq 518$.

Berikut ini akan dijabarkan interval suku awal a_n pada pelabelan tipe (1,0,0) wajah d -antimagic pada grafantiprisma D_n untuk $3 \leq n \leq 9$, n ganjil dengan beda $d=2$.

1. interval suku awal a_n untuk D_3

$$2n^2 + n \leq a_n \leq 8n^2 + n - 2$$

$$2(9) + 3 \leq a_n \leq 8(9) + 3 - 2$$

$$21 \leq a_n \leq 73$$

jadi interval dari suku awal a_n untuk D_3 adalah $21 \leq a_n \leq 73$.

2. interval suku awal a_n untuk D_5

$$2n^2 + n \leq a_n \leq 8n^2 + n - 2$$

$$2(25) + 5 \leq a_n \leq 8(25) + 5 - 2$$

$$55 \leq a_n \leq 203$$

jadi interval dari suku awal a_n untuk D_5 adalah $55 \leq a_n \leq 203$.

3. interval suku awal a_n untuk D_7

$$2n^2 + n \leq a_n \leq 8n^2 + n - 2$$

$$2(49) + 7 \leq a_n \leq 8(49) + 7 - 2$$

$$105 \leq a_n \leq 397$$

jadi interval dari suku awal a_n untuk D_7 adalah $105 \leq a_n \leq 397$.

4. interval suku awal a_n untuk D_9

$$2n^2 + n \leq a_n \leq 8n^2 + n - 2$$

$$2(81) + 9 \leq a_n \leq 8(81) + 9 - 2$$

$$171 \leq a_n \leq 655$$

jadi interval dari suku awal a_n untuk D_9 adalah $171 \leq a_n \leq 655$.

4.2 Pelabelan Tipe (1,0,0) Wajah d -Antimagic pada Graf antiprisma A_n

Dari penelitian yang sudah dilakukan, ternyata dapat ditemukan bahwa ada pelabelan tipe (1,0,0) wajah d -antimagic pada graf antiprisma A_n untuk n ganjil.

Berikut ini adalah langkah-langkah untuk mencari pelabelan tipe (1,0,0) wajah d -antimagic pada graf antiprisma A_n untuk $n \geq 3$, n ganjil:

1) misalkan x adalah titik pada siklus dalam dan y adalah titik pada siklus luar.

- 2) labeli titik pada siklus dalam dari graf antiprisma dengan $2n, 2n-3, 2n-4, 2n-7, \dots, 2n-(2n-2)$.
- 3) labeli titik pada siklus luar dari graf antiprisma dengan $3n+1, 3n+2, 3n+3, \dots, 3n+n$.

Setelah dilakukan pelabelan pada sisi dan titik pada graf antiprisma kemudian dilanjutkan dengan penukaran antar label baik titik, sisi maupun jari-jari dengan ketentuan sebagai berikut :

- untuk $i = n$, label titik pada siklus luar ditukar dengan label jari-jari.
- untuk $i = \frac{n-2}{2}$, label titik pada siklus dalam ditukar dengan label jari-jari

Berikut ini adalah langkah-langkah untuk mencari pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah d -antimagic pada grafantiprisma D_n untuk $n \geq 3$, n ganjil:

- 1) misalkan x adalah titik pada siklus dalam dan y adalah titik pada siklus luar.
- 2) labeli titik pada siklus dalam dari grafantiprisma dengan $4n+1, 4n+2, 4n+3, \dots, 4n+n$.
- 3) labeli titik pada siklus luar dari grafantiprisma dengan $3n+1, 3n+2, 3n+3, \dots, 3n+n$.
- 4) labeli sisi pada siklus dalam dari grafantiprisma dengan $2n-1, 2n-2, 2n-3, \dots, 2n-(n-1), 2n$.
- 5) labeli sisi pada siklus luar dari grafantiprisma dengan $2n+1, 2n+2, 2n+3, \dots, 2n+n-1-n, 3n$.
- 6) labeli jari-jari dari grafantiprisma dengan $n, n-1, n-2, \dots, 2, 1$.

Setelah dilakukan pelabelan pada sisi dan titik pada graf antiprisma kemudian dilanjutkan dengan penukaran antar label baik titik, sisi maupun jari-jari dengan ketentuan sebagai berikut :

Pada $n = 3$

- untuk $i = 1$, label titik pada siklus luar ditukar dengan label jari-jari.
- untuk $i = 2$, label titik pada siklus luar ditukar dengan label jari-jari.
- untuk $i = 3$, label titik pada siklus dalam ditukar dengan label jari-jari.

Pada $n = 5$

- untuk $i = 1$, label titik pada siklus luar ditukar dengan label jari-jari.

- untuk $i = 2$, label titik pada siklus luar ditukar dengan label jari-jari.
- untuk $i = 4$, label titik pada siklus dalam ditukar dengan label jari-jari.

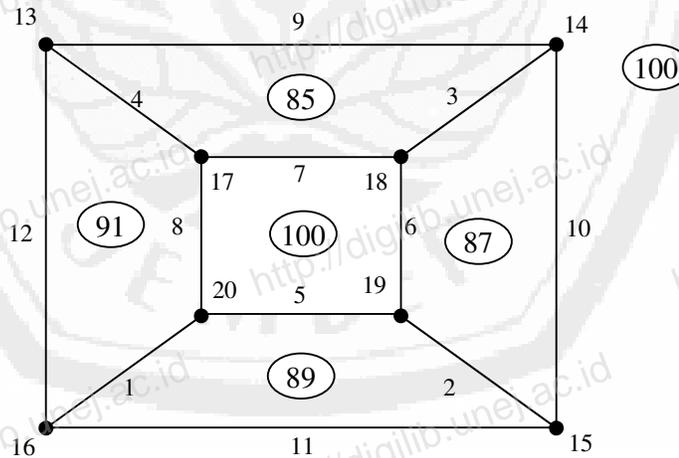
Pada $n \geq 7$, n ganjil

- untuk $i = 1$, label titik pada siklus luar ditukar dengan label jari-jari.
- untuk $i = 2$, label titik pada siklus luar ditukar dengan label jari-jari.
- untuk $i = \frac{n+7}{2}$, label titik pada siklus dalam ditukar dengan label jari-jari.

4.2.1 Pelabelan Tipe (1,0,0) Wajah d -Antimagic pada Graf D_4

Langkah-langkah mencari pelabelan tipe (1,0,0) wajah d -antimagic pada graf D_4 :

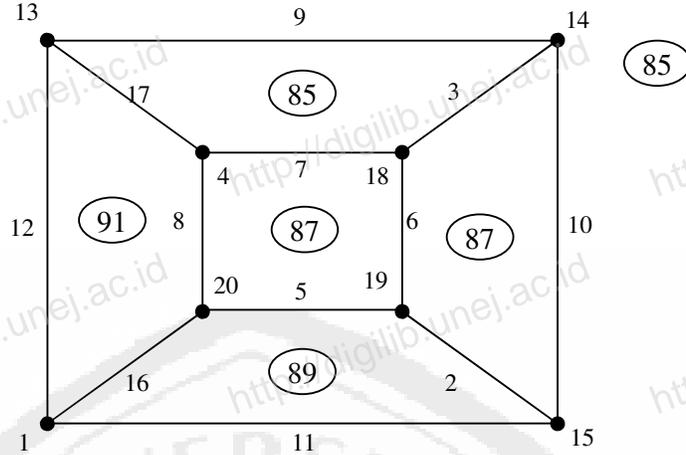
1. misalkan x adalah titik pada siklus dalam dan y adalah titik pada siklus luar.
2. labeli titik pada siklus dalam dari graf antiprisma dengan 17, 18, 19, 20
3. labeli titik pada siklus luar dari graf antiprisma dengan 13, 14, 15, 16
4. labeli sisi pada siklus dalam dari graf antiprisma dengan 7, 6, 5, 8
5. labeli sisi pada siklus luar dari graf antiprisma dengan 9, 10, 11, 12
6. labeli jari-jari dari graf antiprisma dengan 4, 3, 2, 1



Setelah dilakukan pelabelan pada sisi dan titik pada graf antiprisma kemudian dilanjutkan dengan penukaran antar label baik titik, sisi maupun jari-jari dengan ketentuan sebagai berikut :

- untuk $i = n$, tukar label 16 dengan 1
- untuk $i = 1$, tukar label 17 dengan 4

sehingga didapatkan bobot pada masing-masing wajah :

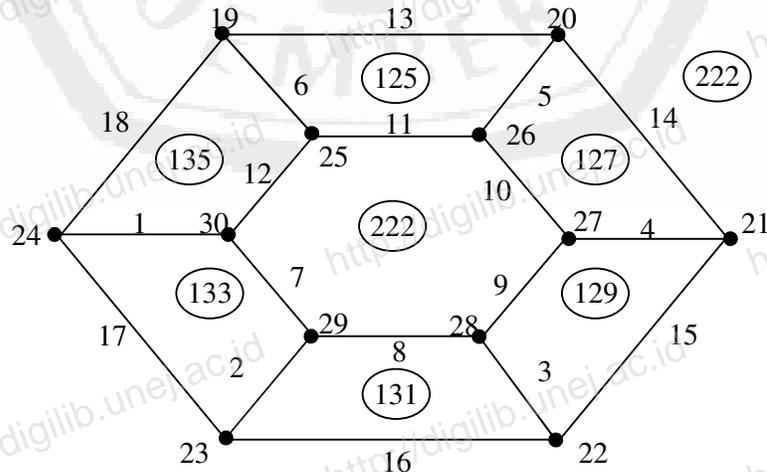


Gambar 4.1: Pelabelan Tipe (1,0,0) 2-Antimagic pada Graf D_4 dengan $a_4=85$ dan $a_n=85$

4.2.2 Pelabelan Tipe (1,0,0) Wajah d -Antimagic pada Graf D_6

Langkah-langkah mencari pelabelan tipe (1,0,0) wajah d -antimagic pada graf D_6 :

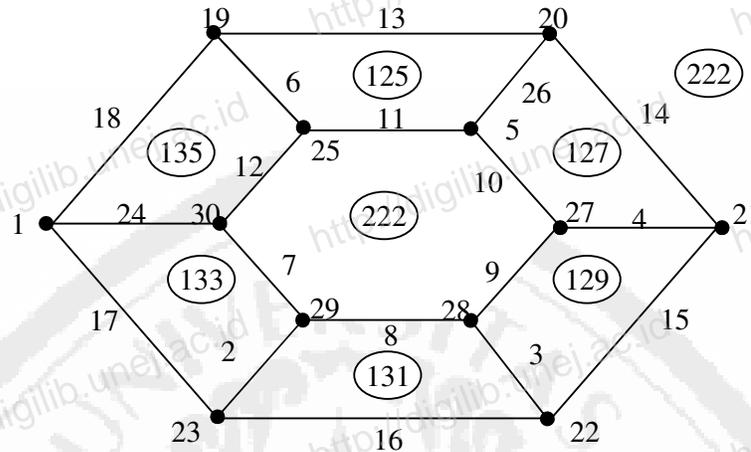
1. misalkan x adalah titik pada siklus dalam dan y adalah titik pada siklus luar.
2. labeli titik pada siklus dalam dari grafantiprisma dengan 25, 26, 27, 28, 29, 30
3. labeli titik pada siklus luar dari grafantiprisma dengan 19, 20, 21, 22, 23, 24
4. labeli sisi pada siklus dalam dari grafantiprisma dengan 11, 10, 9, 8, 7, 12
5. labeli sisi pada siklus luar dari grafantiprisma dengan 13, 14, 15, 16, 17, 18
6. labeli jari-jari dari grafantiprisma dengan 6, 5, 4, 3, 2, 1



Setelah dilakukan pelabelan pada sisi dan titik pada grafantiprisma kemudian

dilanjutkan dengan penukaran antar label baik titik, sisi maupun jari-jari dengan ketentuan sebagai berikut :

- untuk $i = n$, tukar label 24 dengan 1
- untuk $i = 2$, tukar label 26 dengan 5

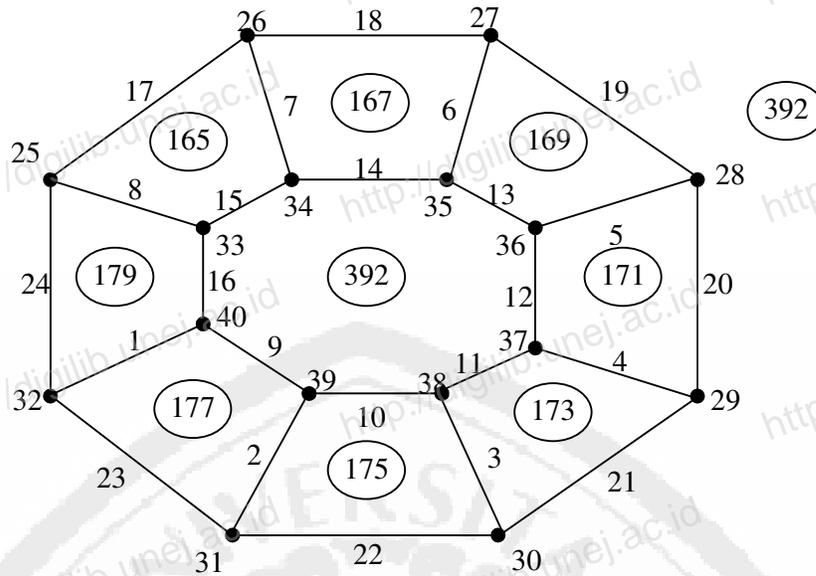


Gambar 4.2: Pelabelan Tipe $(1,0,0)$ 2-Antimagic pada Graf D_6 dengan $a_4=125$ dan $a_n=199$

4.2.3 Pelabelan Tipe $(1,0,0)$ Wajah d -Antimagic pada Graf D_8 .

Langkah-langkah mencari pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah d -antimagic pada graf D_8 :

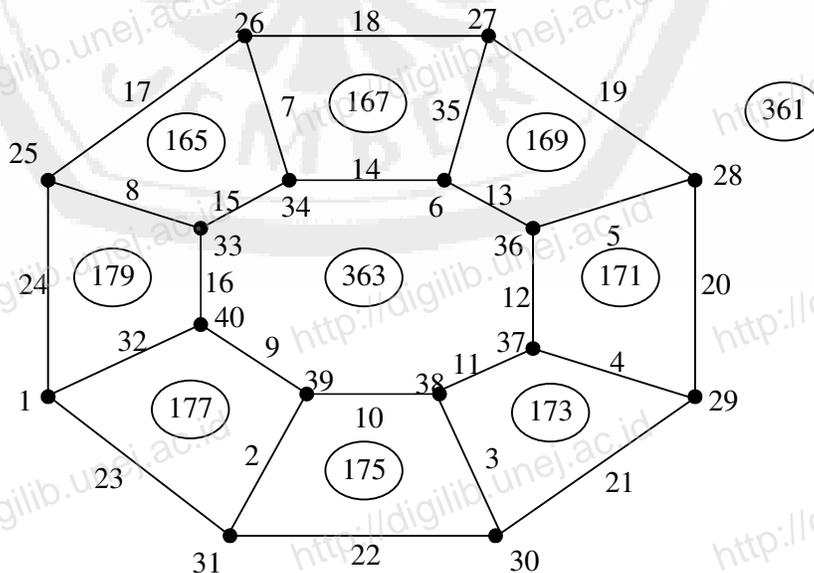
1. misalkan x adalah titik pada siklus dalam dan y adalah titik pada siklus luar.
2. labeli titik pada siklus dalam dari grafantiprisma dengan 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40
3. labeli titik pada siklus luar dari grafantiprisma dengan 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32
4. labeli sisi pada siklus dalam dari grafantiprisma dengan 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 16
5. labeli sisi pada siklus luar dari grafantiprisma dengan 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24
6. labeli jari-jari dari grafantiprisma dengan 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1



