PENGEMBANGAN TEOREMA MARION WALTER UNTUK PEMBAGIAN *k* BAGIAN DARI SISI SEGITIGA

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Pendidikan Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Pendidikan

Oleh

Lioni Anka Monalisa
NIM 060210191233

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER**

2010

PERSEMBAHAN

Segala puji bagi Allah, Tuhan yang Maha pengasih lagi Maha Penyayang, serta sholawat dan salam semoga terlimpah kepada makhluk-Mu yang paling mulia, Nabi Muhammad S.A.W. Kupersembahkan secuil kebahagiaan penggalan syair dalam perjalanan hidupku teriring rasa terima kasih kepada:

1. *Nenek tercinta Maryati, Ibunda tercinta Lilis Suryani dan Ayahanda Misnadi, serta Saudara-saudaraku, Pinky F.A.M. dan Gusti Zakaria G. yang senantiasa mengalirkan rasa cinta dan do'a yang tiada henti, dalam penulisan skripsi ini;*
2. *Bapak Drs. Toto' Bara Setiawan, M.Si dan Bapak Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D selaku pembimbing skripsi (yang sangat kuhormati) yang dengan sabar telah memberikan ilmu dan bimbingan selama menyelesaikan skripsiku;*
3. *Sahabat terbaikku Zuyyina Kh.R. yang telah meluangkan waktu selama empat tahun bersama baik dalam suka dan duka masa-masa perkuliahan;*
4. *Teman-temanku FKIP Matematika : (David N., Erik A., Deni E., M. Hendro C., Erwin S., Vivin A., Nur Farida, dan semuanya) yang senantiasa membantuku dan kebersamaan kita adalah kenangan yang termanis dan tidak akan terlupakan;*
5. *Teman-temanku di kosan jawa 50 jagalah selalu kekompakan kita;*
6. *Teman - temanku FKIP Matematika baik kakak angkatan maupun adik angkatan, terima kasih atas dorongan semangat dan bantuannya selama masa proses penyelesaian skripsiku;*
7. *Almamater Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.*

MOTO

"Jangan melihat masa lampau dengan penyesalan,
jangan pula melihat masa depan dengan ketakutan,
tapi lihatlah sekitar anda dengan penuh kesadaran."

"Jangan selalu mengatakan apa yang kamu tahu,
namun kamu harus tahu apa yang kamu katakan."

HALAMAN PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Lioni Anka Monalisa

NIM : 060210191233

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: Pengembangan Teorema Marion Walter untuk Pembagian k Bagian dari Sisi Segitiga adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, September 2010

Yang menyatakan,

Lioni Anka Monalisa

NIM 060210191233

SKRIPSI

PENGEMBANGAN TEOREMA MARION WALTER UNTUK PEMBAGIAN *k* BAGIAN DARI SISI SEGITIGA

Oleh
Lioni Anka Monalisa
NIM 060210191233

Dosen Pembimbing I : Drs. Toto Bara Setiawan, M.Si
Dosen Pembimbing II : Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul *Pengembangan Teorema Marion Walter untuk Pembagian k Bagian dari Sisi Segitiga* telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember pada:

hari : Jum'at

tanggal : 22 Oktober 2010

tempat : Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Tim Penguji

Ketua,	Sekretaris,
Susi Setiawani, S.Si, M.Sc	Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D
NIP. 19700307 199512 2 001	NIP. 19680802 199303 1 004
Anggota I,	Anggota II,
Drs. Toto Bara S., M.Si	Drs. Antonius C.P., M.App.Sc
NIP. 19581209 198603 1 003	NIP. 19690928 199302 1 001

Mengesahkan,

Drs. H. Imam Muchtar, S.H., M.Hum

NIP. 19540712 198003 1 005

RINGKASAN

Pengembangan Teorema Marion Walter untuk Pembagian *k* Bagian dari Sisi Segitiga; Lioni Anka Monalisa, 060210191233; 2010: 93 halaman; Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember.

Salah satu topik yang menarik pada geometri adalah teorema Marion Walter. Teorema Marion Walter menyatakan bahwa "jika masing-masing sisi segitiga dibagi menjadi tiga bagian yang sama panjang dan masing-masing titik batas dihubungkan dengan titik sudut dihadapannya maka perpotongan garis-garis pembagi tersebut akan membentuk sebuah bangun datar segienam (heksagon). Perbandingan luas heksagon yang terbentuk dengan luas segitiga adalah 1:10". Teorema tersebut sangat luas manfaatnya, namun demikian teorema Marion Walter tidak menjawab bilamana masing-masing sisi segitiga dibagi menjadi k bagian bilangan ganjil lainnya. Oleh karena itu penelitian lanjutan sangat diperlukan. Diambil k bilangan asli ganjil karena pada pembagian bilangan asli genap terdapat garis berat segitiga sehingga tidak terbentuk heksagon di dalam segitiga. Pada teorema Marion Walter hanya membagi sisi-sisi segitiga menjadi tiga bagian yang sama panjang. Dalam penelitian ini akan dibahas tentang pengembangan dari teorema Marion Walter tersebut, yaitu perbandingan luas heksagon dengan luas segitiga asal bilamana sisi-sisi segitiga dibagi menjadi k bagian yang sama panjang, dengan k bilangan ganjil. Karena Marion Walter telah membuktikan masing-masing sisi segitiga dibagi menjadi tiga bagian yang sama panjang. Maka dalam penelitian ini akan difokuskan bilangan k minimal 5 bagian. Adapun langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini adalah membuat bidang kartesius, membuat sebarang segitiga pada bidang kartesius, membagi masing-masing sisi segitiga menjadi k bagian yang sama panjang, menentukan koordinat titik bagi masing-masing sisi segitiga yang membentuk heksagon, menghubungkan titik sudut dengan titik-titik pada sisi di depannya, menentukan persamaan garis-

nya, menentukan titik potong garis-garis tersebut yang membentuk heksagon, menentukan luas heksagon, dan membuat kesimpulan. Hasil penelitian disajikan dalam lema atau teorema. Terdapat tiga lema dan sembilan teorema yang ditemukan dalam penelitian ini. Secara umum menunjukkan bahwa perbandingan luas heksagon dengan luas segitiga asal dimana masing-masing sisinya dibagi menjadi lima bagian sama panjang adalah $1 : 28$, perbandingan luas heksagon dengan luas segitiga asal dimana masing-masing sisinya dibagi menjadi tujuh bagian sama panjang adalah $1 : 55$, perbandingan luas heksagon dengan luas segitiga asal dimana masing-masing sisinya dibagi menjadi k bagian sama panjang adalah $8 : (9k^2 - 1)$.

PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Allah Swt atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul Pengembangan Teorema Marion Walter untuk Pembagian k Bagian dari Sisi Segitiga. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih dan penghargaan yang sebesar-besarnya atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Pendidikan MIPA Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
3. Ketua Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
4. Dosen Pembimbing I dan Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
5. Dosen dan Karyawan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
6. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Juli 2010 Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Salah satu cabang ilmu matematika yang sangat penting adalah ilmu geometri. David (1999:1) menyatakan bahwa geometri adalah suatu ilmu yang mempelajari tentang bentuk. Pada umumnya bentuk dalam ilmu geometri adalah bentuk-bentuk dalam bidang dan juga ruang. Penerapan ilmu geometri terkait bentuk bidang dan ruang ini banyak ditemui dalam kehidupan sehari-hari, misalnya menentukan luas daerah, menentukan volume suatu benda, dan yang paling kompleks lagi adalah penggunaan geometri dalam merancang konstruksi bangunan, baik bangunan pribadi maupun untuk kantor.

Ilmu geometri sering kali dipakai terutama oleh arsitek. Seorang arsitek mendesain rumah yang akan dibangun sesuai dengan keinginan pemilik rumah, dengan cara menata bentuk-bentuk yang geometris. Arsitek selalu berpikir bagaimana menata bangun-bangun geometri dalam konstruksi bangunan agar rumah yang didesainnya tidak hanya terlihat indah di pandang namun juga kokoh dan aman secara arsitektural. Sebagai contoh, rumah yang terlihat pada Gambar 1.1, arsitek mendesain atap rumah berbentuk segitiga sehingga arsitek harus memahami unsur-unsur dan sifat-sifat segitiga.

Bagaimana konstruksi segitiga itu terlihat artistik dan kokoh sekaligus aman, maka harus mempertimbangkan jenis segitiga, luas segitiga, titik berat, titik bagi dan lain sebagainya.

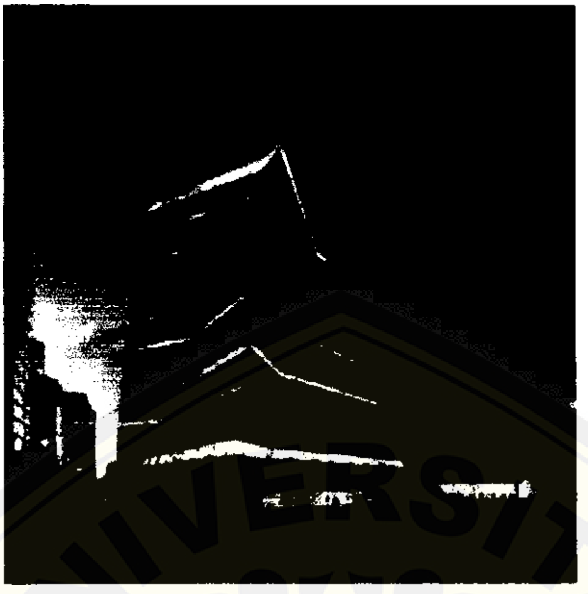
Selanjutnya pada Gambar 1.2 merupakan contoh lain pekerjaan seorang arsitek yang menata gabungan-gabungan bentuk geometri ruang sedemikian rupa hingga bangunan tersebut terlihat unik dan kokoh. Pastilah ini juga pekerjaan seorang arsitektur profesional yang memperhatikan unsur-unsur geomet-

Gambar 1.1: Atap rumah berbentuk segitiga (Anonim 1)

rik.

Kedua gambar ini menunjukkan bahwa betapa penting bentuk segitiga dalam kehidupan. Segitiga merupakan bangun geometri yang sederhana. Pada umumnya, hampir semua bangun-bangun dalam bidang dapat dikembangkan dari segitiga. Sebagai contoh segiempat merupakan bangun yang terdiri atas dua segitiga, segilima merupakan bangun yang terdiri atas tiga segitiga, segienam merupakan bangun yang terdiri atas empat segitiga dan seterusnya. Begitu pentingnya segitiga dalam kehidupan sehari-hari sampai-sampai menarik perhatian Profesor Marion Walter, seorang pakar geometri dari United State, untuk mengkaji sifat-sifat unik segitiga. Professor Marion Walter menyatakan bahwa "jika masing-masing sisi segitiga dibagi menjadi tiga bagian yang sama panjang dan masing-masing titik batas dihubungkan dengan titik sudut dihadapannya maka perpotongan garis-garis pembagi tersebut akan membentuk sebuah bangun datar segienam (heksagon). Perbandingan luas heksagon yang terbentuk dengan luas segitiga adalah 1:10".(Anonim 2).

Teorema tersebut sangat luas manfaatnya, sebab dengan memanfaatkan perbandingan luas heksagon dengan segitiga asal, maka dapat dipahami bahwa

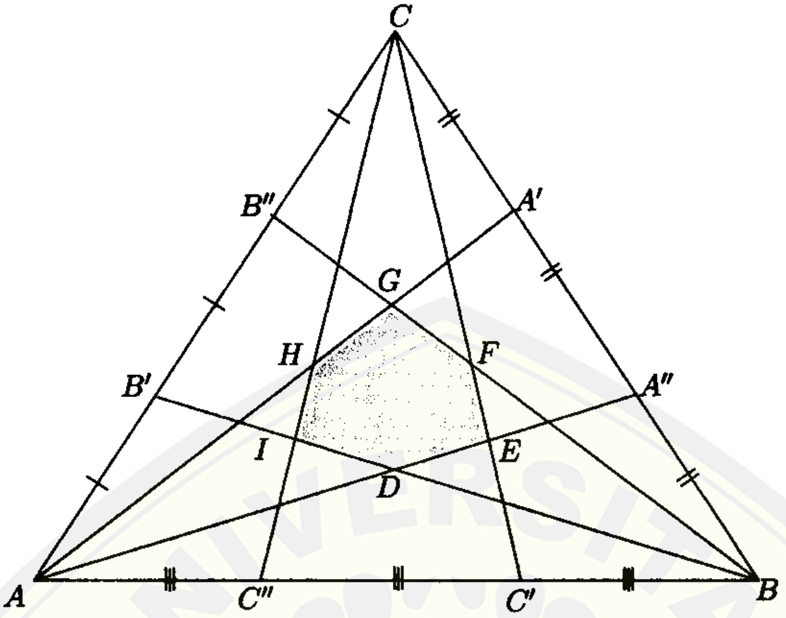


Gambar 1.2: Gedung berdinding segitiga (Anonim 3)

segitiga akan berdiri kokoh di atas penyangga beton konkret apabila beton konkret itu diletakkan menyanggah segitiga dengan hamparan sanggahan seluas heksagon.

Lebih detailnya dalam hal ini diberikan ilustrasi hasil penelitian Professor Marion Walter. Diketahui sebuah segitiga ABC dimana masing-masing sisi dibagi menjadi tiga bagian yang sama panjang yaitu pada titik A', A'', B', B'', C', dan C''. Selanjutnya masing-masing titik bagi dihubungkan dengan titik sudut di hadapannya, maka terbentuklah heksagon $DEFGHI$ dalam segitiga ABC, sebagaimana terlihat pada Gambar 1.3.

Wahdah (2006:13) telah membuktikan teorema Professor Marion Walter untuk segitiga samakaki, samasisi, dan siku-siku. Kemudian juga dibuktikan syarat terbentuknya heksagon dalam segitiga samasisi jika masing-masing sisi segitiga dibagi menjadi tiga bagian dengan perbandingan $p{:}q{:}r$. Dilanjutkan dengan perbandingan luas heksagon yang terbentuk dengan luas segitiga samasisi, jika masing-masing sisi segitiga dibagi menjadi tiga bagian dengan per-

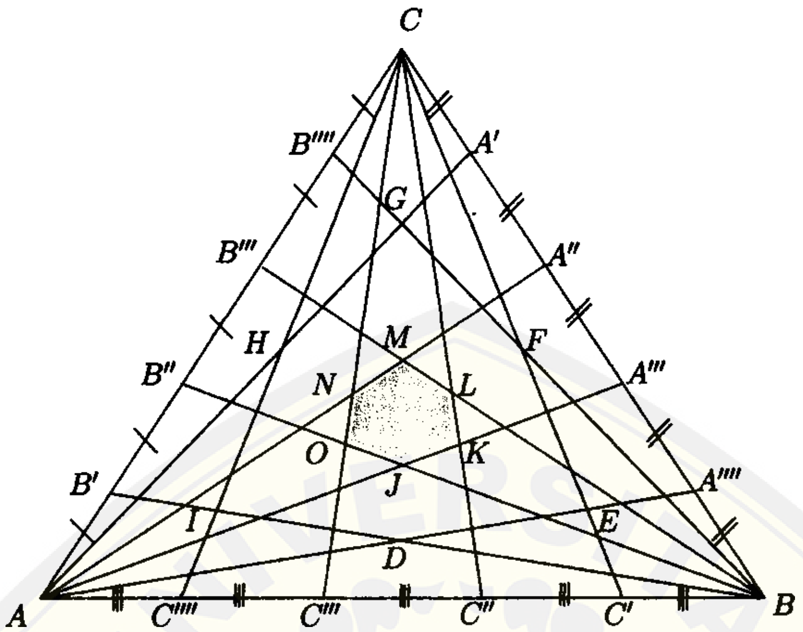


Gambar 1.3: Ilustrasi teorema Marion Walter

bandingan $p{:}q{:}r$.

Terinspirasi dari penelitian yang dilakukan oleh Wahdah, dalam penelitian ini akan dikaji lebih dalam lagi hasil penelitian Professor Marion Walter. Kajian itu terfokus pada bagaimana bila masing-masing sisi segitiga dibagi menjadi lima, tujuh, dan k bagian yang sama panjang, dengan k bilangan ganjil yang kesemuanya akan terbentuk heksagon, lihat Gambar 1.4.

Dari Gambar 1.4 dapat dikembangkan berbagai pertanyaan diantaranya, bagaimana perbandingan heksagon paling dalam dengan segitiga asal bila masing-masing sisi segitiga dibagi menjadi lima, tujuh, dan k bagian sama panjang, dengan k bilangan ganjil. Sehingga judul penelitian dalam hal ini adalah "Pengembangan Teorema Marion Walter untuk Pembagian k Bagian dari Sisi Segitiga".



Gambar 1.4: Ilustrasi pengembangan teorema Marion Walter

1.2 Rumusan Masalah

Beberapa masalah dalam penelitian ini dapat dirumuskan sebagai berikut.

1. Berapa perbandingan luas heksagon terkecil yang terbentuk dengan segitiga asal jika masing-masing sisi segitiga dibagi menjadi lima bagian sama panjang?
2. Berapa perbandingan luas heksagon terkecil yang terbentuk dengan segitiga asal jika masing-masing sisi segitiga dibagi menjadi tujuh bagian sama panjang?
3. Berapa perbandingan luas heksagon terkecil yang terbentuk dengan segitiga asal jika masing-masing sisi segitiga dibagi menjadi k bagian sama panjang, dengan k bilangan asli ganjil?

1.3 Tujuan penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji:

1. perbandingan luas heksagon terkecil yang terbentuk dengan segitiga asal jika masing-masing sisi segitiga dibagi menjadi lima bagian sama panjang;
2. perbandingan luas heksagon terkecil yang terbentuk dengan segitiga asal jika masing-masing sisi segitiga dibagi menjadi tujuh bagian sama panjang;
3. perbandingan luas heksagon terkecil yang terbentuk dengan segitiga asal jika masing-masing sisi segitiga dibagi menjadi k bagian sama panjang, dengan k bilangan asli ganjil.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi bagi.

1. Penulis, dapat memperdalam ilmu geometri khususnya pengembangan dari teorema Marion Walter.
2. Penulis, dapat lebih mengetahui aplikasi ilmu geometri dalam keidupan nyata.
3. Pembaca, memberi pengetahuan baru tentang pengembangan teorema Marion Walter khususnya dan ilmu geometri pada umumnya.

BAB 2

TINJAUAN PUSTAKA

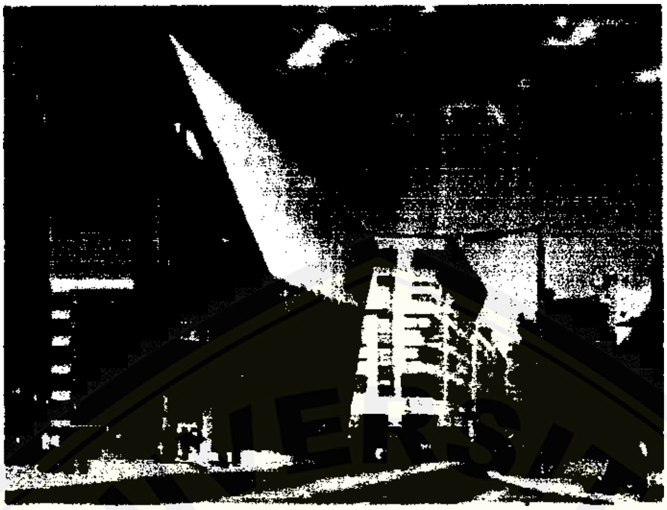
2.1 Aplikasi Geometri

Ilmu matematika sering dijumpai dalam kehidupan sehari-hari, khususnya pada bidang geometri. Aplikasi bidang geometri yang sering ditemui adalah arsitektur bangunan. Arsitektur bangunan sangat erat hubungannya dengan geometri. Hal yang menghubungkan antara kedua hal ini adalah nilai estetis. Geometri memiliki fungsi yang relevan dalam memperlihatkan hubungan visual suatu objek dari segi proporsi, dan juga pola perkembangan objek tersebut. Oleh karena itulah sekarang banyak muncul jasa arsitek, misalnya arsitek rumah, perkantoran, pariwisata dan arsitek bangunan secara umum.

Dari gambaran di atas didapat bahwa geometri dapat menjadi salah satu elemen yang dapat menjadikan suatu karya arsitek memiliki nilai estetis. Tapi tentunya untuk menimbulkan nilai estetis ini, maka karya arsitektur tersebut kemudian dibatasi dengan aturan-aturan geometri yang ada. Arsitektur romawi bernama Marcus Vitruvius membatasi bahwa pembangun harus selalu menggunakan rasio yang tepat, pernyataan ini sama halnya dengan "*Without symmetry and proportion, no building can have a regular plan*".

Banyak lukisan dan bangunan yang tidak menggunakan prinsip geometri tidak dapat dianggap suatu yang indah. Terlihat bahwa kaidah geometri dalam suatu desain dapat membatasi variasi desain yang dihasilkan. Selain dari penggunaan geometri sebagai pemvisualisasian hubungan dan proporsi dari suatu objek, geometri juga memiliki fungsi sebagai suatu kaidah yang digunakan untuk memberi ukuran pada bangunan dan bentuk. Jasa arsitek sekarang banyak menggunakan kaidah seperti ini. (Anonim 4)

Sebagai misal untuk membuat rumah, diperlukan pengukuran terhadap



Gambar 2.1: Gedung berdinding segitiga (Anonim 5)

Gambar 2.2: Rumah berdinding segitiga (Anonim 6)

luas rumah, luas atap, luas dinding sehingga bentuk rumah itu menjadi proporsional, kuat dan indah, seperti tampak pada Gambar 2.1 dan Gambar 2.2. Pada Gambar 2.1 dinding gedung yang dimodifikasi menggunakan kaca-kaca berbentuk segitiga, sedangkan Gambar 2.2 rumah didesain dengan atap berbentuk segitiga dan cerubung asap berbentuk silinder di sampingnya.

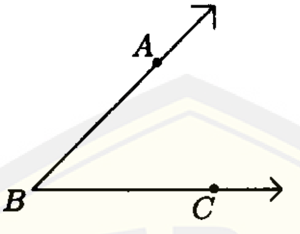
Untuk membangun bangunan ini, maka tidak akan menghasilkan bangunan yang kokoh, aman serta indah apabila tidak memakai prinsip geometri. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa kegunaan prinsip-prinsip geometri sangat luas dalam masyarakat. Hal inilah yang mendorong peneliti melakukan penelitian ini.

2.2 Konsep Dasar

Berikut ini akan digambarkan beberapa istilah dasar tentang relasi-relasi geometri diantaranya titik, garis, dan bidang dalam sebuah himpunan. Diberikan sebarang dua titik A dan B, maka terdapat sebuah garis melalui kedua titik tersebut (Kusno, 2003: 51). Jika titik P di garis l, maka dikatakan bahwa P pada l, garis l pada P, garis l melalui titik P atau garis l bertemu (insiden) dengan titik P. Garis l sejajar terhadap garis g, dinotasikan $l \parallel g$, yaitu l tidak memotong g atau juga tidak berimpit dengan g (Kusno, 2003: 55). Titik-titik yang terletak pada garis yang sama (segaris) disebut kolinier dan titik-titik yang terletak pada satu bidang (sebidang) disebut koplanar (Teguh, 2007: 60). Jika dua garis atau lebih berpotongan pada satu titik, garis-garis tersebut dikatakan konkuren (Kusno, 2004: 60).

Ruas (segmen) garis AB didefinisikan sebagai himpunan titik-titik segaris yang memuat titik A dan titik B, dan semua titik diantara titik A dan titik B. Titik A, B dan titik-titik diantaranya, dikatakan meliputi ruas garis AB. Titik-titik A dan B masing-masing disebut titik-titik akhir (ujung) dari ruas garis AB (Kusno, 2004: 62).

Sudut adalah himpunan titik-titik dari gabungan dua sinar yang kedua titik pangkalnya berserikat, tetapi tidak terletak pada garis yang sama (Kusno, 2004: 60). Pada Gambar 2.3 dapat dituliskan simbol sudutnya sebagai: $\angle ABC$ atau $\angle CBA$. Titik B tersebut disebut titik sudut, sedangkan segmen garis $\overrightarrow{BA}$ dan $\overrightarrow{BC}$ merupakan kaki sudut.



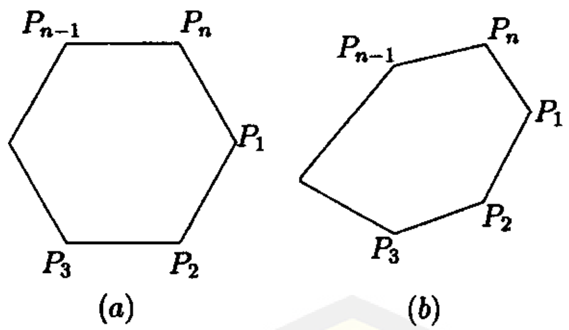
Gambar 2.3: Sudut ABC atau CBA

Garis bagi (bisector) suatu segitiga adalah suatu segmen yang membagi dua sama ukurannya sebarang sudut pada segitiga dan berujung pada sisi di hadapannya (Kusno, 1988: 15). Setiap sudut mempunyai satu sudut bisector yang pasti (tunggal) (Gustafson, 1991: 23). Selanjutnya akan dijelaskan tentang definisi dan sifat-sifat poligon.

2.2.1 Poligon

Poligon adalah gabungan titik-titik $P_1, P_2, P_3, ..., P_{n-1}, P_n$, dengan ruas garis: $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, ..., \overline{P_{n-1}P_n}, \overline{P_nP_1}$, sedemikian hingga jika dua sembarang dari ruas garis berpotongan, bertitik potong pada titik-titik $P_1, P_2, P_3, ..., P_{n-1}, P_n$ dan tidak ada titik lain, dimana n bilangan asli dan lebih besar dari dua (Kusno, 2003: 65).

Suatu poligon diklasifikasikan menurut jumlah sisinya, poligon dengan empat sisi dinamakan tetragon, poligon dengan lima sisi dinamakan pentagon, dan seterusnya. Poligon yang sisi-sisi dan sudut-sudutnya adalah kongruen disebut poligon beraturan (Kusno, 2003: 90). Seperti tampak pada Gambar 2.4a. Sedangkan pada Gambar 2.4b adalah poligon tak beraturan, dimana sisi-sisi dan sudutnya tidak sama.



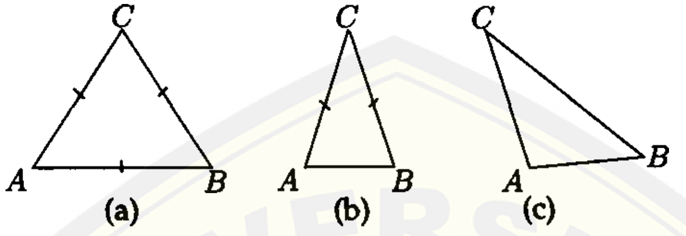
Gambar 2.4: Poligon

Dalam penelitian ini, kajian akan difokuskan pada poligon segitiga dan heksagon. Oleh karena itu, perlu dijelaskan tentang definisi dan sifat-sifat segitiga dan heksagon.

Segitiga adalah bentuk yang terjadi dari tiga buah potongan garis yang tertutup (Gustafson, 1991: 6), atau dapat dikatakan poligon dengan tiga sisi (Kusno, 2004: 71). Segitiga merupakan salah satu bangun dasar dari geometri. Bangun segitiga memiliki tiga sudut dan tiga sisi yang berupa penggal garis lurus. Sebuah segitiga terjadi apabila ada tiga penggal garis lurus yang setiap dua garisnya saling berpotongan. Dalam geometri Euclides, tiga buah titik yang tidak kolinier (tidak terletak pada sebuah garis lurus) membentuk sebuah segitiga. Adapun segitiga memiliki sifat-sifat sebagai berikut:

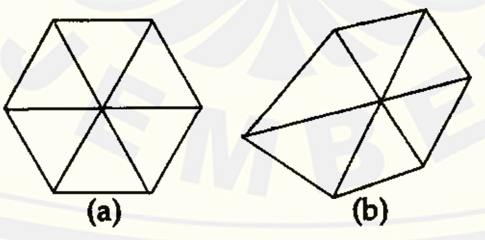
1. Sebuah segitiga hanya memiliki tiga sudut, dan ketiga titik sudut tersebut tidak segaris.
2. Setiap dua titik sudut dihubungkan oleh sebuah ruas garis, dimana ruas garis adalah lintasan terpendek antara dua titik
3. Bangun yang disebut segitiga adalah gabungan dari ketiga ruas garis yang membentuk sisi segitiga. (Andrian, 2008:355)

Berdasarkan sisinya, suatu segitiga dibagi menjadi tiga jenis yaitu segitiga samasisi, segitiga samakaki dan segitiga sembarang. Disebut segitiga samasisi bila ketiga sisi segitiga tersebut kongruen, tampak pada Gambar 2.5a, dikatakan segitiga samakaki bila kedua sisi segitiga adalah kongruen, tampak pada Gambar 2.5b, dan dikatakan segitiga sembarang bila ketiga sisinya tidak kongruen dengan sudut yang tidak kongruen pula (sebarang), tampak pada Gambar 2.5c.



Gambar 2.5: Macam-macam segitiga berdasarkan sisinya

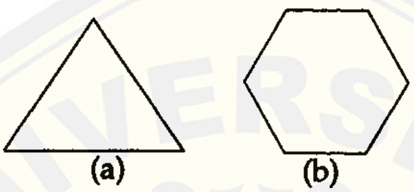
Selanjutnya fokus penelitian yang kedua heksagon. Heksagon adalah poligon yang mempunyai enam sisi. Jika enam sisinya mempunyai panjang yang sama dinamakan heksagon beraturan, seperti pada Gambar 2.6a. Jika terdapat sisi-sisi yang tidak sama panjang maka dinamakan heksagon tidak beraturan, seperti pada Gambar 2.6b. Pada heksagon beraturan tersebut, bila dibagi menjadi enam bagian maka akan terdiri atas enam buah segitiga yang samasisi. Sedangkan heksagon tak beraturan bila dibagi menjadi enam bagian, tidak akan terbentuk enam segitiga yang samasisi.



Gambar 2.6: Heksagon

2.2.2 Daerah Poligon dan Luas Poligon

Daerah segitiga adalah gabungan himpunan titik yang termuat pada interior segitiga. Daerah poligon adalah potongan bidang yang dapat dinyatakan oleh gabungan terhingga daerah tiga sudut sedemikian sehingga jika dua buah daerah tiga sudut berinteraksi, maka interaksinya adalah sebuah sisi atau titik sudut dari masing-masing daerah tiga sudut tersebut (Kusno, 2004: 145), lihat Gambar 2.7.



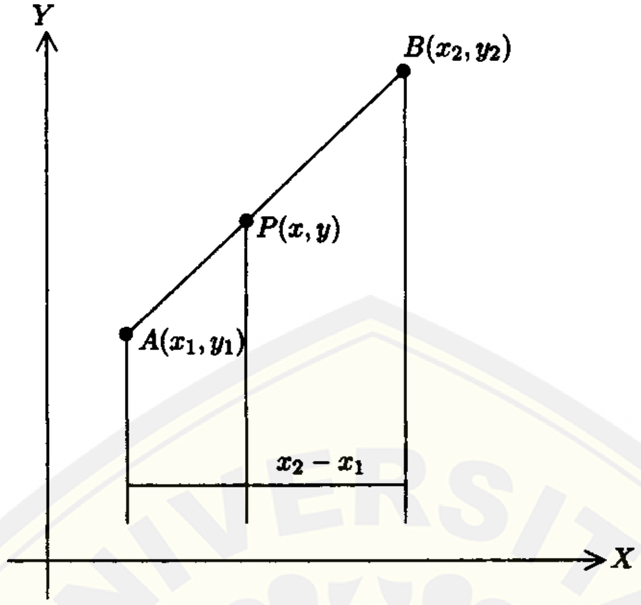
Gambar 2.7: Daerah segitiga dan heksagon

Pada bagian ini disajikan beberapa terminologi untuk membahas luas poligon dengan pendekatan geometri analitik. Jarak titik-titik $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$ dapat dinyatakan oleh $|\overline{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Persamaan garis melalui titik $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$ dapat dinyatakan sebagai $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, $x_2 - x_1 \neq 0$, $y_2 - y_1 \neq 0$. Jika $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ dan P adalah titik-titik kolinier sedemikian hingga $r = \frac{|\overline{AP}|}{\overline{AB}}$ seperti diilustrasi pada Gambar 2.8, maka koordinat P(x,y) adalah: $x = x_1 + r(x_2 - x_1)$ dan $y = y_1 + r(y_2 - y_1)$ (Riddle, 1992: 5, 82, 12). Untuk menetukan transformasi geometri rotasi dari sebuah titik maka diperlukan definisi matrik.

Matriks adalah susunan bilangan bilangan berbentuk persegi panjang yang diatur dalam baris dan kolom (Endang, 2005:9). Misal

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, maka perkalian matriks didefinisikan sebagai

$A.B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$ (Endang, 2005:10)



Gambar 2.8: Koordinat titik bagi ruas garis

Dengan memakai matriks, maka rotasi titik $P(x, y)$ yang dirotasikan dengan titik pusat rotasi $O(0,0)$, maka hasil rotasinya $P'(x', y')$, seperti pada Gambar 2.9.