Setelah dilakukan pelabelan pada sisi dan titik pada grafantiprisma kemudian dilanjutkan dengan penukaran antar label baik titik, sisi maupun jari-jari dengan ketentuan sebagai berikut :

- untuk $i = n$, tukar label 32 dengan 1
- untuk $i = 3$, tukar label 35 dengan 6

sehingga didapatkan bobot pada masing-masing wajah :



Gambar 4.3: Pelabelan Tipe (1,0,0) 2-Antimagic pada Graf D_8 dengan $a_4=165$ dan $a_n=361$

4.2.4 Pelabelan Tipe (1,0,0) Wajah d -Antimagic pada Graf D_3 .

Langkah-langkah mencari pelabelan tipe (1,0,0) wajah d -antimagic pada graf D_3 :

1. misalkan x adalah titik pada siklus dalam dan y adalah titik pada siklus luar.
2. labeli titik pada siklus dalam dari graf antiprisma dengan 13, 14, 15
3. labeli titik pada siklus luar dari graf antiprisma dengan 10, 11, 12
4. labeli sisi pada siklus dalam dari graf antiprisma dengan 5, 4, 6
5. labeli sisi pada siklus luar dari graf antiprisma dengan 7, 8, 9
6. labeli jari-jari dari graf antiprisma dengan 3, 2, 1

Setelah dilakukan pelabelan pada sisi dan titik pada graf antiprisma kemudian dilanjutkan dengan penukaran antar label baik titik, sisi maupun jari-jari dengan ketentuan sebagai berikut :

- untuk $i = 1$, tukar label 10 dengan 3
- untuk $i = 2$, tukar label 11 dengan 2
- untuk $i = 3$, tukar label 15 dengan 1

4.2.5 Pelabelan Tipe (1,0,0) Wajah d -Antimagic pada Graf D_5 .

Langkah-langkah mencari pelabelan tipe (1,0,0) wajah d -antimagic pada graf D_5 :

1. misalkan x adalah titik pada siklus dalam dan y adalah titik pada siklus luar.
2. labeli titik pada siklus dalam dari graf antiprisma dengan 21, 22, 23, 24, 25
3. labeli titik pada siklus luar dari graf antiprisma dengan 16, 17, 18, 19, 20
4. labeli sisi pada siklus dalam dari graf antiprisma dengan 9, 8, 7, 6, 10
5. labeli sisi pada siklus luar dari graf antiprisma dengan 11, 12, 13, 14, 15
6. labeli jari-jari dari grafantiprisma dengan 5, 4, 3, 2, 1

Setelah dilakukan pelabelan pada sisi dan titik pada graf antiprisma kemudian dilanjutkan dengan penukaran antar label baik titik, sisi maupun jari-jari dengan ketentuan sebagai berikut :

- untuk $i = 1$, tukar label 16 dengan 5

- untuk $i = 2$, tukar label 17 dengan 4
- untuk $i = 4$, tukar label 24 dengan 2

4.2.6 Pelabelan Tipe (1,0,0) Wajah d -Antimagic pada Graf D_7 .

Langkah-langkah mencari pelabelan tipe (1,0,0) wajah d -antimagic pada graf D_7 :

1. misalkan x adalah titik pada siklus dalam dan y adalah titik pada siklus luar.
2. labeli titik pada siklus dalam dari grafantiprisma dengan 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35
3. labeli titik pada siklus luar dari grafantiprisma dengan 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28
4. labeli sisi pada siklus dalam dari grafantiprisma dengan 13, 12, 11, 10, 9, 8, 14
5. labeli sisi pada siklus luar dari grafantiprisma dengan 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21
6. labeli jari-jari dari grafantiprisma dengan 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1

Setelah dilakukan pelabelan pada sisi dan titik pada grafantiprisma kemudian dilanjutkan dengan penukaran antar label baik titik, sisi maupun jari-jari dengan ketentuan sebagai berikut :

- untuk $i = 1$, tukar label 22 dengan 7
- untuk $i = 2$, tukar label 23 dengan 6
- untuk $i = 7$, tukar label 35 dengan 1

4.2.7 Pelabelan Tipe (1,0,0) Wajah d -Antimagic pada Graf D_9 .

Langkah-langkah mencari pelabelan tipe (1,0,0) wajah d -antimagic pada graf D_9 :

1. misalkan x adalah titik pada siklus dalam dan y adalah titik pada siklus luar.
2. labeli titik pada siklus dalam dari grafantiprisma dengan 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45
3. labeli titik pada siklus luar dari grafantiprisma dengan 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36

4. labeli sisi pada siklus dalam dari grafantiprisma dengan 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 18
5. labeli sisi pada siklus luar dari grafantiprisma dengan 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27
6. labeli jari-jari dari grafantiprisma dengan 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1

Setelah dilakukan pelabelan pada sisi dan titik pada grafantiprisma kemudian dilanjutkan dengan penukaran antar label baik titik, sisi maupun jari-jari dengan ketentuan sebagai berikut :

- untuk $i = 1$, tukar label 28 dengan 9
- untuk $i = 2$, tukar label 29 dengan 8
- untuk $i = 8$, tukar label 44 dengan 2

4.3 Formulasi Pelabelan Tipe (1,0,0) Wajah d -Antimagic pada Grafantiprisma

Setelah mendapatkan hasil pelabelan dari setiap n , yaitu : $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ dan 9 dapat ditarik suatu rumus umum yang diperoleh dari pola yang terbentuk pada setiap pelabelan. Rumusan umum ini berupa teorema seperti yang tercantum di bawah ini :

Teorema 4.3.1

Ada pelabelan Tipe (1,0,0) 2-Antimagic pada Grafantiprisma D_n untuk n genap dengan $a_4 = 20n + 5$ dan $a_n = 6n^2 - 3n + 1$.

Bukti :

Labeli titik dan sisi dari grafantiprisma dengan cara berikut :

Misal : x_i adalah titik pada siklus dalam

y_i adalah titik pada siklus luar

$$\lambda(x_i) = 4n + i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\lambda(y_i) = 3n + i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\lambda(x_i x_{i+1}) = 2n - i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$$

$$\lambda(x_n x_{n+1}) = 2n \quad i = n$$

$$\lambda(y_i y_{i+1}) = 2n + i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$$

$$\lambda(y_n y_{n+1}) = 3n \quad i = n$$

$$\lambda(x_i y_i) = n + 1 - i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

- untuk $\lambda(y_n)$ ditukar dengan $\lambda(x_n y_n)$
- untuk $\lambda(x_{\binom{n-2}{2}})$ ditukar dengan $\lambda(x_{\binom{n-2}{2}} y_{\binom{n-2}{2}})$

sedangkan bobot untuk masing-masing wajahnya adalah :

1. pada wajah dengan 4-sisi

untuk $i = 1$

$$\begin{aligned} W_4(1) &= \lambda(x_1) + \lambda(x_2) + \lambda(y_1) + \lambda(y_2) + \lambda(x_1 y_1) + \lambda(x_2 y_2) + \lambda(x_1 x_2) + \lambda(y_1 y_2) \\ &= (4n + 1) + (4n + 2) + (3n + 1) + (3n + 2) + (n) + (n - 1) + (2n - 1) + \\ &\quad (2n + 1) \\ &= 20n + 5 \end{aligned}$$

untuk $i = n$

$$\begin{aligned} W_4(n) &= \lambda(x_1) + \lambda(x_n) + \lambda(y_1) + \lambda(y_n) + \lambda(x_1 y_1) + \lambda(x_n y_n) + \lambda(x_n x_{n+1}) + \\ &\quad \lambda(y_n y_{n+1}) \\ &= (4n + 1) + (4n + n) + (3n + 1) + (3n + n) + (n) + (1) + (2n) + (3n) \\ &= 22n + 3 \end{aligned}$$

sehingga didapatkan barisan dari bobot pada wajah dengan 4-sisi :

$$\{20n + 5, 20n + 7, 20n + 9, \dots, 22n + 3\}$$

2. pada wajah dengan n -sisi

label titik, sisi ataupun jari-jari yang mengalami pertukaran adalah :

$\lambda(x_n y_n)$ ditukar dengan $\lambda(y_n)$

$\lambda(x_{\binom{n-2}{2}})$ ditukar dengan $\lambda(x_{\binom{n-2}{2}} y_{\binom{n-2}{2}})$

sehingga, W_n untuk siklus dalam (C_1) :

$$\begin{aligned} W_n(C_1) &= \left[\sum_{i=1}^n \lambda(x_i) + \sum_{i=1}^n \lambda(x_i x_{i+1}) \right] + \lambda(x_{\frac{n-2}{2}} y_{\frac{n-2}{2}}) - \lambda(x_{\frac{n-2}{2}}) \\ &= [(4n+1) + (4n+2) + \dots + (4n+n)] + ((2n-1) + (2n-2) + \dots + (2n-(n-1) + 2n)) \\ &\quad + (n+1 - \frac{n-2}{2}) - (4n + \frac{n-2}{2}) \\ &= [(4n(n) + (1+2+\dots+n))] + ((2n(n-1) - (1+2+\dots+(n-1)) + 2n)) \\ &\quad + (\frac{2n+2-n+2}{2}) - (\frac{8n+n-2}{2}) \end{aligned}$$

$$= \left[\left(4n^2 + \frac{(n+1)n}{2} \right) + \left((2n^2 - 2n) - \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) + 2n \right) \right] + \left(\frac{n+4}{2} \right) - \left(\frac{9n-2}{2} \right)$$

$$= (6n^2 + n) + (-4n + 3) = 6n^2 - 3n + 3$$

W_n untuk siklus luar (C_O) :

$$W_n(C_O) = \left[\sum_{i=1}^n \lambda(y_i) + \sum_{i=1}^n \lambda(y_i y_{i+1}) \right] + \lambda(x_n y_n) - \lambda(y_n)$$

$$= [(3n+1) + (3n+2) + \dots + (3n+n)] + [(2n+1) + (2n+2) + \dots + (2n+(n-1) + 3n)]$$

$$+ 1 - (3n + n)$$

$$= [(3n(n) + (1+2+\dots+n))] + [(2n(n-1) + (1+2+\dots+(n-1)) + 3n)] - 4n + 1$$

$$= \left[\left(3n^2 + \frac{(n+1)n}{2} \right) + \left((2n^2 - 2n) + \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) + 3n \right) \right] - 4n + 1$$

$$= (5n^2 + n^2 + n) + (-4n + 1) = 6n^2 - 3n + 1$$

sehingga didapatkan barisan dari bobot pada wajah dengan n -sisi :

$$\{6n^2 - 3n + 1, 6n^2 - 3n + 2\}$$

sedangkan untuk menghitung jumlah bobot (W_s) untuk setiap wajahnya dengan menggunakan persamaan (2.11.7) dan (2.11.9), sebagai berikut :

- jumlah bobot untuk wajah dengan 4-sisi (W_4)

$$W_4 = na_4 + d \left(\frac{n(n-1)}{2} \right)$$

$$= n(20n + 5) + 2 \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) = 21n^2 + 4n$$

- jumlah bobot untuk wajah dengan n -sisi (W_n)

$$W_n = 2a_n + d$$

$$= 2(6n^2 - 3n + 1) + 2 = 12n^2 - 6n + 4$$

terbukti bahwa **Teorema 4.3.1** mempunyai suku awal $a_4 = 20n + 5$ dan $a_n = 6n^2 - 3n + 1$ dengan beda $d = 2$ sedemikian hingga membentuk barisan aritmetika.

Teorema 4.3.2

Ada pelabelan Tipe $(1,0,0)$ 2-Antimagic pada Graf antiprisma D_n untuk $n \geq 7$, n ganjil dengan $a_4 = 20n + 5$ dan $a_n = 6n^2 - 3n - 6$.

Bukti :

Labeli titik dan sisi dari graf antiprisma dengan cara berikut :

Misal : x_i adalah titik pada siklus dalam

y_i adalah titik pada siklus luar

$$\begin{aligned}
 \lambda(x_i) &= 4n + i & i = 1, 2, 3, \dots, n \\
 \lambda(y_i) &= 3n + i & i = 1, 2, 3, \dots, n \\
 \lambda(x_i x_{i+1}) &= 2n - i & i = 1, 2, 3, \dots, n - 1 \\
 \lambda(x_n x_{n+1}) &= 2n & i = n \\
 \lambda(y_i y_{i+1}) &= 2n + i & i = 1, 2, 3, \dots, n - 1 \\
 \lambda(y_n y_{n+1}) &= 3n & i = n \\
 \lambda(x_i y_i) &= n + 1 - i & i = 1, 2, 3, \dots, n
 \end{aligned}$$

untuk

- untuk $\lambda(y_1)$ ditukar dengan $\lambda(x_1 y_1)$
- untuk $\lambda(y_2)$ ditukar dengan $\lambda(x_2 y_2)$
- untuk $\lambda(x_{\binom{n+7}{2}})$ ditukar dengan $\lambda(x_{\binom{n+7}{2}} y_{\binom{n+7}{2}})$

sedangkan bobot untuk masing-masing wajahnya adalah :

1. pada wajah dengan 4-sisi

untuk $i = 1$

$$\begin{aligned}
 W_4(1) &= \lambda(x_1) + \lambda(x_2) + \lambda(y_1) + \lambda(y_2) + \lambda(x_1 y_1) + \lambda(x_2 y_2) + \lambda(x_1 x_2) + \lambda(y_1 y_2) \\
 &= (4n + 1) + (4n + 2) + (3n + 1) + (3n + 2) + (n) + (n - 1) + (2n - 1) + \\
 &\quad (2n + 1) \\
 &= 20n + 5
 \end{aligned}$$

untuk $i = n$

$$\begin{aligned}
 W_4(n) &= \lambda(x_1) + \lambda(x_n) + \lambda(y_1) + \lambda(y_n) + \lambda(x_1 y_1) + \lambda(x_n y_n) + \lambda(x_n x_{n+1}) + \\
 &\quad \lambda(y_n y_{n+1}) \\
 &= (4n + 1) + (4n + n) + (3n + 1) + (3n + n) + (n) + (1) + (2n) + (3n) \\
 &= 22n + 3
 \end{aligned}$$

sehingga didapatkan barisan dari bobot pada wajah dengan 4-sisi :

$$\{20n + 5, 20n + 7, 20n + 9, \dots, 22n + 3\}$$

2. pada wajah dengan n -sisi

label titik, sisi ataupun jari-jari yang mengalami pertukaran adalah :