Posisi titik $P'(x', y')$ dapat diperoleh dengan cara berikut:

$|\overline{OP}| = |\overline{OP'}| = r$

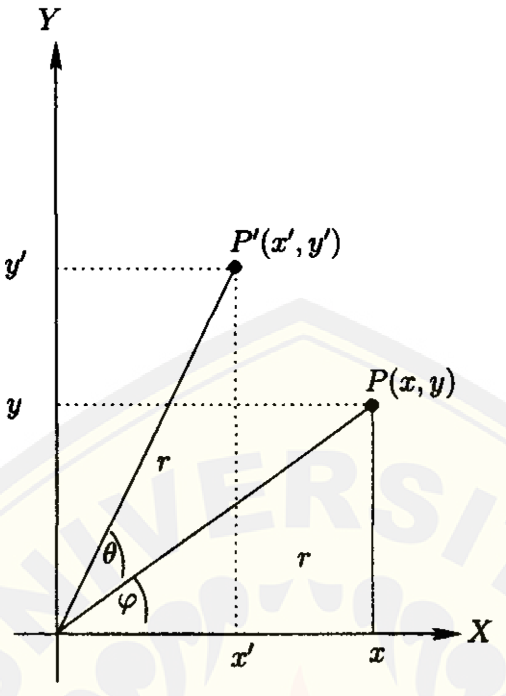
$x = r.\cos\varphi$

$y = r.\sin\varphi$

$x' = r.\cos(\theta + \varphi) = r.\cos\varphi.\cos\theta - r.\sin\varphi.\sin\theta = x.\cos\theta - y.\sin\theta$

$y' = r.\sin(\theta + \varphi) = r.\sin\theta.\cos\varphi + r.\cos\theta.\sin\varphi = x.\sin\theta + y.\cos\theta$

Dengan demikian, persamaan transformasi rotasi dalam bentuk matriks dinyatakan sebagai berikut:



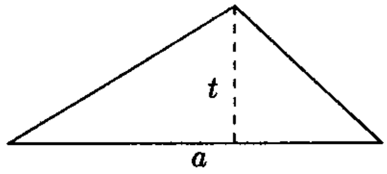
Gambar 2.9: Rotasi titik P sebesar θ

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$ (Pesta, 2008: 147)

Menentukan luas poligon dapat dilakukan dengan berbagai cara, diantaranya adalah memilah poligon menjadi segitiga-segitiga kecil lalu luas poligon sama dengan jumlah dari segitiga-segitiga kecil tersebut, atau menggunakan determinan matriks. Dalam penelitian ini untuk menghitung luas poligon akan digunakan cara yang efisien yaitu dengan cara determinan matriks. Luas poligon yang akan dibahas hanya untuk bangun segitiga dan heksagon. Adapun luas segitiga dan luas heksagon ditentukan sebagai berikut:

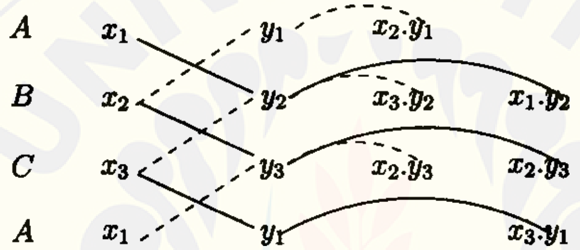
1. Luas Segitiga

   Luas suatu segitiga adalah setengah kali ukuran alas a dengan garis tinggi t yang berkorespondensi, yaitu $L = \frac{1}{2}.a.t$ (Kusno, 2004: 149), lihat Gambar 2.10.



Gambar 2.10: Unsur-unsur segitiga

Jika tiga titik koordinat segitiga diketahui (x_i, y_i) dimana $i = 1, 2, 3$ maka luas segitiga dapat ditentukan dengan determinan matriks, yaitu menyusun ketiga titik koordinat segitiga sebagaimana dalam diagram 2.11 berikut



Gambar 2.11: Diagram Perhitungan Luas Segitiga

Keterangan Gambar 2.11: garis hitam menunjukkan perkalian antara dua koordinat, yang mana hasilnya ditunjukkan pada garis di sebelah kanan. Begitu juga dengan garis putus-putus.

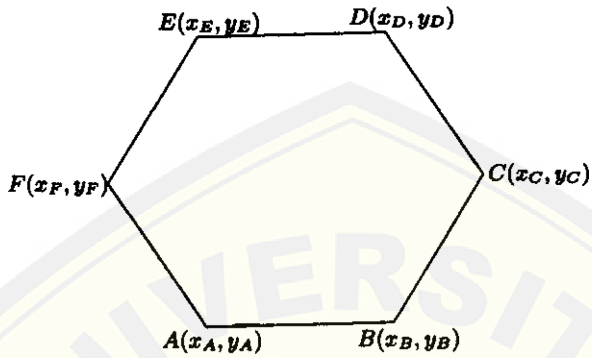
sehingga luas segitiga adalah

$$\begin{aligned} L_{ABC} &= \left|\frac{1}{2}((x_2.y_1 + x_3.y_2 + x_1.y_3) \right. \\ &\quad \left. -(x_1.y_2 + x_2.y_3 + x_3.y_1))\right| \end{aligned}$$

(Anonim 7)

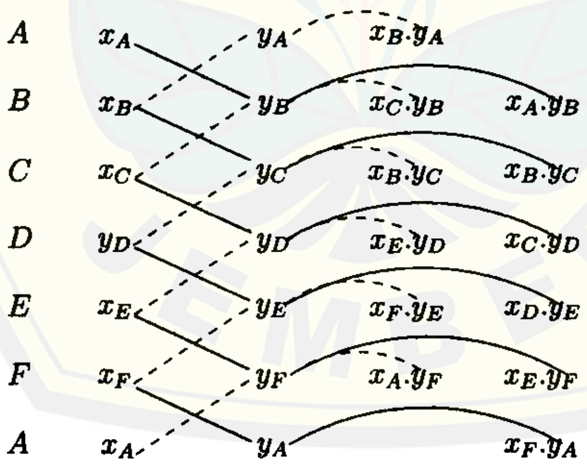
2. Luas heksagon

Untuk menghitung luas heksagon, dapat menggunakan rumus luas segitiga yaitu dengan cara membagi heksagon tersebut menjadi empat luasan segitiga, sehingga luas heksagon adalah jumlah keempat luas segitiga tersebut. Namun cara ini tidak efisien. Berikut ini akan diperkenalkan teknik menghitung luas heksagon dengan menggunakan matrik determinan. Misal diketahui heksagon seperti pada gambar 2.12, teknik menghi-



Gambar 2.12: Luas heksagon

tung luas heksagon $ABCDEF$ dengan menggunakan matriks determinan adalah dengan menyusun titik-titik dalam susunan sebagaimana diagram pada Gambar 2.13,



Gambar 2.13: Diagram Perhitungan Luas Heksagon

sehingga luas heksagon adalah

$$\begin{aligned} L_{ABCDEF} &= \Big|\frac{1}{2}\big((x_B.y_A + x_C.y_B + x_D.y_C + x_E.y_D + x_F.y_E + x_A.y_F) \\ &\quad -(x_A.y_B + x_B.y_C + x_C.y_D + x_D.y_E + x_E.y_F + x_F.y_A)\big)\Big| \end{aligned}$$

(Anonim 7)

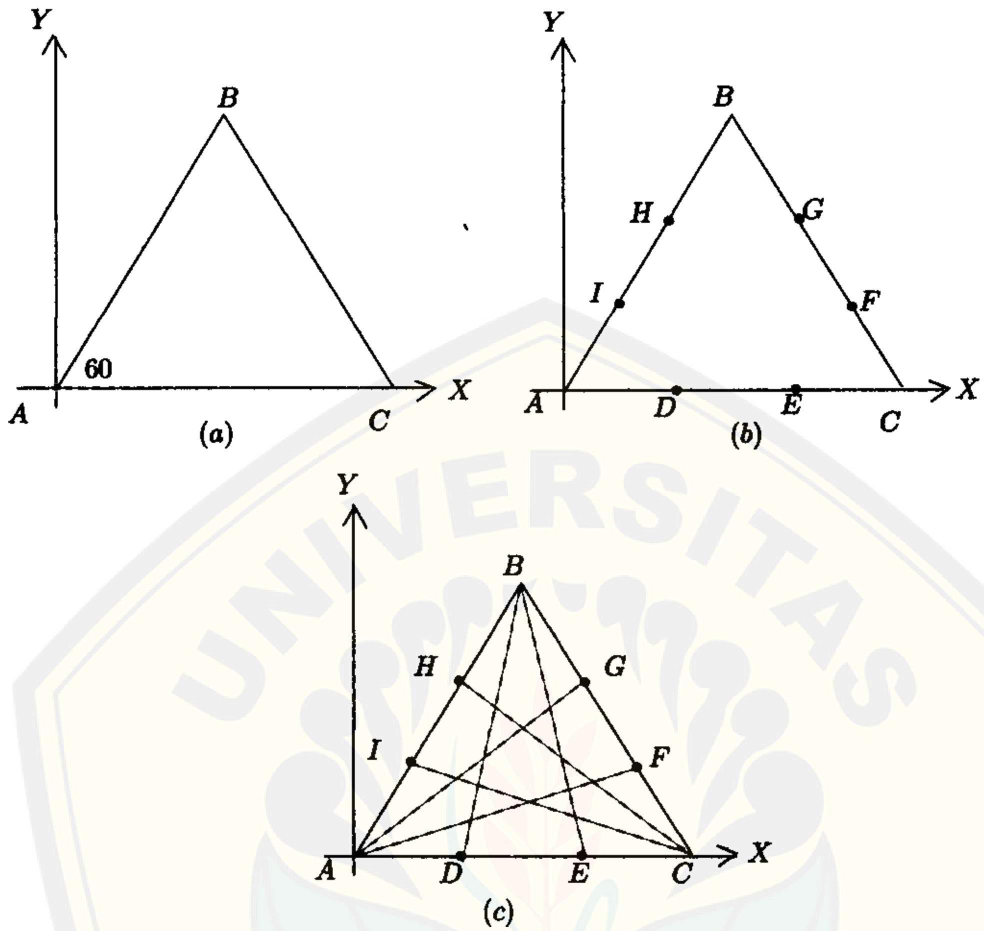
2.3 Teorema Marion Walter

Marion Walter adalah seorang professor dari universitas Oregon. Beliau meneliti tentang perbandingan luas heksagon yang terbentuk karena perpotongan garis-garis pembagi dengan segitiga asal. Teorema Marion Walter yang cukup populer beserta pembuktiannya ditemukan dalam Wahdah (2006:13). Ka-rena pembuktian tersebut akan digunakan sebagai dasar mengembangkan Teorema Marion Walter dalam penelitian ini, maka Teorema dan pembuktiannya disajikan kembali dalam bab ini.

Theorema 2.3.1 *Jika masing-masing sisi segitiga dibagi menjadi tiga bagian yang sama panjang dan masing-masing titik bagi dihubungkan dengan titik sudut dihadapannya maka perpotongan garis-garis pembagi tersebut akan membentuk sebuah bangun datar segienam (heksagon) dan perbandingan luas heksagon yang terbentuk dengan luas segitiga adalah 1:10.*

Bukti. Misalkan sebuah segitiga samasisi ABC dengan koordinat titik A pada pangkal koordinat $(0,0)$, titik B pada sumbu X posotif $(x_1, 0)$dan titik C merupakan hasil rotasi titik B sejauh 60 terhadap pangkal koordinat yaitu $(\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2}\sqrt{3}$ $x_1)$ seperti Gambar 2.14. Untuk menentukan perbandinan luas heksagon dengan luas segitiga samasisi ABC dapat mengikuti langkah-langkah sebagai berikut.

1. Tentukan titik bagi pada masing-masing sisi AB, sisi BC dan sisi AC dengan perbandingan 1:1:1. Misalkan titik D dan titik E pada sisi AB, titik F dan titik G pada sisi BC serta titik H dan titik I pada sisi AC (Gambar 2.14b). Koordinat titik bagi pada masing-masing sisi adalah:



Gambar 2.14: Ilustrasi pembuktian teorema Marion Walter

$$x_D = 0 + \frac{1}{3}(x_1 - 0) = \frac{1}{3}x_1 \quad , \quad y_D = 0 + \frac{1}{3}(0 - 0) = 0$$

$$x_E = 0 + \frac{2}{3}(x_1 - 0) = \frac{2}{3}x_1 \quad , \quad y_E = 0 + \frac{2}{3}(0 - 0) = 0$$

$$x_F = x_1 + \frac{1}{3}(\frac{1}{2}x_1 - x_1) = \frac{5}{6}x_1 \quad , \quad y_F = 0 + \frac{1}{3}(\frac{1}{2}\sqrt{3}x_1 - 0) = \frac{1}{6}\sqrt{3}x_1$$

$$x_G = x_1 + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}x_1 - x_1) = \frac{2}{3}x_1 \quad , \quad y_G = 0 + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}\sqrt{3}x_1 - 0) = \frac{1}{3}\sqrt{3}x_1$$

$$x_H = 0 + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}x_1 - 0) = \frac{1}{3}x_1 \quad , \quad y_H = 0 + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}\sqrt{3}x_1 - 0) = \frac{1}{3}\sqrt{3}x_1$$
$$x_I = 0 + \frac{1}{3}(\frac{1}{2}x_1 - 0) = \frac{1}{6}x_1 \quad , \quad y_I = 0 + \frac{1}{3}(\frac{1}{2}\sqrt{3}x_1 - 0) = \frac{1}{6}\sqrt{3}x_1$$

Jadi koordinat titik-titiknya adalah $D(\frac{1}{3}x_1, 0), E(\frac{2}{3}x_1, 0), F(\frac{5}{6}x_1, \frac{1}{6}\sqrt{3}x_1)$, $G(\frac{2}{3}x_1, \frac{1}{3}\sqrt{3}x_1), H(\frac{1}{3}x_1, \frac{1}{3}\sqrt{3}x_1), I(\frac{1}{6}x_1, \frac{1}{6}\sqrt{3}x_1)$

2. Hubungkan masing-masing titik bagi dengan titik sudut dihadapannya. Misalkan titik D dan titik E dihubungkan dengan titik C, titik F dan titik G dihubungkan dengan titik A, sedangkan titik H dan titik I dihubungkan dengan titik B (Gambar 2.14c). Persamaan garis-garis bagi segitiga ABC adalah

$$\begin{aligned}
Garis\ AF : \frac{x-0}{\frac{5}{6}x_1 - 0} = \frac{y-0}{\frac{1}{6}\sqrt{3}x_1 - 0} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{6}\sqrt{3}x_1 x = \frac{5}{6}x_1 y \\
&\Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{5}\sqrt{3}x \\
Garis\ AG : \frac{x-0}{\frac{2}{3}x_1 - 0} = \frac{y-0}{\frac{1}{3}\sqrt{3}x_1 - 0} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\sqrt{3}x_1 x = \frac{2}{3}x_1 y \\
&\Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2}\sqrt{3}x \\
Garis\ BI : \frac{x-x_1}{\frac{1}{6}x_1 - x_1} = \frac{y-0}{\frac{1}{6}\sqrt{3}x_1 - 0} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{6}\sqrt{3}x_1(x - x_1) = y(-\frac{5}{6}x_1) \\
&\Leftrightarrow \quad y = -\frac{1}{5}\sqrt{3}x + \frac{1}{5}\sqrt{3}x_1 \\
Garis\ BH : \frac{x-x_1}{\frac{1}{3}x_1 - x_1} = \frac{y-0}{\frac{1}{3}\sqrt{3}x_1 - 0} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\sqrt{3}x_1(x - x_1) = y(-\frac{2}{3}x_1) \\
&\Leftrightarrow \quad y = -\frac{1}{2}\sqrt{3}x + \frac{1}{2}\sqrt{3}x_1 \\
Garis\ CD : \frac{x-\frac{1}{3}x_1}{\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{3}x_1} = \frac{y-0}{\frac{1}{2}\sqrt{3}x_1 - 0} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\sqrt{3}(x - \frac{1}{3}x_1) = y(\frac{1}{6}x_1) \\
&\Leftrightarrow \quad y = 3\sqrt{3}x - \sqrt{3}x_1 \\
Garis\ CE : \frac{x-\frac{2}{3}x_1}{\frac{1}{2}x_1 - \frac{2}{3}x_1} = \frac{y-0}{\frac{1}{2}\sqrt{3}x_1 - 0} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\sqrt{3}x_1(x - \frac{2}{3}x_1) = y(-\frac{1}{6}x_1) \\
&\Leftrightarrow \quad y = -3\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}x_1
\end{aligned}$$

3. Dari perpotongan garis-garis tersebut akan terbentuk bangun heksagon dalam segitiga ABC. Misalnya peepotongan garis BI dengan garis CD

di titik J, perpotongan garis BI dengan garis AF di titik K, perpotongan garis CE dengan garis AF di titik L, perpotongan garis BH dengan garis CE di titik M, perpotongan garis BH dengan garis AG di titik N, dan perpotongan garis CD dengan garis AG di titik O (Gambar 2.14c). Maka koordinat titik potongnya adalah:

$$\begin{aligned} Titik\ J \longrightarrow y_{BI} = y_{CD} \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{5}\sqrt{3}x + \frac{1}{5}\sqrt{3}x_1 = 3\sqrt{3}x - \sqrt{3}x_1 \\ &\Leftrightarrow \quad 3\sqrt{3}x + \frac{1}{5}\sqrt{3}x = \frac{1}{5}\sqrt{3}x_1 + \sqrt{3}x_1 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{16}{5}\sqrt{3}x = \frac{6}{5}\sqrt{3}x_1 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{8}x_1 \end{aligned}$$

$$y = 3\sqrt{3}x - \sqrt{3}x_1 = 3\sqrt{3}\frac{3}{8}x_1 - \sqrt{3}x_1 = \frac{1}{8}\sqrt{3}x_1$$

$$\begin{aligned} Titik\ K \longrightarrow y_{BI} = y_{AF} \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{5}\sqrt{3}x + \frac{1}{5}\sqrt{3}x_1 = \frac{1}{5}\sqrt{3}x \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{5}\sqrt{3}x + \frac{1}{5}\sqrt{3}x = \frac{1}{5}\sqrt{3}x_1 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{2}{5}\sqrt{3}x = \frac{1}{5}\sqrt{3}x_1 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}x_1 \end{aligned}$$

$$y = \frac{1}{5}\sqrt{3}x = \frac{1}{5}\sqrt{3}.\frac{1}{2}x_1 = \frac{1}{10}\sqrt{3}x_1$$

$$\begin{aligned} Titik\ L \longrightarrow y_{AF} = y_{CE} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{5}\sqrt{3}x = -3\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}x_1 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{5}\sqrt{3}x + 3\sqrt{3}x = 2\sqrt{3}x_1 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{16}{5}\sqrt{3}x = 2\sqrt{3}x_1 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{5}{8}x_1 \end{aligned}$$

$$y = \frac{1}{5}\sqrt{3}x = \frac{1}{5}\sqrt{3}.\frac{5}{8}x_1 = \frac{1}{8}\sqrt{3}x_1$$

$$\begin{aligned}
\textit{Titik } M \longrightarrow y_{BH} = y_{CE} \;\; &\Leftrightarrow \;\; -\frac{1}{2}\sqrt{3}x + \frac{1}{2}\sqrt{3}x_1 = -3\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}x_1 \\
&\Leftrightarrow \;\; -\frac{1}{2}\sqrt{3}x + 3\sqrt{3}x = 2\sqrt{3}x_1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}x_1 \\
&\Leftrightarrow \;\; \frac{5}{2}\sqrt{3}x = \frac{3}{2}\sqrt{3}x_1 \\
&\Leftrightarrow \;\; x = \frac{3}{5}x_1
\end{aligned}$$

$$y = -3\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}x_1 = -3\sqrt{3}.\frac{3}{5}x_1 + 2\sqrt{3}x_1 = \frac{1}{5}\sqrt{3}x_1$$

$$\begin{aligned}
\textit{Titik } N \longrightarrow y_{BH} = y_{AG} \;\; &\Leftrightarrow \;\; -\frac{1}{2}\sqrt{3}x + \frac{1}{2}\sqrt{3}x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}x \\
&\Leftrightarrow \;\; \frac{1}{2}\sqrt{3}x + \frac{1}{2}\sqrt{3}x = \frac{1}{2}\sqrt{3}x_1 \\
&\Leftrightarrow \;\; \sqrt{3}x = \frac{1}{2}\sqrt{3}x_1 \\
&\Leftrightarrow \;\; x = \frac{1}{2}x_1
\end{aligned}$$

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{3}x = \frac{1}{2}\sqrt{3}.\frac{1}{2}x_1 = \frac{1}{4}\sqrt{3}x_1$$

$$\begin{aligned}
\textit{Titik } O \longrightarrow y_{CD} = y_{AG} \;\; &\Leftrightarrow \;\; 3\sqrt{3}x - \sqrt{3}x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}x \\
&\Leftrightarrow \;\; 3\sqrt{3}x - \frac{1}{2}\sqrt{3}x = \sqrt{3}x_1 \\
&\Leftrightarrow \;\; \frac{5}{2}\sqrt{3}x = \sqrt{3}x_1 \\
&\Leftrightarrow \;\; x = \frac{2}{5}x_1
\end{aligned}$$

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{3}x = \frac{1}{2}\sqrt{3}.\frac{2}{5}x_1 = \frac{1}{5}\sqrt{3}x_1$$

Jadi titik-titik koordinat yang membentuk heksagon adalah $J(\frac{3}{8}x_1, \frac{1}{8}\sqrt{3}x_1)$, $K(\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{10}\sqrt{3}x_1)$, $L(\frac{5}{8}x_1, \frac{1}{8}\sqrt{3}x_1)$, $M(\frac{3}{5}x_1, \frac{1}{5}\sqrt{3}x_1)$, $N(\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{4}\sqrt{3}x_1)$, $O(\frac{2}{5}x_1, \frac{1}{5}\sqrt{3}x_1)$.

4. Menentukan luas heksagon $JKLMNO$ yang dihasilkan dari penjumlahan empat segitiga yaitu segitiga KLM, segitiga KMN, segitiga KNO, dan segitiga KOJ.

$$
\begin{aligned}
L_{\Delta KLM} &= \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{1}{2}x_1 & \frac{1}{10}\sqrt{3}x_1 & 1 \\ \frac{5}{8}x_1 & \frac{1}{8}\sqrt{3}x_1 & 1 \\ \frac{3}{5}x_1 & \frac{1}{5}\sqrt{3}x_1 & 1 \end{vmatrix}\right| \\
&= \left|\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x_1(\frac{1}{8}\sqrt{3}x_1 - \frac{1}{5}\sqrt{3}x_1) - \frac{1}{10}\sqrt{3}x_1(\frac{5}{8}x_1 - \frac{3}{5}x_1)+\right. \\
&\quad \left.(\frac{5}{8}x_1.\frac{1}{5}\sqrt{3}x_1 - \frac{1}{8}\sqrt{3}x_1.\frac{3}{5}x_1))\right| \\
&= \left|\frac{1}{2}(\frac{1}{16}\sqrt{3}x_1^2 - \frac{1}{10}\sqrt{3}x_1^2 - \frac{1}{16}\sqrt{3}x_1^2 + \frac{3}{50}\sqrt{3}x_1^2 + \frac{1}{8}\sqrt{3}x_1^2 - \frac{3}{40}\sqrt{3}x_1^2)\right| \\
&= \left|\frac{1}{2}(\frac{1}{100}\sqrt{3}x_1^2)\right| \\
&= \frac{1}{200}\sqrt{3}x_1^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{\Delta KMN} &= \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{1}{2}x_1 & \frac{1}{10}\sqrt{3}x_1 & 1 \\ \frac{3}{5}x_1 & \frac{1}{5}\sqrt{3}x_1 & 1 \\ \frac{1}{2}x_1 & \frac{1}{4}\sqrt{3}x_1 & 1 \end{vmatrix}\right| \\
&= \left|\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x_1(\frac{1}{5}\sqrt{3}x_1 - \frac{1}{4}\sqrt{3}x_1) - \frac{1}{10}\sqrt{3}x_1(\frac{3}{5}x_1 - \frac{1}{2}x_1)+\right. \\
&\quad \left.(\frac{3}{5}x_1.\frac{1}{4}\sqrt{3}x_1 - \frac{1}{5}\sqrt{3}x_1.\frac{1}{2}x_1))\right| \\
&= \left|\frac{1}{2}(\frac{1}{10}\sqrt{3}x_1^2 - \frac{1}{8}\sqrt{3}x_1^2 - \frac{3}{50}\sqrt{3}x_1^2 + \frac{1}{20}\sqrt{3}x_1^2 + \frac{3}{20}\sqrt{3}x_1^2 - \frac{1}{10}\sqrt{3}x_1^2)\right| \\
&= \left|\frac{1}{2}(\frac{3}{200}\sqrt{3}x_1^2)\right| \\
&= \frac{3}{400}\sqrt{3}x_1^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{\Delta KNO} &= \left|\frac{1}{2}\left|\begin{array}{ccc} \frac{1}{2}x_1 & \frac{1}{10}\sqrt{3}x_1 & 1 \\ \frac{1}{2}x_1 & \frac{1}{4}\sqrt{3}x_1 & 1 \\ \frac{2}{5}x_1 & \frac{1}{5}\sqrt{3}x_1 & 1 \end{array}\right|\right| \\
&= \left|\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x_1(\frac{1}{4}\sqrt{3}x_1 - \frac{1}{5}\sqrt{3}x_1) - \frac{1}{10}\sqrt{3}x_1(\frac{1}{2}x_1 - \frac{2}{5}x_1) + \right. \\
&\quad \left.(\frac{1}{2}x_1.\frac{1}{5}\sqrt{3}x_1 - \frac{1}{4}\sqrt{3}x_1.\frac{2}{5}x_1))\right| \\
&= \left|\frac{1}{2}(\frac{1}{8}\sqrt{3}x_1^2 - \frac{1}{10}\sqrt{3}x_1^2 - \frac{1}{20}\sqrt{3}x_1^2 + \frac{1}{25}\sqrt{3}x_1^2 + \frac{1}{10}\sqrt{3}x_1^2 - \frac{1}{10}\sqrt{3}x_1^2)\right| \\
&= \left|\frac{1}{2}(\frac{3}{200}\sqrt{3}x_1^2)\right| \\
&= \frac{3}{400}\sqrt{3}x_1^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{\Delta KOJ} &= \left|\frac{1}{2}\left|\begin{array}{ccc} \frac{1}{2}x_1 & \frac{1}{10}\sqrt{3}x_1 & 1 \\ \frac{2}{5}x_1 & \frac{1}{5}\sqrt{3}x_1 & 1 \\ \frac{3}{8}x_1 & \frac{1}{8}\sqrt{3}x_1 & 1 \end{array}\right|\right| \\
&= \left|\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x_1(\frac{1}{5}\sqrt{3}x_1 - \frac{1}{8}\sqrt{3}x_1) - \frac{1}{10}\sqrt{3}x_1(\frac{2}{5}x_1 - \frac{3}{8}x_1) + \right. \\
&\quad \left.(\frac{2}{5}x_1.\frac{1}{8}\sqrt{3}x_1 - \frac{1}{5}\sqrt{3}x_1.\frac{3}{8}x_1))\right| \\
&= \left|\frac{1}{2}(\frac{1}{10}\sqrt{3}x_1^2 - \frac{1}{16}\sqrt{3}x_1^2 - \frac{1}{25}\sqrt{3}x_1^2 + \frac{3}{80}\sqrt{3}x_1^2 + \frac{1}{20}\sqrt{3}x_1^2 - \frac{3}{40}\sqrt{3}x_1^2)\right| \\
&= \left|\frac{1}{2}(\frac{1}{100}\sqrt{3}x_1^2)\right| \\
&= \frac{1}{200}\sqrt{3}x_1^2
\end{aligned}
$$

Sehingga didapat luas heksagon

$$
\begin{aligned}
L_{JKLMNO} &= L_{\Delta KLM} + L_{\Delta KMN} + L_{\Delta KNO} + L_{\Delta KOJ} \\
&= \frac{1}{200}\sqrt{3}x_1^2 + \frac{3}{400}\sqrt{3}x_1^2 + \frac{3}{400}\sqrt{3}x_1^2 + \frac{1}{200}\sqrt{3}x_1^2 \\
&= \frac{1}{40}\sqrt{3}x_1^2
\end{aligned}
$$

5. Menentukan luas segitiga ABC dan bandingkan hasilnya dengan luas heksagon $JKLMNO$

$$\begin{aligned} L_{\Delta ABC} &= \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2}x_1 & \frac{1}{2}\sqrt{3}x_1 & 1 \end{vmatrix} \right| \\ &= \left| \frac{1}{2}(0(0-\frac{1}{2}\sqrt{3}x_1) - 0(x_1 - 0) + (x_1.\frac{1}{2}\sqrt{3}x_1 - 0.\frac{1}{2}x_1)) \right| \\ &= \left| \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sqrt{3}x_1^2) \right| \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{3}x_1^2 \end{aligned}$$

Membandingkan luas heksagon $JKLMNO$ dengan luas segitiga ABC

$$\frac{L_{JKLMNO}}{L_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{1}{40}\sqrt{3}x_1^2}{\frac{1}{4}\sqrt{3}x_1^2} = \frac{1}{10}$$

Dari langkah-langkah tersebut, maka diperoleh perbandingan luas heksagon dengan luas segitiga adalah 1 : 10. Dengan demikian terbuktilah Teorema Marion Walter ini. □

BAB 3

METODE PENELITIAN

3.1 Prosedur Penelitian

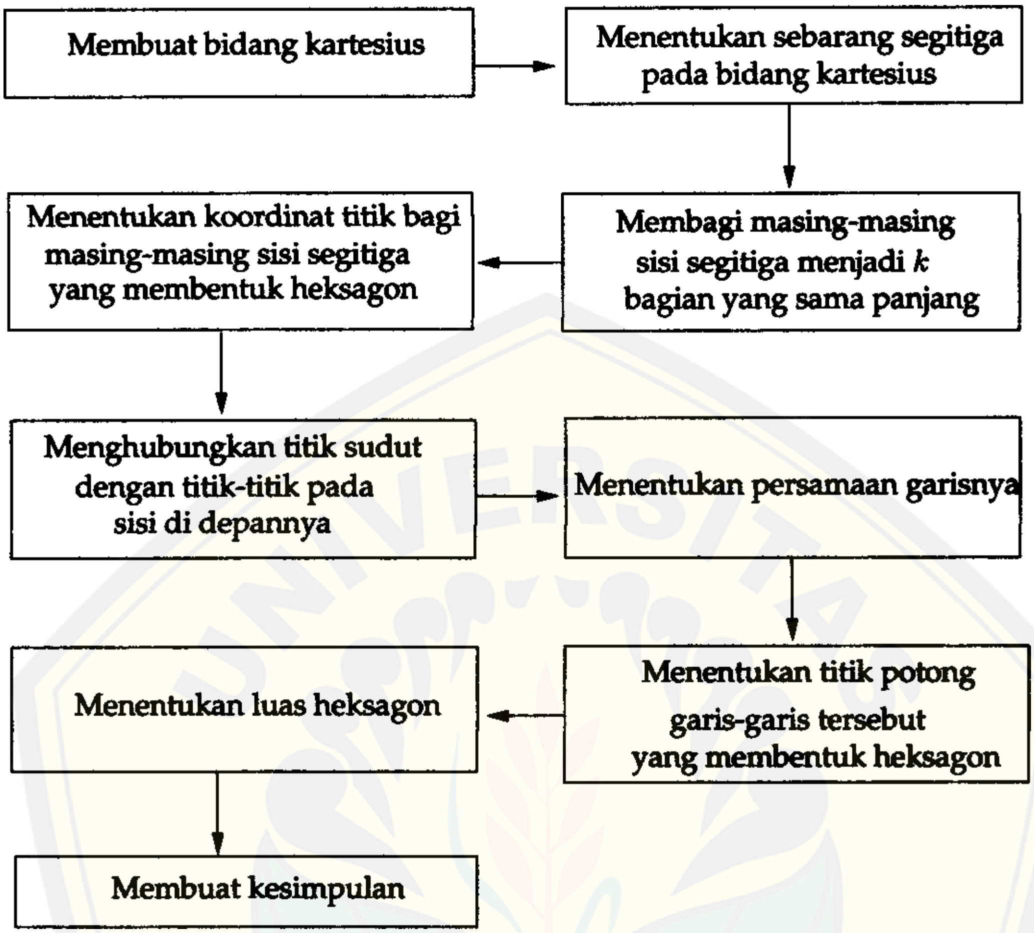
Prosedur penelitian sangat diperlukan dalam suatu penelitian, karena prosedur merupakan landasan atau kerangka dasar yang dijadikan pijakan sekaligus acuan untuk melaksanakan penelitian (Yousda, 1993: 26). Langkah yang dimaksud merupakan langkah perencanaan yang mencakup penyusunan dan penyiapan rancangan penelitian serta instrumen pengumpulan data.

Di dalam penelitian ini, prosedur yang dimaksud adalah suatu tahapan berpikir mulai dari identifikasi, verifikasi, analisis dan generalisasi untuk memperoleh suatu kesimpulan yang berupa lemma, teorema atau korolari baru. Metode yang digunakan untuk melakukan penelitian tersebut mengacu pada dua metode berikut:

Metode induktif. Metode induktif merupakan metode penelitian dengan mengkaji kaidah-kaidah khusus untuk menentukan kaidah-kaidah umum dalam penelitian.

Deduktif aksiomatik. Metode deduktif aksiomatik merupakan metode penelitian dengan menemukan aksioma atau teorema-teorema yang sudah ada kedalam permasalahan baru yang akan diselidiki.

Dengan memanfaatkan keadaan diatas secara umum prosedur dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:



Gambar 3.1: Diagram Prosedur Penelitian

3.2 Definisi Operasional

Pada penelitian ini variabel yang akan didefinisikan adalah Pengembangan Teorema Marion Walter dengan Menggunakan Sistem Koordinat Kartesius. Definisinya adalah sebagai berikut.

- Pengembangan adalah mengembangkan teorema Marion Walter, dimana teorema Marion Walter hanya membagi sisi-sisi segitiga menjadi tiga bagian sama panjang. Dalam penelitian ini sisi-sisi segitiga dibagi menjadi k bagian sama panjang, dimana k adalah bilangan asli ganjil.

- Sistem koordinat adalah suatu metode untuk menentukan letak suatu titik dalam grafik yang terdiri dari 2 garis saling tegak lurus, yaitu satu mendatar (horizontal) disebut sebagai sumbu-x dan yang lain tegak (vertikal) disbut sebagai sumbu-y.
- Heksagon adalah suatu bidang datar yang terbentuk dari perpotongan garis yang terbuat dari titik batas dengan sudut yang ada dihadapannya.
- Garis pembagi adalah suatu garis yang menghubungkan titik sudut dengan titik bagi pada sisi segitiga di depannya.
- Titik bagi adalah suatu titik pada sisi segitiga yang menandakan batas pembagian.

3.3 Jenis Penelitian

Jenis yang digunakan dalam penelitian ini adalah jenis penelitian deskriptif aksiomatik, yaitu penerapan teorema/aksioma yang telah ada kemudian diterapkan pada pengembangan teorema Marion Walter. Menentukan titik koordinat, persamaan garis, menghitung luas segitiga, dan luas heksagon yang digunakan dalam penelitian ini.

BAB 4

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan disajikan hasil penelitian tentang pengembangan teorema Marion Walter. Sebagaimana dijelaskan dimuka bahwa Marion Walter hanya membuktikan sebarang segitiga dimana sisi-sisi di depan sudutnya dibagi menjadi tiga bagian sama panjang. Dalam penelitian ini sisi sebarang segitiga dibagi menjadi lima bagian, tujuh bagian, dan k bagian yang sama panjang, dimana k bilangan ganjil.

Alasan peneliti membagi sisi segitiga menjadi k bagian sama panjang untuk k bilangan ganjil adalah berkenaan dengan hasil observasi yang menunjukkan bahwa bangun bagian dalam yang terbentuk adalah sebuah heksagon, seperti yang ditemukan dalam teorema Marion Walter.

Namun demikian bila k genap maka berdasarkan observasi, heksagon yang terbentuk dipenuhi oleh beberapa segitiga sehingga bangun bagian dalam yang terbentuk tidak berupa heksagon murni. Oleh karena itu, penelitian ini difokuskan pada pembagian dengan k bagian yang sama panjang bila k ganjil.

Penelitian ini diawali dengan membagi masing-masing sisi sebarang segitiga tersebut lalu menentukan koordinat titik pada masing-masing sisi segitiga, yang nantinya akan membentuk heksagon terkecil. Kemudian titik-titik tersebut dihubungkan dengan titik sudut yang ada dihadapannya untuk menentukan persamaan garisnya. Setelah itu menentukan koordinat titik potong garis-garis tersebut yang membentuk heksagon terkecil dan diakhiri dengan mencari rumus luas heksagon tersebut.

Kemudian rumus luas heksagon yang diperoleh diaplikasikan ke segitiga sembarang, samakaki dan samasisi, dengan cara menentukan titik-titik koordinat sudut segitiga. Sudut koordinat diletakkan pada sumbu koordinat dikarenakan lebih memudahkan penelitian.

Beberapa hasil penelitian ini, untuk pembagian sisi segitiga kedalam lima, tujuh, dan k bagian sama panjang, dimana k ganjil, disajikan dalam sebuah teorema, lemma atau korolari. Teorema, lemma atau korolari baru yang ditemukan dalam penelitian ditandai dengan simbol "diamond $\diamondsuit$". Terdapat tiga lemma baru dan tiga teorema baru yang ditemukan, dan selengkapnya akan dijelaskan dalam bagian berikut.

4.1 Sebarang Segitiga yang Masing-masing Sisinya Dibagi Lima Bagian Sama Panjang

Berdasarkan teorema Marion Walter yang disebutkan pada bab 2 sebelumnya, maka berikut ini disajikan beberapa lema dan teorema yang terkait dengan hasil penelitian dengan pembagian sisi-sisi segitiga menjadi lima bagian sama panjang.

♦ **Lemma 4.1.1** *Jika sebarang segitiga ABC, masing-masing sisinya dibagi dengan ruas garis yang menghubungkan titik-titik sudut $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, dan $C(x_3, y_3)$ di depannya dengan titik-titik pada sisi segitiga menjadi lima bagian yang sama panjang, maka akan terbentuk heksagon terkecil $DEFGHI$ dengan titik-titik koordinat sebagai berikut*
$D(x, y)$:

$$x = \left(\frac{1}{\xi}\right)\Big((2x_3 + 3x_1)(5y_2 - 2y_3 - 3y_1)(5x_1 - 2x_3 - 3x_2) - (2x_3 + 3x_2)$$
$$(5y_2 - 2y_3 - 3y_1)(5x_2 - 2x_3 - 3x_1) + (3y_2 - 3y_1)(5x_2 - 2x_3 - 2x_1)$$
$$(5x_1 - 2x_3 - 3x_2)\Big)$$

dimana $\xi = 5((5y_2 - 2y_3 - 3y_1)(5x_1 - 2x_3 - 3x_2) - (5y_1 - 2y_3 - 3y_2)(5x_2 - 2x_3 - 3x_1))$

$$y = \frac{1}{a}\Big((2x_3 + 3x_1)(5y_2 - 2y_3 - 3y_1)^2(5x_1 - 2x_3 - 3x_2) - (2x_3 + 3x_2)$$
$$(5y_2 - 2y_3 - 3y_1)(5x_2 - 2x_3 - 3x_1)(5y_2 - 2y_3 - 3y_1) + (3y_2 - 3y_1)$$
$$(5x_2 - 2x_3 - 3x_1)(5x_1 - 2x_3 - 3x_2)(5y_2 - 2y_3 - 3y_1) - (2x_3 + 3x_1)$$
$$(5y_2 - 2y_3 - 3y_1)((5y_2 - 2y_3 - 3y_1)(5x_1 - 2x_3 - 3x_2) - (5y_1 - 2y_3 - 3y_2)$$
$$(5x_2 - 2x_3 - 3x_1)) + (5x_2 - 2x_3 - 3x_1)(2y_3 + 3y_1)((5y_2 - 2y_3 - 3y_1)$$
$$(5x_1 - 2x_3 - 3x_2) - (5y_1 - 2y_3 - 3y_2)(5x_2 - 2x_3 - 3x_1))\Big)$$

dimana $a = 5(5x_2 - 2x_3 - 3x_1)((5y_2 - 2y_3 - 3y_1)(5x_1 - 2x_3 - 3x_2) - (5y_1 - 2y_3 - 3y_2)(5x_2 - 2x_3 - 3x_1))$
$E(x, y)$:

$$x = \left(\frac{1}{o}\right)((2x_3 + 3x_2)(5y_1 - 2y_3 - 3y_2)(5x_3 - 2x_1 - 3x_2) - (2x_1 + 3x_2)(5y_3 - 2y_1 - 3y_2)(5x_1 - 2x_3 - 3x_2) + (2y_1 - 2y_3)(5x_1 - 2x_3 - 3x_2)(5x_3 - 2x_1 - 3x_2))$$

dimana $o = 5((5y_1 - 2y_3 - 3y_2)(5x_3 - 2x_1 - 3x_2) - (5y_3 - 2y_1 - 3y_2)(5x_1 - 2x_3 - 3x_2))$

$$y = \frac{1}{b}((2x_3 + 3x_2)(5y_1 - 2y_3 - 3y_2)^2(5x_3 - 2x_1 - 3x_2) - (2x_1 + 3x_2)(5y_3 - 2y_1 - 3y_2)(5x_1 - 2x_3 - 3x_2)(5y_1 - 2y_3 - 3y_2) + (2y_1 - 2y_3)(5x_1 - 2x_3 - 3x_2)(5x_3 - 2x_1 - 3x_2)(5y_1 - 2y_3 - 3y_2) - (2x_3 + 3x_2)(5y_1 - 2y_3 - 3y_2)((5y_1 - 2y_3 - 3y_2)(5x_3 - 2x_1 - 3x_2) - (5y_3 - 2y_1 - 3y_2)(5x_1 - 2x_3 - 3x_2)) + (5x_1 - 2x_3 - 3x_2)(2y_3 + 3y_2)((5y_1 - 2y_3 - 3y_2)(5x_3 - 2x_1 - 3x_2) - (5y_3 - 2y_1 - 3y_2)(5x_1 - 2x_3 - 3x_2)))$$

dimana $b = 5(5x_1 - 2x_3 - 3x_2)((5y_1 - 2y_3 - 3y_2)(5x_3 - 2x_1 - 3x_2) - (5y_3 - 2y_1 - 3y_2)(5x_1 - 2x_3 - 3x_2))$
$F(x, y)$:

$$x = \left(\frac{1}{\pi}\right)((3x_3 + 2x_1)(5y_2 - 3y_3 - 2y_1)(5x_3 - 2x_1 - 3x_2) - (2x_1 + 3x_2)(5y_3 - 2y_1 - 3y_2)(5x_2 - 3x_3 - 2x_1) + (3y_2 - 3y_3)(5x_3 - 2x_1 - 3x_2)(5x_2 - 3x_3 - 2x_1))$$

dimana $\pi = 5((5y_2 - 3y_3 - 2y_1)(5x_3 - 2x_1 - 3x_2) - (5y_3 - 2y_1 - 3y_2)(5x_2 - 3x_3 - 2x_1))$

$$y = \frac{1}{c}((3x_3 + 2x_1)(5y_2 - 3y_3 - 2y_1)^2(5x_3 - 2x_1 - 3x_2) - (2x_1 + 3x_2)(5y_3 - 2y_1 - 3y_2)(5x_2 - 3x_3 - 2x_1)(5y_2 - 3y_3 - 2y_1) + (3y_2 - 3y_3)(5x_3 - 2x_1 - 3x_2)(5x_2 - 3x_3 - 2x_1)(5y_2 - 3y_3 - 2y_1) - (3x_3 + 2x_1)(5y_2 - 3y_3 - 2y_1)((5y_2 - 3y_3 - 2y_1)(5x_3 - 2x_1 - 3x_2) - (5y_3 - 2y_1 - 3y_2)(5x_2 - 3x_3 - 2x_1)) + (5x_2 - 3x_3 - 2x_1)(3y_3 + 2y_1)((5y_2 - 3y_3 - 2y_1)(5x_3 - 2x_1 - 3x_2) - (5y_3 - 2y_1 - 3y_2)(5x_2 - 3x_3 - 2x_1)))$$

dimana $c = 5(5x_2 - 3x_3 - 2x_1)((5y_2 - 3y_3 - 2y_1)(5x_3 - 2x_1 - 3x_2) - (5y_3 - 2y_1 - 3y_2)(5x_2 - 3x_3 - 2x_1))$
$G(x, y)$:

$$x = \left(\frac{1}{\varpi}\right)((3x_3 + 2x_1)(5y_2 - 3y_3 - 2y_1)(5x_1 - 3x_3 - 2x_2) - (3x_3 + 2x_2)(5y_1 - 3y_3 - 2y_2)(5x_2 - 3x_3 - 2x_1) + (2y_2 - 2y_1)(5x_2 - 3x_3 - 2x_1)(5x_1 - 3x_3 - 2x_2))$$

dimana $\varpi = 5((5y_2-3y_3-2y_1)(5x_1-3x_3-2x_2)-(5y_1-3y_3-2y_2)(5x_2-3x_3-2x_1))$

$$y = \frac{1}{d}((3x_3+2x_1)(5y_2-3y_3-2y_1)^2(5x_1-3x_3-2x_2)-(3x_3+2x_2)$$
$$(5y_1-3y_3-2y_2)(5x_2-3x_3-2x_1)(5y_2-3y_3-2y_1)+(2y_2-2y_1)$$
$$(5x_2-3x_3-2x_1)(5x_1-3x_3-2x_2)(5y_2-3y_3-2y_1)-(3x_3+2x_1)$$
$$(5y_2-3y_3-2y_1)((5y_2-3y_3-2y_1)(5x_1-3x_3-2x_2)-(5y_1-3y_3-2y_2)$$
$$(5x_2-3x_3-2x_1))+(5x_2-3x_3-2x_1)(3y_3+2y_1)((5y_2-3y_3-2y_1)$$
$$(5x_1-3x_3-2x_2)-(5y_1-3y_3-2y_2)(5x_2-3x_3-2x_1)))$$

dimana $d = 5(5x_2-3x_3-2x_1)((5y_2-3y_3-2y_1)(5x_1-3x_3-2x_2)-(5y_1-3y_3-2y_2)$
$(5x_2-3x_3-2x_1))$
$H(x,y)$:

$$x = \left(\frac{1}{\rho}\right)((3x_1+2x_2)(5y_3-3y_1-2y_2)(5x_1-3x_3-2x_2)-(3x_3+2x_2)$$
$$(5y_1-3y_3-2y_2)(5x_3-3x_1-2x_2)+(3y_3-3y_1)(5x_3-3x_1-2x_2)$$
$$(5x_1-3x_3-2x_2))$$

dimana $\rho = 5((5y_3-3y_1-2y_2)(5x_1-3x_3-2x_2)-(5y_1-3y_3-2y_2)(5x_3-3x_1-2x_2))$

$$y = \frac{1}{e}((3x_1+2x_2)(5y_3-3y_1-2y_2)^2(5x_1-3x_3-2x_2)-(3x_3+2x_2)$$
$$(5y_1-3y_3-2y_2)(5x_3-3x_1-2x_2)(5y_3-3y_1-2y_2)+(3y_3-3y_1)$$
$$(5x_3-3x_1-2x_2)(5x_1-3x_3-2x_2)(5y_3-3y_1-2y_2)-(3x_1+2x_2)$$
$$(5y_3-3y_1-2y_2)((5y_3-3y_1-2y_2)(5x_1-3x_3-2x_2)-(5y_1-3y_3-2y_2)$$
$$(5x_3-3x_1-2x_2))+(5x_3-3x_1-2x_2)(3y_1+2y_2)((5y_3-3y_1-2y_2)$$
$$(5x_1-3x_3-2x_2)-(5y_1-3y_3-2y_2)(5x_3-3x_1-2x_2)))$$

dimana $e = 5(5x_3-3x_1-2x_2)((5y_3-3y_1-2y_2)(5x_1-3x_3-2x_2)-(5y_1-3y_3-2y_2)$
$(5x_3-3x_1-2x_2))$
$I(x,y)$:

$$x = \left(\frac{1}{\varrho}\right)((3x_1+2x_2)(5y_3-3y_1-2y_2)(5x_2-3x_1-2x_3)-(2x_3+3x_1)$$
$$(5y_2-2y_3-3y_1)(5x_3-3x_1-2x_2)+(2y_3-2y_2)(5x_3-3x_1-2x_2)$$
$$(5x_2-2x_3-3x_1))$$

dimana $\varrho = 5((5y_3-3y_1-2y_2)(5x_2-2x_3-3x_1)-(5y_2-2y_3-3y_1)(5x_3-3x_1-2x_2))$

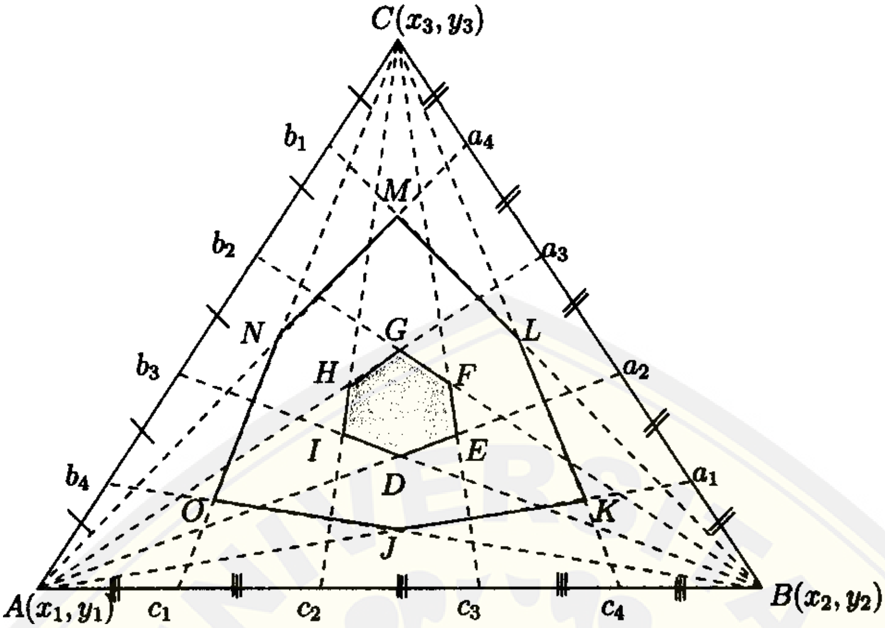
$$y = \frac{1}{f}((3x_1+2x_2)(5y_3-3y_1-2y_2)^2(5x_2-3x_1-2x_3)-(2x_3+3x_1)$$
$$(5y_2-2y_3-3y_1)(5x_3-3x_1-2x_2)(5y_3-3y_1-2y_2)+(2y_3-2y_2)$$
$$(5x_3-3x_1-2x_2)(5x_2-2x_3-3x_1)(5y_3-3y_1-2y_2)-(3x_1+2x_2)$$
$$(5y_3-3y_1-2y_2)((5y_3-3y_1-2y_2)(5x_2-2x_3-3x_1)-(5y_2-2y_3-3y_1)$$
$$(5x_3-3x_1-2x_2))+(5x_3-3x_1-2x_2)(3y_1+2y_2)((5y_3-3y_1-2y_2)$$
$$(5x_2-2x_3-3x_1)-(5y_2-2y_3-3y_1)(5x_3-3x_1-2x_2)))$$

dimana $f = 5(5x_3-3x_1-2x_2)((5y_3-3y_1-2y_2)(5x_2-2x_3-3x_1)-(5y_2-2y_3-3y_1)$ $(5x_3-3x_1-2x_2))$

Bukti. Misal diberikan sebarang segitiga ABC, sebagaimana terlihat pada Gambar 4.1. Bila masing-masing sisi segitiga dibagi dengan ruas garis yang menghubungkan titik-titik sudut $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, dan $C(x_3, y_3)$ di depannya dengan titik-titik pada sisi segitiga menjadi lima bagian sama panjang maka terbentuk dua heksagon, yaitu heksagon dalam (terkecil) dan luar. Akan dibuktikan bahwa titik-titik koordinat heksagon terkecil adalah seperti yang disebutkan diatas.

Langkah awal adalah menentukan titik koordinat dari titik batas masing-masing sisi segitiga yang membentuk heksagon terkecil

$$x_{c_2} = x_1 + \frac{2}{5}(x_2 - x_1) = \frac{3}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 \quad , \quad y_{c_2} = y_1 + \frac{2}{5}(y_2 - y_1) = \frac{3}{5}y_1 + \frac{2}{5}y_2$$
$$x_{c_3} = x_1 + \frac{3}{5}(x_2 - x_1) = \frac{2}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_2 \quad , \quad y_{c_3} = y_1 + \frac{3}{5}(y_2 - y_1) = \frac{2}{5}y_1 + \frac{3}{5}y_2$$
$$x_{a_2} = x_3 + \frac{3}{5}(x_2 - x_3) = \frac{2}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_2 \quad , \quad y_{a_2} = y_3 + \frac{3}{5}(y_2 - y_3) = \frac{2}{5}y_3 + \frac{3}{5}y_2$$
$$x_{a_3} = x_3 + \frac{2}{5}(x_2 - x_3) = \frac{3}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_2 \quad , \quad y_{a_3} = y_3 + \frac{2}{5}(y_2 - y_3) = \frac{3}{5}y_3 + \frac{2}{5}y_2$$
$$x_{b_2} = x_3 + \frac{2}{5}(x_1 - x_3) = \frac{3}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_1 \quad , \quad y_{b_2} = y_3 + \frac{2}{5}(y_1 - y_3) = \frac{3}{5}y_3 + \frac{2}{5}y_1$$
$$x_{b_3} = x_3 + \frac{3}{5}(x_1 - x_3) = \frac{2}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_1 \quad , \quad y_{b_3} = y_3 + \frac{3}{5}(y_1 - y_3) = \frac{2}{5}y_3 + \frac{3}{5}y_1$$



Gambar 4.1: Ilustrasi sebarang segitiga dimana masing-masing sisi dibagi menjadi lima bagian sama panjang

Kemudian menentukan persamaan garis yang dibuat dari titik-titik batas tersebut dengan sudut yang ada dihadapannya, yang nantinya akan membentuk heksagon terkecil

$$\begin{aligned}
\textit{Garis } Aa_2 \quad &: \quad \frac{x - \frac{2}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_2}{x_1 - \frac{2}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_2} = \frac{y - \frac{2}{5}y_3 - \frac{3}{5}y_2}{y_1 - \frac{2}{5}y_3 - \frac{3}{5}y_2} \\
&\Leftrightarrow \quad y = \left(\frac{x - \frac{2}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_2}{x_1 - \frac{2}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_2}\right)(y_1 - \frac{2}{5}y_3 - \frac{3}{5}y_2) + \frac{2}{5}y_3 + \frac{3}{5}y_2 \\
\textit{Garis } Aa_3 \quad &: \quad \frac{x - \frac{3}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_2}{x_1 - \frac{3}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_2} = \frac{y - \frac{3}{5}y_3 - \frac{2}{5}y_2}{y_1 - \frac{3}{5}y_3 - \frac{2}{5}y_2} \\
&\Leftrightarrow \quad \left(y = \frac{x - \frac{3}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_2}{x_1 - \frac{3}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_2}\right)(y_1 - \frac{3}{5}y_3 - \frac{2}{5}y_2) + \frac{3}{5}y_3 + \frac{2}{5}y_2
\end{aligned}$$

$$\textit{Garis } Bb_2 \quad : \quad \frac{x - \frac{3}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_1}{x_2 - \frac{3}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_1} = \frac{y - \frac{3}{5}y_3 - \frac{2}{5}y_1}{y_2 - \frac{3}{5}y_3 - \frac{2}{5}y_1}$$

$$\Leftrightarrow \; y = \left(\frac{x - \frac{3}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_1}{x_2 - \frac{3}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_1}\right)(y_2 - \frac{3}{5}y_3 - \frac{2}{5}y_1) + \frac{3}{5}y_3 + \frac{2}{5}y_1$$

$$\textit{Garis } Bb_3 \quad : \quad \frac{x - \frac{2}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_1}{x_2 - \frac{2}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_1} = \frac{y - \frac{2}{5}y_3 - \frac{3}{5}y_1}{y_2 - \frac{2}{5}y_3 - \frac{3}{5}y_1}$$

$$\Leftrightarrow \; y = \left(\frac{x - \frac{2}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_1}{x_2 - \frac{2}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_1}\right)(y_2 - \frac{2}{5}y_3 - \frac{3}{5}y_1) + \frac{2}{5}y_3 + \frac{3}{5}y_1$$

$$\textit{Garis } Cc_2 \quad : \quad \frac{x - \frac{3}{5}x_1 - \frac{2}{5}x_2}{x_3 - \frac{3}{5}x_1 - \frac{2}{5}x_2} = \frac{y - \frac{3}{5}y_1 - \frac{2}{5}y_2}{y_3 - \frac{3}{5}y_1 - \frac{2}{5}y_2}$$

$$\Leftrightarrow \; y = \left(\frac{x - \frac{3}{5}x_1 - \frac{2}{5}x_2}{x_3 - \frac{3}{5}x_1 - \frac{2}{5}x_2}\right)(y_3 - \frac{3}{5}y_1 - \frac{2}{5}y_2) + \frac{3}{5}y_1 + \frac{2}{5}y_2$$

$$\textit{Garis } Cc_3 \quad : \quad \frac{x - \frac{2}{5}x_1 - \frac{3}{5}x_2}{x_3 - \frac{2}{5}x_1 - \frac{3}{5}x_2} = \frac{y - \frac{2}{5}y_1 - \frac{3}{5}y_2}{y_3 - \frac{2}{5}y_1 - \frac{3}{5}y_2}$$

$$\Leftrightarrow \; y = \left(\frac{x - \frac{2}{5}x_1 - \frac{3}{5}x_2}{x_3 - \frac{2}{5}x_1 - \frac{3}{5}x_2}\right)(y_3 - \frac{2}{5}y_1 - \frac{3}{5}y_2) + \frac{2}{5}y_1 + \frac{3}{5}y_2$$

Setelah diketahui persamaan garis, langkah selanjutnya adalah menentukan koordinat titik heksagon terkecil. Titik-titik yang membentuk heksagon terkecil merupakan hasil perpotongan antara garis-garis tersebut.

Titik D adalah perpotongan antara garis Bb_3 dengan Aa_2 sehingga

$$\begin{aligned} & y_{Bb3} = y_{Aa2} \\ \Leftrightarrow \quad & \left(\frac{x - \frac{2}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_1}{x_2 - \frac{2}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_1}\right)(y_2 - \frac{2}{5}y_3 - \frac{3}{5}y_1) + \frac{2}{5}y_3 + \frac{3}{5}y_1 = \\ & \left(\frac{x - \frac{2}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_2}{x_1 - \frac{2}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_2}\right)(y_1 - \frac{2}{5}y_3 - \frac{3}{5}y_2) + \frac{2}{5}y_3 + \frac{3}{5}y_2 \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{x}{\frac{5x_2-2x_3-3x_1}{5}}\right)\left(\frac{5y_2-2y_3-3y_1}{5}\right)-\left(\frac{\frac{2x_3+3x_1}{5}}{\frac{5x_2-2x_3-3x_1}{5}}\right)\left(\frac{5y_2-2y_3-3y_1}{5}\right)=$$
$$\left(\frac{x}{\frac{5x_1-2x_3-3x_2}{5}}\right)\left(\frac{5y_1-2y_3-3y_2}{5}\right)-\left(\frac{\frac{2x_3+3x_2}{5}}{\frac{5x_1-2x_3-3x_2}{5}}\right)\left(\frac{5y_2-2y_3-3y_1}{5}\right)+$$
$$\frac{3y_2-3y_1}{5}$$

$$\Leftrightarrow \quad x=\left(\frac{1}{\xi}\right)\big((2x_3+3x_1)(5y_2-2y_3-3y_1)(5x_1-2x_3-3x_2)-(2x_3+3x_2)$$
$$(5y_2-2y_3-3y_1)(5x_2-2x_3-3x_1)+(3y_2-3y_1)(5x_2-2x_3-2x_1)$$
$$(5x_1-2x_3-3x_2)\big) \qquad (4.2)$$

dimana

$$\xi=5((5y_2-2y_3-3y_1)(5x_1-2x_3-3x_2)-(5y_1-2y_3-3y_2)(5x_2-2x_3-3x_1))$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.2) ke dalam (4.1)

$$y_{Bt3}=\left(\frac{x-\frac{2}{5}x_3-\frac{3}{5}x_1}{x_2-\frac{2}{5}x_3-\frac{3}{5}x_1}\right)(y_2-\frac{2}{5}y_3-\frac{3}{5}y_1)+\frac{2}{5}y_3+\frac{3}{5}y_1$$
$$\Leftrightarrow \quad y=\frac{1}{a}\Big((2x_3+3x_1)(5y_2-2y_3-3y_1)^2(5x_1-2x_3-3x_2)-(2x_3+3x_2)$$
$$(5y_2-2y_3-3y_1)(5x_2-2x_3-3x_1)(5y_2-2y_3-3y_1)+(3y_2-3y_1)$$
$$(5x_2-2x_3-3x_1)(5x_1-2x_3-3x_2)(5y_2-2y_3-3y_1)-(2x_3+3x_1)$$
$$(5y_2-2y_3-3y_1)((5y_2-2y_3-3y_1)(5x_1-2x_3-3x_2)-(5y_1-2y_3-3y_2)$$
$$(5x_2-2x_3-3x_1))+(5x_2-2x_3-3x_1)(2y_3+3y_1)((5y_2-2y_3-3y_1)$$
$$(5x_1-2x_3-3x_2)-(5y_1-2y_3-3y_2)(5x_2-2x_3-3x_1))\Big) \qquad (4.3)$$

Dimana

$$a = 5(5x_2-2x_3-3x_1)((5y_2-2y_3-3y_1)(5x_1-2x_3-3x_2)-(5y_1-2y_3-3y_2)$$
$$(5x_2-2x_3-3x_1))$$

Titik E adalah perpotongan antara garis Aa_2 dengan Cc_3 sehingga

$$y_{Aa2} = y_{Cc3} \tag{4.4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{x - \frac{2}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_2}{x_1 - \frac{2}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_2}\right)(y_1 - \frac{2}{5}y_3 - \frac{3}{5}y_2) + \frac{2}{5}y_3 + \frac{3}{5}y_2 =$$
$$\left(\frac{x - \frac{2}{5}x_1 - \frac{3}{5}x_2}{x_3 - \frac{2}{5}x_1 - \frac{3}{5}x_2}\right)(y_3 - \frac{2}{5}y_1 - \frac{3}{5}y_2) + \frac{2}{5}y_1 + \frac{3}{5}y_2$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{x}{\frac{5x_1-2x_3-3x_2}{5}}\right)\left(\frac{5y_1 - 2y_3 - 3y_2}{5}\right) - \left(\frac{\frac{2x_3+3x_2}{5}}{\frac{5x_1-2x_3-3x_2}{5}}\right)\left(\frac{5y_1 - 2y_3 - 3y_2}{5}\right) =$$
$$\left(\frac{x}{\frac{5x_3-2x_1-3x_2}{5}}\right)\left(\frac{5y_3 - 2y_1 - 3y_2}{5}\right) - \left(\frac{\frac{2x_1+3x_2}{5}}{\frac{5x_3-2x_1-3x_2}{5}}\right)\left(\frac{5y_3 - 2y_1 - 3y_2}{5}\right) +$$
$$\frac{2y_1 - 2y_3}{5}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \left(\frac{1}{o}\right)((2x_3 + 3x_2)(5y_1 - 2y_3 - 3y_2)(5x_3 - 2x_1 - 3x_2) - (2x_1 + 3x_2)$$
$$(5y_3 - 2y_1 - 3y_2)(5x_1 - 2x_3 - 3x_2) + (2y_1 - 2y_3)(5x_1 - 2x_3 - 3x_2)$$
$$(5x_3 - 2x_1 - 3x_2)) \tag{4.5}$$

Dimana

$o = 5((5y_1 - 2y_3 - 3y_2)(5x_3 - 2x_1 - 3x_2) - (5y_3 - 2y_1 - 3y_2)(5x_1 - 2x_3 - 3x_2))$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.5) ke dalam (4.4)

$$y_{Aa2} = \left(\frac{x - \frac{2}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_2}{x_1 - \frac{2}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_2}\right)(y_1 - \frac{2}{5}y_3 - \frac{3}{5}y_2) + \frac{2}{5}y_3 + \frac{3}{5}y_2$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{b}((2x_3 + 3x_2)(5y_1 - 2y_3 - 3y_2)^2(5x_3 - 2x_1 - 3x_2) - (2x_1 + 3x_2)$$
$$(5y_3 - 2y_1 - 3y_2)(5x_1 - 2x_3 - 3x_2)(5y_1 - 2y_3 - 3y_2) + (2y_1 - 2y_3)$$
$$(5x_1 - 2x_3 - 3x_2)(5x_3 - 2x_1 - 3x_2)(5y_1 - 2y_3 - 3y_2) - (2x_3 + 3x_2)$$
$$(5y_1 - 2y_3 - 3y_2)((5y_1 - 2y_3 - 3y_2)(5x_3 - 2x_1 - 3x_2) - (5y_3 - 2y_1 - 3y_2)$$
$$(5x_1 - 2x_3 - 3x_2)) + (5x_1 - 2x_3 - 3x_2)(2y_3 + 3y_2)((5y_1 - 2y_3 - 3y_2)$$
$$(5x_3 - 2x_1 - 3x_2) - (5y_3 - 2y_1 - 3y_2)(5x_1 - 2x_3 - 3x_2))) \tag{4.6}$$

Dimana

$$b \;=\; 5(5x_1 - 2x_3 - 3x_2)((5y_1 - 2y_3 - 3y_2)(5x_3 - 2x_1 - 3x_2) - (5y_3 - 2y_1 - 3y_2)$$
$$(5x_1 - 2x_3 - 3x_2))$$