$\lambda(y_1)$ ditukar dengan $\lambda(x_1 y_1)$

$\lambda(y_2)$ ditukar dengan $\lambda(x_2 y_2)$

$\lambda(x_{\frac{n+7}{2}})$ ditukar dengan $\lambda(x_{\frac{n+7}{2}}y_{\frac{n+7}{2}})$

sehingga, W_n untuk siklus dalam (C_I) :

$$\begin{aligned} W_n(C_I) &= \left[\sum_{i=1}^n \lambda(x_i) + \sum_{i=1}^n \lambda(x_i x_{i+1}) \right] + \lambda(x_{\frac{n+7}{2}} y_{\frac{n+7}{2}}) - \lambda(x_{\frac{n+7}{2}}) \\ &= [(4n+1)+(4n+2)+\dots+(4n+n)] + [(2n-1)+(2n-2)+\dots+(2n-(n-1)+2n)] \\ &\quad + (n+1 - \frac{n+7}{2}) - (4n + \frac{n+7}{2}) \\ &= [(4n(n) + (1+2+\dots+n))] + [(2n(n-1) - (1+2+\dots+(n-1)) + 2n)] \\ &\quad + (\frac{2n+2-n-7}{2}) - (\frac{8n+n+7}{2}) \\ &= \left[\left(4n^2 + \frac{(n+1)n}{2} \right) + \left((2n^2 - 2n) - \frac{n(n-1)}{2} + 2n \right) \right] + \frac{n-5}{2} - \frac{9n+7}{2} \\ &= (6n^2 + n) + (-4n - 6) = 6n^2 - 3n - 6 \end{aligned}$$

W_n untuk siklus luar (C_O) :

$$\begin{aligned} W_n(C_O) &= \left[\sum_{i=1}^n \lambda(y_i) + \sum_{i=1}^n \lambda(y_i y_{i+1}) \right] + (\lambda(x_1 y_1) + \lambda(x_2 y_2)) - (\lambda(y_1) + (y_2)) \\ &= [(3n+1)+(3n+2)+\dots+(3n+n)] + [(2n+1)+(2n+2)+\dots+(2n+(n-1)+3n)] \\ &\quad + (n+n-1) - (3n+1+3n+2) \\ &= [(3n(n) + (1+2+\dots+n))] + [(2n(n-1) + (1+2+\dots+(n-1)) + 3n)] - 4n - 4 \\ &= \left[\left(3n^2 + \frac{(n+1)n}{2} \right) + \left((2n^2 - 2n) + \frac{n(n-1)}{2} + 3n \right) \right] - 4n - 4 \\ &= (5n^2 + n^2 + n) + (-4n - 4) = 6n^2 - 3n - 4 \end{aligned}$$

sehingga didapatkan barisan dari bobot pada wajah dengan n -sisi :

$$\{6n^2 - 3n - 6, 6n^2 - 3n - 4\}$$

sedangkan untuk menghitung jumlah bobot (W_s) untuk setiap wajahnya dengan menggunakan persamaan (2.11.7) dan (2.11.9), sebagai berikut :

1. jumlah bobot untuk wajah dengan 4-sisi (W_4)

$$\begin{aligned} W_4 &= na_4 + d \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) \\ &= n(20n+5) + 2 \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) = 21n^2 + 4n \end{aligned}$$

2. jumlah bobot untuk wajah dengan n -sisi (W_n)

$$\begin{aligned} W_n &= 2a_n + d \\ &= 2(6n^2 - 3n - 6) + 2 = 12n^2 - 6n - 10 \end{aligned}$$

terbukti bahwa **Teorema 4.3.2** mempunyai suku awal $a_4 = 20n + 5$ dan $a_n = 6n^2 -$

$3n - 6$ dengan beda $d = 2$ sedemikian hingga membentuk barisan aritmetika.

Teorema 4.3.3

Ada pelabelan Tipe $(1,0,0)$ 2-Antimagic pada Graf antiprisma D_n untuk $n = 3$ dengan $a_4 = 20n+5 = 65$ dan $a_n = 6n^2-3n-4 = 41$.

Bukti :

Labeli titik dan sisi dari graf antiprisma dengan cara berikut :

Misal : x_i adalah titik pada siklus dalam

y_i adalah titik pada siklus luar

$$\lambda(x_i) = 4n + i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\lambda(y_i) = 3n + i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\lambda(x_i x_{i+1}) = 2n - i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$$

$$\lambda(x_n x_{n+1}) = 2n \quad i = n$$

$$\lambda(y_i y_{i+1}) = 2n + i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$$

$$\lambda(y_n y_{n+1}) = 3n \quad i = n$$

$$\lambda(x_i y_i) = n + 1 - i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

untuk

- untuk $\lambda(y_1)$ ditukar dengan $\lambda(x_1 y_1)$
- untuk $\lambda(y_2)$ ditukar dengan $\lambda(x_2 y_2)$
- untuk $\lambda(x_3)$ ditukar dengan $\lambda(x_3 y_3)$

sedangkan bobot untuk masing-masing wajahnya adalah :

1. pada wajah dengan 4-sisi

untuk $i = 1$

$$\begin{aligned} W_4(1) &= \lambda(x_1) + \lambda(x_2) + \lambda(y_1) + \lambda(y_2) + \lambda(x_1 y_1) + \lambda(x_2 y_2) + \lambda(x_1 x_2) + \lambda(y_1 y_2) \\ &= (4n + 1) + (4n + 2) + (3n + 1) + (3n + 2) + (n) + (n - 1) + (2n - 1) + \\ &\quad (2n + 1) \\ &= 13 + 14 + 10 + 11 + 3 + 2 + 5 + 7 = 65 \end{aligned}$$

untuk $i = n = 3$

$$\begin{aligned} W_4(n) &= \lambda(x_1) + \lambda(x_n) + \lambda(y_1) + \lambda(y_n) + \lambda(x_1 y_1) + \lambda(x_n y_n) + \lambda(x_n x_{n+1}) + \\ &\quad \lambda(y_n y_{n+1}) \\ &= (4n + 1) + (4n + n) + (3n + 1) + (3n + n) + (n) + (1) + (2n) + (3n) \end{aligned}$$

$$= 13+15+10+12+3+1+6+9 = 69$$

karena $d=2$, sehingga didapatkan barisan dari bobot pada wajah dengan 4-sisi :

$$\{65, 67, 69\}$$

2. pada wajah dengan n -sisi

label titik, sisi ataupun jari-jari yang mengalami pertukaran adalah :

$\lambda(y_1)$ ditukar dengan $\lambda(x_1y_1)$

$\lambda(y_2)$ ditukar dengan $\lambda(x_2y_2)$

$\lambda(x_3)$ ditukar dengan $\lambda(x_3y_3)$

sehingga, W_n untuk siklus dalam (C_I) :

$$\begin{aligned} W_n(C_I) &= \left[\sum_{i=1}^n \lambda(x_i) + \sum_{i=1}^n \lambda(x_i x_{i+1}) \right] + \lambda(x_3 y_3) - \lambda(x_3) \\ &= [(4n+1)+(4n+2)+\dots+(4n+n)] + [(2n-1)+(2n-2)+\dots+(2n-(n-1)+2n)] \\ &\quad + (n-2) - (4n+3) \\ &= [(4n(n) + (1+2+\dots+n))] + [(2n(n-1) - (1+2+\dots+(n-1)) + 2n)] - 3n - 5 \\ &= \left[4n^2 + \frac{(n+1)n}{2} \right] + \left[(2n^2 - 2n) - \frac{n(n-1)}{2} + 2n \right] - 3n - 5 \\ &= (6n^2 + n) + (-3n - 5) = 6n^2 - 2n - 5 = 6(3)^2 - 2(3) - 5 = 43 \end{aligned}$$

W_n untuk siklus luar (C_O) :

$$\begin{aligned} W_n(C_O) &= \left[\sum_{i=1}^n \lambda(y_i) + \sum_{i=1}^n \lambda(y_i y_{i+1}) \right] + (\lambda(x_1 y_1) + \lambda(x_2 y_2)) - (\lambda(y_1) + \lambda(y_2)) \\ &= [(3n+1)+(3n+2)+\dots+(3n+n)] + [(2n+1)+(2n+2)+\dots+(2n+(n-1)+3n)] \\ &\quad + (n+n-1) - (3n+1+3n+2) \\ &= [(3n(n) + (1+2+\dots+n))] + [(2n(n-1) + (1+2+\dots+(n-1)) + 3n)] - 4n - 4 \\ &= \left[3n^2 + \frac{(n+1)n}{2} \right] + \left[(2n^2 - 2n) + \frac{n(n-1)}{2} + 3n \right] - 4n - 4 \\ &= (5n^2 + n^2 + n) + (-4n - 4) = 6n^2 - 3n - 4 = 6(3)^2 - 3(3) - 4 = 41 \end{aligned}$$

sehingga didapatkan barisan dari bobot pada wajah dengan n -sisi :

$$\{6n^2 - 3n - 4, 6n^2 - 2n - 5\}$$

sedangkan untuk menghitung jumlah bobot (W_s) untuk setiap wajahnya dengan menggunakan persamaan (2.11.7) dan (2.11.9), sebagai berikut :

1. jumlah bobot untuk wajah dengan 4-sisi (W_4)

$$\begin{aligned} W_4 &= na_4 + d \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) \\ &= n(20n + 5) + 2 \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) = 21n^2 + 4n = 21(9) + 4(3) = 201 \end{aligned}$$

2. jumlah bobot untuk wajah dengan n -sisi (W_n)

$$W_n = 2a_n + d$$

$$= 2(6n^2 - 3n - 4) + 2 = 12n^2 - 6n - 6 = 12(9) - 6(3) - 6 = 84$$

terbukti bahwa **Teorema 4.3.3** mempunyai suku awal $a_4 = 20n+5 = 65$ dan $a_n = 6n^2-3n-4 = 41$ dengan beda $d = 2$ sedemikian hingga membentuk barisan aritmetika.

Teorema 4.3.4

Ada pelabelan Tipe $(1,0,0)$ 1-ntimagic pada Graf ntiprisma D_n untuk $n = 5$ dengan $a_4 = 20n+5 = 105$ dan $a_n = 6n^2-3n-4 = 131$.

Bukti :

Labeli titik dan sisi dari grafantiprisma dengan cara berikut :

Misal : x_i adalah titik pada siklus dalam

y_i adalah titik pada siklus luar

$$\lambda(x_i) = 4n + i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\lambda(y_i) = 3n + i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\lambda(x_i x_{i+1}) = 2n - i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$$

$$\lambda(x_n x_{n+1}) = 2n \quad i = n$$

$$\lambda(y_i y_{i+1}) = 2n + i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$$

$$\lambda(y_n y_{n+1}) = 3n \quad i = n$$

$$\lambda(x_i y_i) = n + 1 - i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

untuk

- untuk $\lambda(y_1)$ ditukar dengan $\lambda(x_1 y_1)$
- untuk $\lambda(y_2)$ ditukar dengan $\lambda(x_2 y_2)$
- untuk $\lambda(x_{n-1})$ ditukar dengan $\lambda(x_{n-1} y_{n-1})$

sedangkan bobot untuk masing-masing wajahnya adalah :

1. pada wajah dengan 4-sisi

untuk $i = 1$

$$W_4(1) = \lambda(x_1) + \lambda(x_2) + \lambda(y_1) + \lambda(y_2) + \lambda(x_1 y_1) + \lambda(x_2 y_2) + \lambda(x_1 x_2) + \lambda(y_1 y_2)$$

$$= (4n + 1) + (4n + 2) + (3n + 1) + (3n + 2) + (n) + (n - 1) + (2n - 1) +$$

$$(2n + 1) \\ = 21+22+16+17+5+4+9+11 = 105$$

untuk $i = n = 5$

$$W_4(n) = \lambda(x_1) + \lambda(x_n) + \lambda(y_1) + \lambda(y_n) + \lambda(x_1y_1) + \lambda(x_ny_n) + \lambda(x_nx_{n+1}) + \\ \lambda(y_ny_{n+1}) \\ = (4n + 1) + (4n + n) + (3n + 1) + (3n + n) + (n) + (1) + (2n) + (3n) \\ = 21+25+16+20+5+1+10+15 = 113$$

karena $d=2$, sehingga didapatkan barisan dari bobot pada wajah dengan 4-sisi :

$$\{105, 107, 109, 111, 113\}$$

2. pada wajah dengan n -sisi

label titik, sisi ataupun jari-jari yang mengalami pertukaran adalah :

$\lambda(y_1)$ ditukar dengan $\lambda(x_1y_1)$

$\lambda(y_2)$ ditukar dengan $\lambda(x_2y_2)$

$\lambda(x_4)$ ditukar dengan $\lambda(x_4y_4)$

sehingga, W_n untuk siklus dalam (C_I) :

$$W_n(C_I) = \left[\sum_{i=1}^n \lambda(x_i) + \sum_{i=1}^n \lambda(x_i x_{i+1}) \right] + \lambda(x_4 y_4) - \lambda(x_4) \\ = [(4n+1)+(4n+2)+\dots+(4n+n)] + (2n-1)+(2n-2)+\dots+(2n-(n-1)+2n) \\ + (n-3) - (4n+4) \\ = [(4n(n) + (1+2+\dots+n))] + ((2n(n-1) - (1+2+\dots+(n-1)) + 2n)] - 3n - 7 \\ = \left[4n^2 + \frac{(n+1)n}{2} \right] + \left[(2n^2 - 2n) - \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) + 2n \right] - 3n - 7 \\ = (6n^2 + n) + (-3n - 7) = 6n^2 - 2n - 7 = 6(5)^2 - 2(5) - 7 = 133$$

W_n untuk siklus luar (C_O) :

$$W_n(C_O) = \left[\sum_{i=1}^n \lambda(y_i) + \sum_{i=1}^n \lambda(y_i y_{i+1}) \right] + (\lambda(x_1 y_1) + \lambda(x_2 y_2)) - (\lambda(y_1) + \lambda(y_2)) \\ = [(3n+1)+(3n+2)+\dots+(3n+n)] + (2n+1)+(2n+2)+\dots+(2n+(n-1)+3n) \\ + (n+n-1) - (3n+1+3n+2) \\ = [(3n(n) + (1+2+\dots+n))] + ((2n(n-1) + (1+2+\dots+(n-1)) + 3n)] - 4n - 4 \\ = \left[3n^2 + \frac{(n+1)n}{2} \right] + \left[(2n^2 - 2n) + \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) + 3n \right] - 4n - 4 \\ = (5n^2 + n^2 + n) + (-4n - 4) = 6n^2 - 3n - 4 = 6(5)^2 - 3(5) - 4 = 131$$

sehingga didapatkan barisan dari bobot pada wajah dengan n -sisi :

$$\{6n^2 - 3n - 4, 6n^2 - 2n - 7\}$$

sedangkan untuk menghitung jumlah bobot (W_s) untuk setiap wajahnya dengan menggunakan persamaan (2.11.7) dan (2.11.9), sebagai berikut :

1. jumlah bobot untuk wajah dengan 4-sisi (W_4)

$$\begin{aligned} W_4 &= na_4 + d \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) \\ &= n(20n+5) + 2 \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) = 21n^2 + 4n = 21(25) + 4(5) = 545 \end{aligned}$$

2. jumlah bobot untuk wajah dengan n -sisi (W_n)

$$\begin{aligned} W_n &= 2a_n + d \\ &= 2(6n^2 - 3n - 4) + 2 = 12n^2 - 6n - 6 = 12(25) - 6(5) - 6 = 264 \end{aligned}$$

terbukti bahwa **Teorema 4.3.4** mempunyai suku awal $a_4 = 20n+5 = 105$ dan $a_n = 6n^2 - 3n - 4 = 131$ dengan beda $d = 2$ sedemikian hingga membentuk barisan aritmetika.