Titik F adalah perpotongan antara garis Bb_2 dengan Cc_3 sehingga

$$
\begin{aligned}
& y_{Bb2} = y_{Cc3} && (4.7)\\
\Leftrightarrow\quad & \left(\frac{x - \frac{3}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_1}{x_2 - \frac{3}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_1}\right)(y_2 - \frac{3}{5}y_3 - \frac{2}{5}y_1) + \frac{3}{5}y_3 + \frac{2}{5}y_1 = \\
& \left(\frac{x - \frac{2}{5}x_1 - \frac{3}{5}x_2}{x_3 - \frac{2}{5}x_1 - \frac{3}{5}x_2}\right)(y_3 - \frac{2}{5}y_1 - \frac{3}{5}y_2) + \frac{2}{5}y_1 + \frac{3}{5}y_2 \\
\Leftrightarrow\quad & \left(\frac{x}{\frac{5x_2-3x_3-2x_1}{5}}\right)(\frac{5y_2 - 3y_3 - 2y_1}{5}) - \left(\frac{\frac{3x_3+2x_1}{5}}{\frac{5x_2-3x_3-2x_1}{5}}\right)(\frac{5y_2 - 3y_3 - 2y_1}{5}) = \\
& \left(\frac{x}{\frac{5x_3-2x_1-3x_2}{5}}\right)(\frac{5y_3 - 2y_1 - 3y_2}{5}) - \left(\frac{\frac{2x_1+3x_2}{5}}{\frac{5x_3-2x_1-3x_2}{5}}\right)(\frac{5y_3 - 2y_1 - 3y_2}{5}) + \\
& \frac{3y_2 - 3y_3}{5} \\
\Leftrightarrow\quad & x = \left(\frac{1}{\pi}\right)((3x_3 + 2x_1)(5y_2 - 3y_3 - 2y_1)(5x_3 - 2x_1 - 3x_2) - (2x_1 + 3x_2) \\
& (5y_3 - 2y_1 - 3y_2)(5x_2 - 3x_3 - 2x_1) + (3y_2 - 3y_3)(5x_3 - 2x_1 - 3x_2) \\
& (5x_2 - 3x_3 - 2x_1)) && (4.8)
\end{aligned}
$$

Dimana

$$\pi = 5((5y_2 - 3y_3 - 2y_1)(5x_3 - 2x_1 - 3x_2) - (5y_3 - 2y_1 - 3y_2)(5x_2 - 3x_3 - 2x_1))$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.8) ke dalam (4.7)

$$
\begin{aligned}
& y_{Bb2} = \left(\frac{x - \frac{3}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_1}{x_2 - \frac{3}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_1}\right)(y_2 - \frac{3}{5}y_3 - \frac{2}{5}y_1) + \frac{3}{5}y_3 + \frac{2}{5}y_1 \\
\Leftrightarrow\quad & y = \frac{1}{c}((3x_3 + 2x_1)(5y_2 - 3y_3 - 2y_1)^2(5x_3 - 2x_1 - 3x_2) - (2x_1 + 3x_2) \\
& (5y_3 - 2y_1 - 3y_2)(5x_2 - 3x_3 - 2x_1)(5y_2 - 3y_3 - 2y_1) + (3y_2 - 3y_3) \\
& (5x_3 - 2x_1 - 3x_2)(5x_2 - 3x_3 - 2x_1)(5y_2 - 3y_3 - 2y_1) - (3x_3 + 2x_1) \\
& (5y_2 - 3y_3 - 2y_1)((5y_2 - 3y_3 - 2y_1)(5x_3 - 2x_1 - 3x_2) - (5y_3 - 2y_1 - 3y_2) \\
& (5x_2 - 3x_3 - 2x_1)) + (5x_2 - 3x_3 - 2x_1)(3y_3 + 2y_1)((5y_2 - 3y_3 - 2y_1) \\
& (5x_3 - 2x_1 - 3x_2) - (5y_3 - 2y_1 - 3y_2)(5x_2 - 3x_3 - 2x_1))) && (4.9)
\end{aligned}
$$

Dimana

$$
\begin{aligned}
c \;=\; & 5(5x_2 - 3x_3 - 2x_1)((5y_2 - 3y_3 - 2y_1)(5x_3 - 2x_1 - 3x_2) - (5y_3 - 2y_1 - 3y_2) \\
& (5x_2 - 3x_3 - 2x_1))
\end{aligned}
$$

Titik G adalah perpotongan antara garis Bb_2 dengan Aa_3 sehingga

$$
\begin{aligned}
& y_{Bb2} = y_{Aa3} \qquad (4.10)\\
\Leftrightarrow\ & \left(\frac{x - \frac{3}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_1}{x_2 - \frac{3}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_1}\right)(y_2 - \frac{3}{5}y_3 - \frac{2}{5}y_1) + \frac{3}{5}y_3 + \frac{2}{5}y_1 = \\
& \left(\frac{x - \frac{3}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_2}{x_1 - \frac{3}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_2}\right)(y_1 - \frac{3}{5}y_3 - \frac{2}{5}y_2) + \frac{3}{5}y_3 + \frac{2}{5}y_2 \\
\Leftrightarrow\ & \left(\frac{x}{\frac{5x_2-3x_3-2x_1}{5}}\right)(\frac{5y_2 - 3y_3 - 3y_1}{5}) - \left(\frac{\frac{3x_3+2x_1}{5}}{\frac{5x_2-3x_3-2x_1}{5}}\right)(\frac{5y_2 - 3y_3 - 2y_1}{5}) = \\
& \left(\frac{x}{\frac{5x_1-3x_3-2x_2}{5}}\right)(\frac{5y_1 - 3y_3 - 2y_2}{5}) - \left(\frac{\frac{3x_3+2x_2}{5}}{\frac{5x_1-3x_3-2x_2}{5}}\right)(\frac{5y_1 - 3y_3 - 2y_2}{5}) + \\
& \frac{2y_2 - 2y_1}{5} \\
\Leftrightarrow\ & x = \left(\frac{1}{\varpi}\right)((3x_3 + 2x_1)(5y_2 - 3y_3 - 2y_1)(5x_1 - 3x_3 - 2x_2) - (3x_3 + 2x_2) \\
& (5y_1 - 3y_3 - 2y_2)(5x_2 - 3x_3 - 2x_1) + (2y_2 - 2y_1)(5x_2 - 3x_3 - 2x_1) \\
& (5x_1 - 3x_3 - 2x_2)) \qquad (4.11)
\end{aligned}
$$

Dimana

$$\varpi = 5((5y_2 - 3y_3 - 2y_1)(5x_1 - 3x_3 - 2x_2) - (5y_1 - 3y_3 - 2y_2)(5x_2 - 3x_3 - 2x_1))$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.11) ke dalam (4.10)

$$
\begin{aligned}
& y_{Bb2} = \left(\frac{x - \frac{3}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_1}{x_2 - \frac{3}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_1}\right)(y_2 - \frac{3}{5}y_3 - \frac{2}{5}y_1) + \frac{3}{5}y_3 + \frac{2}{5}y_1 \\
\Leftrightarrow\ & y = \frac{1}{d}((3x_3 + 2x_1)(5y_2 - 3y_3 - 2y_1)^2(5x_1 - 3x_3 - 2x_2) - (3x_3 + 2x_2) \\
& (5y_1 - 3y_3 - 2y_2)(5x_2 - 3x_3 - 2x_1)(5y_2 - 3y_3 - 2y_1) + (2y_2 - 2y_1) \\
& (5x_2 - 3x_3 - 2x_1)(5x_1 - 3x_3 - 2x_2)(5y_2 - 3y_3 - 2y_1) - (3x_3 + 2x_1) \\
& (5y_2 - 3y_3 - 2y_1)((5y_2 - 3y_3 - 2y_1)(5x_1 - 3x_3 - 2x_2) - (5y_1 - 3y_3 - 2y_2) \\
& (5x_2 - 3x_3 - 2x_1)) + (5x_2 - 3x_3 - 2x_1)(3y_3 + 2y_1)((5y_2 - 3y_3 - 2y_1) \\
& (5x_1 - 3x_3 - 2x_2) - (5y_1 - 3y_3 - 2y_2)(5x_2 - 3x_3 - 2x_1))) \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

Dimana

$$
\begin{aligned}
d \ = \ & 5(5x_2 - 3x_3 - 2x_1)((5y_2 - 3y_3 - 2y_1)(5x_1 - 3x_3 - 2x_2) - (5y_1 - 3y_3 - 2y_2) \\
& (5x_2 - 3x_3 - 2x_1))
\end{aligned}
$$

Titik H adalah perpotongan antara garis Cc_2 dengan Aa_3

$$
\begin{aligned}
& y_{Cc2} = y_{Aa3} && (4.13)\\
\Leftrightarrow\ & \left(\frac{x-\frac{3}{5}x_1-\frac{2}{5}x_2}{x_3-\frac{3}{5}x_1-\frac{2}{5}x_2}\right)(y_3-\frac{3}{5}y_1-\frac{2}{5}y_2)+\frac{3}{5}y_1+\frac{2}{5}y_2 = \\
& \left(\frac{x-\frac{3}{5}x_3-\frac{2}{5}x_2}{x_1-\frac{3}{5}x_3-\frac{2}{5}x_2}\right)(y_1-\frac{3}{5}y_3-\frac{2}{5}y_2)+\frac{3}{5}y_3+\frac{2}{5}y_2 \\
\Leftrightarrow\ & \left(\frac{x}{\frac{5x_3-3x_1-2x_2}{5}}\right)(\frac{5y_3-3y_1-2y_2}{5}) - \left(\frac{\frac{3x_1+2x_2}{5}}{\frac{5x_3-3x_1-2x_2}{5}}\right)(\frac{5y_3-3y_1-2y_2}{5}) = \\
& \left(\frac{x}{\frac{5x_1-3x_3-2x_2}{5}}\right)(\frac{5y_1-3y_3-2y_2}{5}) - \left(\frac{\frac{3x_3+2x_2}{5}}{\frac{5x_1-3x_3-2x_2}{5}}\right)(\frac{5y_1-3y_3-2y_2}{5}) + \\
& \frac{3y_3-3y_1}{5} \\
\Leftrightarrow\ & x = \left(\frac{1}{\rho}\right)((3x_1+2x_2)(5y_3-3y_1-2y_2)(5x_1-3x_3-2x_2)-(3x_3+2x_2) \\
& (5y_1-3y_3-2y_2)(5x_3-3x_1-2x_2)+(3y_3-3y_1)(5x_3-3x_1-2x_2) \\
& (5x_1-3x_3-2x_2)) && (4.14)
\end{aligned}
$$

Dimana

$$\rho = 5((5y_3-3y_1-2y_2)(5x_1-3x_3-2x_2)-(5y_1-3y_3-2y_2)(5x_3-3x_1-2x_2))$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.14) ke dalam (4.13)

$$
\begin{aligned}
& y_{Cc2} = \left(\frac{x-\frac{3}{5}x_1-\frac{2}{5}x_2}{x_3-\frac{3}{5}x_1-\frac{2}{5}x_2}\right)(y_3-\frac{3}{5}y_1-\frac{2}{5}y_2)+\frac{3}{5}y_1+\frac{2}{5}y_2 \\
\Leftrightarrow\ & y = \frac{1}{e}((3x_1+2x_2)(5y_3-3y_1-2y_2)^2(5x_1-3x_3-2x_2)-(3x_3+2x_2) \\
& (5y_1-3y_3-2y_2)(5x_3-3x_1-2x_2)(5y_3-3y_1-2y_2)+(3y_3-3y_1) \\
& (5x_3-3x_1-2x_2)(5x_1-3x_3-2x_2)(5y_3-3y_1-2y_2)-(3x_1+2x_2) \\
& (5y_3-3y_1-2y_2)((5y_3-3y_1-2y_2)(5x_1-3x_3-2x_2)-(5y_1-3y_3-2y_2) \\
& (5x_3-3x_1-2x_2))+(5x_3-3x_1-2x_2)(3y_1+2y_2)((5y_3-3y_1-2y_2) \\
& (5x_1-3x_3-2x_2)-(5y_1-3y_3-2y_2)(5x_3-3x_1-2x_2))) && (4.15)
\end{aligned}
$$

Dimana

$$
\begin{aligned}
e \ = \ & 5(5x_3-3x_1-2x_2)((5y_3-3y_1-2y_2)(5x_1-3x_3-2x_2)-(5y_1-3y_3-2y_2) \\
& (5x_3-3x_1-2x_2))
\end{aligned}
$$

Titik I adalah perpotongan antara garis Cc_2 dengan Bb_3 sehingga

$$
\begin{aligned}
& y_{Cc2} = y_{Bb3} \qquad (4.16)\\
\Leftrightarrow\ & \left(\frac{x-\frac{3}{5}x_1-\frac{2}{5}x_2}{x_3-\frac{3}{5}x_1-\frac{2}{5}x_2}\right)(y_3-\frac{3}{5}y_1-\frac{2}{5}y_2)+\frac{3}{5}y_1+\frac{2}{5}y_2 = \\
& \left(\frac{x-\frac{2}{5}x_3-\frac{3}{5}x_1}{x_2-\frac{2}{5}x_3-\frac{3}{5}x_1}\right)(y_2-\frac{2}{5}y_3-\frac{3}{5}y_1)+\frac{2}{5}y_3+\frac{3}{5}y_1\\
\Leftrightarrow\ & \left(\frac{x}{\frac{5x_3-3x_1-2x_2}{5}}\right)(\frac{5y_3-3y_1-2y_2}{5}) - \left(\frac{\frac{3x_1+2x_2}{5}}{\frac{5x_3-3x_1-2x_2}{5}}\right)(\frac{5y_3-3y_1-2y_2}{5}) = \\
& \left(\frac{x}{\frac{5x_2-2x_3-3x_1}{5}}\right)(\frac{5y_2-2y_3-3y_1}{5}) - \left(\frac{\frac{2x_3+3x_1}{5}}{\frac{5x_2-2x_3-3x_1}{5}}\right)(\frac{5y_2-2y_3-3y_1}{5}) + \\
& \frac{2y_3-2y_2}{5}\\
\Leftrightarrow\ & x = \left(\frac{1}{\varrho}\right)((3x_1+2x_2)(5y_3-3y_1-2y_2)(5x_2-3x_1-2x_3)-(2x_3+3x_1)\\
& (5y_2-2y_3-3y_1)(5x_3-3x_1-2x_2)+(2y_3-2y_2)(5x_3-3x_1-2x_2)\\
& (5x_2-2x_3-3x_1)) \qquad (4.17)
\end{aligned}
$$

Dimana

$$\varrho = 5((5y_3-3y_1-2y_2)(5x_2-2x_3-3x_1)-(5y_2-2y_3-3y_1)(5x_3-3x_1-2x_2))$$

$$
\begin{aligned}
& y_{Cc2} = \left(\frac{x-\frac{3}{5}x_1-\frac{2}{5}x_2}{x_3-\frac{3}{5}x_1-\frac{2}{5}x_2}\right)(y_3-\frac{3}{5}y_1-\frac{2}{5}y_2)+\frac{3}{5}y_1+\frac{2}{5}y_2\\
\Leftrightarrow\ & y = \frac{1}{f}((3x_1+2x_2)(5y_3-3y_1-2y_2)^2(5x_2-3x_1-2x_3)-(2x_3+3x_1)\\
& (5y_2-2y_3-3y_1)(5x_3-3x_1-2x_2)(5y_3-3y_1-2y_2)+(2y_3-2y_2)\\
& (5x_3-3x_1-2x_2)(5x_2-2x_3-3x_1)(5y_3-3y_1-2y_2)-(3x_1+2x_2)\\
& (5y_3-3y_1-2y_2)((5y_3-3y_1-2y_2)(5x_2-2x_3-3x_1)-(5y_2-2y_3-3y_1)\\
& (5x_3-3x_1-2x_2))+(5x_3-3x_1-2x_2)(3y_1+2y_2)((5y_3-3y_1-2y_2)\\
& (5x_2-2x_3-3x_1)-(5y_2-2y_3-3y_1)(5x_3-3x_1-2x_2))) \qquad (4.18)
\end{aligned}
$$

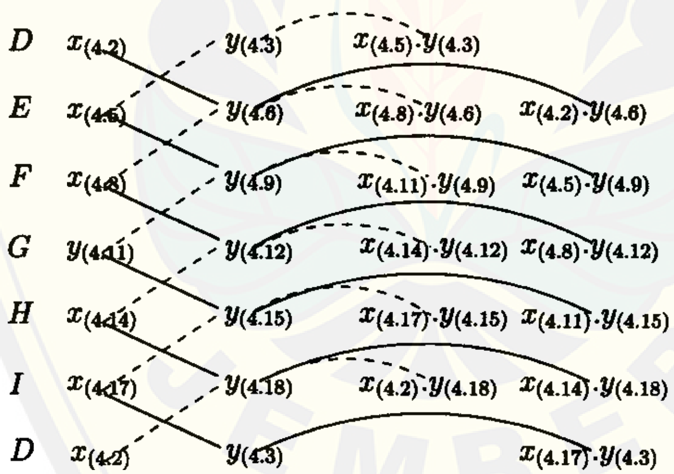
Dimana

$$
\begin{aligned}
f \ = \ & 5(5x_3-3x_1-2x_2)((5y_3-3y_1-2y_2)(5x_2-2x_3-3x_1)-(5y_2-2y_3-3y_1)\\
& (5x_3-3x_1-2x_2))
\end{aligned}
$$

Dengan demikian lemma di atas terbukti. $\square$

◇ **Teorema 4.1.1** *Jika sebuah segitiga sembarang, samakaki, dan samasisi ABC, masing-masing sisinya dibagi dengan ruas garis yang menghubungkan titik-titik sudut $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, dan $C(x_3, y_3)$ di depannya dengan titik-titik pada sisi segitiga menjadi lima bagian yang sama panjang, maka perbandingan luas heksagon terkecil yang terbentuk dengan luas segitiga asal adalah* $1 : 28$.

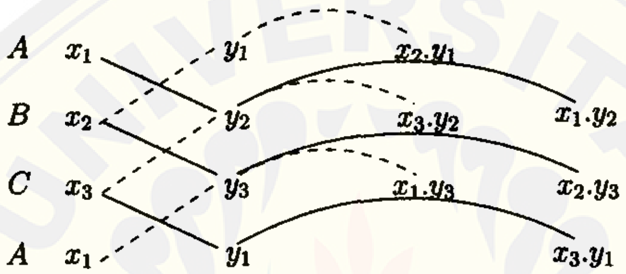
Bukti. Pertama akan dibuktikan bahwa bila sebuah segitiga sembarang, masing-masing sisinya dibagi dengan ruas garis penghubung titik sudut dengan titik-titik pada sisi segitiga di depannya menjadi lima bagian yang sama panjang, maka perbandingan luas heksagon terkecil yang terbentuk dengan luas segitiga asal adalah $1 : 28$. Pada Lemma 4.1.1 sebelumnya telah didapat titik-titik koordinat yang membentuk heksagon terkecil, selanjutnya akan dihitung luas dari heksagon terkecil tersebut. Untuk menghitung luas heksagon tersebut dilakukan dengan cara determinan, seperti yang sudah dipaparkan dalam Bab 2, diagram perhitungan luas heksagon pada Gambar 2.11.



Dari cara tersebut didapat luas heksagon terkecil $DEFGHI$ adalah,

$$\begin{aligned} L_{DEFGHI} &= \Big|\frac{1}{2}\big((x_{(4.5)}.y_{(4.3)} + x_{(4.8)}.y_{(4.6)} + x_{(4.11)}.y_{(4.9)} + x_{(4.14)}.y_{(4.12)} + \\ &\quad x_{(4.17)}.y_{(4.15)} + x_{(4.2)}.y_{(4.18)}) - (x_{(4.2)}.y_{(4.6)} + x_{(4.5)}.y_{(4.9)} + \\ &\quad x_{(4.8)}.y_{(4.12)} + x_{(4.11)}.y_{(4.15)} + x_{(4.14)}.y_{(4.18)} + \\ &\quad x_{(4.17)}.y_{(4.3)})\big)\Big| \end{aligned} \tag{4.19}$$

Setelah didapat luas heksagon terkecil, langkah selanjutnya adalah mencari luas segitiga asal. Untuk mencari luas segitiga asal dilakukan dengan cara yang sama seperti mencari luas heksagon di atas.



Didapat luas segitiga asal ABC adalah,

$$L_{ABC} = \Big|\frac{1}{2}\big((x_2.y_1 + x_3.y_2 + x_1.y_3) - (x_1.y_2 + x_2.y_3 + x_3.y_1)\big)\Big| \tag{4.20}$$

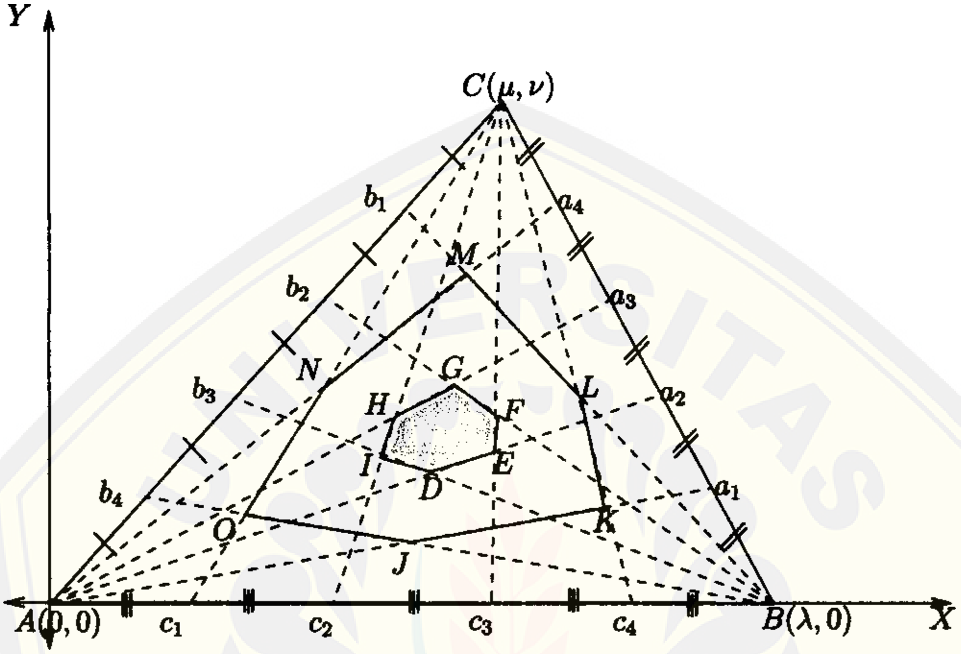
Jadi, perbandingan luas heksagon terkecil dengan segitiga asalnya adalah

$$\frac{L_{DEFGHI}(4.19)}{L_{ABC}(4.20)} \tag{4.21}$$

Pada teorema ini segitiga yang dimaksud adalah segitiga sembarang, maka dapat dimisalkan titik-titik sebarang segitiga sebagai berikut, tampak pada Gambar 4.2:

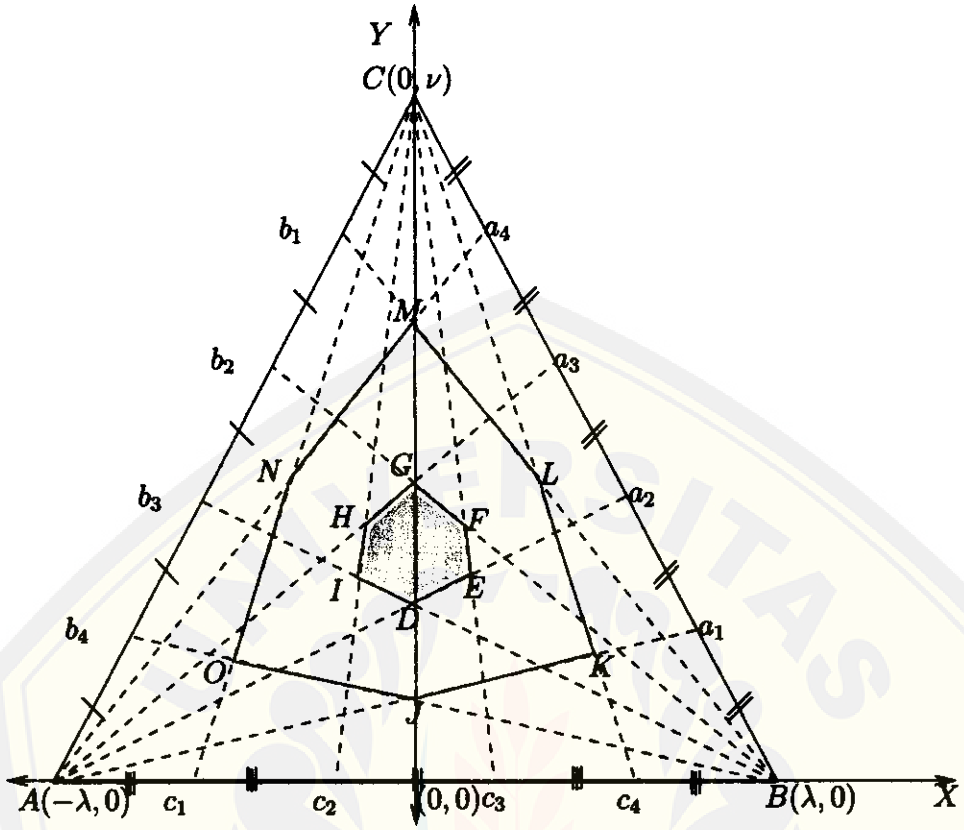
$$\begin{aligned} A(x_1, y_1) &= (0,0) \\ B(x_2, y_2) &= (\lambda, 0) \\ C(x_3, y_3) &= (\mu, \nu) \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan nilai-nilai x_1, x_2, x_3 dan y_1, y_2, y_3 pada persamaan 4.21, maka diperolehlah perbandingan luas heksagon terkecil dengan luas segitiga asal, yaitu 1 : 28. □



Gambar 4.2: Ilustrasi segitiga sembarang dimana masing-masing sisi dibagi menjadi lima bagian sama panjang pada koordinat kartesius

Kedua pada Teorema ini akan dibuktikan bahwa bila sebuah segitiga samakaki, masing-masing sisinya dibagi dengan ruas garis penghubung titik sudut dengan titik-titik pada sisi segitiga di depannya menjadi lima bagian yang sama panjang, maka perbandingan luas heksagon terkecil yang terbentuk dengan luas segitiga asal adalah 1 : 28. Pada Lemma 4.1.1 sebelumnya telah didapat titik-titik koordinat yang membentuk heksagon terkecil, selanjutnya untuk menghitung luas dari heksagon terkecil, segitiga asal, dan perbandingan dari luas heksagon terkecil tersebut dengan segitiga asal dilakukan dengan cara yang sama seperti pembuktian pada segitiga sembarang di atas.



Gambar 4.3: Ilustrasi segitiga samakaki dimana masing-masing sisi dibagi menjadi lima bagian sama panjang pada koordinat kartesius

Pada teorema ini segitiga yang dimaksud adalah samakaki, maka dapat di misalkan titik-titik sebarang segitiga sebagai berikut, tampak pada Gambar 4.3:

$$
\begin{aligned}
A(x_1, y_1) &= (-\lambda, 0) \\
B(x_2, y_2) &= (\lambda, 0) \\
C(x_3, y_3) &= (0, \nu)
\end{aligned}
$$

Dengan mensubstitusikan nilai-nilai x_1, x_2, x_3 dan y_1, y_2, y_3 terhadap persamaan 4.21 pada pembuktian segitiga sembarang di atas, maka diperolehlah perbandingan luas heksagon terkecil dengan luas segitiga asal, yaitu 1 : 28. □

Ketiga pada Teorema ini akan dibuktikan bahwa bila sebuah segitiga samasisi, masing-masing sisinya dibagi dengan ruas garis yang menghubungkan titik-titik sudut $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, dan $C(x_3, y_3)$ di depannya dengan titik-titik pada sisi segitiga menjadi lima bagian yang sama panjang, maka perbandingan luas heksagon terkecil yang terbentuk dengan luas segitiga asal adalah 1 : 28. Pada Lemma 4.1.1 sebelumnya telah didapat titik-titik koordinat yang membentuk heksagon terkecil, selanjutnya untuk menghitung luas dari heksagon terkecil, segitiga asal, dan perbandingan dari luas heksagon terkecil tersebut dengan luas dari segitiga asal dilakukan dengan cara yang sama seperti pada pembuktian segitiga sembarang di atas.

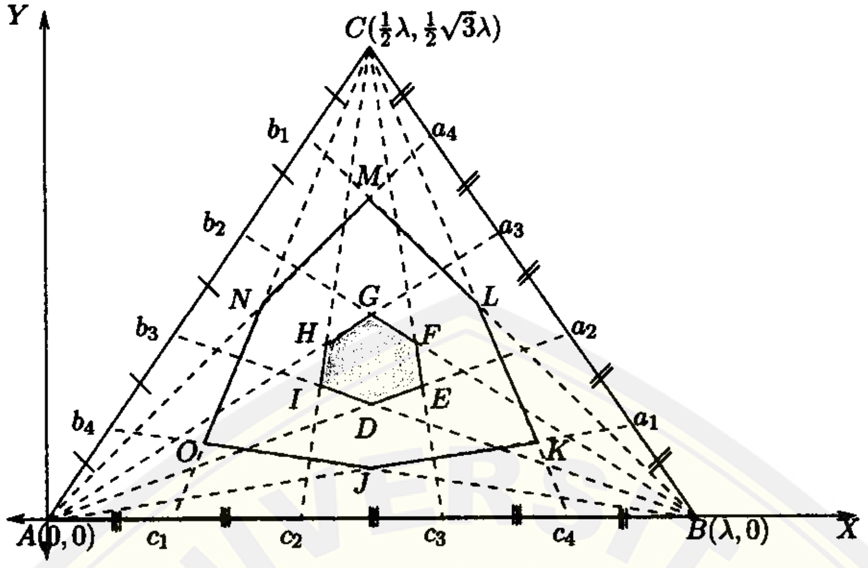
Pada teorema ini segitiga yang dimaksud adalah segitiga samasisi, maka dapat dimisalkan titik-titik sebarang segitiga di atas sebagai berikut, tampak pada Gambar 4.4:

$$\begin{aligned} A(x_1, y_1) &= (0, 0) \\ B(x_2, y_2) &= (\lambda, 0) \end{aligned}$$

Karena segitiga samasisi, maka titik C merupakan hasil rotasi 60^o dari titik B, sehingga didapat titik C sebagai berikut

$$\begin{aligned} C(x_3, y_3) &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos 60^o & \sin 60^o \\ -\sin 60^o & \cos 60^o \end{pmatrix} \\ C(x_3, y_3) &= (\frac{1}{2}\lambda, \frac{1}{2}\sqrt{3}\lambda). \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan nilai-nilai x_1, x_2, x_3 dan y_1, y_2, y_3 terhadap persamaan 4.21 pada pembuktian segitiga sembarang di atas, maka diperolehlah perbandingan luas heksagon terkecil dengan luas segitiga asal, yaitu 1 : 28. □



Gambar 4.4: Ilustrasi segitiga samasisi dimana masing-masing sisi dibagi menjadi lima bagian sama panjang pada koordinat kartesius

4.2 Sebarang Segitiga yang Masing-masing Sisinya Dibagi Tujuh Bagian Sama Panjang

Berdasarkan teorema Marion Walter yang disebutkan pada bab 2 sebelumnya, maka berikut ini disajikan beberapa teorema yang terkait dengan hasil penelitian dengan pembagian sisi-sisi segitiga menjadi tujuh bagian sama panjang.

♦ **Lemma 4.2.1** *Jika sebarang segitiga ABC, masing-masing sisinya dibagi dengan ruas garis yang menghubungkan titik-titik sudut $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, dan $C(x_3, y_3)$ di depannya dengan titik-titik pada sisi segitiga menjadi tujuh bagian yang sama panjang, maka akan terbentuk heksagon terkecil $DEFGHI$, dengan titik-titik koordinat sebagai berikut*
$D(x, y)$:

$$x = \left(\frac{1}{\sigma}\right)\big((3x_3 + 4x_2)(7y_1 - 3y_3 - 4y_2)(7x_2 - 3x_3 - 4x_1) - (3x_3 + 4x_1)$$
$$(7y_2 - 3y_3 - 4y_1)(7x_1 - 3x_3 - 4x_2) + (4y_1 - 4y_2)(7x_1 - 3x_3 - 4x_2)$$
$$(7x_2 - 3x_3 - 4x_1)\big)$$

Dimana $\sigma = 7((7y_1-3y_3-4y_2)(7x_2-3x_3-4x_1)-(7y_2-3y_3-4y_1)(7x_1-3x_3-4x_2))$

$$y = \frac{1}{g}\big((3x_3+4x_2)(7y_1-3y_3-4y_2)^2(7x_2-3x_3-4x_1)-(3x_3+4x_1)$$
$$(7y_2-3y_3-4y_1)(7x_1-3x_3-4x_2)(7y_1-3y_3-4y_2)+(4y_1-4y_2)$$
$$(7x_2-3x_3-4x_1)(7x_1-3x_3-4x_2)(7y_1-3y_3-4y_2)-(3x_3+4x_2)$$
$$(7y_1-3y_3-4y_2)((7y_1-3y_3-4y_2)(7x_2-3x_3-4x_1)-(7y_2-3y_3-4y_1)$$
$$(7x_1-3x_3-4x_2))+(7x_1-3x_3-4x_2)(3y_3+4y_2)((7y_1-3y_3-4y_2)$$
$$(7x_2-3x_3-4x_1)-(7y_2-3y_3-4y_1)(7x_1-3x_3-4x_2))\big)$$

Dimana $g = 7(7x_1-3x_3-4x_2)((7y_1-3y_3-4y_2)(7x_2-3x_3-4x_1)-(7y_2-3y_3-4y_1)$
$(7x_1-3x_3-4x_2))$
$E(x,y)$:

$$x = \left(\frac{1}{\varsigma}\right)\big((3x_1+4x_2)(7y_3-3y_1-4y_2)(7x_1-3x_3-4x_2)-(3x_3+4x_2)$$
$$(7y_1-3y_3-4y_2)(7x_3-3x_1-4x_2)+(3y_3-3y_1)(7x_3-3x_1-4x_2)$$
$$(7x_1-3x_3-4x_2)\big)$$

Dimana $\varsigma = 7((7y_3-3y_1-4y_2)(7x_1-3x_3-4x_2)-(7y_1-3y_3-4y_2)(7x_3-3x_1-4x_2))$

$$y = \frac{1}{h}\big((3x_1+4x_2)(7y_3-3y_1-4y_2)^2(7x_1-3x_3-4x_2)-(3x_3+4x_2)$$
$$(7y_1-3y_3-4y_2)(7x_3-3x_1-4x_2)(7y_3-3y_1-4y_2)+(3y_3-3y_1)$$
$$(7x_3-3x_1-4x_2)(7x_1-3x_3-4x_2)(7y_3-3y_1-4y_2)-(3x_1+4x_2)$$
$$(7y_3-3y_1-4y_2)((7y_3-3y_1-4y_2)(7x_1-3x_3-4x_2)-(7y_1-3y_3-4y_2)$$
$$(7x_3-3x_1-4x_2))+(7x_3-3x_1-4x_2)(3y_1+4y_2)((7y_3-3y_1-4y_2)$$
$$(7x_1-3x_3-4x_2)-(7y_1-3y_3-4y_2)(7x_3-3x_1-4x_2))\big)$$

Dimana $h = 7(7x_3-3x_1-4x_2)((7y_3-3y_1-4y_2)(7x_1-3x_3-4x_2)-(7y_1-3y_3-4y_2)$
$(7x_3-3x_1-4x_2))$
$F(x,y)$:

$$x = \left(\frac{1}{\tau}\right)\big((4x_3+3x_1)(7y_2-4y_3-3y_1)(7x_3-3x_1-4x_2)-(3x_1+4x_2)$$
$$(7y_3-3y_1-4y_2)(7x_2-4x_3-3x_1)+(4y_2-4y_3)(7x_2-4x_3-3x_1)$$
$$(7x_3-3x_1-4x_2)\big)$$

Dimana $\tau = 7((7y_2-4y_3-3y_1)(7x_3-3x_1-4x_2)-(7y_3-3y_1-4y_2)(7x_2-4x_3-3x_1))$

$$y = \frac{1}{i}((4x_3+3x_1)(7y_2-4y_3-3y_1)^2(7x_3-3x_1-4x_2)-(3x_1+4x_2)$$
$$(7y_3-3y_1-4y_2)(7x_2-4x_3-3x_1)(7y_2-4y_3-3y_1)+(4y_2-4y_3)$$
$$(7x_2-4x_3-3x_1)(7x_3-3x_1-4x_2)(7y_2-4y_3-3y_1)-(4x_3+3x_1)$$
$$(7y_2-4y_3-3y_1)((7y_2-4y_3-3y_1)(7x_3-3x_1-4x_2)-(7y_3-3y_1-4y_2)$$
$$(7x_2-4x_3-3x_1))+(7x_2-4x_3-3x_1)(4y_3+3y_1)((7y_2-4y_3-3y_1)$$
$$(7x_3-3x_1-4x_2)-(7y_3-3y_1-4y_2)(7x_2-4x_3-3x_1)))$$

Dimana $i = 7(7x_2-4x_3-3x_1)((7y_2-4y_3-3y_1)(7x_3-3x_1-4x_2)-(7y_3-3y_1-4y_2)$
$(7x_2-4x_3-3x_1))$
$G(x,y)$:

$$x = \left(\frac{1}{\upsilon}\right)((4x_3+3x_1)(7y_2-4y_3-3y_1)(7x_1-4x_3-3x_2)-(4x_3+3x_2)$$
$$(7y_1-4y_3-3y_2)(7x_2-4x_3-3x_1)+(3y_2-3y_1)(7x_2-4x_3-3x_1)$$
$$(7x_1-4x_3-3x_2))$$

Dimana $\upsilon = 7((7y_2-4y_3-3y_1)(7x_1-4x_3-3x_2)-(7y_1-4y_3-3y_2)(7x_2-4x_3-3x_1))$

$$y = \frac{1}{j}((4x_3+3x_1)(7y_2-4y_3-3y_1)^2(7x_1-4x_3-3x_2)-(4x_3+3x_2)$$
$$(7y_1-4y_3-3y_2)(7x_2-4x_3-3x_1)(7y_2-4y_3-3y_1)+(3y_2-3y_1)$$
$$(7x_2-4x_3-3x_1)(7x_1-4x_3-3x_2)(7y_2-4y_3-3y_1)-(4x_3+3x_1)$$
$$(7y_2-4y_3-3y_1)((7y_2-4y_3-3y_1)(7x_1-4x_3-3x_2)-(7y_1-4y_3-3y_2)$$
$$(7x_2-4x_3-3x_1))+(7x_2-4x_3-3x_1)(4y_3+3y_1)((7y_2-4y_3-3y_1)$$
$$(7x_1-4x_3-3x_2)-(7y_1-4y_3-3y_2)(7x_2-4x_3-3x_1)))$$

Dimana $j = 7(7x_2-4x_3-3x_1)((7y_2-4y_3-3y_1)(7x_1-4x_3-3x_2)-(7y_1-4y_3-3y_2)$
$(7x_2-4x_3-3x_1))$
$H(x,y)$:

$$x = \left(\frac{1}{\phi}\right)((4x_3+3x_2)(7y_1-4y_3-3y_2)(7x_3-4x_1-3x_2)-(4x_1+3x_2)$$
$$(7y_3-4y_1-3y_2)(7x_1-4x_3-3x_2)+(4y_1-4y_3)(7x_1-4x_3-3x_2)$$
$$(7x_3-4x_1-3x_2))$$

Dimana $\phi = 7((7y_1-4y_3-3y_2)(7x_3-4x_1-3x_2)-(7y_3-4y_1-3y_2)(7x_1-4x_3-3x_2))$

$$y = \frac{1}{k}((4x_3+3x_2)(7y_1-4y_3-3y_2)^2(7x_3-4x_1-3x_2)-(4x_1+3x_2)$$
$$(7y_3-4y_1-3y_2)(7x_1-4x_3-3x_2)(7y_1-4y_3-3y_2)+(4y_1-4y_2)$$
$$(7x_1-4x_3-3x_2)(7x_3-4x_1-3x_2)(7y_1-4y_3-3y_2)-(4x_3+3x_2)$$
$$(7y_1-4y_3-3y_2)((7y_1-4y_3-3y_2)(7x_3-4x_1-3x_2)-(7y_3-4y_1-3y_2)$$
$$(7x_1-4x_3-3x_2))+(7x_1-4x_3-3x_2)(4y_3+3y_2)((7y_1-4y_3-3y_2)$$
$$(7x_3-4x_1-3x_2)-(7y_3-4y_1-3y_2)(7x_1-4x_3-3x_2)))$$

Dimana $k = 7(7x_1-4x_3-3x_2)((7y_1-4y_3-3y_2)(7x_3-4x_1-3x_2)-(7y_3-4y_1-3y_2)$
$(7x_1-4x_3-3x_2))$
$I(x,y)$:

$$x = \left(\frac{1}{\chi}\right)((4x_1+3x_2)(7y_3-4y_1-3y_2)(7x_2-3x_3-4x_1)-(3x_3+4x_1)$$
$$(7y_2-3y_3-4y_1)(7x_3-4x_1-3x_2)+(3y_3-3y_2)(7x_3-4x_1-3x_2)$$
$$(7x_2-3x_3-4x_1))$$

Dimana $\chi = 7((7y_3-4y_1-3y_2)(7x_2-3x_3-4x_1)-(7y_2-3y_3-4y_1)(7x_3-4x_1-3x_2))$

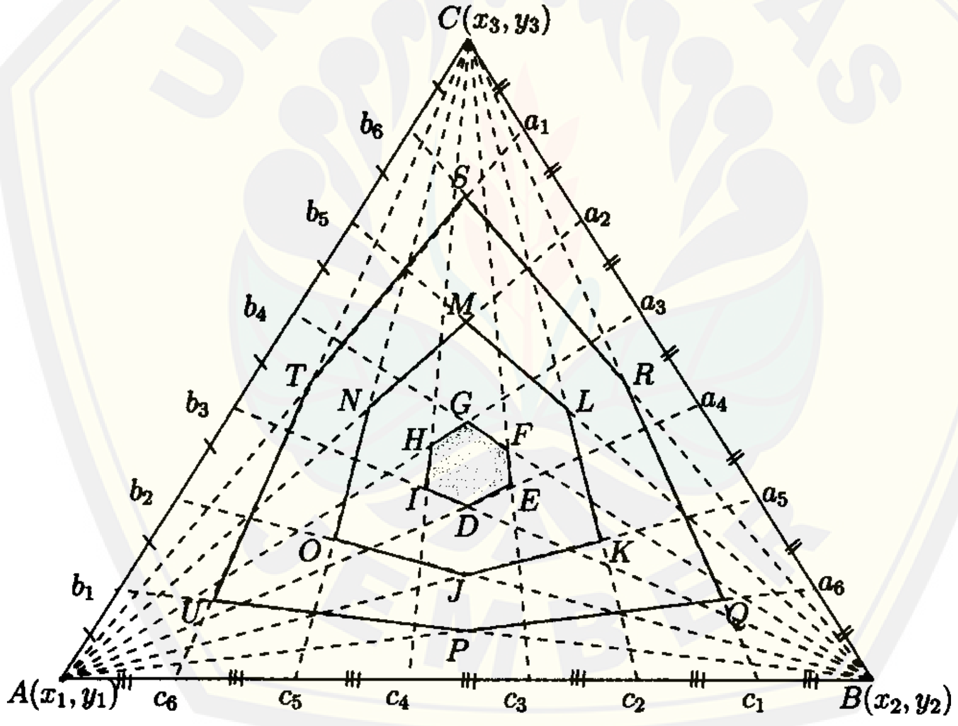
$$y = \frac{1}{l}((4x_1+3x_2)(7y_3-4y_1-3y_2)^2(7x_2-3x_3-4x_1)-(3x_3+4x_1)$$
$$(7y_2-3y_3-4y_1)(7x_3-4x_1-3x_2)(7y_3-4y_1-3y_2)+(3y_3-3y_2)$$
$$(7x_3-4x_1-3x_2)(7x_2-3x_3-4x_1)(7y_3-4y_1-3y_2)-(4x_1+3x_2)$$
$$(7y_3-4y_1-3y_2)((7y_3-4y_1-3y_2)(7x_2-3x_3-4x_1)-(7y_2-3y_3-4y_1)$$
$$(7x_3-4x_1-3x_2))+(7x_3-4x_1-3x_2)(4y_1+3y_2)((7y_3-4y_1-3y_2)$$
$$(7x_2-3x_3-4x_1)-(7y_2-3y_3-4y_1)(7x_3-4x_1-3x_2)))$$

Dimana $l = 7(7x_3-4x_1-3x_2)((7y_3-4y_1-3y_2)(7x_2-3x_3-4x_1)-(7y_2-3y_3-4y_1)$
$(7x_3-4x_1-3x_2))$

Bukti. Misal diberikan sebarang segitiga ABC, sebagaimana terlihat pada Gambar 4.5. Bila masing-masing sisi segitiga dibagi dengan ruas garis yang menghubungkan titik-titik sudut $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, dan $C(x_3,y_3)$ di depannya dengan titik-titik pada sisi segitiga menjadi tujuh bagian sama panjang maka terbentuk tiga heksagon, yaitu heksagon dalam (terkecil), heksagon tengah dan heksagon luar. Akan dibuktikan bahwa titik-titik kordinat yang membentuk heksagon terkecil adalah seperti yang disebutkan di atas.

Langkah awal adalah menentukan titik koordinat dari titik batas masing-masing sisi segitiga yang membentuk heksagon terkecil

$$x_{c_3} = x_1 + \frac{3}{7}(x_2 - x_1) = \frac{4}{7}x_1 + \frac{3}{7}x_2 \quad , \quad y_{c_3} = y_1 + \frac{3}{7}(y_2 - y_1) = \frac{4}{7}y_1 + \frac{3}{7}y_2$$
$$x_{c_4} = x_1 + \frac{4}{7}(x_2 - x_1) = \frac{3}{7}x_1 + \frac{4}{7}x_2 \quad , \quad y_{c_4} = y_1 + \frac{4}{7}(y_2 - y_1) = \frac{3}{7}y_1 + \frac{4}{7}y_2$$
$$x_{a_3} = x_3 + \frac{4}{7}(x_2 - x_3) = \frac{3}{7}x_3 + \frac{4}{7}x_2 \quad , \quad y_{a_3} = y_3 + \frac{4}{7}(y_2 - y_3) = \frac{3}{7}y_3 + \frac{4}{7}y_2$$
$$x_{a_4} = x_3 + \frac{3}{7}(x_2 - x_3) = \frac{4}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_2 \quad , \quad y_{a_4} = y_3 + \frac{3}{7}(y_2 - y_3) = \frac{4}{7}y_3 + \frac{3}{7}y_2$$
$$x_{b_3} = x_3 + \frac{3}{7}(x_1 - x_3) = \frac{4}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_1 \quad , \quad y_{b_3} = y_3 + \frac{3}{7}(y_1 - y_3) = \frac{4}{7}y_3 + \frac{3}{7}y_1$$
$$x_{b_4} = x_3 + \frac{4}{7}(x_1 - x_3) = \frac{3}{7}x_3 + \frac{4}{7}x_1 \quad , \quad y_{b_4} = y_3 + \frac{4}{7}(y_1 - y_3) = \frac{3}{7}y_3 + \frac{4}{7}y_1$$



Gambar 4.5: Ilustrasi sebarang segitiga dimana masing-masing sisi dibagi menjadi tujuh bagian sama panjang

Kemudian menentukan persamaan garis yang dibuat dari titik-titik batas tersebut dengan sudut yang ada dihadapannya, yang nantinya akan membentuk heksagon dalam (terkecil)

$$
\begin{aligned}
\textit{Garis } Aa_3 \quad &: \quad \frac{x-\frac{3}{7}x_3-\frac{4}{7}x_2}{x_1-\frac{3}{7}x_3-\frac{4}{7}x_2}=\frac{y-\frac{3}{7}y_3-\frac{4}{7}y_2}{y_1-\frac{3}{7}y_3-\frac{4}{7}y_2}\\
&\Leftrightarrow \quad y=\left(\frac{x-\frac{3}{7}x_3-\frac{4}{7}x_2}{x_1-\frac{3}{7}x_3-\frac{4}{7}x_2}\right)(y_1-\frac{3}{7}y_3-\frac{4}{7}y_2)+\frac{3}{7}y_3+\frac{4}{7}y_2\\
\textit{Garis } Aa_4 \quad &: \quad \frac{x-\frac{4}{7}x_3-\frac{3}{7}x_2}{x_1-\frac{4}{7}x_3-\frac{3}{7}x_2}=\frac{y-\frac{4}{7}y_3-\frac{3}{7}y_2}{y_1-\frac{4}{7}y_3-\frac{3}{7}y_2}\\
&\Leftrightarrow \quad y=\left(\frac{x-\frac{4}{7}x_3-\frac{3}{7}x_2}{x_1-\frac{4}{7}x_3-\frac{3}{7}x_2}\right)(y_1-\frac{4}{7}y_3-\frac{3}{7}y_2)+\frac{4}{7}y_3+\frac{3}{7}y_2\\
\textit{Garis } Bb_3 \quad &: \quad \frac{x-\frac{4}{7}x_3-\frac{3}{7}x_1}{x_2-\frac{4}{7}x_3-\frac{3}{7}x_1}=\frac{y-\frac{4}{7}y_3-\frac{3}{7}y_1}{y_2-\frac{4}{7}y_3-\frac{3}{7}y_1}\\
&\Leftrightarrow \quad y=\left(\frac{x-\frac{4}{7}x_3-\frac{3}{7}x_1}{x_2-\frac{4}{7}x_3-\frac{3}{7}x_1}\right)(y_2-\frac{4}{7}y_3-\frac{3}{7}y_1)+\frac{4}{7}y_3+\frac{3}{7}y_1\\
\textit{Garis } Bb_4 \quad &: \quad \frac{x-\frac{3}{7}x_3-\frac{4}{7}x_1}{x_2-\frac{3}{7}x_3-\frac{4}{7}x_1}=\frac{y-\frac{3}{7}y_3-\frac{4}{7}y_1}{y_2-\frac{3}{7}y_3-\frac{4}{7}y_1}\\
&\Leftrightarrow \quad y=\left(\frac{x-\frac{3}{7}x_3-\frac{4}{7}x_1}{x_2-\frac{3}{7}x_3-\frac{4}{7}x_1}\right)(y_2-\frac{3}{7}y_3-\frac{4}{7}y_1)+\frac{3}{7}y_3+\frac{4}{7}y_1\\
\textit{Garis } Cc_3 \quad &: \quad \frac{x-\frac{4}{7}x_1-\frac{3}{7}x_2}{x_3-\frac{4}{7}x_1-\frac{3}{7}x_2}=\frac{y-\frac{4}{7}y_1-\frac{3}{7}y_2}{y_3-\frac{4}{7}y_1-\frac{3}{7}y_2}\\
&\Leftrightarrow \quad y=\left(\frac{x-\frac{4}{7}x_1-\frac{3}{7}x_2}{x_3-\frac{4}{7}x_1-\frac{3}{7}x_2}\right)(y_3-\frac{4}{7}y_1-\frac{3}{7}y_2)+\frac{4}{7}y_1+\frac{3}{7}y_2\\
\textit{Garis } Cc_4 \quad &: \quad \frac{x-\frac{3}{7}x_1-\frac{4}{7}x_2}{x_3-\frac{3}{7}x_1-\frac{4}{7}x_2}=\frac{y-\frac{3}{7}y_1-\frac{4}{7}y_2}{y_3-\frac{3}{7}y_1-\frac{4}{7}y_2}\\
&\Leftrightarrow \quad y=\left(\frac{x-\frac{3}{7}x_1-\frac{4}{7}x_2}{x_3-\frac{3}{7}x_1-\frac{4}{7}x_2}\right)(y_3-\frac{3}{7}y_1-\frac{4}{7}y_2)+\frac{3}{7}y_1+\frac{4}{7}y_2
\end{aligned}
$$

Setelah diketahui persamaan garis, langkah selanjutnya adalah menentukan koordinat heksagon terkecil. Titik-titik yang membentuk heksagon terkecil merupakan hasil perpotongan antara garis-garis tersebut.

Titik D adalah perpotongan antara garis Aa_3 dengan Bb_4 sehingga

$$
\begin{aligned}
& y_{Aa3} = y_{Bb4} && (4.22)\\
\Leftrightarrow\quad & \left(\frac{x - \frac{3}{7}x_3 - \frac{4}{7}x_2}{x_1 - \frac{3}{7}x_3 - \frac{4}{7}x_2}\right)(y_1 - \frac{3}{7}y_3 - \frac{4}{7}y_2) + \frac{3}{7}y_3 + \frac{4}{7}y_2 = \\
& \left(\frac{x - \frac{3}{7}x_3 - \frac{4}{7}x_1}{x_2 - \frac{3}{7}x_3 - \frac{4}{7}x_1}\right)(y_2 - \frac{3}{7}y_3 - \frac{4}{7}y_1) + \frac{3}{7}y_3 + \frac{4}{7}y_1 \\
\Leftrightarrow\quad & \left(\frac{x}{\frac{7x_1 - 3x_3 - 4x_2}{7}}\right)(\frac{7y_1 - 3y_3 - 4y_2}{7}) - \left(\frac{\frac{3x_3 + 4x_2}{7}}{\frac{7x_1 - 3x_3 - 4x_2}{7}}\right)(\frac{7y_1 - 3y_3 - 4y_2}{7}) = \\
& \left(\frac{x}{\frac{7x_2 - 3x_3 - 4x_1}{7}}\right)(\frac{7y_2 - 3y_3 - 4y_1}{7}) - \left(\frac{\frac{3x_3 + 4x_1}{7}}{\frac{7x_2 - 3x_3 - 4x_1}{7}}\right)(\frac{7y_2 - 3y_3 - 4y_1}{7}) + \\
& \frac{4y_1 - 4y_2}{7} \\
\Leftrightarrow\quad & x = \left(\frac{1}{\sigma}\right)((3x_3 + 4x_2)(7y_1 - 3y_3 - 4y_2)(7x_2 - 3x_3 - 4x_1) - (3x_3 + 4x_1) \\
& (7y_2 - 3y_3 - 4y_1)(7x_1 - 3x_3 - 4x_2) + (4y_1 - 4y_2)(7x_1 - 3x_3 - 4x_2) \\
& (7x_2 - 3x_3 - 4x_1)) && (4.23)
\end{aligned}
$$

Dimana

$$\sigma = 7((7y_1 - 3y_3 - 4y_2)(7x_2 - 3x_3 - 4x_1) - (7y_2 - 3y_3 - 4y_1)(7x_1 - 3x_3 - 4x_2))$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.23) ke dalam (4.22)

$$
\begin{aligned}
& y_{Aa3} = \left(\frac{x - \frac{3}{7}x_3 - \frac{4}{7}x_2}{x_1 - \frac{3}{7}x_3 - \frac{4}{7}x_2}\right)(y_1 - \frac{3}{7}y_3 - \frac{4}{7}y_2) + \frac{3}{7}y_3 + \frac{4}{7}y_2 \\
\Leftrightarrow\quad & y = \frac{1}{g}((3x_3 + 4x_2)(7y_1 - 3y_3 - 4y_2)^2(7x_2 - 3x_3 - 4x_1) - (3x_3 + 4x_1) \\
& (7y_2 - 3y_3 - 4y_1)(7x_1 - 3x_3 - 4x_2)(7y_1 - 3y_3 - 4y_2) + (4y_1 - 4y_2) \\
& (7x_2 - 3x_3 - 4x_1)(7x_1 - 3x_3 - 4x_2)(7y_1 - 3y_3 - 4y_2) - (3x_3 + 4x_2) \\
& (7y_1 - 3y_3 - 4y_2)((7y_1 - 3y_3 - 4y_2)(7x_2 - 3x_3 - 4x_1) - (7y_2 - 3y_3 - 4y_1) \\
& (7x_1 - 3x_3 - 4x_2)) + (7x_1 - 3x_3 - 4x_2)(3y_3 + 4y_2)((7y_1 - 3y_3 - 4y_2) \\
& (7x_2 - 3x_3 - 4x_1) - (7y_2 - 3y_3 - 4y_1)(7x_1 - 3x_3 - 4x_2))) && (4.24)
\end{aligned}
$$

Dimana

$$
\begin{aligned}
g \;=\; & 7(7x_1 - 3x_3 - 4x_2)((7y_1 - 3y_3 - 4y_2)(7x_2 - 3x_3 - 4x_1) - (7y_2 - 3y_3 - 4y_1) \\
& (7x_1 - 3x_3 - 4x_2))
\end{aligned}
$$

Titik E adalah perpotongan antara garis Cc_4 dengan Aa_3 sehingga

$$
\begin{aligned}
& y_{Cc4} = y_{Aa3} \qquad (4.25)\\
\Leftrightarrow\; & \left(\frac{x-\frac{3}{7}x_1-\frac{4}{7}x_2}{x_3-\frac{3}{7}x_1-\frac{4}{7}x_2}\right)(y_3-\frac{3}{7}y_1-\frac{4}{7}y_2)+\frac{3}{7}y_1+\frac{4}{7}y_2 = \\
& \left(\frac{x-\frac{3}{7}x_3-\frac{4}{7}x_2}{x_1-\frac{3}{7}x_3-\frac{4}{7}x_2}\right)(y_1-\frac{3}{7}y_3-\frac{4}{7}y_2)+\frac{3}{7}y_3+\frac{4}{7}y_2 \\
\Leftrightarrow\; & \left(\frac{x}{\frac{7x_3-3x_1-4x_2}{7}}\right)(\frac{7y_3-3y_1-4y_2}{7}) - \left(\frac{\frac{3x_1+4x_2}{7}}{\frac{7x_3-3x_1-4x_2}{7}}\right)(\frac{7y_3-3y_1-4y_2}{7}) = \\
& \left(\frac{x}{\frac{7x_1-3x_3-4x_2}{7}}\right)(\frac{7y_1-3y_3-4y_2}{7}) - \left(\frac{\frac{3x_3+4x_2}{7}}{\frac{7x_1-3x_3-4x_2}{7}}\right)(\frac{7y_1-3y_3-4y_2}{7}) + \\
& \frac{3y_3-3y_1}{7} \\
\Leftrightarrow\; & x = \left(\frac{1}{\varsigma}\right)((3x_1+4x_2)(7y_3-3y_1-4y_2)(7x_1-3x_3-4x_2)-(3x_3+4x_2) \\
& (7y_1-3y_3-4y_2)(7x_3-3x_1-4x_2)+(3y_3-3y_1)(7x_3-3x_1-4x_2) \\
& (7x_1-3x_3-4x_2)) \qquad (4.26)
\end{aligned}
$$

Dimana

$$\varsigma = 7((7y_3-3y_1-4y_2)(7x_1-3x_3-4x_2)-(7y_1-3y_3-4y_2)(7x_3-3x_1-4x_2))$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.26) ke dalam (4.25)

$$
\begin{aligned}
& y_{Cc4} = \left(\frac{x-\frac{3}{7}x_1-\frac{4}{7}x_2}{x_3-\frac{3}{7}x_1-\frac{4}{7}x_2}\right)(y_3-\frac{3}{7}y_1-\frac{4}{7}y_2)+\frac{3}{7}y_1+\frac{4}{7}y_2 \\
\Leftrightarrow\; & y = \frac{1}{h}((3x_1+4x_2)(7y_3-3y_1-4y_2)^2(7x_1-3x_3-4x_2)-(3x_3+4x_2) \\
& (7y_1-3y_3-4y_2)(7x_3-3x_1-4x_2)(7y_3-3y_1-4y_2)+(3y_3-3y_1) \\
& (7x_3-3x_1-4x_2)(7x_1-3x_3-4x_2)(7y_3-3y_1-4y_2)-(3x_1+4x_2) \\
& (7y_3-3y_1-4y_2)((7y_3-3y_1-4y_2)(7x_1-3x_3-4x_2)-(7y_1-3y_3-4y_2) \\
& (7x_3-3x_1-4x_2))+(7x_3-3x_1-4x_2)(3y_1+4y_2)((7y_3-3y_1-4y_2) \\
& (7x_1-3x_3-4x_2)-(7y_1-3y_3-4y_2)(7x_3-3x_1-4x_2))) \qquad (4.27)
\end{aligned}
$$

Dimana

$$
\begin{aligned}
h \;=\; & 7(7x_3-3x_1-4x_2)((7y_3-3y_1-4y_2)(7x_1-3x_3-4x_2)-(7y_1-3y_3-4y_2) \\
& (7x_3-3x_1-4x_2))
\end{aligned}
$$

Titik F adalah perpotongan antara garis Bb_3 dengan Cc_4 sehingga

$$\begin{aligned}
& y_{Bb3} = y_{Cc4} && (4.28)\\
\Leftrightarrow\ & \left(\frac{x-\frac{4}{7}x_3-\frac{3}{7}x_1}{x_2-\frac{4}{7}x_3-\frac{3}{7}x_1}\right)(y_2-\frac{4}{7}y_3-\frac{3}{7}y_1)+\frac{4}{7}y_3+\frac{3}{7}y_1 = \\
& \left(\frac{x-\frac{3}{7}x_1-\frac{4}{7}x_2}{x_3-\frac{3}{7}x_1-\frac{4}{7}x_2}\right)(y_3-\frac{3}{7}y_1-\frac{4}{7}y_2)+\frac{3}{7}y_1+\frac{4}{7}y_2 \\
\Leftrightarrow\ & \left(\frac{x}{\frac{7x_2-4x_3-3x_1}{7}}\right)(\frac{7y_2-4y_3-3y_1}{7})-\left(\frac{\frac{4x_3+3x_1}{7}}{\frac{7x_2-4x_3-3x_1}{7}}\right)(\frac{7y_2-4y_3-3y_1}{7}) = \\
& \left(\frac{x}{\frac{7x_3-3x_1-4x_2}{7}}\right)(\frac{7y_3-3y_1-4y_2}{7})-\left(\frac{\frac{3x_1+4x_2}{7}}{\frac{7x_3-3x_1-4x_2}{7}}\right)(\frac{7y_3-3y_1-4y_2}{7})+ \\
& \frac{4y_2-4y_3}{7} \\
\Leftrightarrow\ & x = \left(\frac{1}{\tau}\right)((4x_3+3x_1)(7y_2-4y_3-3y_1)(7x_3-3x_1-4x_2)-(3x_1+4x_2) \\
& (7y_3-3y_1-4y_2)(7x_2-4x_3-3x_1)+(4y_2-4y_3)(7x_2-4x_3-3x_1) \\
& (7x_3-3x_1-4x_2)) && (4.29)
\end{aligned}$$

Dimana

$$\tau = 7((7y_2-4y_3-3y_1)(7x_3-3x_1-4x_2)-(7y_3-3y_1-4y_2)(7x_2-4x_3-3x_1))$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.29) ke dalam (4.28)

$$\begin{aligned}
& y_{Bb3} = \left(\frac{x-\frac{4}{7}x_3-\frac{3}{7}x_1}{x_2-\frac{4}{7}x_3-\frac{3}{7}x_1}\right)(y_2-\frac{4}{7}y_3-\frac{3}{7}y_1)+\frac{4}{7}y_3+\frac{3}{7}y_1 \\
\Leftrightarrow\ & y = \frac{1}{i}((4x_3+3x_1)(7y_2-4y_3-3y_1)^2(7x_3-3x_1-4x_2)-(3x_1+4x_2) \\
& (7y_3-3y_1-4y_2)(7x_2-4x_3-3x_1)(7y_2-4y_3-3y_1)+(4y_2-4y_3) \\
& (7x_2-4x_3-3x_1)(7x_3-3x_1-4x_2)(7y_2-4y_3-3y_1)-(4x_3+3x_1) \\
& (7y_2-4y_3-3y_1)((7y_2-4y_3-3y_1)(7x_3-3x_1-4x_2)-(7y_3-3y_1-4y_2) \\
& (7x_2-4x_3-3x_1))+(7x_2-4x_3-3x_1)(4y_3+3y_1)((7y_2-4y_3-3y_1) \\
& (7x_3-3x_1-4x_2)-(7y_3-3y_1-4y_2)(7x_2-4x_3-3x_1))) && (4.30)
\end{aligned}$$

Dimana

$$\begin{aligned}
i \ = \ & 7(7x_2-4x_3-3x_1)((7y_2-4y_3-3y_1)(7x_3-3x_1-4x_2)-(7y_3-3y_1-4y_2) \\
& (7x_2-4x_3-3x_1))
\end{aligned}$$

Titik G adalah perpotongan antara garis Bb_3 dengan Aa_4 sehingga

$$y_{Bb3} = y_{Aa4} \tag{4.31}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-\frac{4}{7}x_3-\frac{3}{7}x_1}{x_2-\frac{4}{7}x_3-\frac{3}{7}x_1}\right)(y_2-\frac{4}{7}y_3-\frac{3}{7}y_1)+\frac{4}{7}y_3+\frac{3}{7}y_1 =$$

$$\left(\frac{x-\frac{4}{7}x_3-\frac{3}{7}x_2}{x_1-\frac{4}{7}x_3-\frac{3}{7}x_2}\right)(y_1-\frac{4}{7}y_3-\frac{3}{7}y_2)+\frac{4}{7}y_3+\frac{3}{7}y_2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{\frac{7x_2-4x_3-3x_1}{7}}\right)(\frac{7y_2-4y_3-3y_1}{7})-\left(\frac{\frac{4x_3+3x_1}{7}}{\frac{7x_2-4x_3-3x_1}{7}}\right)(\frac{7y_2-4y_3-3y_1}{7}) =$$

$$\left(\frac{x}{\frac{7x_1-4x_3-3x_2}{7}}\right)(\frac{7y_1-4y_3-3y_2}{7})-\left(\frac{\frac{4x_3+3x_2}{7}}{\frac{7x_1-4x_3-3x_2}{7}}\right)(\frac{7y_1-4y_3-3y_2}{7})+$$

$$\frac{3y_2-3y_1}{7}$$

$$\Leftrightarrow x = \left(\frac{1}{v}\right)((4x_3+3x_1)(7y_2-4y_3-3y_1)(7x_1-4x_3-3x_2)-(4x_3+3x_2)$$

$$(7y_1-4y_3-3y_2)(7x_2-4x_3-3x_1)+(3y_2-3y_1)(7x_2-4x_3-3x_1)$$

$$(7x_1-4x_3-3x_2)) \tag{4.32}$$

Dimana

$$v = 7((7y_2-4y_3-3y_1)(7x_1-4x_3-3x_2)-(7y_1-4y_3-3y_2)(7x_2-4x_3-3x_1))$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.32) ke dalam (4.31)

$$y_{Bb3} = \left(\frac{x-\frac{4}{7}x_3-\frac{3}{7}x_1}{x_2-\frac{4}{7}x_3-\frac{3}{7}x_1}\right)(y_2-\frac{4}{7}y_3-\frac{3}{7}y_1)+\frac{4}{7}y_3+\frac{3}{7}y_1$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{j}((4x_3+3x_1)(7y_2-4y_3-3y_1)^2(7x_1-4x_3-3x_2)-(4x_3+3x_2)$$

$$(7y_1-4y_3-3y_2)(7x_2-4x_3-3x_1)(7y_2-4y_3-3y_1)+(3y_2-3y_1)$$

$$(7x_2-4x_3-3x_1)(7x_1-4x_3-3x_2)(7y_2-4y_3-3y_1)-(4x_3+3x_1)$$

$$(7y_2-4y_3-3y_1)((7y_2-4y_3-3y_1)(7x_1-4x_3-3x_2)-(7y_1-4y_3-3y_2)$$

$$(7x_2-4x_3-3x_1))+(7x_2-4x_3-3x_1)(4y_3+3y_1)((7y_2-4y_3-3y_1)$$

$$(7x_1-4x_3-3x_2)-(7y_1-4y_3-3y_2)(7x_2-4x_3-3x_1))) \tag{4.33}$$

Dimana

$$j = 7(7x_2-4x_3-3x_1)((7y_2-4y_3-3y_1)(7x_1-4x_3-3x_2)-(7y_1-4y_3-3y_2)$$

$$(7x_2-4x_3-3x_1))$$

Titik H adalah perpotongan antara garis Aa_4 dengan Cc_3 sehingga

$$\begin{aligned}
& y_{Aa4} = y_{Cc3} \qquad (4.34)\\
\Leftrightarrow\ & \left(\frac{x-\frac{4}{7}x_3-\frac{3}{7}x_2}{x_1-\frac{4}{7}x_3-\frac{3}{7}x_2}\right)(y_1-\frac{4}{7}y_3-\frac{3}{7}y_2)+\frac{4}{7}y_3+\frac{3}{7}y_2 = \\
& \left(\frac{x-\frac{4}{7}x_1-\frac{3}{7}x_2}{x_3-\frac{4}{7}x_1-\frac{3}{7}x_2}\right)(y_3-\frac{4}{7}y_1-\frac{3}{7}y_2)+\frac{4}{7}y_1+\frac{3}{7}y_2\\
\Leftrightarrow\ & \left(\frac{x}{\frac{7x_1-4x_3-3x_2}{7}}\right)(\frac{7y_1-4y_3-3y_2}{7})-\left(\frac{\frac{4x_3+3x_2}{7}}{\frac{7x_1-4x_3-3x_2}{7}}\right)(\frac{7y_1-4y_3-3y_2}{7}) = \\
& \left(\frac{x}{\frac{7x_3-4x_1-3x_2}{7}}\right)(\frac{7y_3-4y_1-3y_2}{7})-\left(\frac{\frac{4x_1+3x_2}{7}}{\frac{7x_3-4x_1-3x_2}{7}}\right)(\frac{7y_3-4y_1-3y_2}{7})+\\
& \frac{4y_1-4y_3}{7}\\
\Leftrightarrow\ & x = \left(\frac{1}{\phi}\right)((4x_3+3x_2)(7y_1-4y_3-3y_2)(7x_3-4x_1-3x_2)-(4x_1+3x_2)\\
& (7y_3-4y_1-3y_2)(7x_1-4x_3-3x_2)+(4y_1-4y_3)(7x_1-4x_3-3x_2)\\
& (7x_3-4x_1-3x_2)) \qquad (4.35)
\end{aligned}$$