4.4 Beda antar bobot (d) yang ditetapkan dan suku awal (a_s) pada pelabelan tipe (1,0,0) wajah d -antimagic pada gabungan dua grafantiprisma ($2D_n$)

Beda setiap bobot d pada pelabelan tipe (1,0,0) wajah d -antimagic pada gabungan dua grafantiprisma ($2D_n$) dapat diperoleh dengan menggunakan pertidaksamaan (2.12.3) :

$$\begin{aligned} d &\leq 80 - \frac{176}{2n-1}, \quad 0 \leq \frac{176}{2n-1} \leq 1 \\ d &\leq 80 - 1 \\ d &\leq 79 \end{aligned}$$

jadi untuk setiap gabungan dua grafantiprisma $2D_n$ nilai $d \leq 79$

4.4.1 Mencari Interval Suku Awal Wajah dengan 4-sisi (a_4)

Untuk mencari interval suku awal a_4 pada pelabelan tipe (1,0,0) wajah d -antimagic pada gabungan dua grafantiprisma ($2D_n$) adalah dengan menggunakan pertidaksamaan (2.12.1) : $136 \leq a_4 \leq 160n - 120 - (2n-1)d$ untuk $d = 1$, maka interval dari suku awal a_4

$$136 \leq a_4 \leq 160n - 120 - (2n - 1)d$$

$$136 \leq a_4 \leq 160n - 120 - (2n - 1)1$$

$$136 \leq a_4 \leq 158n - 119$$

untuk $d = 2$, maka interval dari suku awal a_4

$$136 \leq a_4 \leq 160n - 120 - (2n - 1)d$$

$$136 \leq a_4 \leq 160n - 120 - (2n - 1)2$$

$$136 \leq a_4 \leq 156n - 118$$

untuk $d = 3$, maka interval dari suku awal a_4

$$136 \leq a_4 \leq 160n - 120 - (2n - 1)d$$

$$136 \leq a_4 \leq 160n - 120 - (2n - 1)3$$

$$136 \leq a_4 \leq 154n - 117$$

Berikut ini akan dijabarkan interval suku awal a_4 pada pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah d -antimagic pada gabungan dua grafantiprisma $2D_n$ untuk $3 \leq n \leq 9$, n genap dengan beda $d = 2$.

1. interval suku awal a_4 untuk $2D_4$

$$136 \leq a_4 \leq 156n - 118$$

$$136 \leq a_4 \leq 156(4) - 118$$

$$136 \leq a_4 \leq 506$$

jadi interval dari suku awal a_4 untuk $2D_4$ adalah $136 \leq a_4 \leq 506$.

2. interval suku awal a_4 untuk $2D_6$

$$136 \leq a_4 \leq 156n - 118$$

$$136 \leq a_4 \leq 156(6) - 118$$

$$136 \leq a_4 \leq 818$$

jadi interval dari suku awal a_4 untuk $2D_6$ adalah $136 \leq a_4 \leq 818$.

3. interval suku awal a_4 untuk $2D_8$

$$136 \leq a_4 \leq 156n - 118$$

$$136 \leq a_4 \leq 156(8) - 118$$

$$136 \leq a_4 \leq 1130$$

jadi interval dari suku awal a_4 untuk $2D_8$ adalah $136 \leq a_4 \leq 1130$.

Berikut ini akan dijabarkan interval suku awal a_4 pada pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah d -antimagic pada gabungan dua grafantiprisma $2D_n$ untuk $3 \leq n \leq 9$, n ganjil dengan beda $d=2$.

1. interval suku awal a_4 untuk $2D_3$

$$136 \leq a_4 \leq 156n - 118$$

$$136 \leq a_4 \leq 156(3) - 118$$

$$136 \leq a_4 \leq 350$$

jadi interval dari suku awal a_4 untuk $2D_3$ adalah $136 \leq a_4 \leq 350$.

2. interval suku awal a_4 untuk $2D_5$

$$136 \leq a_4 \leq 156n - 118$$

$$136 \leq a_4 \leq 156(5) - 118$$

$$136 \leq a_4 \leq 662$$

jadi interval dari suku awal a_4 untuk $2D_5$ adalah $136 \leq a_4 \leq 662$.

3. interval suku awal a_4 untuk $2D_7$

$$136 \leq a_4 \leq 156n - 118$$

$$136 \leq a_4 \leq 156(7) - 118$$

$$136 \leq a_4 \leq 974$$

jadi interval dari suku awal a_4 untuk $2D_7$ adalah $136 \leq a_4 \leq 974$.

4. interval suku awal a_4 untuk $2D_9$

$$136 \leq a_4 \leq 156n - 118$$

$$136 \leq a_4 \leq 156(9) - 118$$

$$136 \leq a_4 \leq 1286$$

jadi interval dari suku awal a_4 untuk $2D_9$ adalah $136 \leq a_4 \leq 1286$.

Mencari Interval Suku Awal Wajah dengan n -sisi (a_n)

Untuk mencari interval suku awal a_n pada pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah d -antimagic pada gabungan dua grafantiprisma $2D_n$ adalah dengan menggunakan pertidaksamaan (2.12.2) :

$$8n^2 + 2n \leq a_n \leq 32n^2 + 2n - 3d$$

untuk $d = 1$, maka interval dari suku awal a_n

$$8n^2 + 2n \leq a_n \leq 32n^2 + 2n - 3d$$

$$8n^2 + 2n \leq a_n \leq 32n^2 + 2n - 3$$

untuk $d = 2$, maka interval dari suku awal a_n

$$8n^2 + 2n \leq a_n \leq 32n^2 + 2n - 3d$$

$$8n^2 + 2n \leq a_n \leq 32n^2 + 2n - 6$$

untuk $d = 3$, maka interval dari suku awal a_n

$$8n^2 + 2n \leq a_n \leq 32n^2 + 2n - 3d$$

$$8n^2 + 2n \leq a_n \leq 32n^2 + 2n - 9$$

Berikut ini akan dijabarkan interval suku awal a_n pada pelabelan tipe (1,0,0) wajah d -antimagic pada gabungan dua grafantiprisma $2D_n$ untuk $3 \leq n \leq 9$, n genap dengan beda $d = 2$.

1. interval suku awal a_n untuk $2D_4$

$$8n^2 + 2n \leq a_n \leq 32n^2 + 2n - 6$$

$$8(4)^2 + 2(4) \leq a_n \leq 32(4)^2 + 2(4) - 6$$

$$136 \leq a_n \leq 514$$

jadi interval dari suku awal a_n untuk $2D_4$ adalah $136 \leq a_n \leq 514$

2. interval suku awal a_n untuk $2D_6$

$$8n^2 + 2n \leq a_n \leq 32n^2 + 2n - 6$$

$$8(6)^2 + 2(6) \leq a_n \leq 32(6)^2 + 2(6) - 6$$

$$300 \leq a_n \leq 1158$$

jadi interval dari suku awal a_n untuk $2D_6$ adalah $300 \leq a_n \leq 1158$.

3. interval suku awal a_n untuk $2D_8$

$$8n^2 + 2n \leq a_n \leq 32n^2 + 2n - 6$$

$$8(8)^2 + 2(8) \leq a_n \leq 32(8)^2 + 2(8) - 6$$

$$528 \leq a_n \leq 2058$$

jadi interval dari suku awal a_n untuk $2D_8$ adalah $528 \leq a_n \leq 2058$.

Berikut ini akan dijabarkan interval suku awal a_n pada pelabelan tipe (1,0,0) wajah d -antimagic pada gabungan dua grafantiprisma $2D_n$ untuk $3 \leq n \leq 9$, n ganjil dengan beda $d = 2$.

1. interval suku awal a_n untuk $2D_3$

$$8n^2 + 2n \leq a_n \leq 32n^2 + 2n - 6$$

$$8(3)^2 + 2(3) \leq a_n \leq 32(3)^2 + 2(3) - 6$$

$$78 \leq a_n \leq 288$$

jadi interval dari suku awal a_n untuk $2D_3$ adalah $78 \leq a_n \leq 288$.

2. interval suku awal a_n untuk $2D_5$

$$\begin{aligned} 8n^2 + 2n &\leq a_n \leq 32n^2 + 2n - 6 \\ 8(5)^2 + 2(5) &\leq a_n \leq 32(5)^2 + 2(5) - 6 \\ 210 &\leq a_n \leq 804 \end{aligned}$$

jadi interval dari suku awal a_n untuk $2D_5$ adalah $210 \leq a_n \leq 804$.

3. interval suku awal a_n untuk $2D_7$

$$\begin{aligned} 8n^2 + 2n &\leq a_n \leq 32n^2 + 2n - 6 \\ 8(7)^2 + 2(7) &\leq a_n \leq 32(7)^2 + 2(7) - 6 \\ 406 &\leq a_n \leq 1576 \end{aligned}$$

jadi interval dari suku awal a_n untuk $2D_7$ adalah $406 \leq a_n \leq 1576$.

4. interval suku awal a_n untuk $2D_9$

$$\begin{aligned} 8n^2 + 2n &\leq a_n \leq 32n^2 + 2n - 6 \\ 8(9)^2 + 2(9) &\leq a_n \leq 32(9)^2 + 2(9) - 6 \\ 666 &\leq a_n \leq 2604 \end{aligned}$$

jadi interval dari suku awal a_n untuk $2D_9$ adalah $666 \leq a_n \leq 2604$.

Pelabelan Tipe (1,0,0) Wajah d -Antimagic pada Gabungan Dua Grafantiprisma $2D_n$

Dari penelitian yang sudah dilakukan, ternyata dapat ditemukan bahwa ada pelabelan tipe (1,0,0) wajah d -antimagic pada gabungan dua grafantiprisma $2D_n$ untuk n genap dan ada pelabelan tipe (1,0,0) wajah d -antimagic pada gabungan dua grafantiprisma $2D_n$ untuk n ganjil.

Berikut ini adalah langkah-langkah untuk mencari pelabelan tipe (1,0,0) wajah d -antimagic pada gabungan dua grafantiprisma $2D_n$ untuk $n \geq 3$, n genap:

1. misalkan x adalah titik pada siklus dalam dan y adalah titik pada siklus luar.
2. labeli titik pada siklus dalam dari grafantiprisma G_1 dengan $8n+1, 8n+2, 8n+3, \dots, 8n+n$
labeli titik pada siklus dalam dari grafantiprisma G_2 dengan $9n+1, 9n+2, 9n+3, \dots, 9n+n$
3. labeli titik pada siklus luar dari grafantiprisma G_1 dengan $7n+1, 7n+2, 7n+3, \dots, 7n+n$

labeli titik pada siklus luar dari grafantiprisma G_2 dengan $6n+1, 6n+2, 6n+3,$

.....

$6n+n$

4. labeli sisi pada siklus dalam dari grafantiprisma G_1 dengan $4n-1, 4n-2, \dots,$

$4n+1-n, 4n$

labeli sisi pada siklus dalam dari grafantiprisma G_2 dengan $3n-1, 3n-2, \dots,$

$3n+1-n, 3n$

5. labeli sisi pada siklus luar dari grafantiprisma G_1 dengan $4n+1, 4n+2, 4n+3,$

....., $5n-1, 5n$

labeli sisi pada siklus luar dari grafantiprisma G_2 dengan $5n+1, 5n+2, 5n+3,$

.....

$6n-1, 6n$

6. labeli jari-jari dari grafantiprisma G_1 dengan $n, n-1, n-2, \dots, 3, 2, 1$

labeli jari-jari dari grafantiprisma G_2 dengan $2n, 2n-1, 2n-2, \dots, n+3, n+2,$

$n+1$

Setelah dilakukan pelabelan pada sisi dan titik pada grafantiprisma kemudian dilanjutkan dengan penukaran antar label baik titik, sisi maupun jari-jari dengan ketentuan sebagai berikut:

Pada grafantiprisma G_1

- untuk $i = 1$, label untuk titik pada siklus dalam ditukar dengan label jari-jari.
- untuk $i = 1$, label untuk sisi pada siklus dalam ditukar dengan label sisi pada siklus luar.
- untuk $i = \frac{n+2}{2}$, label untuk titik pada siklus luar ditukar dengan label jari-jari

Pada grafantiprisma G_2

- untuk $i = 1$, label untuk sisi pada siklus dalam ditukar dengan label sisi pada siklus luar.
- untuk $i = n$, label untuk titik pada siklus dalam ditukar dengan label jari-jari.
- untuk $i = \frac{n}{2}$, label untuk titik pada siklus luar ditukar dengan label jari-jari

Berikut ini adalah langkah-langkah untuk mencari pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah d -antimagic pada grafantiprisma D_n untuk $n \geq 3$, n ganjil:

1. misalkan x adalah titik pada siklus dalam dan y adalah titik pada siklus luar.
2. labeli titik pada siklus dalam dari grafantiprisma G_1 dengan $8n+1, 8n+2, 8n+3, \dots, 8n+n$

labeli titik pada siklus dalam dari grafantiprisma G_2 dengan $9n+1, 9n+2, 9n+3, \dots, 9n+n$

3. labeli titik pada siklus luar dari grafantiprisma G_1 dengan $7n+1, 7n+2, 7n+3, \dots, 7n+n$

labeli titik pada siklus luar dari grafantiprisma G_2 dengan $6n+1, 6n+2, 6n+3, \dots, 6n+n$

4. labeli sisi pada siklus dalam dari grafantiprisma G_1 dengan $4n-1, 4n-2, \dots, 4n+1-n, 4n$
labeli sisi pada siklus dalam dari grafantiprisma G_2 dengan $3n-1, 3n-2, \dots, 3n+1-n, 3n$

5. labeli sisi pada siklus luar dari grafantiprisma G_1 dengan $4n+1, 4n+2, 4n+3, \dots, 5n-1, 5n$
labeli sisi pada siklus luar dari grafantiprisma G_2 dengan $5n+1, 5n+2, 5n+3, \dots, 6n-1, 6n$

6. labeli jari-jari dari grafantiprisma G_1 dengan $n, n-1, n-2, \dots, 3, 2, 1$
labeli jari-jari dari grafantiprisma G_2 dengan $2n, 2n-1, 2n-2, \dots, n+3, n+2, n+1$

Setelah dilakukan pelabelan pada sisi dan titik pada grafantiprisma kemudian dilanjutkan dengan penukaran antar label baik titik, sisi maupun jari-jari dengan ketentuan sebagai berikut :

Untuk $n = 3$

Pada grafantiprisma G_1

- untuk $i = 3$, label untuk titik pada siklus dalam ditukar dengan label titik pada siklus luar.

Pada grafantiprisma G_2

- untuk $i = 3$, label untuk titik pada siklus dalam ditukar dengan label titik pada siklus luar.
- untuk $i = 2$, label untuk sisi pada siklus dalam ditukar dengan label sisi pada siklus luar.

Untuk $n \geq 5$, n ganjil

Pada grafantiprisma G_1

- untuk $i = n$, label untuk titik pada siklus dalam ditukar dengan label titik pada siklus luar.
- untuk $i = \frac{n+3}{2}$, label untuk sisi pada siklus dalam ditukar dengan label sisi pada siklus luar.

Pada grafantiprisma G_2

- untuk $i = n$, label untuk titik pada siklus dalam ditukar dengan label titik pada siklus luar.
- untuk $i = \frac{n+1}{2}$, label untuk sisi pada siklus dalam ditukar dengan label sisi pada siklus luar.