Dimana

$$\phi = 7((7y_1-4y_3-3y_2)(7x_3-4x_1-3x_2)-(7y_3-4y_1-3y_2)(7x_1-4x_3-3x_2))$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.35) ke dalam (4.34)

$$\begin{aligned}
& y_{Aa4} = \left(\frac{x-\frac{4}{7}x_3-\frac{3}{7}x_2}{x_1-\frac{4}{7}x_3-\frac{3}{7}x_2}\right)(y_1-\frac{4}{7}y_3-\frac{3}{7}y_2)+\frac{4}{7}y_3+\frac{3}{7}y_2\\
\Leftrightarrow\ & y = \frac{1}{k}((4x_3+3x_2)(7y_1-4y_3-3y_2)^2(7x_3-4x_1-3x_2)-(4x_1+3x_2)\\
& (7y_3-4y_1-3y_2)(7x_1-4x_3-3x_2)(7y_1-4y_3-3y_2)+(4y_1-4y_2)\\
& (7x_1-4x_3-3x_2)(7x_3-4x_1-3x_2)(7y_1-4y_3-3y_2)-(4x_3+3x_2)\\
& (7y_1-4y_3-3y_2)((7y_1-4y_3-3y_2)(7x_3-4x_1-3x_2)-(7y_3-4y_1-3y_2)\\
& (7x_1-4x_3-3x_2))+(7x_1-4x_3-3x_2)(4y_3+3y_2)((7y_1-4y_3-3y_2)\\
& (7x_3-4x_1-3x_2)-(7y_3-4y_1-3y_2)(7x_1-4x_3-3x_2))) \qquad (4.36)
\end{aligned}$$

Dimana

$$\begin{aligned}
k\ =\ & 7(7x_1-4x_3-3x_2)((7y_1-4y_3-3y_2)(7x_3-4x_1-3x_2)-(7y_3-4y_1-3y_2)\\
& (7x_1-4x_3-3x_2))
\end{aligned}$$

Titik I adalah perpotongan antara garis Cc_3 dengan Bb_4 sehingga

$$
\begin{aligned}
& y_{Cc_3} = y_{Bb_4} \qquad (4.37)\\
\Leftrightarrow\quad & \left(\frac{x-\frac{4}{7}x_1-\frac{3}{7}x_2}{x_3-\frac{4}{7}x_1-\frac{3}{7}x_2}\right)(y_3-\frac{4}{7}y_1-\frac{3}{7}y_2)+\frac{4}{7}y_1+\frac{3}{7}y_2 =\\
& \left(\frac{x-\frac{3}{7}x_3-\frac{4}{7}x_1}{x_2-\frac{3}{7}x_3-\frac{4}{7}x_1}\right)(y_2-\frac{3}{7}y_3-\frac{4}{7}y_1)+\frac{3}{7}y_3+\frac{4}{7}y_1\\
\Leftrightarrow\quad & \left(\frac{x}{\frac{7x_3-4x_1-3x_2}{7}}\right)(\frac{7y_3-4y_1-3y_2}{7})-\left(\frac{\frac{4x_1+3x_2}{7}}{\frac{7x_3-4x_1-3x_2}{7}}\right)(\frac{7y_3-4y_1-3y_2}{7})=\\
& \left(\frac{x}{\frac{7x_2-3x_3-4x_1}{7}}\right)(\frac{7y_2-3y_3-4y_1}{7})-\left(\frac{\frac{3x_3+4x_1}{7}}{\frac{7x_2-3x_3-4x_1}{7}}\right)(\frac{7y_2-3y_3-4y_1}{7})+\\
& \frac{3y_3-3y_2}{7}\\
\Leftrightarrow\quad & x=\left(\frac{1}{\chi}\right)((4x_1+3x_2)(7y_3-4y_1-3y_2)(7x_2-3x_3-4x_1)-(3x_3+4x_1)\\
& (7y_2-3y_3-4y_1)(7x_3-4x_1-3x_2)+(3y_3-3y_2)(7x_3-4x_1-3x_2)\\
& (7x_2-3x_3-4x_1)) \qquad (4.38)
\end{aligned}
$$

Dimana

$$\chi = 7((7y_3-4y_1-3y_2)(7x_2-3x_3-4x_1)-(7y_2-3y_3-4y_1)(7x_3-4x_1-3x_2))$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.38) ke dalam (4.37)

$$
\begin{aligned}
& y_{Cc_3} = \left(\frac{x-\frac{4}{7}x_1-\frac{3}{7}x_2}{x_3-\frac{4}{7}x_1-\frac{3}{7}x_2}\right)(y_3-\frac{4}{7}y_1-\frac{3}{7}y_2)+\frac{4}{7}y_1+\frac{3}{7}y_2\\
\Leftrightarrow\quad & y=\frac{1}{l}((4x_1+3x_2)(7y_3-4y_1-3y_2)^2(7x_2-3x_3-4x_1)-(3x_3+4x_1)\\
& (7y_2-3y_3-4y_1)(7x_3-4x_1-3x_2)(7y_3-4y_1-3y_2)+(3y_3-3y_2)\\
& (7x_3-4x_1-3x_2)(7x_2-3x_3-4x_1)(7y_3-4y_1-3y_2)-(4x_1+3x_2)\\
& (7y_3-4y_1-3y_2)((7y_3-4y_1-3y_2)(7x_2-3x_3-4x_1)-(7y_2-3y_3-4y_1)\\
& (7x_3-4x_1-3x_2))+(7x_3-4x_1-3x_2)(4y_1+3y_2)((7y_3-4y_1-3y_2)\\
& (7x_2-3x_3-4x_1)-(7y_2-3y_3-4y_1)(7x_3-4x_1-3x_2))) \qquad (4.39)
\end{aligned}
$$

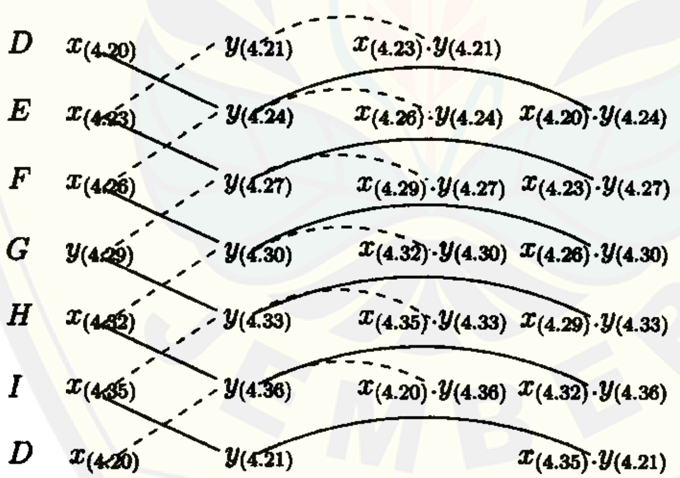
Dimana

$$
\begin{aligned}
l \;=\; & 7(7x_3-4x_1-3x_2)((7y_3-4y_1-3y_2)(7x_2-3x_3-4x_1)-(7y_2-3y_3-4y_1)\\
& (7x_3-4x_1-3x_2))
\end{aligned}
$$

Dengan demikian lemma tersebut telah terbukti. □

◇ **Teorema 4.2.1** *Jika sebuah segitiga sembarang, samakaki, dan samasisi ABC, masing-masing sisinya dibagi dengan ruas garis yang menghubungkan titik-titik sudut $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, dan $C(x_3, y_3)$ di depannya dengan titik-titik pada sisi segitiga menjadi tujuh bagian yang sama panjang, maka perbandingan luas heksagon terkecil yang terbentuk dengan luas segitiga asal adalah* $1 : 55$.

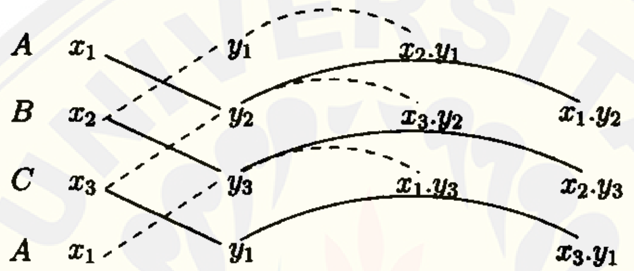
Bukti. Pertama akan dibuktikan bahwa bila sebuah segitiga sembarang ABC, masing-masing sisinya dibagi dengan ruas garis yang menghubungkan titik-titik sudut $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, dan $C(x_3, y_3)$ di depannya dengan titik-titik pada sisi segitiga menjadi tujuh bagian yang sama panjang, maka perbandingan luas heksagon terkecil yang terbentuk dengan luas segitiga asal adalah $1 : 55$. Pada Lemma 4.2.1 sebelumnya telah didapat titik-titik koordinat yang membentuk heksagon terkecil, selanjutnya akan dihitung luas dari heksagon terkecil tersebut. Untuk menghitung luas heksagon tersebut dilakukan dengan cara determinan, seperti yang sudah dipaparkan dalam Bab 2, diagram perhitungan luas heksagon pada Gambar 2.11.



Dari cara tersebut didapat luas heksagon terkecil $DEFGHI$ adalah,

$$\begin{aligned} L_{DEFGHI} &= \frac{1}{2}\big((x_{(4.26)}.y_{(4.24)} + x_{(4.29)}.y_{(4.27)} + x_{(4.32)}.y_{(4.30)} + x_{(4.35)}.y_{(4.33)} + \\ &\quad x_{(4.38)}.y_{(4.36)} + x_{(4.23)}.y_{(4.39)}\big) - \big(x_{(4.23)}.y_{(4.27)} + x_{(4.26)}.y_{(4.30)} + \\ &\quad x_{(4.29)}.y_{(4.33)} + x_{(4.32)}.y_{(4.36)} + x_{(4.35)}.y_{(4.39)} + \\ &\quad x_{(4.38)}.y_{(4.24)}\big)\big) \end{aligned} \tag{4.40}$$

Setelah didapat luas heksagon terkecil, langkah selanjutnya adalah mencari luas segitiga asal. Untuk mencari luas segitiga asal dilakukan dengan cara yang sama seperti mencari luas heksagon di atas.



Didapat luas segitiga asal ABC adalah,

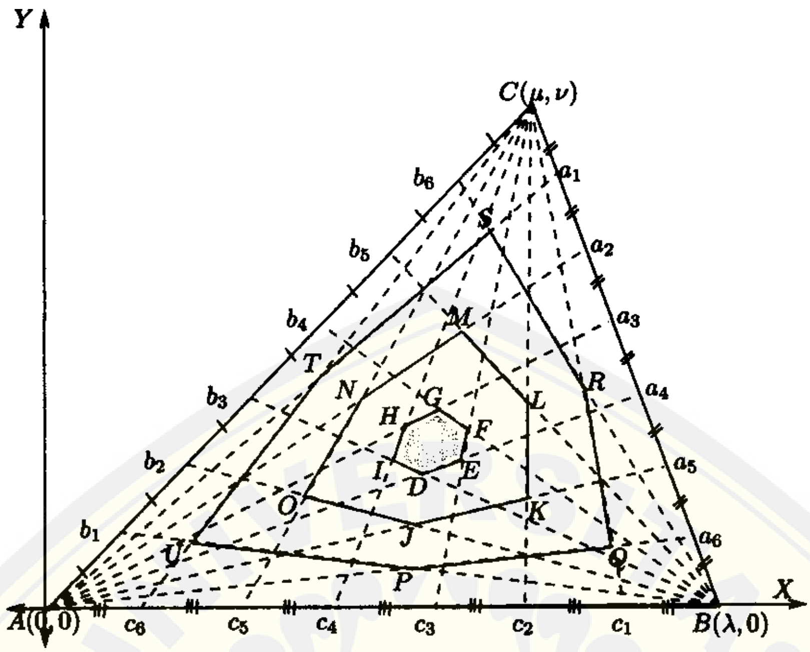
$$L_{ABC} = \left|\frac{1}{2}\big((x_2.y_1 + x_3.y_2 + x_1.y_3) - (x_1.y_2 + x_2.y_3 + x_3.y_1)\big)\right| \tag{4.41}$$

Sehingga, perbandingan luas heksagon terkecil dengan segitiga asalnya adalah

$$\frac{L_{DEFGHI}(4.40)}{L_{ABC}(4.20)} \tag{4.42}$$

Pada teorema ini segitiga yang dimaksud adalah segitiga sembarang, maka dapat dimisalkan titik-titik sebarang segitiga sebagai berikut, tampak pada Gambar 4.6:

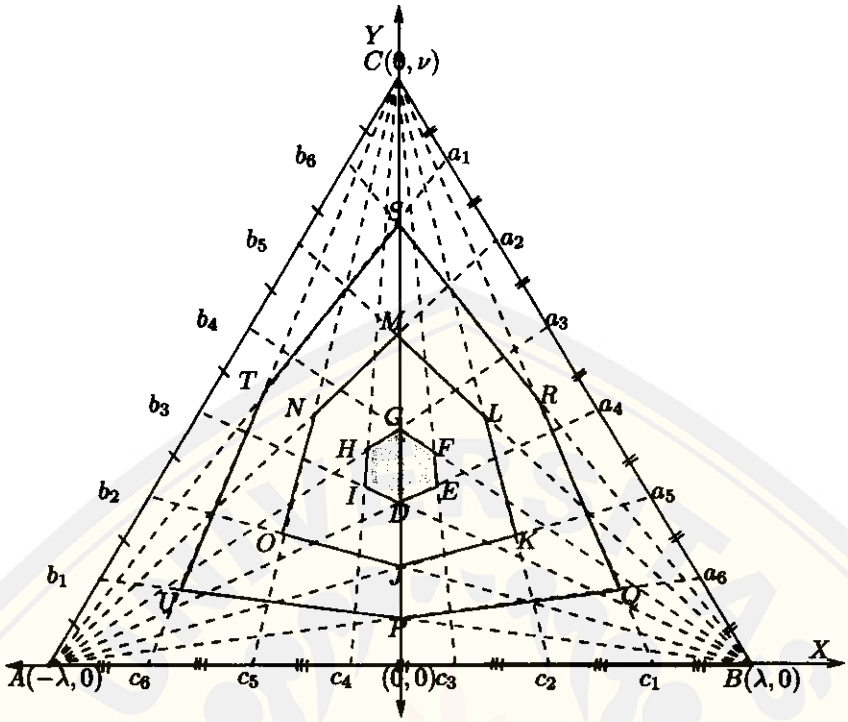
$$\begin{aligned} A(x_1, y_1) &= (0, 0) \\ B(x_2, y_2) &= (\lambda, 0) \\ C(x_3, y_3) &= (\mu, \nu) \end{aligned}$$



Gambar 4.6: Ilustrasi segitiga sembarang dimana masing-masing sisi dibagi menjadi tujuh bagian sama panjang pada koordinat kartesius

Dengan mensubstitusikan nilai-nilai x_1, x_2, x_3 dan y_1, y_2, y_3 terhadap persamaan 4.42 pada teorema 4.2.1, maka diperolehlah perbandingan luas heksagon terkecil dengan luas segitiga asal, yaitu 1 : 55. □

Kedua akan dibuktikan bahwa bila sebuah segitiga samakaki ABC, masing-masing sisinya dibagi dengan ruas garis yang menghubungkan titik-titik sudut $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, dan $C(x_3, y_3)$ di depannya dengan titik-titik pada sisi segitiga menjadi tujuh bagian yang sama panjang, maka perbandingan luas heksagon terkecil yang terbentuk dengan luas segitiga asal adalah 1 : 55. Pada Lemma 4.2.1 sebelumnya telah didapat titik-titik koordinat yang membentuk heksagon terkecil, selanjutnya untuk menghitung luas dari heksagon terkecil, segitiga asal dan perbandingan dari luas heksagon terkecil tersebut dengan segitiga asal dilakukan dengan cara yang sama seperti pada pembuktian segitiga sembarang di atas.



Gambar 4.7: Ilustrasi segitiga samakaki dimana masing-masing sisi dibagi menjadi tujuh bagian sama panjang pada koordinat kartesius

Pada teorema ini segitiga yang dimaksud adalah segitiga samakaki, maka dapat dimisalkan titik-titik sebarang segitiga sebagai berikut, tampak pada Gambar 4.7:

$$\begin{aligned} A(x_1, y_1) &= (-\lambda, 0) \\ B(x_2, y_2) &= (\lambda, 0) \\ C(x_3, y_3) &= (0, \nu) \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan nilai-nilai x_1, x_2, x_3 dan y_1, y_2, y_3 terhadap persamaan 4.42 pada pembuktian segitiga sembarang di atas, maka diperolehlah luas heksagon terkecil, yaitu $1 : 55$. □

Ketiga akan dibuktikan bahwa bila sebuah segitiga samasisi ABC, masing-masing sisinya dibagi dengan ruas garis yang menghubungkan titik-titik sudut

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, dan $C(x_3, y_3)$ di depannya dengan titik-titik pada sisi segitiga menjadi tujuh bagian yang sama panjang, maka perbandingan luas heksagon terkecil yang terbentuk dengan luas segitiga asal adalah $1 : 55$. Pada Lemma 4.2.1 sebelumnya telah didapat titik-titik koordinat yang membentuk heksagon terkecil, selanjutnya untuk menghitung luas dari heksagon terkecil, segitiga asal, dan perbandingan dari heksagon terkecil tersebut dengan segitiga asal dilakukan dengan cara yang sama seperti pada pembuktian segitiga sembarang di atas.

Pada teorema ini segitiga yang dimaksud adalah segitiga samasisi, maka dapat dimisalkan titik-titik sebarang segitiga di atas sebagai berikut, tampak pada Gambar 4.8:

$$\begin{aligned} A(x_1, y_1) &= (0,0) \\ B(x_2, y_2) &= (\lambda, 0) \end{aligned}$$

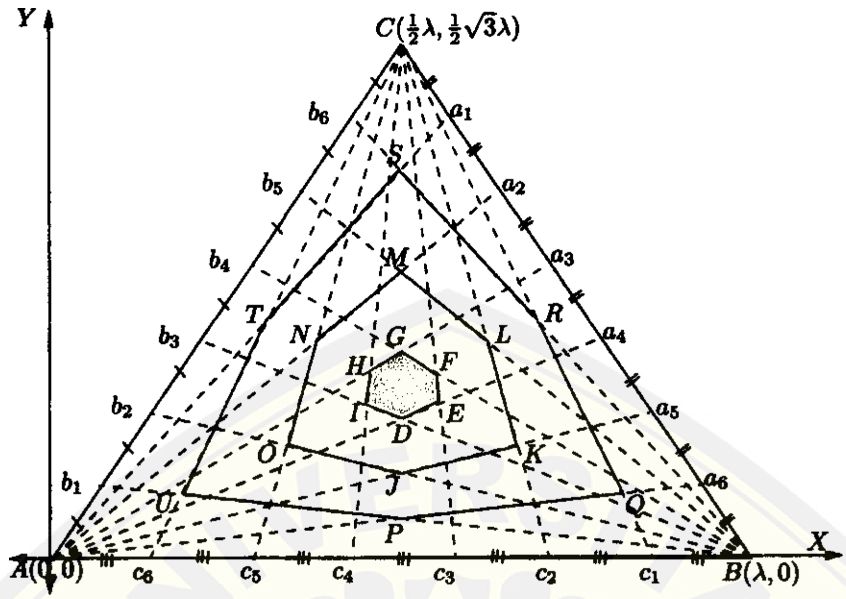
Karena segitiga samasisi, maka titik C merupakan hasil rotasi 60^o dari titik B, sehingga

$$\begin{aligned} C(x_3, y_3) &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos 60^o & \sin 60^o \\ -\sin 60^o & \cos 60^o \end{pmatrix} \\ C(x_3, y_3) &= (\frac{1}{2}\lambda, \frac{1}{2}\sqrt{3}\lambda). \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan nilai-nilai x_1, x_2, x_3 dan y_1, y_2, y_3 terhadap persamaan 4.42 pada pembuktian segitiga sembarang di atas, maka diperolehlah perbandingan luas heksagon terkecil dengan luas segitiga asal, yaitu $1 : 55$. □

4.3 Sebarang Segitiga yang Masing-masing Sisinya Dibagi k Bagian Sama Panjang

Berdasarkan teorema Marion Walter yang disebutkan pada bab 2 sebelumnya, maka berikut ini disajikan beberapa teorema yang terkait dengan hasil peneliti-an dengan pembagian sisi-sisi segitiga menjadi k bagian sama panjang, dengan k bilangan ganjil.



Gambar 4.8: Ilustrasi segitiga samasisi dimana masing-masing sisi dibagi menjadi tujuh bagian sama panjang pada koordinat kartesius

♦ **Lemma 4.3.1** *Jika sebarang segitiga ABC, masing-masing sisinya dibagi dengan ruas garis yang menghubungkan titik-titik sudut $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, dan $C(x_3, y_3)$ di depannya dengan titik-titik pada sisi segitiga menjadi k bagian yang sama panjang, dengan k bilangan asli ganjil, maka akan terbentuk heksagon terkecil, dengan titik-titik koordinat sebagai berikut*
$D(x, y)$:

$$x = \frac{1}{\alpha}(((k-1)x_3 + (k+1)x_2)(2ky_1 - (k-1)y_3 - (k+1)y_2)$$
$$(2kx_2 - (k-1)x_3 - (k+1)x_1) - ((k-1)x_3 + (k+1)x_1)$$
$$(2ky_2 - (k-1)y_3 - (k+1)y_1)(2kx_1 - (k-1)x_3 - (k+1)x_2)$$
$$+((k+1)y_1 - (k+1)y_2)(2kx_1 - (k-1)x_3 - (k+1)x_2)$$
$$(2kx_2 - (k-1)x_3 - (k+1)x_1))$$

Dimana $\alpha = 2k((2ky_1 - (k-1)y_3 - (k+1)y_2)(2kx_2 - (k-1)x_3 - (k+1)x_1)$

$-(2ky_2-(k-1)y_3-(k+1)y_1)(2kx_1-(k-1)x_3-(k+1)x_2))$

$$\begin{aligned}
y = \frac{1}{\beta}(&((k-1)x_3+(k+1)x_2)(2ky_1-(k-1)y_3-(k+1)y_2)^2\\
&(2kx_2-(k-1)x_3-(k+1)x_1)-((k-1)x_3+(k+1)x_1)\\
&(2ky_2-(k-1)y_3-(k+1)y_1)(2kx_1-(k-1)x_3-(k+1)x_2)\\
&(2ky_1-(k-1)y_3-(k+1)y_2)+((k+1)y_1-(k+1)y_2)\\
&(2kx_2-(k-1)x_3-(k+1)x_1)(2kx_1-(k-1)x_3-(k+1)x_2)\\
&(2ky_1-(k-1)y_3-(k+1)y_2)-((k-1)x_3+(k+1)x_2)\\
&(2ky_1-(k-1)y_3-(k+1)y_2)((2ky_1-(k-1)y_3-(k+1)y_2)\\
&(2kx_2-(k-1)x_3-(k+1)x_1)-(2ky_2-(k-1)y_3-(k+1)y_1)\\
&(2kx_1-(k-1)x_3-(k+1)x_2))+(2kx_1-(k-1)x_3-(k+1)x_2)\\
&((k-1)y_3+(k+1)y_2)((2ky_1-(k-1)y_3-(k+1)y_2)\\
&(2kx_2-(k-1)x_3-(k+1)x_1)-(2ky_2-(k-1)y_3-(k+1)y_1)\\
&(2kx_1-(k-1)x_3-(k+1)x_2)))
\end{aligned}$$

Dimana $\beta = 2k(2kx_1-(k-1)x_3-(k+1)x_2)((2ky_1-(k-1)y_3-(k+1)y_2)$
$(2kx_2-(k-1)x_3-(k+1)x_1)-(2ky_2-(k-1)y_3-(k+1)y_1)$
$(2kx_1-(k-1)x_3-(k+1)x_2))$
$E(x,y)$:

$$\begin{aligned}
x = \frac{1}{\gamma}(&((k-1)x_1+(k+1)x_2)(2ky_3-(k-1)y_1-(k+1)y_2)\\
&(2kx_1-(k-1)x_3-(k+1)x_2)-((k-1)x_3+(k+1)x_2)\\
&(2ky_1-(k-1)y_3-(k+1)y_2)(2kx_3-(k-1)x_1-(k+1)x_2)\\
&+((k-1)y_3-(k-1)y_1)(2kx_3-(k-1)x_1-(k+1)x_2)\\
&(2kx_1-(k-1)x_3-(k+1)x_2))
\end{aligned}$$

Dimana $\gamma = 2k((2ky_3-(k-1)y_1-(k+1)y_2)(2kx_1-(k-1)x_3-(k+1)x_2)-$

$(2ky_1-(k-1)y_3-(k+1)y_2)(2kx_3-(k-1)x_1-(k+1)x_2))$

$$
\begin{aligned}
y = \frac{1}{\delta}(&(((k-1)x_1+(k+1)x_2)(2ky_3-(k-1)y_1-(k+1)y_2)^2\\
&(2kx_1-(k-1)x_3-(k+1)x_2)-((k-1)x_3+(k+1)x_2)\\
&(2ky_1-(k-1)y_3-(k+1)y_2)(2kx_3-(k-1)x_1-(k+1)x_2)\\
&(2ky_3-(k-1)y_1-(k+1)y_2)+((k-1)y_3-(k-1)y_1)\\
&(2kx_3-(k-1)x_1-(k+1)x_2)(2kx_1-(k-1)x_3-(k+1)x_2)\\
&(2ky_3-(k-1)y_1-(k+1)y_2)-((k-1)x_1+(k+1)x_2)\\
&(2ky_3-(k-1)y_1-(k+1)y_2)((2ky_3-(k-1)y_1-(k+1)y_2)\\
&(2kx_1-(k-1)x_3-(k+1)x_2)-(2ky_1-(k-1)y_3-(k+1)y_2)\\
&(2kx_3-(k-1)x_1-(k+1)x_2))+(2kx_3-(k-1)x_1-(k+1)x_2)\\
&((k-1)y_1+(k+1)y_2)((2ky_3-(k-1)y_1-(k+1)y_2)\\
&(2kx_1-(k-1)x_3-(k+1)x_2)-(2ky_1-(k-1)y_3-(k+1)y_2)\\
&(2kx_3-(k-1)x_1-(k+1)x_2)))
\end{aligned}
$$

Dimana $\delta = 2k(2kx_3-(k-1)x_1-(k+1)x_2)((2ky_3-(k-1)y_1-(k+1)y_2)$
$(2kx_1-(k-1)x_3-(k+1)x_2)-(2ky_1-(k-1)y_3-(k+1)y_2)$
$(2kx_3-(k-1)x_1-(k+1)x_2))$
$F(x,y)$:

$$
\begin{aligned}
x = \frac{1}{\epsilon}(&(((k+1)x_3+(k-1)x_1)(2ky_2-(k+1)y_3-(k-1)y_1)\\
&(2kx_3-(k-1)x_1-(k+1)x_2)-((k-1)x_1+(k+1)x_2)\\
&(2ky_3-(k-1)y_1-(k+1)y_2)(2kx_2-(k+1)x_3-(k-1)x_1)\\
&+((k+1)y_2-(k+1)y_3)(2kx_2-(k+1)x_3-(k-1)x_1)\\
&(2kx_3-(k-1)x_1-(k+1)x_2))
\end{aligned}
$$

Dimana $\epsilon = 2k((2ky_2-(k+1)y_3-(k-1)y_1)(2kx_3-(k-1)x_1-(k+1)x_2)-$
$(2ky_3-(k-1)y_1-(k+1)y_2)(2kx_2-(k+1)x_3-(k-1)x_1))$

$$
\begin{aligned}
y = \frac{1}{\epsilon}(&(((k+1)x_3+(k-1)x_1)(2ky_2-(k+1)y_3-(k-1)y_1)^2\\
&(2kx_3-(k-1)x_1-(k+1)x_2)-((k-1)x_1+(k+1)x_2)\\
&(2ky_3-(k-1)y_1-(k+1)y_2)(2kx_2-(k+1)x_3-(k-1)x_1)\\
&(2ky_2-(k+1)y_3-(k-1)y_1)+((k+1)y_2-(k+1)y_3)\\
&(2kx_2-(k+1)x_3-(k-1)x_1)(2kx_3-(k-1)x_1-(k+1)x_2)\\
&(2ky_2-(k+1)y_3-(k-1)y_1)-((k+1)x_3+(k-1)x_1)
\end{aligned}
$$

$$(2ky_2-(k+1)y_3-(k-1)y_1)((2ky_2-(k+1)y_3-(k-1)y_1)$$
$$(2kx_3-(k-1)x_1-(k+1)x_2)-(2ky_3-(k-1)y_1-(k+1)y_2)$$
$$(2kx_2-(k+1)x_3-(k-1)x_1))+(2kx_2-(k+1)x_3-(k-1)x_1)$$
$$((k+1)y_3+(k-1)y_1)((2ky_2-(k+1)y_3-(k-1)y_1)$$
$$(2kx_3-(k-1)x_1-(k+1)x_2)-(2ky_3-(k-1)y_1-(k+1)y_2)$$
$$(2kx_2-(k+1)x_3-(k-1)x_1)))$$

Dimana $\varepsilon = 2k(2kx_2-(k+1)x_3-(k-1)x_1)((2ky_2-(k+1)y_3-(k-1)y_1)$
$(2kx_3-(k-1)x_1-(k+1)x_2)-(2ky_3-(k-1)y_1-(k+1)y_2)$
$(2kx_2-(k+1)x_3-(k-1)x_1))$
$G(x,y)$:

$$x=\frac{1}{\zeta}(((k+1)x_3+(k-1)x_1)(2ky_2-(k+1)y_3-(k-1)y_1)$$
$$(2kx_1-(k+1)x_3-(k-1)x_2)-((k+1)x_3+(k-1)x_2)$$
$$(2ky_1-(k+1)y_3-(k-1)y_2)(2kx_2-(k+1)x_3-(k-1)x_1)$$
$$+((k-1)y_2-(k-1)y_1)(2kx_2-(k+1)x_3-(k-1)x_1)$$
$$(2kx_1-(k+1)x_3-(k-1)x_2))$$

Dimana $\zeta = 2k((2ky_2-(k+1)y_3-(k-1)y_1)(2kx_1-(k+1)x_3-(k-1)x_2)-$
$(2ky_1-(k+1)y_3-(k-1)y_2)(2kx_2-(k+1)x_3-(k-1)x_1))$

$$y=\frac{1}{\eta}(((k+1)x_3+(k-1)x_1)(2ky_2-(k+1)y_3-(k-1)y_1)^2$$
$$(2kx_1-(k+1)x_3-(k-1)x_2)-((k+1)x_3+(k-1)x_2)$$
$$(2ky_1-(k+1)y_3-(k-1)y_2)(2kx_2-(k+1)x_3-(k-1)x_1)$$
$$(2ky_2-(k+1)y_3-(k-1)y_1)+((k-1)y_2-(k-1)y_1)$$
$$(2kx_2-(k+1)x_3-(k-1)x_1)(2kx_1-(k+1)x_3-(k-1)x_2)$$
$$(2ky_2-(k+1)y_3-(k-1)y_1)-((k+1)x_3+(k-1)x_1)$$
$$(2ky_2-(k+1)y_3-(k-1)y_1)((2ky_2-(k+1)y_3-(k-1)y_1)$$
$$(2kx_1-(k+1)x_3-(k-1)x_2)-(2ky_1-(k+1)y_3-(k-1)y_2)$$
$$(2kx_2-(k+1)x_3-(k-1)x_1))+(2kx_2-(k+1)x_3-(k-1)x_1)$$
$$((k+1)y_3+(k-1)y_1)((2ky_2-(k+1)y_3-(k-1)y_1)$$
$$(2kx_1-(k+1)x_3-(k-1)x_2)-(2ky_1-(k+1)y_3-(k-1)y_2)$$
$$(2kx_2-(k+1)x_3-(k-1)x_1)))$$

Dimana $\eta = 2k(2kx_2-(k+1)x_3-(k-1)x_1)((2ky_2-(k+1)y_3-(k-1)y_1)$
$(2kx_1-(k+1)x_3-(k-1)x_2)-(2ky_1-(k+1)y_3-(k-1)y_2)$
$(2kx_2-(k+1)x_3-(k-1)x_1))$

$H(x,y)$:

$$x = \frac{1}{\theta}(((k+1)x_3 + (k-1)x_2)(2ky_1 - (k+1)y_3 - (k-1)y_2)$$
$$(2kx_3 - (k+1)x_1 - (k-1)x_2) - ((k+1)x_1 + (k-1)x_2)$$
$$(2ky_3 - (k+1)y_1 - (k-1)y_2)(2kx_1 - (k+1)x_3 - (k-1)x_2)$$
$$+((k+1)y_1 - (k+1)y_3)(2kx_1 - (k+1)x_3 - (k-1)x_2)$$
$$(2kx_3 - (k+1)x_1 - (k-1)x_2))$$

Dimana $\theta = 2k((2ky_1 - (k+1)y_3 - (k-1)y_2)(2kx_3 - (k+1)x_1 - (k-1)x_2) - (2ky_3 - (k+1)y_1 - (k-1)y_2)(2kx_1 - (k+1)x_3 - (k-1)x_2))$

$$y = \frac{1}{\vartheta}(((k+1)x_3 + (k-1)x_2)(2ky_1 - (k+1)y_3 - (k-1)y_2)^2)$$
$$(2kx_3 - (k+1)x_1 - (k-1)x_2) - ((k+1)x_1 + (k-1)x_2))$$
$$(2ky_3 - (k+1)y_1 - (k-1)y_2)(2kx_1 - (k+1)x_3 - (k-1)x_2))$$
$$(2ky_1 - (k+1)y_3 - (k-1)y_2) + ((k+1)y_1 - (k+1)y_2))$$
$$(2kx_1 - (k+1)x_3 - (k-1)x_2)(2kx_3 - (k+1)x_1 - (k-1)x_2))$$
$$(2ky_1 - (k+1)y_3 - (k-1)y_2) - ((k+1)x_3 + (k-1)x_2))$$
$$(2ky_1 - (k+1)y_3 - (k-1)y_2)((2ky_1 - (k+1)y_3 - (k-1)y_2))$$
$$(2kx_3 - (k+1)x_1 - (k-1)x_2) - (2ky_3 - (k+1)y_1 - (k-1)y_2))$$
$$(2kx_1 - (k+1)x_3 - (k-1)x_2)) + (2kx_1 - (k+1)x_3 - (k-1)x_2))$$
$$((k+1)y_3 + (k-1)y_2)((2ky_1 - (k+1)y_3 - (k-1)y_2))$$
$$(2kx_3 - (k+1)x_1 - (k-1)x_2) - (2ky_3 - (k+1)y_1 - (k-1)y_2))$$
$$(2kx_1 - (k+1)x_3 - (k-1)x_2)))$$

Dimana $\vartheta = 2k(2kx_1 - (k+1)x_3 - (k-1)x_2)((2ky_1 - (k+1)y_3 - (k-1)y_2)$
$(2kx_3 - (k+1)x_1 - (k-1)x_2) - (2ky_3 - (k+1)y_1 - (k-1)y_2)$
$(2kx_1 - (k+1)x_3 - (k-1)x_2))$

$I(x,y)$:

$$x = \frac{1}{\iota}(((k+1)x_1 + (k-1)x_2)(2ky_3 - (k+1)y_1 - (k-1)y_2)$$
$$(2kx_2 - (k-1)x_3 - (k+1)x_1) - ((k-1)x_3 + (k+1)x_1)$$
$$(2ky_2 - (k-1)y_3 - (k+1)y_1)(2kx_3 - (k+1)x_1 - (k-1)x_2) +$$
$$((k-1)y_3 - (k-1)y_2)(2kx_3 - (k+1)x_1 - (k-1)x_2)$$
$$(2kx_2 - (k-1)x_3 - (k+1)x_1))$$

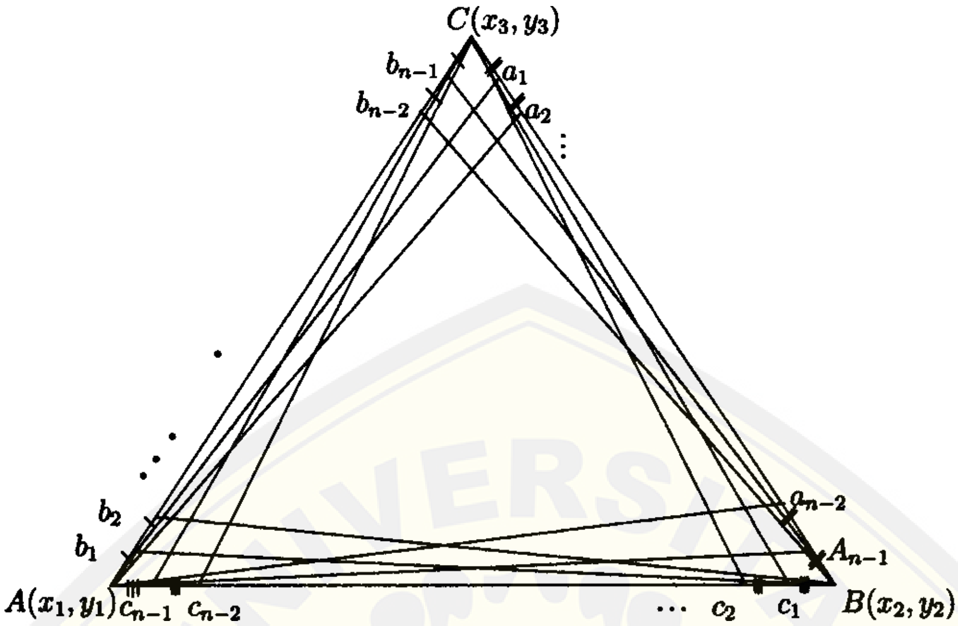
Dimana $\iota = 2k((2ky_3 - (k+1)y_1 - (k-1)y_2)(2kx_2 - (k-1)x_3 - (k+1)x_1) - (2ky_2 - (k-1)y_3 - (k+1)y_1)(2kx_3 - (k+1)x_1 - (k-1)x_2))$

$$
\begin{aligned}
y = \frac{1}{\kappa}(&((k+1)x_1 + (k-1)x_2)(2ky_3 - (k+1)y_1 - (k-1)y_2)^2)\\
&(2kx_2 - (k-1)x_3 - (k+1)x_1) - ((k-1)x_3 + (k+1)x_1))\\
&(2ky_2 - (k-1)y_3 - (k+1)y_1)(2kx_3 - (k+1)x_1 - (k-1)x_2))\\
&(2ky_3 - (k+1)y_1 - (k-1)y_2) + ((k-1)y_3 - (k-1)y_2))\\
&(2kx_3 - (k+1)x_1 - (k-1)x_2)(2kx_2 - (k-1)x_3 - (k+1)x_1))\\
&(2ky_3 - (k+1)y_1 - (k-1)y_2) - ((k+1)x_1 + (k-1)x_2))\\
&(2ky_3 - (k+1)y_1 - (k-1)y_2)((2ky_3 - (k+1)y_1 - (k-1)y_2))\\
&(2kx_2 - (k-1)x_3 - (k+1)x_1) - (2ky_2 - (k-1)y_3 - (k+1)y_1))\\
&(2kx_3 - (k+1)x_1 - (k-1)x_2)) + (2kx_3 - (k+1)x_1 - (k-1)x_2))\\
&((k+1)y_1 + (k-1)y_2)((2ky_3 - (k+1)y_1 - (k-1)y_2))\\
&(2kx_2 - (k-1)x_3 - (k+1)x_1) - (2ky_2 - (k-1)y_3 - (k+1)y_1))\\
&(2kx_3 - (k+1)x_1 - (k-1)x_2))))
\end{aligned}
$$

Dimana $\kappa = 2k(2kx_3 - (k+1)x_1 - (k-1)x_2)((2ky_3 - (k+1)y_1 - (k-1)y_2)$
$(2kx_2 - (k-1)x_3 - (k+1)x_1) - (2ky_2 - (k-1)y_3 - (k+1)y_1)$
$(2kx_3 - (k+1)x_1 - (k-1)x_2))$

Bukti. Misal diberikan sebarang segitiga ABC, sebagaimana terlihat pada Gambar 4.9. Bila masing-masing sisi segitiga dibagi dengan ruas garis yang menghubungkan titik-titik sudut $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, dan $C(x_3, y_3)$ di depannya dengan titik-titik pada sisi segitiga menjadi k bagian sama panjang, dengan k bilangan asli ganjil, maka terbentuk $(\frac{k-1}{2})$ heksagon. Akan dibuktikan bahwa titik-titik koordinat heksagon terkecilnya adalah seperti yang telah disebutkan di atas.

Dilihat dari pembahasan segitiga yang masing-masing sisinya dibagi menjadi lima dan tujuh bagian sama panjang, heksagon terbentuk pada garis bagi yang tengah. Sehingga pada sebarang segitiga yang masing-masing sisinya dibagi menjadi k bagian sama panjang, heksagon terkecil terbentuk pada titik batas berikut ini.



Gambar 4.9: Ilustrasi sebarang segitiga dimana masing-masing sisi dibagi menjadi *k* bagian sama panjang

$$x_{c_{(\frac{k-1}{2})}} = x_1 + \left(\frac{\frac{k-1}{2}}{k}\right)(x_2 - x_1) = (\frac{k+1}{2k})x_1 + (\frac{k-1}{2k})x_2,$$

$$y_{c_{(\frac{k-1}{2})}} = y_1 + \left(\frac{\frac{k-1}{2}}{k}\right)(y_2 - y_1) = (\frac{k+1}{2k})y_1 + (\frac{k-1}{2k})y_2$$

$$x_{c_{(\frac{k+1}{2})}} = x_1 + \left(\frac{\frac{k+1}{2}}{k}\right)(x_2 - x_1) = (\frac{k-1}{2k})x_1 + (\frac{k+1}{2k})x_2,$$

$$y_{c_{(\frac{k+1}{2})}} = y_1 + \left(\frac{\frac{k+1}{2}}{k}\right)(y_2 - y_1) = (\frac{k-1}{2k})y_1 + (\frac{k+1}{2k})y_2$$

$$x_{a_{(\frac{k-1}{2})}} = x_3 + \left(\frac{\frac{k+1}{2}}{k}\right)(x_2 - x_3) = (\frac{k-1}{2k})x_3 + (\frac{k+1}{2k})x_2,$$

$$y_{a_{(\frac{k-1}{2})}} = y_3 + \left(\frac{\frac{k+1}{2}}{k}\right)(y_2 - y_3) = (\frac{k-1}{2k})y_3 + (\frac{k+1}{2k})y_2$$

$$x_{a_{(\frac{k+1}{2})}} = x_3 + \left(\frac{\frac{k-1}{2}}{k}\right)(x_2 - x_3) = (\frac{k+1}{2k})x_3 + (\frac{k-1}{2k})x_2,$$
$$y_{a_{(\frac{k+1}{2})}} = y_3 + \left(\frac{\frac{k-1}{2}}{k}\right)(y_2 - y_3) = (\frac{k+1}{2k})y_3 + (\frac{k-1}{2k})y_2$$
$$x_{b_{(\frac{k-1}{2})}} = x_3 + \left(\frac{\frac{k-1}{2}}{k}\right)(x_1 - x_3) = (\frac{k+1}{2k})x_3 + (\frac{k-1}{2k})x_1,$$
$$y_{b_{(\frac{k-1}{2})}} = y_3 + \left(\frac{\frac{k-1}{2}}{k}\right)(y_1 - y_3) = (\frac{k+1}{2k})y_3 + (\frac{k-1}{2k})y_1$$
$$x_{b_{(\frac{k+1}{2})}} = x_3 + \left(\frac{\frac{k+1}{2}}{k}\right)(x_1 - x_3) = (\frac{k-1}{2k})x_3 + (\frac{k+1}{2k})x_1,$$
$$y_{b_{(\frac{k+1}{2})}} = y_3 + \left(\frac{\frac{k+1}{2}}{k}\right)(y_1 - y_3) = (\frac{k-1}{2k})y_3 + (\frac{k+1}{2k})y_1$$

Kemudian menentukan persamaan garis yang dibuat dari titik-titik batas tersebut dengan sudut yang ada dihadapannya, yang nantinya akan membentuk heksagon dalam (terkecil).

$$\begin{aligned} Garis\ Aa_{(\frac{k-1}{2})} &: \frac{x - (\frac{k-1}{2k})x_3 - (\frac{k+1}{2k})x_2}{x_1 - (\frac{k-1}{2k})x_3 - (\frac{k+1}{2k})x_2} = \frac{y - (\frac{k-1}{2k})y_3 - (\frac{k+1}{2k})y_2}{y_1 - (\frac{k-1}{2k})y_3 - (\frac{k+1}{2k})y_2} \\ \Leftrightarrow y &= \left(\frac{x - (\frac{k-1}{2k})x_3 - (\frac{k+1}{2k})x_2}{x_1 - (\frac{k-1}{2k})x_3 - (\frac{k+1}{2k})x_2}\right)(y_1 - (\frac{k-1}{2k})y_3 - (\frac{k+1}{2k})y_2) \\ &\quad +(\frac{k-1}{2k})y_3 + (\frac{k+1}{2k})y_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Garis\ Aa_{(\frac{k+1}{2})} &: \frac{x - (\frac{k+1}{2k})x_3 - (\frac{k-1}{2k})x_2}{x_1 - (\frac{k+1}{2k})x_3 - (\frac{k-1}{2k})x_2} = \frac{y - (\frac{k+1}{2k})y_3 - (\frac{k-1}{2k})y_2}{y_1 - (\frac{k+1}{2k})y_3 - (\frac{k-1}{2k})y_2} \\ \Leftrightarrow y &= \left(\frac{x - (\frac{k+1}{2k})x_3 - (\frac{k-1}{2k})x_2}{x_1 - (\frac{k+1}{2k})x_3 - (\frac{k-1}{2k})x_2}\right)(y_1 - (\frac{k+1}{2k})y_3 - (\frac{k-1}{2k})y_2) \\ &\quad +(\frac{k+1}{2k})y_3 + (\frac{k-1}{2k})y_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Garis\ Bb_{(\frac{k-1}{2})} &: \frac{x - (\frac{k+1}{2k})x_3 - (\frac{k-1}{2k})x_1}{x_2 - (\frac{k+1}{2k})x_3 - (\frac{k-1}{2k})x_1} = \frac{y - (\frac{k+1}{2k})y_3 - (\frac{k-1}{2k})y_1}{y_2 - (\frac{k+1}{2k})y_3 - (\frac{k-1}{2k})y_1} \\ \Leftrightarrow y &= \left(\frac{x - (\frac{k+1}{2k})x_3 - (\frac{k-1}{2k})x_1}{x_2 - (\frac{k+1}{2k})x_3 - (\frac{k-1}{2k})x_1}\right)(y_2 - (\frac{k+1}{2k})y_3 - (\frac{k-1}{2k})y_1) \\ &\quad +(\frac{k+1}{2k})y_3 + (\frac{k-1}{2k})y_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Garis\ Bb_{(\frac{k+1}{2})} &: \frac{x-(\frac{k-1}{2k})x_3-(\frac{k+1}{2k})x_1}{x_2-(\frac{k-1}{2k})x_3-(\frac{k+1}{2k})x_1} = \frac{y-(\frac{k-1}{2k})y_3-(\frac{k+1}{2k})y_1}{y_2-(\frac{k-1}{2k})y_3-(\frac{k+1}{2k})y_1} \\
\Leftrightarrow y &= \left(\frac{x-(\frac{k-1}{2k})x_3-(\frac{k+1}{2k})x_1}{x_2-(\frac{k-1}{2k})x_3-(\frac{k+1}{2k})x_1}\right)(y_2-(\frac{k-1}{2k})y_3-(\frac{k+1}{2k})y_1) \\
&\quad +(\frac{k-1}{2k})y_3+(\frac{k+1}{2k})y_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Garis\ Cc_{(\frac{k-1}{2})} &: \frac{x-(\frac{k+1}{2k})x_1-(\frac{k-1}{2k})x_2}{x_3-(\frac{k+1}{2k})x_1-(\frac{k-1}{2k})x_2} = \frac{y-(\frac{k+1}{2k})y_1-(\frac{k-1}{2k})y_2}{y_3-(\frac{k+1}{2k})y_1-(\frac{k-1}{2k})y_2} \\
\Leftrightarrow y &= \left(\frac{x-(\frac{k+1}{2k})x_1-(\frac{k-1}{2k})x_2}{x_3-(\frac{k+1}{2k})x_1-(\frac{k-1}{2k})x_2}\right)(y_3-(\frac{k+1}{2k})y_1-(\frac{k-1}{2k})y_2) \\
&\quad +(\frac{k+1}{2k})y_1+(\frac{k-1}{2k})y_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Garis\ Cc_{(\frac{k+1}{2})} &: \frac{x-(\frac{k-1}{2k})x_1-(\frac{k+1}{2k})x_2}{x_3-(\frac{k-1}{2k})x_1-(\frac{k+1}{2k})x_2} = \frac{y-(\frac{k-1}{2k})y_1-(\frac{k+1}{2k})y_2}{y_3-(\frac{k-1}{2k})y_1-(\frac{k+1}{2k})y_2} \\
\Leftrightarrow\ y &= \left(\frac{x-(\frac{k-1}{2k})x_1-(\frac{k+1}{2k})x_2}{x_3-(\frac{k-1}{2k})x_1-(\frac{k+1}{2k})x_2}\right)(y_3-(\frac{k-1}{2k})y_1-(\frac{k+1}{2k})y_2) \\
&\quad +(\frac{k-1}{2k})y_1+(\frac{k+1}{2k})y_2
\end{aligned}$$

Setelah diketahui persamaan garis, langkah selanjutnya adalah menentukan koordinat titik heksagon terkecil. Titik-titik yang membentuk heksagon terkecil merupakan hasil perpotongan antara garis-garis tersebut.

Titik D adalah perpotongan antara garis $Aa_{(\frac{k-1}{2})}$ dengan $Bb_{(\frac{k+1}{2})}$ sehingga

$$y_{Aa_{(\frac{k-1}{2})}} = y_{Bb_{(\frac{k+1}{2})}} \tag{4.43}$$

$$\Leftrightarrow \quad \Big(\frac{x-(\frac{k-1}{2k})x_3-(\frac{k+1}{2k})x_2}{x_1-(\frac{k-1}{2k})x_3-(\frac{k+1}{2k})x_2}\Big)(y_1-(\frac{k-1}{2k})y_3-(\frac{k+1}{2k})y_2)+(\frac{k-1}{2k})y_3+ (\frac{k+1}{2k})y_2=\Big(\frac{x-(\frac{k-1}{2k})x_3-(\frac{k+1}{2k})x_1}{x_2-(\frac{k-1}{2k})x_3-(\frac{k+1}{2k})x_1}\Big)(y_2-(\frac{k-1}{2k})y_3-(\frac{k+1}{2k})y_1)+ (\frac{k-1}{2k})y_3+(\frac{k+1}{2k})y_1$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\Big(\frac{x}{\frac{2kx_1-(k-1)x_3-(k+1)x_2}{2k}}\Big)-\Big(\frac{\frac{(k-1)x_3+(k+1)x_2}{2k}}{\frac{2kx_1-(k-1)x_3-(k+1)x_2}{2k}}\Big)\right) (\frac{2ky_1-(k-1)y_3-(k+1)y_2}{2k})= \left(\Big(\frac{x}{\frac{2kx_2-(k-1)x_3-(k+1)x_1}{2k}}\Big)-\Big(\frac{\frac{(k-1)x_3+(k+1)x_1}{2k}}{\frac{2kx_2-(k-1)x_3-(k+1)x_1}{2k}}\Big)\right) (\frac{2ky_2-(k-1)y_3-(k+1)y_1}{2k})+\frac{(k+1)y_1-(k+1)y_2}{2k}$$

$$\Leftrightarrow \quad x=\frac{1}{\alpha}(((k-1)x_3+(k+1)x_2)(2ky_1-(k-1)y_3-(k+1)y_2) (2kx_2-(k-1)x_3-(k+1)x_1)-((k-1)x_3+(k+1)x_1) (2ky_2-(k-1)y_3-(k+1)y_1)(2kx_1-(k-1)x_3-(k+1)x_2) +((k+1)y_1-(k+1)y_2)(2kx_1-(k-1)x_3-(k+1)x_2) (2kx_2-(k-1)x_3-(k+1)x_1)) \tag{4.44}$$

Dimana

$$\begin{aligned}\alpha &= 2k((2ky_1-(k-1)y_3-(k+1)y_2)(2kx_2-(k-1)x_3-(k+1)x_1)\\ &\quad -(2ky_2-(k-1)y_3-(k+1)y_1)(2kx_1-(k-1)x_3-(k+1)x_2))\end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.44) ke dalam (4.43)

$$y_{Aa_{(\frac{k-1}{2})}}=\Big(\frac{x-(\frac{k-1}{2k})x_3-(\frac{k+1}{2k})x_2}{x_1-(\frac{k-1}{2k})x_3-(\frac{k+1}{2k})x_2}\Big)(y_1-(\frac{k-1}{2k})y_3-(\frac{k+1}{2k})y_2) +(\frac{k-1}{2k})y_3+(\frac{k+1}{2k})y_2$$

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad & y = \frac{1}{\beta}\big(((k-1)x_3 + (k+1)x_2)(2ky_1 - (k-1)y_3 - (k+1)y_2)^2 \\
& (2kx_2 - (k-1)x_3 - (k+1)x_1) - ((k-1)x_3 + (k+1)x_1) \\
& (2ky_2 - (k-1)y_3 - (k+1)y_1)(2kx_1 - (k-1)x_3 - (k+1)x_2) \\
& (2ky_1 - (k-1)y_3 - (k+1)y_2) + ((k+1)y_1 - (k+1)y_2) \\
& (2kx_2 - (k-1)x_3 - (k+1)x_1)(2kx_1 - (k-1)x_3 - (k+1)x_2) \\
& (2ky_1 - (k-1)y_3 - (k+1)y_2) - ((k-1)x_3 + (k+1)x_2) \\
& (2ky_1 - (k-1)y_3 - (k+1)y_2)((2ky_1 - (k-1)y_3 - (k+1)y_2) \\
& (2kx_2 - (k-1)x_3 - (k+1)x_1) - (2ky_2 - (k-1)y_3 - (k+1)y_1) \\
& (2kx_1 - (k-1)x_3 - (k+1)x_2)) + (2kx_1 - (k-1)x_3 - (k+1)x_2) \\
& ((k-1)y_3 + (k+1)y_2)((2ky_1 - (k-1)y_3 - (k+1)y_2) \\
& (2kx_2 - (k-1)x_3 - (k+1)x_1) - (2ky_2 - (k-1)y_3 - (k+1)y_1) \\
& (2kx_1 - (k-1)x_3 - (k+1)x_2))\big) \qquad (4.45)
\end{aligned}
$$

Dimana

$$
\begin{aligned}
\beta \;=\; & 2k(2kx_1 - (k-1)x_3 - (k+1)x_2)((2ky_1 - (k-1)y_3 - (k+1)y_2) \\
& (2kx_2 - (k-1)x_3 - (k+1)x_1) - (2ky_2 - (k-1)y_3 - (k+1)y_1) \\
& (2kx_1 - (k-1)x_3 - (k+1)x_2))
\end{aligned}
$$

Titik E adalah perpotongan antara garis $Cc_{(\frac{k+1}{2})}$ dengan $Aa_{(\frac{k-1}{2})}$ sehingga

$$
y_{Cc_{(\frac{k+1}{2})}} = y_{Aa_{(\frac{k-1}{2})}} \qquad (4.46)
$$

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad & \left(\frac{x - (\frac{k-1}{2k})x_1 - (\frac{k+1}{2k})x_2}{x_3 - (\frac{k-1}{2k})x_1 - (\frac{k+1}{2k})x_2}\right)(y_3 - (\frac{k-1}{2k})y_1 - (\frac{k+1}{2k})y_2) + (\frac{k-1}{2k})y_1 + \\
& (\frac{k+1}{2k})y_2 = \left(\frac{x - (\frac{k-1}{2k})x_3 - (\frac{k+1}{2k})x_2}{x_1 - (\frac{k-1}{2k})x_3 - (\frac{k+1}{2k})x_2}\right)(y_1 - (\frac{k-1}{2k})y_3 - (\frac{k+1}{2k})y_2) + \\
& (\frac{k-1}{2k})y_3 + (\frac{k+1}{2k})y_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow\quad & \left(\left(\frac{x}{\frac{2kx_3-(k-1)x_1-(k+1)x_2}{2k}}\right)-\left(\frac{\frac{(k-1)x_1+(k+1)x_2}{2k}}{\frac{2kx_3-(k-1)x_1-(k+1)x_2}{2k}}\right)\right) \\
& (\frac{2ky_3-(k-1)y_1-(k+1)y_2}{2k}) = \\
& \left(\left(\frac{x}{\frac{2kx_1-(k-1)x_3-(k+1)x_2}{2k}}\right)-\left(\frac{\frac{(k-1)x_3+(k+1)x_2}{2k}}{\frac{2kx_1-(k-1)x_3-(k+1)x_2}{2k}}\right)\right) \\
& (\frac{2ky_1-(k-1)y_3-(k+1)y_2}{2k}) + \frac{(k-1)y_3-(k-1)y_1}{2k} \\
\Leftrightarrow\quad & x = \frac{1}{\gamma}(((k-1)x_1+(k+1)x_2)(2ky_3-(k-1)y_1-(k+1)y_2) \\
& (2kx_1-(k-1)x_3-(k+1)x_2) - ((k-1)x_3+(k+1)x_2) \\
& (2ky_1-(k-1)y_3-(k+1)y_2)(2kx_3-(k-1)x_1-(k+1)x_2) \\
& +((k-1)y_3-(k-1)y_1)(2kx_3-(k-1)x_1-(k+1)x_2) \\
& (2kx_1-(k-1)x_3-(k+1)x_2))
\end{aligned} \tag{4.47}
$$

Dimana

$$
\begin{aligned}
\gamma \;=\; & 2k((2ky_3-(k-1)y_1-(k+1)y_2)(2kx_1-(k-1)x_3-(k+1)x_2) - \\
& (2ky_1-(k-1)y_3-(k+1)y_2)(2kx_3-(k-1)x_1-(k+1)x_2))
\end{aligned}
$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.47) ke dalam (4.46)

$$
\begin{aligned}
y_{Cc_{(\frac{k+1}{2})}} = & \left(\frac{x-(\frac{k-1}{2k})x_1-(\frac{k+1}{2k})x_2}{x_3-(\frac{k-1}{2k})x_1-(\frac{k+1}{2k})x_2}\right)(y_3-(\frac{k-1}{2k})y_1-(\frac{k+1}{2k})y_2) + \\
& (\frac{k-1}{2k})y_1+(\frac{k+1}{2k})y_2 \\
\Leftrightarrow\quad & y = \frac{1}{\delta}(((k-1)x_1+(k+1)x_2)(2ky_3-(k-1)y_1-(k+1)y_2)^2 \\
& (2kx_1-(k-1)x_3-(k+1)x_2) - ((k-1)x_3+(k+1)x_2) \\
& (2ky_1-(k-1)y_3-(k+1)y_2)(2kx_3-(k-1)x_1-(k+1)x_2) \\
& (2ky_3-(k-1)y_1-(k+1)y_2) + ((k-1)y_3-(k-1)y_1) \\
& (2kx_3-(k-1)x_1-(k+1)x_2)(2kx_1-(k-1)x_3-(k+1)x_2) \\
& (2ky_3-(k-1)y_1-(k+1)y_2) - ((k-1)x_1+(k+1)x_2) \\
& (2ky_3-(k-1)y_1-(k+1)y_2)((2ky_3-(k-1)y_1-(k+1)y_2)
\end{aligned}
$$

$$(2kx_1-(k-1)x_3-(k+1)x_2)-(2ky_1-(k-1)y_3-(k+1)y_2)$$
$$(2kx_3-(k-1)x_1-(k+1)x_2))+(2kx_3-(k-1)x_1-(k+1)x_2)$$
$$((k-1)y_1+(k+1)y_2)((2ky_3-(k-1)y_1-(k+1)y_2)$$
$$(2kx_1-(k-1)x_3-(k+1)x_2)-(2ky_1-(k-1)y_3-(k+1)y_2)$$
$$(2kx_3-(k-1)x_1-(k+1)x_2))) \tag{4.48}$$

Dimana

$$\begin{aligned}\delta &= 2k(2kx_3-(k-1)x_1-(k+1)x_2)((2ky_3-(k-1)y_1-(k+1)y_2)\\ &\quad (2kx_1-(k-1)x_3-(k+1)x_2)-(2ky_1-(k-1)y_3-(k+1)y_2)\\ &\quad (2kx_3-(k-1)x_1-(k+1)x_2))\end{aligned}$$

Titik F adalah perpotongan antara garis $Bb_{(\frac{k-1}{2})}$ dengan $Cc_{(\frac{k+1}{2})}$ sehingga

$$y_{Bb_{(\frac{k-1}{2})}} = y_{Cc_{(\frac{k+1}{2})}} \tag{4.49}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\ & \left(\frac{x-(\frac{k+1}{2k})x_3-(\frac{k-1}{2k})x_1}{x_2-(\frac{k+1}{2k})x_3-(\frac{k-1}{2k})x_1}\right)(y_2-(\frac{k+1}{2k})y_3-(\frac{k-1}{2k})y_1)+(\frac{k+1}{2k})y_3+\\
& (\frac{k-1}{2k})y_1=\left(\frac{x-(\frac{k-1}{2k})x_1-(\frac{k+1}{2k})x_2}{x_3-(\frac{k-1}{2k})x_1-(\frac{k+1}{2k})x_2}\right)(y_3-(\frac{k-1}{2k})y_1-(\frac{k+1}{2k})y_2)+\\
& (\frac{k-1}{2k})y_1+(\frac{k+1}{2k})y_2\\
\Leftrightarrow\ & \left(\left(\frac{x}{\frac{2kx_2-(k+1)x_3-(k-1)x_1}{2k}}\right)-\left(\frac{\frac{(k+1)x_3+(k-1)x_1}{2k}}{\frac{2kx_2-(k+1)x_3-(k-1)x_1}{2k}}\right)\right)\\
& (\frac{2ky_2-(k+1)y_3-(k-1)y_1}{2k})=\\
& \left(\left(\frac{x}{\frac{2kx_3-(k-1)x_1-(k+1)x_2}{2k}}\right)-\left(\frac{\frac{(k-1)x_1+(k+1)x_2}{2k}}{\frac{2kx_3-(k-1)x_1-(k+1)x_2}{2k}}\right)\right)\\
& (\frac{2ky_3-(k-1)y_1-(k+1)y_2}{2k})+\frac{(k+1)y_2-(k+1)y_3}{2k}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad & x = \frac{1}{\epsilon}(((k+1)x_3 + (k-1)x_1)(2ky_2 - (k+1)y_3 - (k-1)y_1) \\
& (2kx_3 - (k-1)x_1 - (k+1)x_2) - ((k-1)x_1 + (k+1)x_2) \\
& (2ky_3 - (k-1)y_1 - (k+1)y_2)(2kx_2 - (k+1)x_3 - (k-1)x_1) \\
& +((k+1)y_2 - (k+1)y_3)(2kx_2 - (k+1)x_3 - (k-1)x_1) \\
& (2kx_3 - (k-1)x_1 - (k+1)x_2)) \qquad (4.50)
\end{aligned}
$$