4.5.1 Pelabelan Tipe (1,0,0) Wajah d -Antimagic pada Graf $2D_4$

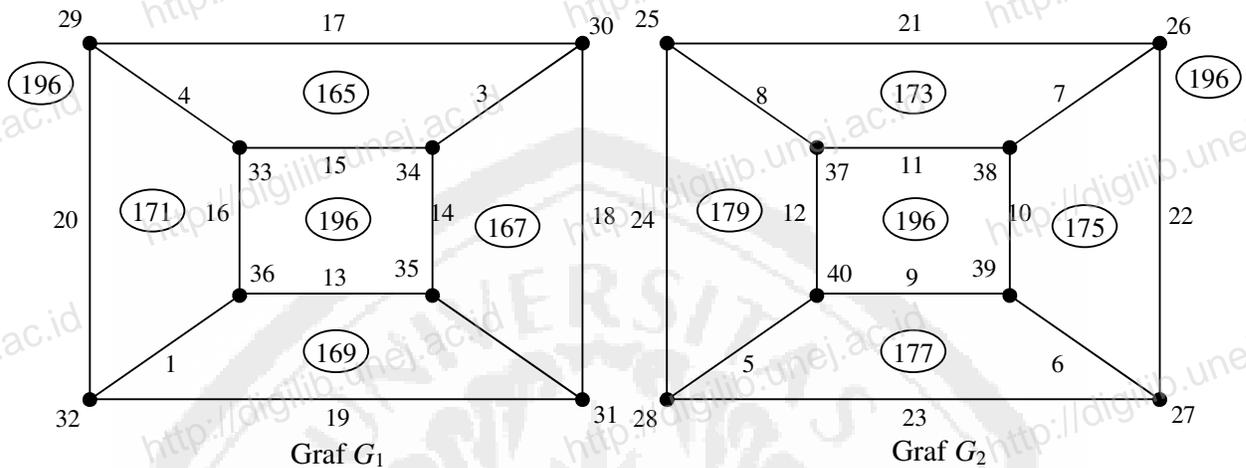
Langkah-langkah mencari pelabelan tipe (1,0,0) wajah d -antimagic pada graf $2D_4$:

1. misalkan x adalah titik pada siklus dalam dan y adalah titik pada siklus luar.
2. labeli titik pada siklus dalam dari grafantiprisma G_1 dengan 33, 34, 35, 36
labeli titik pada siklus dalam dari grafantiprisma G_2 dengan 37, 38, 39, 40
3. labeli titik pada siklus luar dari grafantiprisma G_1 dengan 29, 30, 31, 32
labeli titik pada siklus luar dari grafantiprisma G_2 dengan 25, 26, 27, 28
4. labeli sisi pada siklus dalam dari grafantiprisma G_1 dengan 15, 14, 13, 16
labeli sisi pada siklus dalam dari grafantiprisma G_2 dengan 11, 10, 9, 12
5. labeli sisi pada siklus luar dari grafantiprisma G_1 dengan 17, 18, 19, 20

labeli sisi pada siklus luar dari grafantiprisma G_2 dengan 21, 22, 23, 24

6. labeli jari-jari dari grafantiprisma G_1 dengan 4, 3, 2, 1

labeli jari-jari dari grafantiprisma G_2 dengan 8, 7, 6, 5



Setelah dilakukan pelabelan pada sisi dan titik pada grafantiprisma kemudian dilanjutkan dengan penukaran antar label baik titik, sisi maupun jari-jari dengan ketentuan sebagai berikut :

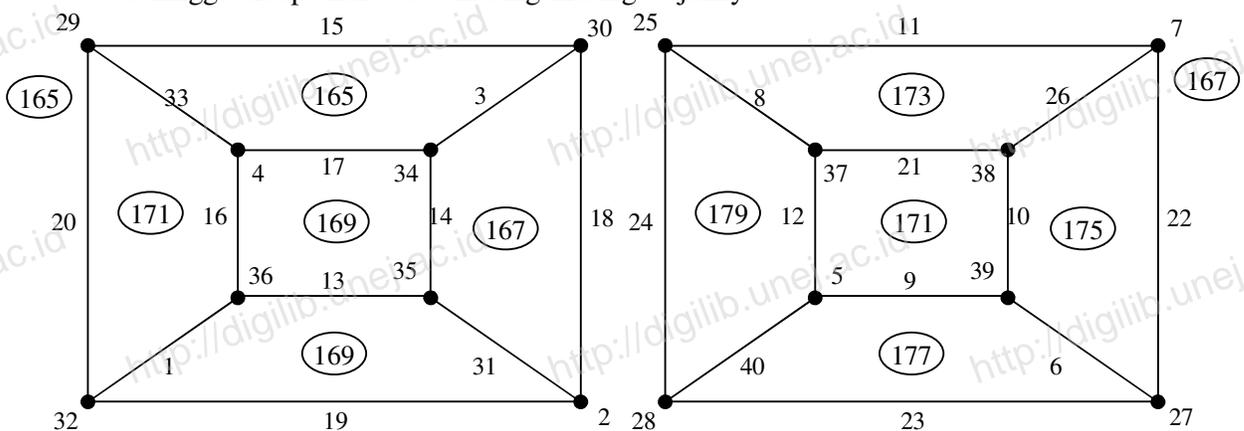
Pada G_1

- untuk $i = 1$, tukar label 33 dengan 4
- untuk $i = 1$, tukar label 15 dengan 17
- untuk $i = 3$, tukar label 31 dengan 2

Pada G_2

- untuk $i = 1$, tukar label 11 dengan 21
- untuk $i = 4$, tukar label 40 dengan 5
- untuk $i = 2$, tukar label 26 dengan 7

sehingga didapatkan bobot masing-masing wajahnya :



4.5.2 Pelabelan Tipe (1,0,0) Wajah d -Antimagic pada Graf $2D_6$

Langkah-langkah mencari pelabelan tipe (1,0,0) wajah d -antimagic pada graf $2D_6$:

1. misalkan x adalah titik pada siklus dalam dan y adalah titik pada siklus luar.
2. labeli titik pada siklus dalam dari grafantiprisma G_1 dengan 49, 50, 51, 52, 53, 54

Gambar 4.1: Pelabelan Tipe (1,0,0) 2-Antimagic pada Graf $2D_4$ dengan $a_4=165$ dan $a_n=165$

labeli titik pada siklus dalam dari grafantiprisma G_2 dengan 55, 56, 57, 58, 59, 60

3. labeli titik pada siklus luar dari grafantiprisma G_1 dengan 43, 44, 45, 46, 47, 48

labeli titik pada siklus luar dari grafantiprisma G_2 dengan 37, 38, 39, 40, 41, 42

4. labeli sisi pada siklus dalam dari grafantiprisma G_1 dengan 23, 22, 21, 20, 19, 24

labeli sisi pada siklus dalam dari grafantiprisma G_2 dengan 17, 16, 15, 14, 13, 18

5. labeli sisi pada siklus luar dari grafantiprisma G_1 dengan 25, 26, 27, 28, 29, 30
labeli sisi pada siklus luar dari grafantiprisma G_2 dengan 31, 32, 33, 34, 35, 36

6. labeli jari-jari dari grafantiprisma G_1 dengan 6, 5, 4, 3, 2, 1

labeli jari-jari dari grafantiprisma G_2 dengan 12, 11, 10, 9, 8, 7

Setelah dilakukan pelabelan pada sisi dan titik pada grafantiprisma kemudian dilanjutkan dengan penukaran antar label baik titik, sisi maupun jari-jari dengan ketentuan sebagai berikut :

Pada G_1

- untuk $i = 1$, tukar label 49 dengan 6
- untuk $i = 1$, tukar label 23 dengan 25
- untuk $i = 4$, tukar label 46 dengan 3

Pada G_2

- untuk $i = 1$, tukar label 17 dengan 31
- untuk $i = 6$, tukar label 60 dengan 7
- untuk $i = 3$, tukar label 39 dengan 10

4.5.3 Pelabelan Tipe (1,0,0) Wajah d -Antimagic pada Graf $2D_8$.

Langkah-langkah mencari pelabelan tipe (1,0,0) wajah d -antimagic pada graf $2D_8$:

1. misalkan x adalah titik pada siklus dalam dan y adalah titik pada siklus luar.
2. labeli titik pada siklus dalam dari grafantiprisma G_1 dengan 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72
labeli titik pada siklus dalam dari grafantiprisma G_2 dengan 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80
3. labeli titik pada siklus luar dari grafantiprisma G_1 dengan 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64
labeli titik pada siklus luar dari grafantiprisma G_2 dengan 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56
4. labeli sisi pada siklus dalam dari grafantiprisma G_1 dengan 31, 30, 29, 28, 27, 26, 25, 32
labeli sisi pada siklus dalam dari grafantiprisma G_2 dengan 23, 22, 21, 20, 19, 18, 17, 24
5. labeli sisi pada siklus luar dari grafantiprisma G_1 dengan 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40
labeli sisi pada siklus luar dari grafantiprisma G_2 dengan 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48
6. labeli jari-jari dari grafantiprisma G_1 dengan 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1
labeli jari-jari dari grafantiprisma G_2 dengan 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9

Setelah dilakukan pelabelan pada sisi dan titik pada grafantiprisma kemudian dilanjutkan dengan penukaran antar label baik titik, sisi maupun jari-jari dengan ketentuan sebagai berikut :

Pada G_1

- untuk $i = 1$, tukar label 65 dengan 8
- untuk $i = 1$, tukar label 31 dengan 33
- untuk $i = 5$, tukar label 61 dengan 4

Pada G_2

- untuk $i = 1$, tukar label 23 dengan 41
- untuk $i = 8$, tukar label 80 dengan 9
- untuk $i = 4$, tukar label 52 dengan 13

4.5.4 Pelabelan Tipe (1,0,0) Wajah d -Antimagic pada Graf $2D_3$

Langkah-langkah mencari pelabelan tipe (1,0,0) wajah d -antimagic pada graf $2D_3$:

1. misalkan x adalah titik pada siklus dalam dan y adalah titik pada siklus luar.
2. labeli titik pada siklus dalam dari grafantiprisma G_1 dengan 25, 26, 27
labeli titik pada siklus dalam dari grafantiprisma G_2 dengan 28, 29, 30
3. labeli titik pada siklus luar dari grafantiprisma G_1 dengan 22, 23, 24
labeli titik pada siklus luar dari grafantiprisma G_2 dengan 19, 20, 21
4. labeli sisi pada siklus dalam dari grafantiprisma G_1 dengan 11, 10, 12
labeli sisi pada siklus dalam dari grafantiprisma G_2 dengan 8, 7, 9
5. labeli sisi pada siklus luar dari grafantiprisma G_1 dengan 13, 14, 15
labeli sisi pada siklus luar dari grafantiprisma G_2 dengan 16, 17, 18
6. labeli jari-jari dari grafantiprisma G_1 dengan 3, 2, 1
labeli jari-jari dari grafantiprisma G_2 dengan 6, 5, 4

Setelah dilakukan pelabelan pada sisi dan titik pada grafantiprisma kemudian dilanjutkan dengan penukaran antar label baik titik, sisi maupun jari-jari dengan ketentuan sebagai berikut :

Pada G_1

- untuk $i = 3$, tukar label 15 dengan 12

Pada G_2

- untuk $i = 3$, tukar label 21 dengan 30
- untuk $i = 2$, tukar label 17 dengan 7

4.5.5 Pelabelan Tipe (1,0,0) Wajah d -Antimagic pada Graf $2D_5$.

Langkah-langkah mencari pelabelan tipe (1,0,0) wajah d -antimagic pada graf $2D_5$:

1. misalkan x adalah titik pada siklus dalam dan y adalah titik pada siklus luar.
2. labeli titik pada siklus dalam dari grafantiprisma G_1 dengan 41, 42, 43, 44, 45
labeli titik pada siklus dalam dari grafantiprisma G_2 dengan 46, 47, 48, 49, 50
3. labeli titik pada siklus luar dari grafantiprisma G_1 dengan 36, 37, 38, 39, 40
labeli titik pada siklus luar dari grafantiprisma G_2 dengan 31, 32, 33, 34, 35
4. labeli sisi pada siklus dalam dari grafantiprisma G_1 dengan 19, 18, 17, 16, 20
labeli sisi pada siklus dalam dari grafantiprisma G_2 dengan 14, 13, 12, 11, 15
5. labeli sisi pada siklus luar dari grafantiprisma G_1 dengan 21, 22, 23, 24, 25
labeli sisi pada siklus luar dari grafantiprisma G_2 dengan 26, 27, 28, 29, 30
6. labeli jari-jari dari grafantiprisma G_1 dengan 5, 4, 3, 2, 1
labeli jari-jari dari grafantiprisma G_2 dengan 10, 9, 8, 7, 6

Setelah dilakukan pelabelan pada sisi dan titik pada grafantiprisma kemudian dilanjutkan dengan penukaran antar label baik titik, sisi maupun jari-jari dengan ketentuan sebagai berikut :

Pada G_1

- untuk $i = 5$, tukar label 45 dengan 40
- untuk $i = 4$, tukar label 16 dengan 24

Pada G_2

- untuk $i = 5$, tukar label 50 dengan 35
- untuk $i = 3$, tukar label 12 dengan 28

4.5.6 Pelabelan Tipe (1,0,0) Wajah d -Antimagic pada Graf $2D_7$.

Langkah-langkah mencari pelabelan tipe (1,0,0) wajah d -antimagic pada graf $2D_7$:

1. misalkan x adalah titik pada siklus dalam dan y adalah titik pada siklus luar.

2. labeli titik pada siklus dalam dari grafantiprisma G_1 dengan 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63
labeli titik pada siklus dalam dari grafantiprisma G_2 dengan 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70
3. labeli titik pada siklus luar dari grafantiprisma G_1 dengan 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56
labeli titik pada siklus luar dari grafantiprisma G_2 dengan 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49
4. labeli sisi pada siklus dalam dari grafantiprisma G_1 dengan 27, 26, 25, 24, 23, 22, 28
labeli sisi pada siklus dalam dari grafantiprisma G_2 dengan 20, 19, 18, 17, 16, 15, 21
5. labeli sisi pada siklus luar dari grafantiprisma G_1 dengan 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35
labeli sisi pada siklus luar dari grafantiprisma G_2 dengan 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42
6. labeli jari-jari dari grafantiprisma G_1 dengan 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1
labeli jari-jari dari grafantiprisma G_2 dengan 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8

Setelah dilakukan pelabelan pada sisi dan titik pada grafantiprisma kemudian dilanjutkan dengan penukaran antar label baik titik, sisi maupun jari-jari dengan ketentuan sebagai berikut :

Pada G_1

- untuk $i = 7$, tukar label 63 dengan 56
- untuk $i = 5$, tukar label 23 dengan 33

Pada G_2

- untuk $i = 7$, tukar label 70 dengan 49
- untuk $i = 4$, tukar label 17 dengan 39

4.5.7 Pelabelan Tipe $(1,0,0)$ Wajah d -Antimagic pada Graf $2D_0$,

Langkah-langkah mencari pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah d -antimagic pada graf $2D_9$:

1. misalkan x adalah titik pada siklus dalam dan y adalah titik pada siklus luar.
 2. labeli titik pada siklus dalam dari grafantiprisma G_1 dengan 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81
labeli titik pada siklus dalam dari grafantiprisma G_2 dengan 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90
 3. labeli titik pada siklus luar dari grafantiprisma G_1 dengan 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72
labeli titik pada siklus luar dari grafantiprisma G_2 dengan 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63
 4. labeli sisi pada siklus dalam dari grafantiprisma G_1 dengan 35, 34, 33, 32, 31, 30, 29, 28, 36
labeli sisi pada siklus dalam dari grafantiprisma G_2 dengan 26, 25, 24, 23, 22, 21, 20, 19, 27
 5. labeli sisi pada siklus luar dari grafantiprisma G_1 dengan 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45
labeli sisi pada siklus luar dari grafantiprisma G_2 dengan 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54
 6. labeli jari-jari dari grafantiprisma G_1 dengan 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1
labeli jari-jari dari grafantiprisma G_2 dengan 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10
- Setelah dilakukan pelabelan pada sisi dan titik pada grafantiprisma kemudian dilanjutkan dengan penukaran antar label baik titik, sisi maupun jari-jari dengan ketentuan sebagai berikut :

Pada G_1

- untuk $i = 9$, tukar label 81 dengan 72
- untuk $i = 6$, tukar label 30 dengan 42

Pada G_2

- untuk $i = 9$, tukar label 90 dengan 63
- untuk $i = 5$, tukar label 22 dengan 50

Formulasi Pelabelan Tipe (1,0,0) Wajah d -Antimagic pada Gabungan Dua Grafantiprisma

Setelah mendapatkan hasil pelabelan dari setiap n , yaitu : $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ dan 9 dapat ditarik suatu rumus umum yang diperoleh dari pola yang terbentuk pada setiap pelabelan. Rumusan umum ini berupa teorema seperti yang tercantum di bawah ini :

Teorema 4.6.1

Ada pelabelan Tipe (1,0,0) 2-Antimagic pada Gabungan Dua Grafantiprisma $2D_n$ untuk n genap dengan $a_4 = 40n + 5$ dan $a_n = 12n^2 - 6n - 3$.

Bukti :

Labeli titik dan sisi dari grafantiprisma dengan cara berikut :

Misal : x_i adalah titik pada siklus dalam

y_i adalah titik pada siklus luar

Graf 1

$$\lambda(x_i) = 8n + i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\lambda(y_i) = 7n + i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

- untuk $\lambda(x_1)$ ditukar dengan $\lambda(x_1y_1)$
- untuk $\lambda(x_1x_2)$ ditukar dengan $\lambda(y_1y_2)$
- untuk $\lambda(x_{\left(\frac{n+2}{2}\right)})$ ditukar dengan $\lambda(x_{\left(\frac{n+2}{2}\right)}y_{\left(\frac{n+2}{2}\right)})$

Graf 2

$$\lambda(x_i) = 9n + i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\lambda(y_i) = 6n + i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\lambda(x_i x_{i+1}) = 3n - i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$$

$$\lambda(x_n x_{n+1}) = 3n \quad i = n$$

$$\lambda(y_i y_{i+1}) = 5n + i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$$

$$\lambda(y_n y_{n+1}) = 6n \quad i = n$$

$$\lambda(x_i y_i) = 2n + 1 - i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

- untuk $\lambda(x_1 x_2)$ ditukar dengan $\lambda(y_1 y_2)$
- untuk $\lambda(x_n)$ ditukar dengan $\lambda(x_n y_n)$
- untuk $\lambda(y_{\binom{n}{2}})$ ditukar dengan $\lambda(x_{\binom{n}{2}} y_{\binom{n}{2}})$

sedangkan bobot untuk masing-masing wajahnya adalah :

1. pada wajah dengan 4-sisi

Graf 1

untuk $i = 1$

$$\begin{aligned} W_4(1) &= \lambda(x_1) + \lambda(x_2) + \lambda(y_1) + \lambda(y_2) + \lambda(x_1 y_1) + \lambda(x_2 y_2) + \lambda(x_1 x_2) + \lambda(y_1 y_2) \\ &= (8n + 1) + (8n + 2) + (7n + 1) + (7n + 2) + (n) + (n - 1) + (4n - 1) + \\ &\quad (4n + 1) = 40n + 5 \end{aligned}$$

untuk $i = n$

$$\begin{aligned} W_4(n) &= \lambda(x_1) + \lambda(x_n) + \lambda(y_1) + \lambda(y_n) + \lambda(x_1 y_1) + \lambda(x_n y_n) + \lambda(x_n x_{n+1}) + \\ &\quad \lambda(y_n y_{n+1}) \\ &= (8n + 1) + (8n + n) + (7n + 1) + (7n + n) + (n) + (1) + (4n) + (5n) \\ &= 42n + 3 \end{aligned}$$

Graf 2

untuk $i = 1$

$$\begin{aligned} W_4(1) &= \lambda(x_1) + \lambda(x_2) + \lambda(y_1) + \lambda(y_2) + \lambda(x_1 y_1) + \lambda(x_2 y_2) + \lambda(x_1 x_2) + \lambda(y_1 y_2) \\ &= (9n + 1) + (9n + 2) + (6n + 1) + (6n + 2) + (2n) + (2n - 1) + (3n - 1) + \\ &\quad (5n + 1) \\ &= 42n + 5 \end{aligned}$$

untuk $i = n$

$$\begin{aligned} W_4(n) &= \lambda(x_1) + \lambda(x_n) + \lambda(y_1) + \lambda(y_n) + \lambda(x_1 y_1) + \lambda(x_n y_n) + \lambda(x_n x_{n+1}) + \\ &\quad \lambda(y_n y_{n+1}) \\ &= (9n + 1) + (9n + n) + (6n + 1) + (6n + n) + (2n) + (n+1) + (3n) + (6n) \\ &= 44n + 3 \end{aligned}$$

sehingga didapatkan barisan dari bobot pada wajah dengan 4-sisi :

$$\{40n + 5, \dots, 42n + 3, 42n + 5, \dots, 44n + 3\}$$

2. pada wajah dengan n -sisi

Graf 1

label titik, sisi ataupun jari-jari yang mengalami pertukaran adalah :

$\lambda(x_1)$ ditukar dengan $\lambda(x_1y_1)$

$\lambda(x_1x_2)$ ditukar dengan (y_1y_2)

$\lambda(y_{\frac{n+2}{2}})$ ditukar dengan $\lambda(x_{\frac{n+2}{2}}y_{\frac{n+2}{2}})$

sehingga, W_n untuk siklus dalam (C_I) :

$$\begin{aligned} W_n(C_I) &= \left[\sum_{i=1}^n \lambda(x_i) + \sum_{i=1}^n \lambda(x_i x_{i+1}) \right] + (\lambda(x_1 y_1) + \lambda(y_1 y_2)) - (\lambda(x_1) + \lambda(x_1 x_2)) \\ &= [(8n+1) + (8n+2) + \dots + (8n+n)] + ((4n-1) + (4n-2) + \dots + (4n-(n-1) + 4n)) \\ &\quad + (n + 4n + 1) - (8n + 1 + 4n - 1) \\ &= [(8n(n) + (1 + 2 + \dots + n))] + ((4n(n-1) - (1 + 2 + \dots + (n-1)) + 4n)] - 7n + 1 \\ &= \left[\left(8n^2 + \frac{(n+1)n}{2} \right) + \left((4n^2 - 4n) - \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) + 4n \right) \right] - 7n + 1 \\ &= (12n^2 + n) + (-7n + 1) = 12n^2 - 6n + 1 \end{aligned}$$

W_n untuk siklus luar (C_O) :

$$\begin{aligned} W_n(C_O) &= \left[\sum_{i=1}^n \lambda(y_i) + \sum_{i=1}^n \lambda(y_i y_{i+1}) \right] + \left(\lambda(x_1 x_2) + \lambda(x_{\frac{n+2}{2}} y_{\frac{n+2}{2}}) \right) - \left(\lambda(y_1 y_2) + \lambda(y_{\frac{n+2}{2}}) \right) \\ &= [(7n+1) + (7n+2) + \dots + (7n+n)] + ((4n+1) + (4n+2) + \dots + (4n+(n-1) + 5n)) \\ &\quad + (4n-1 + n + 1 - \left(\frac{n+2}{2} \right)) - (4n+1 + 7n + \left(\frac{n+2}{2} \right)) \\ &= [(7n(n) + (1 + 2 + \dots + n))] + ((4n(n-1) + (1 + 2 + \dots + (n-1)) + 5n)] - 7n - 3 \\ &= \left[\left(7n^2 + \frac{(n+1)n}{2} \right) + \left((4n^2 - 4n) + \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) + 5n \right) \right] - 7n - 3 \\ &= (11n^2 + n^2 + n) + (-7n - 3) = 12n^2 - 6n - 3 \end{aligned}$$

Graf 2

label titik, sisi ataupun jari-jari yang mengalami pertukaran adalah :

$\lambda(x_1x_2)$ ditukar dengan $\lambda(y_1y_2)$

$\lambda(x_n)$ ditukar dengan $\lambda(x_n y_n)$

$\lambda(y_{\frac{n}{2}})$ ditukar dengan $\lambda(x_{\frac{n}{2}} y_{\frac{n}{2}})$

sehingga, W_n untuk siklus dalam (C_I) :

$$\begin{aligned} W_n(C_I) &= \left[\sum_{i=1}^n \lambda(x_i) + \sum_{i=1}^n \lambda(x_i x_{i+1}) \right] + (\lambda(y_1 y_2) + \lambda(x_n y_n)) - (\lambda(x_n) + \lambda(x_1 x_2)) \\ &= [(9n+1) + (9n+2) + \dots + (9n+n)] + ((3n-1) + (3n-2) + \dots + (3n-(n-1) + 3n)) \\ &\quad + (5n + 1 + n + 1) - (9n + n + 3n - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [(9n(n) + (1+2+\dots+n)) + ((3n(n-1) - (1+2+\dots+(n-1)) + 3n)] - 7n + 3 \\
&= \left[\left(9n^2 + \frac{(n+1)n}{2} \right) + \left((3n^2 - 3n) - \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) + 3n \right) \right] - 7n + 3 \\
&= (12n^2 + n) + (-7n + 3) = 12n^2 - 6n + 3
\end{aligned}$$

W_n untuk siklus luar (C_O) :

$$\begin{aligned}
W_n(C_O) &= \left[\sum_{i=1}^n \lambda(y_i) + \sum_{i=1}^n \lambda(y_i y_{i+1}) \right] + \left(\lambda(x_1 x_2) + \lambda\left(\frac{x_n y_n}{\frac{2}{2}}\right) \right) - \left(\lambda(y_1 y_2) + \lambda\left(\frac{y_n}{\frac{2}{2}}\right) \right) \\
&= [((6n+1) + (6n+2) + \dots + (6n+n)) + ((5n+1) + (5n+2) + \dots + (5n+(n-1) + 6n))] \\
&\quad + (3n-1 + 2n+1 - \frac{n}{2}) - (5n+1 + 6n + \frac{n}{2}) \\
&= [((6n(n) + (1+2+\dots+n)) + ((5n(n-1) + (1+2+\dots+(n-1)) + 6n))] - 7n - 1 \\
&= \left[\left(6n^2 + \frac{(n+1)n}{2} \right) + \left((5n^2 - 5n) + \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) + 6n \right) \right] - 7n - 1 \\
&= (11n^2 + n^2 + n) + (-7n - 1) = 12n^2 - 6n - 1
\end{aligned}$$

sehingga didapatkan barisan dari bobot pada wajah dengan n -sisi :

$$\{12n^2 - 6n - 3, 12n^2 - 6n - 1, 12n^2 - 6n + 1, 12n^2 - 6n + 3\}$$

sedangkan untuk menghitung jumlah bobot (W_s) untuk setiap wajahnya dengan menggunakan persamaan (2.12.4) dan (2.12.5), sebagai berikut :

- jumlah bobot untuk wajah dengan 4-sisi (W_4)

$$\begin{aligned}
W_4 &= 2na_4 + d(2n^2 - n) \\
&= 2(40n + 5) + 2(2n^2 - n) = 84n^2 + 8n
\end{aligned}$$

- jumlah bobot untuk wajah dengan n -sisi (W_n)

$$\begin{aligned}
W_n &= 4a_n + 6d \\
&= 4(12n^2 - 6n - 3) + 6(2) = 48n^2 - 24n
\end{aligned}$$

terbukti bahwa **Teorema 4.6.1** mempunyai suku awal $a_4 = 40n + 5$ dan $a_n = 12n^2 - 6n - 3$ dengan beda $d = 2$ sedemikian hingga membentuk barisan aritmetika.

Teorema 4.6.2

Ada pelabelan Tipe (1,0,0) 2-Antimagic pada Gabungan Dua Grafantiprisma $2D_n$ untuk $n \geq 5$, n ganjil dengan $a_4 = 40n + 5$ dan $a_n = 12n^2 + n - 3$.

Bukti :

Labeli titik dan sisi dari grafantiprisma dengan cara berikut :

Misal : x_i adalah titik pada siklus dalam

y_i adalah titik pada siklus luar

Graf 1

$$\begin{aligned}\lambda(x_i) &= 8n + i & i = 1, 2, 3, \dots, n \\ \lambda(y_i) &= 7n + i & i = 1, 2, 3, \dots, n \\ \lambda(x_i x_{i+1}) &= 4n - i & i = 1, 2, 3, \dots, n - 1 \\ \lambda(x_n x_{n+1}) &= 4n & i = n \\ \lambda(y_i y_{i+1}) &= 4n + i & i = 1, 2, 3, \dots, n - 1 \\ \lambda(y_n y_{n+1}) &= 5n & i = n \\ \lambda(x_i y_i) &= n + 1 - i & i = 1, 2, 3, \dots, n\end{aligned}$$

- untuk $\lambda(x_n)$ ditukar dengan $\lambda(y_n)$
- untuk $\lambda(x_{\left(\frac{n+3}{2}\right)} x_{\left(\frac{n+5}{2}\right)})$ ditukar dengan $\lambda(y_{\left(\frac{n+3}{2}\right)} y_{\left(\frac{n+5}{2}\right)})$

Graf 2

$$\begin{aligned}\lambda(x_i) &= 9n + i & i = 1, 2, 3, \dots, n \\ \lambda(y_i) &= 6n + i & i = 1, 2, 3, \dots, n \\ \lambda(x_i x_{i+1}) &= 3n - i & i = 1, 2, 3, \dots, n - 1 \\ \lambda(x_n x_{n+1}) &= 3n & i = n \\ \lambda(y_i y_{i+1}) &= 5n + i & i = 1, 2, 3, \dots, n - 1 \\ \lambda(y_n y_{n+1}) &= 6n & i = n \\ \lambda(x_i y_i) &= 2n + 1 - i & i = 1, 2, 3, \dots, n\end{aligned}$$

- untuk $\lambda(x_n)$ ditukar dengan $\lambda(y_n)$
- untuk $\lambda(x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} x_{\left(\frac{n+3}{2}\right)})$ ditukar dengan $\lambda(y_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} y_{\left(\frac{n+3}{2}\right)})$

sedangkan bobot untuk masing-masing wajahnya adalah :

1. pada wajah dengan 4-sisi

Graf 1

untuk $i = 1$

$$\begin{aligned}W_4(1) &= \lambda(x_1) + \lambda(x_2) + \lambda(y_1) + \lambda(y_2) + \lambda(x_1 y_1) + \lambda(x_2 y_2) + \lambda(x_1 x_2) + \lambda(y_1 y_2) \\ &= (8n + 1) + (8n + 2) + (7n + 1) + (7n + 2) + (n) + (n - 1) + (4n - 1) + \\ &\quad (4n + 1)\end{aligned}$$

$$= 40n + 5$$

untuk $i = n$

$$\begin{aligned} W_4(n) &= \lambda(x_1) + \lambda(x_n) + \lambda(y_1) + \lambda(y_n) + \lambda(x_1y_1) + \lambda(x_ny_n) + \lambda(x_nx_{n+1}) + \\ &\quad \lambda(y_ny_{n+1}) \\ &= (8n + 1) + (8n + n) + (7n + 1) + (7n + n) + (n) + (1) + (4n) + (5n) \\ &= 42n + 3 \end{aligned}$$

Graf 2

untuk $i = 1$

$$\begin{aligned} W_4(1) &= \lambda(x_1) + \lambda(x_2) + \lambda(y_1) + \lambda(y_2) + \lambda(x_1y_1) + \lambda(x_2y_2) + \lambda(x_1x_2) + \lambda(y_1y_2) \\ &= (9n + 1) + (9n + 2) + (6n + 1) + (6n + 2) + (2n) + (2n - 1) + (3n - 1) + \\ &\quad (5n + 1) \\ &= 42n + 5 \end{aligned}$$

untuk $i = n$

$$\begin{aligned} W_4(n) &= \lambda(x_1) + \lambda(x_n) + \lambda(y_1) + \lambda(y_n) + \lambda(x_1y_1) + \lambda(x_ny_n) + \lambda(x_nx_{n+1}) + \\ &\quad \lambda(y_ny_{n+1}) \\ &= (9n + 1) + (9n + n) + (6n + 1) + (6n + n) + (2n) + (n+1) + (3n) + (6n) \\ &= 44n + 3 \end{aligned}$$

sehingga didapatkan barisan dari bobot pada wajah dengan 4-sisi :

$$\{40n + 5, \dots, 42n + 3, 42n + 5, \dots, 44n + 3\}$$

2. pada wajah dengan n -sisi

Graf 1

label titik, sisi ataupun jari-jari yang mengalami pertukaran adalah :

$\lambda(x_n)$ ditukar dengan $\lambda(y_n)$

$\lambda(x_{\binom{n+3}{2}}x_{\binom{n+5}{2}})$ ditukar dengan $\lambda(y_{\binom{n+3}{2}}y_{\binom{n+5}{2}})$

sehingga, W_n untuk siklus dalam (C_l) :

$$\begin{aligned} W_n(C_l) &= \left[\sum_{i=1}^n \lambda(x_i) + \sum_{i=1}^n \lambda(x_i x_{i+1}) \right] + \left(\lambda(y_n) + \lambda(y_{\binom{n+3}{2}} y_{\binom{n+5}{2}}) \right) - \left(\lambda(x_n) + \lambda(x_{\binom{n+3}{2}} x_{\binom{n+5}{2}}) \right) \\ &= [(8n+1) + (8n+2) + \dots + (8n+n)] + [(4n-1) + (4n-2) + \dots + (4n-(n-1) + 4n)] \\ &\quad + (7n + n + 4n + \frac{n+3}{2}) - (8n + n + 4n - \frac{n+3}{2}) \\ &= [(8n(n) + (1+2+\dots+n))] + [(4n(n-1) - (1+2+\dots+(n-1)) + 4n)] + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\left(8n^2 + \frac{(n+1)n}{2} \right) + \left((4n^2 - 4n) - \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) + 4n \right) \right] + 3 \\
&= (12n^2 + n) + 3 = 12n^2 + n + 3
\end{aligned}$$

W_n untuk siklus luar (C_O) :

$$\begin{aligned}
W_n(C_O) &= \left[\sum_{i=1}^n \lambda(y_i) + \sum_{i=1}^n \lambda(y_i y_{i+1}) \right] + \left(\lambda(x_n) + \lambda\left(x_{\frac{n+3}{2}} x_{\frac{n+5}{2}}\right) \right) - \left(\lambda(y_n) + \lambda\left(y_{\frac{n+3}{2}} y_{\frac{n+5}{2}}\right) \right) \\
&= [(7n+1) + (7n+2) + \dots + (7n+n)] + [(4n+1) + (4n+2) + \dots + (4n+(n-1)+5n)] \\
&\quad + \left(8n + n + 4n - \left(\frac{n+3}{2} \right) \right) - \left(7n + n + 4n + \left(\frac{n+3}{2} \right) \right) \\
&= [(7n(n) + (1+2+\dots+n))] + [(4n(n-1) + (1+2+\dots+(n-1)+5n)] - 3 \\
&= \left[\left(7n^2 + \frac{(n+1)n}{2} \right) + \left((4n^2 - 4n) + \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) + 5n \right) \right] - 3 \\
&= (11n^2 + n^2 + n) - 3 = 12n^2 + n - 3
\end{aligned}$$

Graf 2

label titik, sisi ataupun jari-jari yang mengalami pertukaran adalah :

$\lambda(x_n)$ ditukar dengan $\lambda(y_n)$

$\lambda\left(x_{\frac{n+1}{2}} x_{\frac{n+3}{2}}\right)$ ditukar dengan $\lambda\left(y_{\frac{n+1}{2}} y_{\frac{n+3}{2}}\right)$

sehingga, W_n untuk siklus dalam (C_I) :

$$\begin{aligned}
W_n(C_I) &= \left[\sum_{i=1}^n \lambda(x_i) + \sum_{i=1}^n \lambda(x_i x_{i+1}) \right] + \left(\lambda(y_n) + \lambda\left(y_{\frac{n+1}{2}} y_{\frac{n+3}{2}}\right) \right) - \left(\lambda(x_n) + \lambda\left(x_{\frac{n+1}{2}} x_{\frac{n+3}{2}}\right) \right) \\
&= [(9n+1) + (9n+2) + \dots + (9n+n)] + [(3n-1) + (3n-2) + \dots + (3n-(n-1)+3n)] \\
&\quad + \left(6n + n + 5n + \frac{n+1}{2} \right) - \left(9n + n + 3n - \left(\frac{n+1}{2} \right) \right) \\
&= [(9n(n) + (1+2+\dots+n))] + [(3n(n-1) - (1+2+\dots+(n-1)+3n)] + 1 \\
&= \left[\left(9n^2 + \frac{(n+1)n}{2} \right) + \left((3n^2 - 3n) - \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) + 3n \right) \right] + 1 \\
&= (12n^2 + n) + 1 = 12n^2 + n + 1
\end{aligned}$$

W_n untuk siklus luar (C_O) :

$$\begin{aligned}
W_n(C_O) &= \left[\sum_{i=1}^n \lambda(y_i) + \sum_{i=1}^n \lambda(y_i y_{i+1}) \right] + \left(\lambda(x_n) + \lambda\left(x_{\frac{n+1}{2}} x_{\frac{n+3}{2}}\right) \right) - \left(\lambda(y_n) + \lambda\left(y_{\frac{n+1}{2}} y_{\frac{n+3}{2}}\right) \right) \\
&= [(6n+1) + (6n+2) + \dots + (6n+n)] + [(5n+1) + (5n+2) + \dots + (5n+(n-1)+6n)] \\
&\quad + \left(9n + n + 3n - \left(\frac{n+1}{2} \right) \right) - \left(6n + n + 5n + \frac{n+1}{2} \right) \\
&= [(6n(n) + (1+2+\dots+n))] + [(5n(n-1) + (1+2+\dots+(n-1)+6n)] - 1
\end{aligned}$$

$$= \left[\left(6n^2 + \frac{(n+1)n}{2} \right) + \left((5n^2 - 5n) + \frac{n(n-1)}{2} + 6n \right) \right] - 1$$

$$= (11n^2 + n^2 + n) - 1 = 12n^2 + n - 1$$

sehingga didapatkan barisan dari bobot pada wajah dengan n -sisi :

$$\{12n^2+n-3, 12n^2+n-1, 12n^2+n+1, 12n^2+n+3\}$$

sedangkan untuk menghitung jumlah bobot (W_s) untuk setiap wajahnya dengan menggunakan persamaan (2.12.4) dan (2.12.5), sebagai berikut :

1. jumlah bobot untuk wajah dengan 4-sisi (W_4)

$$W_4 = 2na_4 + d(2n^2 - n)$$

$$= 2(40n + 5) + 2(2n^2 - n) = 84n^2 + 8n$$

2. jumlah bobot untuk wajah dengan n -sisi (W_n)

$$W_n = 4a_n + 6d$$

$$= 4(12n^2 + n - 3) + 6(2) = 48n^2 + 4n$$

terbukti bahwa **Teorema 4.6.2** mempunyai suku awal $a_4 = 40n + 5$ dan $a_n = 12n^2 + n - 3$ dengan beda $d = 2$ sedemikian hingga membentuk barisan aritmetika.

Teorema 4.6.3

Ada pelabelan Tipe (1,0,0) 2-Antimagic pada Gabungan Dua Grafantiprisma $2D_n$ untuk $n = 3$ dengan $a_4 = 125$ dan $a_n = 108$.

Bukti :

Labeli titik dan sisi dari grafantiprisma dengan cara berikut :

Misal : x_i adalah titik pada siklus dalam

y_i adalah titik pada siklus luar

Graf 1

$\lambda(x_i)$	$= 8n + i$	$i = 1, 2, 3, \dots, n$
$\lambda(y_i)$	$= 7n + i$	$i = 1, 2, 3, \dots, n$
$\lambda(x_i x_{i+1})$	$= 4n - i$	$i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$
$\lambda(x_n x_{n+1})$	$= 4n$	$i = n$
$\lambda(y_i y_{i+1})$	$= 4n + i$	$i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$
$\lambda(y_n y_{n+1})$	$= 5n$	$i = n$
$\lambda(x_i y_i)$	$= n + 1 - i$	$i = 1, 2, 3, \dots, n$

- untuk $\lambda(x_3)$ ditukar dengan $\lambda(y_3)$

Graf 2

$$\begin{aligned}\lambda(x_i) &= 9n + i & i = 1, 2, 3, \dots, n \\ \lambda(y_i) &= 6n + i & i = 1, 2, 3, \dots, n \\ \lambda(x_i x_{i+1}) &= 3n - i & i = 1, 2, 3, \dots, n - 1 \\ \lambda(x_n x_{n+1}) &= 3n & i = n \\ \lambda(y_i y_{i+1}) &= 5n + i & i = 1, 2, 3, \dots, n - 1 \\ \lambda(y_n y_{n+1}) &= 6n & i = n \\ \lambda(x_i y_i) &= 2n + 1 - i & i = 1, 2, 3, \dots, n\end{aligned}$$

- untuk $\lambda(x_3)$ ditukar dengan $\lambda(y_3)$
- untuk $\lambda(x_2 x_3)$ ditukar dengan $\lambda(y_2 y_3)$

sedangkan bobot untuk masing-masing wajahnya adalah :

1. pada wajah dengan 4-sisi

Graf 1

untuk $i = 1$

$$\begin{aligned}W_4(1) &= \lambda(x_1) + \lambda(x_2) + \lambda(y_1) + \lambda(y_2) + \lambda(x_1 y_1) + \lambda(x_2 y_2) + \lambda(x_1 x_2) + \lambda(y_1 y_2) \\ &= (8n + 1) + (8n + 2) + (7n + 1) + (7n + 2) + (n) + (n - 1) + (4n - 1) + \\ &\quad (4n + 1) \\ &= 25 + 26 + 22 + 23 + 3 + 2 + 11 + 13 = 125\end{aligned}$$

untuk $i = n$

$$\begin{aligned}W_4(n) &= \lambda(x_1) + \lambda(x_n) + \lambda(y_1) + \lambda(y_n) + \lambda(x_1 y_1) + \lambda(x_n y_n) + \lambda(x_n x_{n+1}) + \\ &\quad \lambda(y_n y_{n+1}) \\ &= (8n + 1) + (8n + n) + (7n + 1) + (7n + n) + (n) + (1) + (4n) + (5n) \\ &= 25 + 27 + 22 + 24 + 3 + 1 + 12 + 15 = 129\end{aligned}$$

Graf 2

untuk $i = 1$

$$\begin{aligned}W_4(1) &= \lambda(x_1) + \lambda(x_2) + \lambda(y_1) + \lambda(y_2) + \lambda(x_1 y_1) + \lambda(x_2 y_2) + \lambda(x_1 x_2) + \lambda(y_1 y_2) \\ &= (9n + 1) + (9n + 2) + (6n + 1) + (6n + 2) + (2n) + (2n - 1) + (3n - 1) + \\ &\quad (5n + 1) \\ &= 28 + 29 + 19 + 20 + 6 + 5 + 8 + 16 = 131\end{aligned}$$

untuk $i = n$

$$\begin{aligned}
 W_4(n) &= \lambda(x_1) + \lambda(x_n) + \lambda(y_1) + \lambda(y_n) + \lambda(x_1y_1) + \lambda(x_ny_n) + \lambda(x_nx_{n+1}) + \\
 &\quad \lambda(y_ny_{n+1}) \\
 &= (9n + 1) + (9n + n) + (6n + 1) + (6n + n) + (2n) + (n+1) + (3n) + (6n) \\
 &= 28+30+19+21+6+4+9+18 = 135
 \end{aligned}$$

sehingga didapatkan barisan dari bobot pada wajah dengan 4-sisi :

$$\{125, \dots, 129, 131, \dots, 135\}$$

2. pada wajah dengan n -sisi

Graf 1

label titik, sisi ataupun jari-jari yang mengalami pertukaran adalah :

$\lambda(x_3)$ ditukar dengan $\lambda(y_3)$

sehingga, W_n untuk siklus dalam (C_I) :

$$\begin{aligned}
 W_n(C_I) &= \left[\sum_{i=1}^n \lambda(x_i) + \sum_{i=1}^n \lambda(x_i x_{i+1}) \right] + \lambda(y_3) - \lambda(x_3) \\
 &= [(8n+1)+(8n+2)+(8n+3)] + [(4n-1)+(4n-2)+4n] + (7n+3) - (8n+3) \\
 &= (16n+3) + (12n-3) + (7n+3) = 35n+3 = 35(3)+3 = 108
 \end{aligned}$$

W_n untuk siklus luar (C_O) :

$$\begin{aligned}
 W_n(C_O) &= \left[\sum_{i=1}^n \lambda(y_i) + \sum_{i=1}^n \lambda(y_i y_{i+1}) \right] + \lambda(x_3) - \lambda(y_3) \\
 &= [(7n+1)+(7n+2)+(7n+3)] + [(4n+1)+(4n+2)+5n] \\
 &= (14n+3) + (13n+3) + (8n+3) = 35n+9 = 35(3)+9 = 114
 \end{aligned}$$

Graf 2

label titik, sisi ataupun jari-jari yang mengalami pertukaran adalah :

$\lambda(x_3)$ ditukar dengan $\lambda(y_3)$

$\lambda(x_2x_3)$ ditukar dengan $\lambda(y_2y_3)$

sehingga, W_n untuk siklus dalam (C_I) :

$$\begin{aligned}
 W_n(C_I) &= \left[\sum_{i=1}^n \lambda(x_i) + \sum_{i=1}^n \lambda(x_i x_{i+1}) \right] + (\lambda(y_3) + \lambda(y_2y_3)) - (\lambda(x_3) + \lambda(x_2x_3)) \\
 &= [(9n+1)+(9n+2)+(9n+3)] + [(3n-1)+(3n-2)+3n] + (6n+3+5n+2) - (9n+3+3n-2) \\
 &= 18n+3+6n-1+11n+5 = 35n+7 = 35(3)+7 = 112
 \end{aligned}$$

W_n untuk siklus luar (C_O) :

$$W_n(C_O) = \left[\sum_{i=1}^n \lambda(y_i) + \sum_{i=1}^n \lambda(y_i y_{i+1}) \right] + (\lambda(x_3) + \lambda(x_2x_3)) - (\lambda(y_3) + \lambda(y_2y_3))$$

$$\begin{aligned}
 &= [(6n+1)+(6n+2)+(6n+3)] + [(5n+1)+(5n+2)+6n] + (9n+3+3n-2) - (6n+3+5n+2) \\
 &= 12n+3+11n+1+12n+1 = 35n+5 = 35(3)+5 = 110
 \end{aligned}$$

sehingga didapatkan barisan dari bobot pada wajah dengan n -sisi :

$$\{35n+3=108, 110, 112, 114\}$$

sedangkan untuk menghitung jumlah bobot (W_s) untuk setiap wajahnya dengan menggunakan persamaan (2.12.4) dan (2.12.5), sebagai berikut :

- jumlah bobot untuk wajah dengan 4-sisi (W_4)

$$\begin{aligned}
 W_4 &= 2na_4 + d(2n^2 - n) \\
 &= 2(40n+5) + 2(2n^2 - n) = 84n^2 + 8n = 84(9) + 8(3) = 780
 \end{aligned}$$

- jumlah bobot untuk wajah dengan n -sisi (W_n)

$$\begin{aligned}
 W_n &= 4a_n + 6d \\
 &= 4(35n+3) + 6(2) = 140n + 24 = 140(3) + 24 = 444
 \end{aligned}$$

terbukti bahwa **Teorema 4.6.3** mempunyai suku awal $a_4 = 40n+5 = 125$ dan $a_n = 35n+3 = 108$ dengan beda $d = 2$ sedemikian hingga membentuk barisan aritmetika.

4.7 Pembahasan

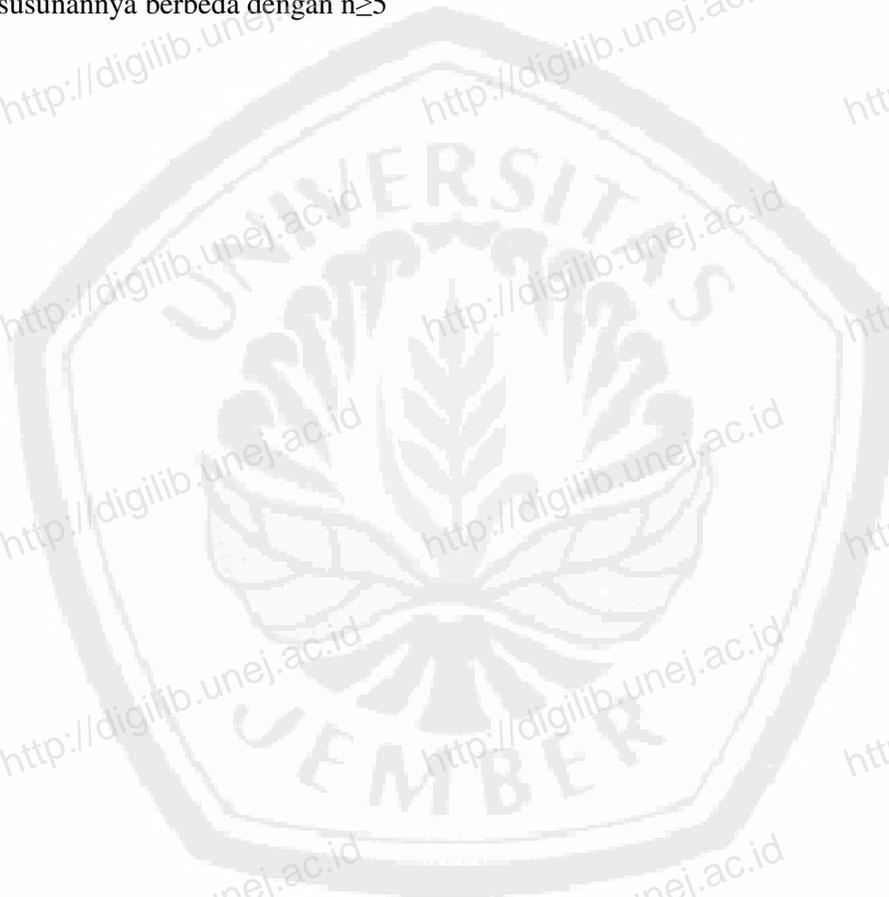
Dalam penelitian ini didapatkan tujuh teorema tentang pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah d -antimagic pada grafantiprisma dan gabungan dua grafantiprisma yaitu pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah d -antimagic pada grafantiprisma untuk n genap, n ganjil ($n \geq 7$), $n = 3$, dan $n = 5$ sedangkan pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah d -antimagic pada gabungan dua grafantiprisma untuk n genap, n ganjil ($n \geq 5$) dan $n = 3$.

Graf $2D_n$ adalah gabungan dari dua grafantiprisma yang isomorfis, sedangkan graf D_{2n} adalah sebuah grafantiprisma tunggal. Jadi kedua graf tersebut berbeda. Dari contoh pelabelan total $(165,2)$ – wajah antimagic pada grafantiprisma D_8 pada bab 2 dan pelabelan total $(165,2)$ – wajah antimagic pada gabungan dua grafantiprisma $2D_4$, nilai dari bobot awal a berbeda sedangkan bedanya $d = 2$. sehingga untuk pelabelan total (a,d) – wajah antimagic pada grafantiprisma D_{2n} dan pelabelan total (a,d) – wajah antimagic pada gabungan dua grafantiprisma $2D_n$ adalah berbeda.

Dari perhitungan nilai d yang mungkin dalam pelabelan total (a,d) – wajah antimagic pada gabungan dua grafantiprisma $2D_n$ didapat $d \leq 11$. Dalam penelitian

ini, peneliti menemukan pelabelan total (a,d) – wajah antimagic pada gabungan dua grafantiprisma, dimana $d=2$ berlaku untuk semua n .

Pada pelabelan total (a,d) – wajah antimagic pada gabungan dua grafantiprisma $2D_n$ yang telah ditemukan untuk n ganjil pola tersebut hanya berlaku untuk $n \geq 5$, karena pada $n = 3$ walaupun pola yang digunakan mengikuti pola untuk pelabelan yang sudah ditemukan namun pada penukaran antar label, susunannya berbeda dengan $n \geq 5$



V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 KESIMPULAN

Sesuai dengan tujuan dan hasil dari penelitian ini dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut :

- 1 a. ada pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah 1-antimagic pada graf antiprisma untuk n ganjil ($n \geq 5$);
b. ada pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah 1-antimagic pada gabungan dua graf prisma untuk n ganjil ($n \geq 5$);
2. a. cara melabeli graf antiprisma A_n dengan pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah 1-antimagic dengan $a_3 = 2n+2$ mengikuti langkah sebagai berikut :
 - 1) misalkan x adalah titik pada siklus dalam dan y adalah titik pada siklus luar, dan $i=1,2,3,\dots,n$.
 - 2) labeli titik pada siklus luar dari graf antiprisma dengan $2i$, untuk $i=1,3,5,\dots,n$. dan $2i-1$, untuk $i=2,4,6,\dots,n-1$.
- 3) labeli titik pada siklus dalam dari graf antiprisma dengan 1, untuk $i=1, 2(n-i)+4$, untuk $i=3,5,7,\dots,n$, dan $2(n-i)+3$, untuk $i=2,4,6,\dots,n-1$.

$$x_i = \begin{cases} 1 & , i = 1 \\ 2(n-i)+4 & , i = 3,5,7,\dots,n \\ 2(n-i)+3 & , i = 2,4,6,\dots,n-1 \end{cases}$$

Sehingga diperoleh $a_n = \frac{2n^2 + n - 1}{2}$

b. cara melabeli gabungan dua graf antiprisma $2A_n$ dengan pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah 1-antimagic dengan $a_3 = 4n+2$ mengikuti langkah sebagai berikut :

Pada graf antiprisma G_1 dan G_2 , misalkan x adalah titik pada siklus dalam dan y adalah titik pada siklus luar, dan $i=1,2,3,\dots,n$.

❖ Pada graf antiprisma G_1 :

- 1). labeli titik pada siklus luar (y_i) dari graf antiprisma dengan $4i$, untuk $i=1,3,5,\dots,n$ dan $4i-3$, untuk $i=2,4,6,\dots,n-1$.

$$y_i = \begin{cases} 4i & , i = 1,3,5,\dots,n \\ 4i-3 & , i = 2,4,6,\dots,n-1 \end{cases}$$

- 2). labeli titik pada siklus dalam (x_i) dari graf antiprisma dengan 1, untuk $i=1$, $4(n-i)+8$, untuk $i=3,5,7,\dots,n$, dan $4(n-i)+5$, untuk $i=2,4,6,\dots,n-1$.

$$x_i = \begin{cases} 1 & , i = 1 \\ 4(n-i)+8 & , i = 3,5,7,\dots,n \\ 4(n-i)+5 & , i = 2,4,6,\dots,n-1 \end{cases}$$

❖ Pada graf antiprisma G_2

- 1). labeli titik pada siklus luar (y_i) dari graf antiprisma dengan $4i-1$, untuk $i=1,3,5,\dots,n$ dan $4i-2$, untuk $i=2,4,6,\dots,n-1$.

$$y_i = \begin{cases} 4i-1 & , i = 1,3,5,\dots,n \\ 4i-2 & , i = 2,4,6,\dots,n-1 \end{cases}$$

- 2). labeli titik pada siklus dalam (x_i) dari graf antiprisma dengan 2, untuk $i=1$, $4(n-i)+7$, untuk $i=3,5,7,\dots,n$, dan $4(n-i)+6$, untuk $i=2,4,6,\dots,n-1$.

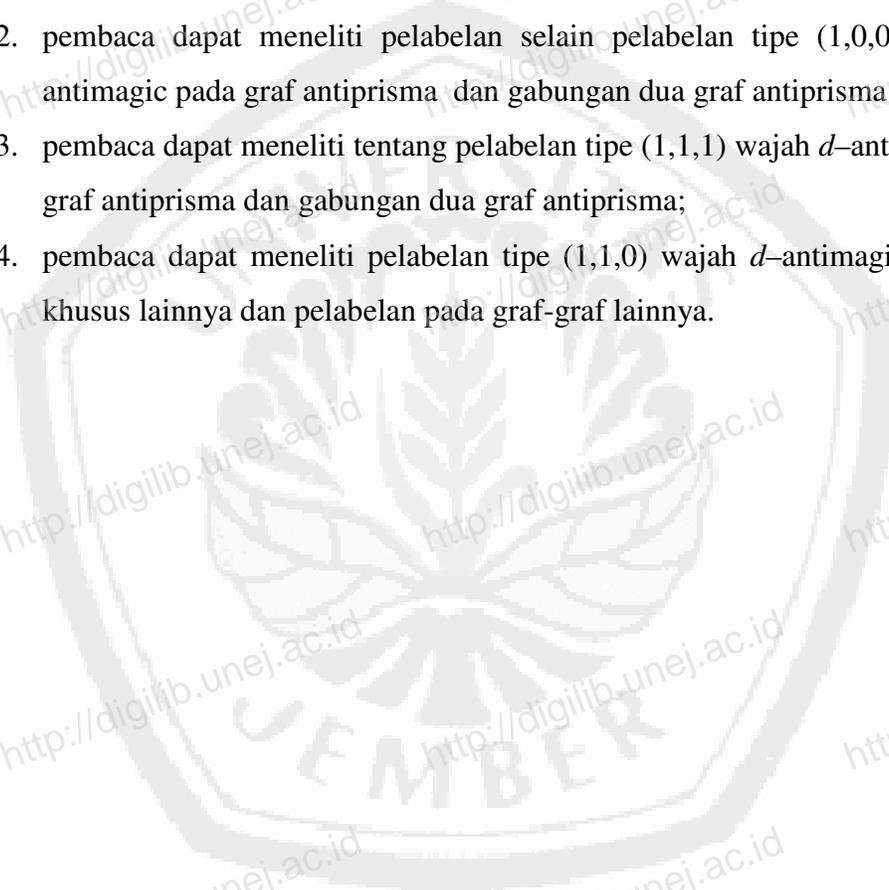
$$x_i = \begin{cases} 2 & , i = 1 \\ 4(n-i)+7 & , i = 3,5,7,\dots,n \\ 4(n-i)+6 & , i = 2,4,6,\dots,n-1 \end{cases}$$

sehingga diperoleh $a_n = \frac{4n^2 + n - 3}{2}$

5.2 SARAN

Saran yang dapat diberikan berdasarkan hasil penelitian adalah sebagai berikut :

1. pembaca dapat meneliti pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah d -antimagic pada graf antiprisma dan gabungan dua graf antiprisma untuk nilai $n = 3$.
2. pembaca dapat meneliti pelabelan selain pelabelan tipe $(1,0,0)$ wajah d -antimagic pada graf antiprisma dan gabungan dua graf antiprisma ;
3. pembaca dapat meneliti tentang pelabelan tipe $(1,1,1)$ wajah d -antimagic pada graf antiprisma dan gabungan dua graf antiprisma;
4. pembaca dapat meneliti pelabelan tipe $(1,1,0)$ wajah d -antimagic pada graf khusus lainnya dan pelabelan pada graf-graf lainnya.



DAFTAR PUSTAKA

- Baca, M., *Antimagic Labelings of Antiprisms*. Submitted
- Baca, M., E. T. Baskoro, Y. M. Cholily, S. Jendrol, Y. Lin, M. Miller, J. Ryan, R. Simanjuntak, Slamin, K. A Sugeng, Surahmat and M. Tuga. *Conjectures and Open Problems on Face Antimagic Evaluations of Graphs*. Submitted
- Budayasa, I. K., 1994. *Matematika Diskrit I*. Surabaya: Institut Keguruan dan Ilmu Pendidikan
- Chartrand, G., and O.R. Oellermann. 1993. *Applied and Algorithmic Graph Theory*. New York. MacGraw-Hill, Inc.
- Hartfield, N dan Ringel, G. 1994. *Pearls in Graph Theory: A Comprehensive Introduction*. London: Academic Press.
- Hidayatullah, M. H. 2005. *Pelabelan Tipe (1,0,0) Wajah Ajaib pada Graf Prisma dan Gabungan Dua Graf Prisma*. Skripsi. Program Studi Pendidikan Matematika, FKIP Universitas Jember
- Lin, Y, Slamin, Bacă, M, and Miller, M. 2000. *On d -Antimagic Labellings of Prisms*. The University of Newcastle, Australia.
- Munir, R. 2001. *Matematika Diskrit: Buku Teks Ilmu Komputer*. Bandung: Penerbit Informatika.
- Slamin. 2001. *Survey of Magic Total Labelling of Graphs*. Jember : Saintifika Vol. 2
- Wallis, W.D, E.T Baskoro, M. Miller, and Slamin. *Edge-Magic Total Labelings*. Australasian Journal of Combinatorics Vol.22.pp.177-190
- Widayanti, H. 2005. *Pelabelan Tipe (1,1,0) Wajah d -Antimagic pada Graf Prisma dan Gabungan Dua Graf Prisma*. Skripsi. Program Studi Pendidikan Matematika, FKIP Universitas Jember
- Wijaya, K. 2000. *Pelabelan Total Sisi Ajaib*. Bandung. Thesis ITB.