Dimana

$$
\begin{aligned}
\epsilon &= 2k((2ky_2 - (k+1)y_3 - (k-1)y_1)(2kx_3 - (k-1)x_1 - (k+1)x_2) - \\
& (2ky_3 - (k-1)y_1 - (k+1)y_2)(2kx_2 - (k+1)x_3 - (k-1)x_1))
\end{aligned}
$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.50) ke dalam (4.49)

$$
\begin{aligned}
& y_{Bb_{(\frac{k-1}{2})}} = \left(\frac{x - (\frac{k+1}{2k})x_3 - (\frac{k-1}{2k})x_1}{x_2 - (\frac{k+1}{2k})x_3 - (\frac{k-1}{2k})x_1}\right)(y_2 - (\frac{k+1}{2k})y_3 - (\frac{k-1}{2k})y_1) + \\
& (\frac{k+1}{2k})y_3 + (\frac{k-1}{2k})y_1 \\
\Leftrightarrow \quad & y = \frac{1}{\varepsilon}(((k+1)x_3 + (k-1)x_1)(2ky_2 - (k+1)y_3 - (k-1)y_1)^2 \\
& (2kx_3 - (k-1)x_1 - (k+1)x_2) - ((k-1)x_1 + (k+1)x_2) \\
& (2ky_3 - (k-1)y_1 - (k+1)y_2)(2kx_2 - (k+1)x_3 - (k-1)x_1) \\
& (2ky_2 - (k+1)y_3 - (k-1)y_1) + ((k+1)y_2 - (k+1)y_3) \\
& (2kx_2 - (k+1)x_3 - (k-1)x_1)(2kx_3 - (k-1)x_1 - (k+1)x_2) \\
& (2ky_2 - (k+1)y_3 - (k-1)y_1) - ((k+1)x_3 + (k-1)x_1) \\
& (2ky_2 - (k+1)y_3 - (k-1)y_1)((2ky_2 - (k+1)y_3 - (k-1)y_1) \\
& (2kx_3 - (k-1)x_1 - (k+1)x_2) - (2ky_3 - (k-1)y_1 - (k+1)y_2) \\
& (2kx_2 - (k+1)x_3 - (k-1)x_1)) + (2kx_2 - (k+1)x_3 - (k-1)x_1) \\
& ((k+1)y_3 + (k-1)y_1)((2ky_2 - (k+1)y_3 - (k-1)y_1) \\
& (2kx_3 - (k-1)x_1 - (k+1)x_2) - (2ky_3 - (k-1)y_1 - (k+1)y_2) \\
& (2kx_2 - (k+1)x_3 - (k-1)x_1))) \qquad (4.51)
\end{aligned}
$$

Dimana

$$
\begin{aligned}
\varepsilon \;=\;& 2k(2kx_2-(k+1)x_3-(k-1)x_1)((2ky_2-(k+1)y_3-(k-1)y_1)\\
&(2kx_3-(k-1)x_1-(k+1)x_2)-(2ky_3-(k-1)y_1-(k+1)y_2)\\
&(2kx_2-(k+1)x_3-(k-1)x_1))
\end{aligned}
$$

Titik G adalah perpotongan antara garis $Bb_{(\frac{k-1}{2})}$ dengan $Aa_{(\frac{k+1}{2})}$ sehingga

$$
\begin{aligned}
& y_{Bb_{(\frac{k-1}{2})}} = y_{Aa_{(\frac{k+1}{2})}} \qquad (4.52)\\
\Leftrightarrow\;& \left(\frac{x-(\frac{k+1}{2k})x_3-(\frac{k-1}{2k})x_1}{x_2-(\frac{k+1}{2k})x_3-(\frac{k-1}{2k})x_1}\right)(y_2-(\frac{k+1}{2k})y_3-(\frac{k-1}{2k})y_1)+(\frac{k+1}{2k})y_3+\\
&(\frac{k-1}{2k})y_1=\left(\frac{x-(\frac{k+1}{2k})x_3-(\frac{k-1}{2k})x_2}{x_1-(\frac{k+1}{2k})x_3-(\frac{k-1}{2k})x_2}\right)(y_1-(\frac{k+1}{2k})y_3-(\frac{k-1}{2k})y_2)+\\
&(\frac{k+1}{2k})y_3+(\frac{k-1}{2k})y_2\\
\Leftrightarrow\;& \left(\left(\frac{x}{\frac{2kx_2-(k+1)x_3-(k-1)x_1}{2k}}\right)-\left(\frac{\frac{(k+1)x_3+(k-1)x_1}{2k}}{\frac{2kx_2-(k+1)x_3-(k-1)x_1}{2k}}\right)\right)\\
&(\frac{2ky_2-(k+1)y_3-(k-1)y_1}{2k})=\\
&\left(\left(\frac{x}{\frac{2kx_1-(k+1)x_3-(k-1)x_2}{2k}}\right)-\left(\frac{\frac{(k+1)x_3+(k-1)x_2}{2k}}{\frac{2kx_1-(k+1)x_3-(k-1)x_2}{2k}}\right)\right)\\
&(\frac{2ky_1-(k+1)y_3-(k+1)y_2}{2k})+\frac{(k-1)y_2-(k-1)y_1}{2k}\\
\Leftrightarrow\;& x=\frac{1}{\zeta}(((k+1)x_3+(k-1)x_1)(2ky_2-(k+1)y_3-(k-1)y_1)\\
&(2kx_1-(k+1)x_3-(k-1)x_2)-((k+1)x_3+(k-1)x_2)\\
&(2ky_1-(k+1)y_3-(k-1)y_2)(2kx_2-(k+1)x_3-(k-1)x_1)\\
&+((k-1)y_2-(k-1)y_1)(2kx_2-(k+1)x_3-(k-1)x_1)\\
&(2kx_1-(k+1)x_3-(k-1)x_2)) \qquad (4.53)
\end{aligned}
$$

Dimana

$$
\begin{aligned}
\zeta \;=\;& 2k((2ky_2-(k+1)y_3-(k-1)y_1)(2kx_1-(k+1)x_3-(k-1)x_2)-\\
&(2ky_1-(k+1)y_3-(k-1)y_2)(2kx_2-(k+1)x_3-(k-1)x_1))
\end{aligned}
$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.53) ke dalam (4.52)

$$
\begin{aligned}
y_{Bb_{(\frac{k-1}{2})}} &= \left(\frac{x-(\frac{k+1}{2k})x_3-(\frac{k-1}{2k})x_1}{x_2-(\frac{k+1}{2k})x_3-(\frac{k-1}{2k})x_1}\right)(y_2-(\frac{k+1}{2k})y_3-(\frac{k-1}{2k})y_1)+ \\
&\quad (\frac{k+1}{2k})y_3+(\frac{k-1}{2k})y_1 \\
\Leftrightarrow \quad y &= \frac{1}{\eta}(((k+1)x_3+(k-1)x_1)(2ky_2-(k+1)y_3-(k-1)y_1)^2 \\
&\quad (2kx_1-(k+1)x_3-(k-1)x_2)-((k+1)x_3+(k-1)x_2) \\
&\quad (2ky_1-(k+1)y_3-(k-1)y_2)(2kx_2-(k+1)x_3-(k-1)x_1) \\
&\quad (2ky_2-(k+1)y_3-(k-1)y_1)+((k-1)y_2-(k-1)y_1) \\
&\quad (2kx_2-(k+1)x_3-(k-1)x_1)(2kx_1-(k+1)x_3-(k-1)x_2) \\
&\quad (2ky_2-(k+1)y_3-(k-1)y_1)-((k+1)x_3+(k-1)x_1) \\
&\quad (2ky_2-(k+1)y_3-(k-1)y_1)((2ky_2-(k+1)y_3-(k-1)y_1) \\
&\quad (2kx_1-(k+1)x_3-(k-1)x_2)-(2ky_1-(k+1)y_3-(k-1)y_2) \\
&\quad (2kx_2-(k+1)x_3-(k-1)x_1))+(2kx_2-(k+1)x_3-(k-1)x_1) \\
&\quad ((k+1)y_3+(k-1)y_1)((2ky_2-(k+1)y_3-(k-1)y_1) \\
&\quad (2kx_1-(k+1)x_3-(k-1)x_2)-(2ky_1-(k+1)y_3-(k-1)y_2) \\
&\quad (2kx_2-(k+1)x_3-(k-1)x_1))) \qquad (4.54)
\end{aligned}
$$

Dimana

$$
\begin{aligned}
\eta &= 2k(2kx_2-(k+1)x_3-(k-1)x_1)((2ky_2-(k+1)y_3-(k-1)y_1) \\
&\quad (2kx_1-(k+1)x_3-(k-1)x_2)-(2ky_1-(k+1)y_3-(k-1)y_2) \\
&\quad (2kx_2-(k+1)x_3-(k-1)x_1))
\end{aligned}
$$

Titik H adalah perpotongan antara garis $Aa_{(\frac{k+1}{2})}$ dengan $Cc_{(\frac{k-1}{2})}$ sehingga

$$y_{Aa_{(\frac{k+1}{2})}} = y_{Cc_{(\frac{k-1}{2})}} \qquad (4.55)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{x-(\frac{k+1}{2k})x_3-(\frac{k-1}{2k})x_2}{x_1-(\frac{k+1}{2k})x_3-(\frac{k-1}{2k})x_2}\right)(y_1-(\frac{k+1}{2k})y_3-(\frac{k-1}{2k})y_2)+(\frac{k+1}{2k})y_3+$$
$$(\frac{k-1}{2k})y_2=\left(\frac{x-(\frac{k+1}{2k})x_1-(\frac{k-1}{2k})x_2}{x_3-(\frac{k+1}{2k})x_1-(\frac{k-1}{2k})x_2}\right)(y_3-(\frac{k+1}{2k})y_1-(\frac{k-1}{2k})y_2)+$$
$$(\frac{k+1}{2k})y_1+(\frac{k-1}{2k})y_2$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\left(\frac{x}{\frac{2kx_1-(k+1)x_3-(k-1)x_2}{2k}}\right)-\left(\frac{\frac{(k+1)x_3+(k-1)x_2}{2k}}{\frac{2kx_1-(k+1)x_3-(k-1)x_2}{2k}}\right)\right)$$
$$(\frac{2ky_1-(k+1)y_3-(k-1)y_2}{2k})=$$
$$\left(\left(\frac{x}{\frac{2kx_3-(k+1)x_1-(k-1)x_2}{2k}}\right)-\left(\frac{\frac{(k+1)x_1+(k-1)x_2}{2k}}{\frac{2kx_3-(k+1)x_1-(k-1)x_2}{2k}}\right)\right)$$
$$(\frac{2ky_3-(k+1)y_1-(k-1)y_2}{2k})+\frac{(k+1)y_1-(k+1)y_3}{2k}$$

$$\Leftrightarrow \quad x=\frac{1}{\theta}(((k+1)x_3+(k-1)x_2)(2ky_1-(k+1)y_3-(k-1)y_2)$$
$$(2kx_3-(k+1)x_1-(k-1)x_2)-((k+1)x_1+(k-1)x_2)$$
$$(2ky_3-(k+1)y_1-(k-1)y_2)(2kx_1-(k+1)x_3-(k-1)x_2)$$
$$+((k+1)y_1-(k+1)y_3)(2kx_1-(k+1)x_3-(k-1)x_2)$$
$$(2kx_3-(k+1)x_1-(k-1)x_2)) \tag{4.56}$$

Dimana

$$\theta = 2k((2ky_1-(k+1)y_3-(k-1)y_2)(2kx_3-(k+1)x_1-(k-1)x_2)-$$
$$(2ky_3-(k+1)y_1-(k-1)y_2)(2kx_1-(k+1)x_3-(k-1)x_2))$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.56) ke dalam (4.55)

$$y_{Aa_{(\frac{k+1}{2})}} = \left(\frac{x-(\frac{k+1}{2k})x_3-(\frac{k-1}{2k})x_2}{x_1-(\frac{k+1}{2k})x_3-(\frac{k-1}{2k})x_2}\right)(y_1-(\frac{k+1}{2k})y_3-(\frac{k-1}{2k})y_2)+)$$
$$(\frac{k+1}{2k})y_3+(\frac{k-1}{2k})y_2)$$
$$\Leftrightarrow \quad y=\frac{1}{\vartheta}(((k+1)x_3+(k-1)x_2)(2ky_1-(k+1)y_3-(k-1)y_2)^2)$$

$$\begin{aligned}
&(2kx_3-(k+1)x_1-(k-1)x_2)-((k+1)x_1+(k-1)x_2))\\
&(2ky_3-(k+1)y_1-(k-1)y_2)(2kx_1-(k+1)x_3-(k-1)x_2))\\
&(2ky_1-(k+1)y_3-(k-1)y_2)+((k+1)y_1-(k+1)y_2))\\
&(2kx_1-(k+1)x_3-(k-1)x_2)(2kx_3-(k+1)x_1-(k-1)x_2))\\
&(2ky_1-(k+1)y_3-(k-1)y_2)-((k+1)x_3+(k-1)x_2))\\
&(2ky_1-(k+1)y_3-(k-1)y_2)((2ky_1-(k+1)y_3-(k-1)y_2))\\
&(2kx_3-(k+1)x_1-(k-1)x_2)-(2ky_3-(k+1)y_1-(k-1)y_2))\\
&(2kx_1-(k+1)x_3-(k-1)x_2))+(2kx_1-(k+1)x_3-(k-1)x_2))\\
&((k+1)y_3+(k-1)y_2)((2ky_1-(k+1)y_3-(k-1)y_2))\\
&(2kx_3-(k+1)x_1-(k-1)x_2)-(2ky_3-(k+1)y_1-(k-1)y_2))\\
&(2kx_1-(k+1)x_3-(k-1)x_2)))
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Dimana

$$\begin{aligned}
\vartheta \;=\;& 2k(2kx_1-(k+1)x_3-(k-1)x_2)((2ky_1-(k+1)y_3-(k-1)y_2)\\
&(2kx_3-(k+1)x_1-(k-1)x_2)-(2ky_3-(k+1)y_1-(k-1)y_2)\\
&(2kx_1-(k+1)x_3-(k-1)x_2))
\end{aligned}$$

Titik I adalah perpotongan antara garis $Cc_{(\frac{k-1}{2})}$ dengan $Bb_{(\frac{k+1}{2})}$ sehingga

$$y_{Cc_{(\frac{k-1}{2})}} = y_{Bb_{(\frac{k+1}{2})}} \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\quad & \left(\frac{x-(\frac{k+1}{2k})x_1-(\frac{k-1}{2k})x_2}{x_3-(\frac{k+1}{2k})x_1-(\frac{k-1}{2k})x_2}\right)(y_3-(\frac{k+1}{2k})y_1-(\frac{k-1}{2k})y_2)+(\frac{k+1}{2k})y_1+\\
&(\frac{k-1}{2k})y_2=\left(\frac{x-(\frac{k-1}{2k})x_3-(\frac{k+1}{2k})x_1}{x_2-(\frac{k-1}{2k})x_3-(\frac{k+1}{2k})x_1}\right)(y_2-(\frac{k-1}{2k})y_3-(\frac{k+1}{2k})y_1)+\\
&(\frac{k-1}{2k})y_3+(\frac{k+1}{2k})y_1
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\left(\frac{x}{\frac{2kx_3-(k+1)x_1-(k-1)x_2}{2k}}\right) - \left(\frac{\frac{(k+1)x_1+(k-1)x_2}{2k}}{\frac{2kx_3-(k+1)x_1-(k-1)x_2}{2k}}\right)\right)$$
$$(\frac{2ky_3-(k+1)y_1-(k-1)y_2}{2k}) =$$
$$\left(\left(\frac{x}{\frac{2kx_2-(k-1)x_3-(k+1)x_1}{2k}}\right) - \left(\frac{\frac{(k-1)x_3+(k+1)x_1}{2k}}{\frac{2kx_2-(k-1)x_3-(k+1)x_1}{2k}}\right)\right)$$
$$(\frac{2ky_2-(k-1)y_3-(k+1)y_1}{2k}) + \frac{(k-1)y_3-(k-1)y_2}{2k}$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{\iota}(((k+1)x_1+(k-1)x_2)(2ky_3-(k+1)y_1-(k-1)y_2)$$
$$(2kx_2-(k-1)x_3-(k+1)x_1) - ((k-1)x_3+(k+1)x_1)$$
$$(2ky_2-(k-1)y_3-(k+1)y_1)(2kx_3-(k+1)x_1-(k-1)x_2) +$$
$$((k-1)y_3-(k-1)y_2)(2kx_3-(k+1)x_1-(k-1)x_2)$$
$$(2kx_2-(k-1)x_3-(k+1)x_1)) \tag{4.59}$$

Dimana

$$\iota = 2k((2ky_3-(k+1)y_1-(k-1)y_2)(2kx_2-(k-1)x_3-(k+1)x_1)$$
$$-(2ky_2-(k-1)y_3-(k+1)y_1)(2kx_3-(k+1)x_1-(k-1)x_2))$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.59) ke dalam (4.58)

$$y_{Cc_{(\frac{k-1}{2})}} = \left(\frac{x-(\frac{k+1}{2k})x_1-(\frac{k-1}{2k})x_2}{x_3-(\frac{k+1}{2k})x_1-(\frac{k-1}{2k})x_2}\right)(y_3-(\frac{k+1}{2k})y_1-(\frac{k-1}{2k})y_2))$$
$$+(\frac{k+1}{2k})y_1+(\frac{k-1}{2k})y_2)$$
$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{\kappa}(((k+1)x_1+(k-1)x_2)(2ky_3-(k+1)y_1-(k-1)y_2)^2)$$
$$(2kx_2-(k-1)x_3-(k+1)x_1) - ((k-1)x_3+(k+1)x_1))$$
$$(2ky_2-(k-1)y_3-(k+1)y_1)(2kx_3-(k+1)x_1-(k-1)x_2))$$
$$(2ky_3-(k+1)y_1-(k-1)y_2) + ((k-1)y_3-(k-1)y_2))$$
$$(2kx_3-(k+1)x_1-(k-1)x_2)(2kx_2-(k-1)x_3-(k+1)x_1))$$
$$(2ky_3-(k+1)y_1-(k-1)y_2) - ((k+1)x_1+(k-1)x_2))$$

$$
\begin{aligned}
&(2ky_3-(k+1)y_1-(k-1)y_2)((2ky_3-(k+1)y_1-(k-1)y_2))\\
&(2kx_2-(k-1)x_3-(k+1)x_1)-(2ky_2-(k-1)y_3-(k+1)y_1))\\
&(2kx_3-(k+1)x_1-(k-1)x_2))+(2kx_3-(k+1)x_1-(k-1)x_2))\\
&((k+1)y_1+(k-1)y_2)((2ky_3-(k+1)y_1-(k-1)y_2))\\
&(2kx_2-(k-1)x_3-(k+1)x_1)-(2ky_2-(k-1)y_3-(k+1)y_1))\\
&(2kx_3-(k+1)x_1-(k-1)x_2)))) \qquad (4.60)
\end{aligned}
$$

Dimana

$$
\begin{aligned}
\kappa \;=\;& 2k(2kx_3-(k+1)x_1-(k-1)x_2)((2ky_3-(k+1)y_1-(k-1)y_2)\\
&(2kx_2-(k-1)x_3-(k+1)x_1)-(2ky_2-(k-1)y_3-(k+1)y_1)\\
&(2kx_3-(k+1)x_1-(k-1)x_2))
\end{aligned}
$$

Dengan demikian lemma di atas terbukti. □

◇ **Teorema 4.3.1** *Jika sebuah segitiga sembarang, samakaki, dan samasisi ABC, masing-masing sisinya dibagi dengan ruas garis yang menghubungkan titik-titik sudut $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, dan $C(x_3, y_3)$ di depannya dengan titik-titik pada sisi segitiga menjadi k bagian yang sama panjang, dengan k bilangan asli ganjil, maka perbandingan luas heksagon terkecil yang terbentuk dengan luas segitiga asal adalah* $8 : (9k^2-1)$.

Bukti. Pertama akan dibuktikan bahwa bila sebuah segitiga sembarang ABC, masing-masing sisinya dibagi dengan ruas garis yang menghubungkan titik-titik sudut $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, dan $C(x_3, y_3)$ di depannya dengan titik-titik pada sisi segitiga menjadi k bagian yang sama panjang, dengan k bilangan asli ganjil, maka perbandingan luas heksagon terkecil yang terbentuk dengan luas segitiga asal adalah $8 : (9k^2-1)$. Pada Lemma 4.3.1 sebelumnya telah didapat titik-titik koordinat yang membentuk heksagon terkecil, selanjutnya akan dihitung luas dari heksagon terkecil tersebut. Untuk menghitung luas heksagon tersebut dilakukan dengan cara determinan, seperti yang sudah dipaparkan dalam Bab 2, diagram perhitungan luas heksagon pada Gambar 2.11.

$$\begin{array}{llllll}
D & x_{(4.38)} & y_{(4.39)} & x_{(4.41)}\cdot y_{(4.39)} & \\
E & x_{(4.41)} & y_{(4.42)} & x_{(4.44)}\cdot y_{(4.42)} & x_{(4.38)}\cdot y_{(4.42)} \\
F & x_{(4.44)} & y_{(4.45)} & x_{(4.47)}\cdot y_{(4.45)} & x_{(4.41)}\cdot y_{(4.45)} \\
G & x_{(4.47)} & y_{(4.48)} & x_{(4.50)}\cdot y_{(4.48)} & x_{(4.44)}\cdot y_{(4.48)} \\
H & x_{(4.50)} & y_{(4.51)} & x_{(4.53)}\cdot y_{(4.51)} & x_{(4.47)}\cdot y_{(4.51)} \\
I & x_{(4.53)} & y_{(4.54)} & x_{(4.38)}\cdot y_{(4.54)} & x_{(4.50)}\cdot y_{(4.54)} \\
D & x_{(4.38)} & y_{(4.39)} & & x_{(4.53)}\cdot y_{(4.39)}
\end{array}$$

Dari cara tersebut didapat luas heksagon terkecil $DEFGHI$ adalah,

$$\begin{aligned}
L_{DEFGHI} &= \frac{1}{2}\Big(\big(x_{(4.47)}\cdot y_{(4.45)} + x_{(4.50)}\cdot y_{(4.48)} + x_{(4.53)}\cdot y_{(4.51)} + x_{(4.56)}\cdot y_{(4.54)} + \\
&\quad x_{(4.59)}\cdot y_{(4.57)} + x_{(4.44)}\cdot y_{(4.60)}\big) - \big(x_{(4.44)}\cdot y_{(4.48)} + x_{(4.47)}\cdot y_{(4.51)} + \\
&\quad x_{(4.50)}\cdot y_{(4.54)} + x_{(4.53)}\cdot y_{(4.57)} + x_{(4.56)}\cdot y_{(4.60)} + \\
&\quad x_{(4.59)}\cdot y_{(4.45)}\big)\Big) \qquad (4.61)
\end{aligned}$$

Setelah didapat luas heksagon terkecil, langkah selanjutnya adalah mencari luas segitiga asal. Untuk mencari luas segitiga asal dilakukan dengan cara yang sama seperti mencari luas heksagon di atas.

$$\begin{array}{lllll}
A & x_1 & y_1 & x_2.y_1 & \\
B & x_2 & y_2 & x_3.y_2 & x_1.y_2 \\
C & x_3 & y_3 & x_1.y_3 & x_2.y_3 \\
A & x_1 & y_1 & & x_3.y_1
\end{array}$$

Didapat luas segitiga asal ABC adalah,

$$L_{ABC} = \left|\frac{1}{2}\big((x_2.y_1 + x_3.y_2 + x_1.y_3) - (x_1.y_2 + x_2.y_3 + x_3.y_1)\big)\right| \qquad (4.62)$$

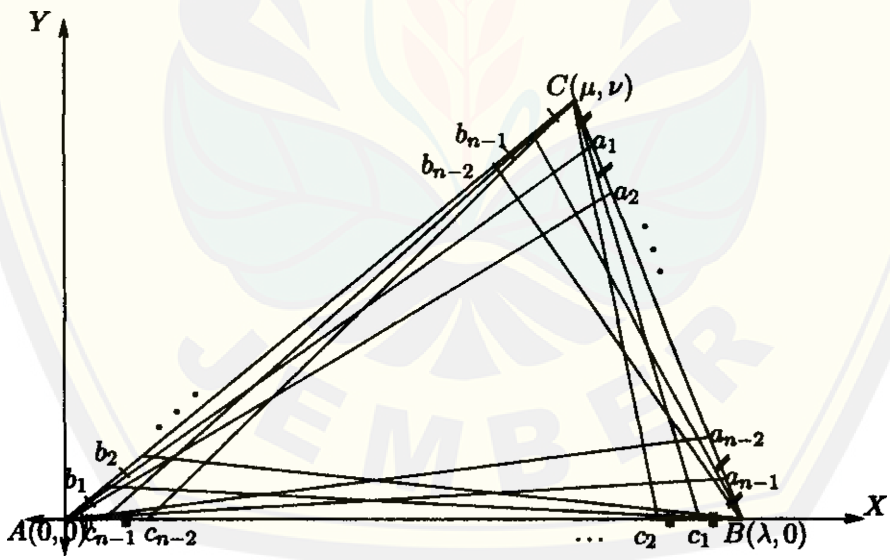
Sehingga, perbandingan luas heksagon terkecil dengan segitiga asalnya adalah

$$\frac{L_{DEFGHI}(4.61)}{L_{ABC}(4.62)} \tag{4.63}$$

Pada teorema ini segitiga yang dimaksud adalah segitiga sembarang, maka dapat dimisalkan titik-titik sebarang segitiga sebagai berikut, tampak pada Gambar 4.10:

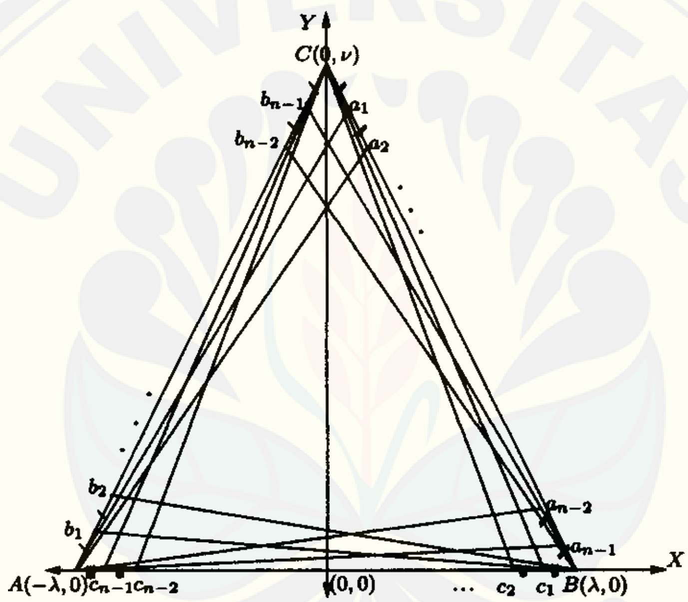
$$\begin{aligned} A(x_1, y_1) &= (0,0) \\ B(x_2, y_2) &= (\lambda, 0) \\ C(x_3, y_3) &= (\mu, \nu) \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan nilai-nilai x_1, x_2, x_3 dan y_1, y_2, y_3 terhadap persamaan 4.63 pada pembuktian segitiga sembarang di atas, maka diperolehlah luas heksagon terkecil, yaitu $8 : (9k^2 - 1)$. □



Gambar 4.10: Ilustrasi segitiga sembarang dimana masing-masing sisi dibagi menjadi k bagian sama panjang pada koordinat kartesius

Kedua akan dibuktikan bahwa bila sebuah segitiga samakaki ABC, masing-masing sisinya dibagi dengan ruas garis yang menghubungkan titik-titik sudut $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, dan $C(x_3, y_3)$ di depannya dengan titik-titik pada sisi segitiga menjadi k bagian yang sama panjang, dengan k bilangan asli ganjil, maka perbandingan luas heksagon terkecil yang terbentuk dengan luas segitiga asal adalah $8 : (9k^2 - 1)$. Pada Lemma 4.3.1 sebelumnya telah didapat titik-titik koordinat yang membentuk heksagon terkecil, selanjutnya untuk menghitung luas dari heksagon terkecil, segitiga asal, da perbandingan dari heksagon terkecil tersebut dengan segitiga asal dilakukan dengan cara yang sama seperti pada pembuktian segitiga sembarang di atas.



Gambar 4.11: Ilustrasi segitiga samakaki dimana masing-masing sisi dibagi menjadi k bagian sama panjang pada koordinat kartesius

Pada teorema ini segitiga yang dimaksud adalah segitiga samakaki, maka dapat di misalkan titik-titik sebarang segitiga sebagai berikut, tampak pada

Gambar 4.11:

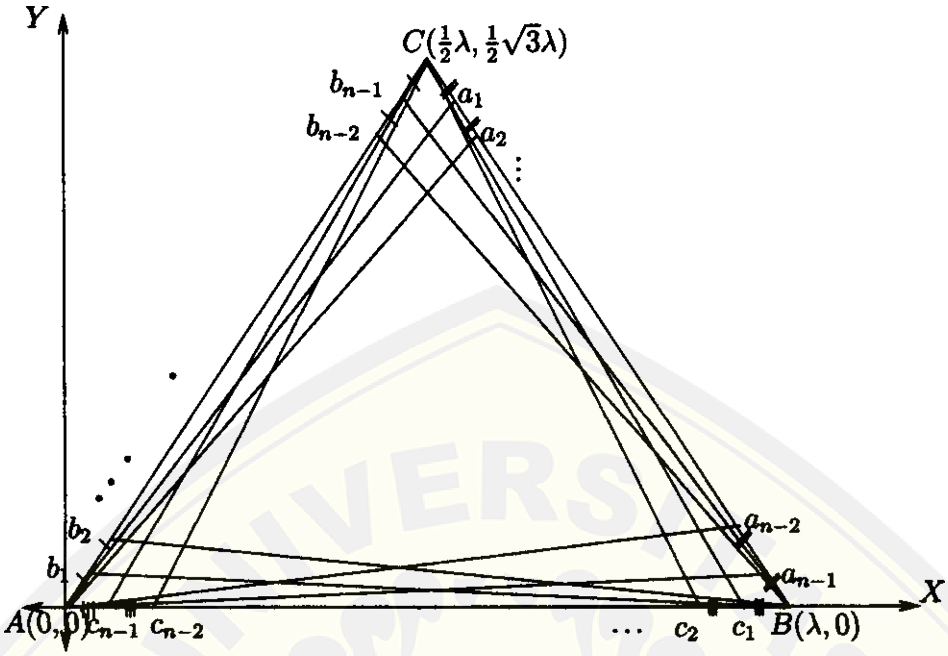
$$\begin{aligned} A(x_1, y_1) &= (-\lambda, 0) \\ B(x_2, y_2) &= (\lambda, 0) \\ C(x_3, y_3) &= (0, \nu) \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan nilai-nilai x_1, x_2, x_3 dan y_1, y_2, y_3 terhadap persamaan 4.63 pada pembuktian segitiga sembarang di atas, maka diperolehlah luas heksagon terkecil, yaitu $8 : (9k^2 - 1)$. □

Ketiga akan dibuktikan bahwa bila sebuah segitiga samasisi ABC, masing-masing sisinya dibagi dengan ruas garis yang menghubungkan titik-titik sudut $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, dan $C(x_3, y_3)$ di depannya dengan titik-titik pada sisi segitiga menjadi k bagian yang sama panjang, dengan k bilangan asli ganjil, maka perbandingan luas heksagon terkecil yang terbentuk dengan luas segitiga asal adalah $8 : (9k^2 - 1)$. Pada Lemma 4.3.1 sebelumnya telah didapat titik-titik koordinat yang membentuk heksagon terkecil, selanjutnya untuk menghitung luas dari heksagon terkecil, segitiga asal, dan perbandingan heksagon terkecil tersebut dengan segitiga asal dilakukan dengan cara yang sama seperti pada pembuktian segitiga sembarang di atas.

Pada teorema ini segitiga yang dimaksud adalah segitiga samasisi, maka dapat dimisalkan titik-titik sebarang segitiga di atas sebagai berikut, tampak pada Gambar 4.12:

$$\begin{aligned} A(x_1, y_1) &= (0, 0) \\ B(x_2, y_2) &= (\lambda, 0) \end{aligned}$$



Gambar 4.12: Ilustrasi segitiga samasisi dimana masing-masing sisi dibagi menjadi k bagian sama panjang pada koordinat kartesius

Karena segitiga samasisi, maka titik C merupakan hasil rotasi 60^o dari titik B, sehingga

$$
\begin{aligned}
C(x_3, y_3) &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos 60^o & \sin 60^o \\ -\sin 60^o & \cos 60^o \end{pmatrix} \\
C(x_3, y_3) &= (\frac{1}{2}\lambda, \frac{1}{2}\sqrt{3}\lambda).
\end{aligned}
$$

Dengan mensubstitusikan nilai-nilai x_1, x_2, x_3 dan y_1, y_2, y_3 terhadap persamaan 4.63 pada pembuktian segitiga sembarang di atas, maka diperolehlah luas heksagon terkecil, yaitu $8 : (9k^2 - 1)$. □

4.4 Pembahasan

Sebagaimana dijelaskan di depan, penelitian ini difokuskan pada pengembangan teorema Marion Walter. Teorema Marion Walter menyatakan bahwa "jika masing-masing sisi segitiga dibagi menjadi tiga bagian yang sama panjang dan masing-masing titik batas dihubungkan dengan titik sudut dihadapannya maka perpotongan garis-garis pembagi tersebut akan membentuk sebuah bangun datar segienam (heksagon). Perbandingan luas heksagon yang terbentuk dengan luas segitiga adalah 1:10".

Teorema Marion Walter ini berlaku untuk sebarang segitiga, dan dalam teorema ini sisi segitiga di depan sudut-sudutnya hanya dibagi tiga bagian sama panjang. Bagaimana jika sisi segitiga didepan sudut-sudutnya dibagi lima bagian, tujuh bagian, atau bahkan k bagian untuk k bilangan ganjil. Penelitian ini menjawab seluruh pertanyaan tersebut. Oleh karena itu, mengapa penelitian ini dikatakan sebagai pengembangan dari teorema Marion Walter.

Hal yang sangat berarti dalam penelitian ini adalah ditemukannya rumus untuk luas heksagon dalam (terkecil) yang terbentuk bila masing-masing sisi segitiga dibagi k bagian sama panjang. Teorema Marion Walter tidak menjawab pertanyaan ini, bahkan teorema Marion Walter menyisakan *open problem* untuk bagian ini. Penelitian ini menjawab open problem tersebut sehingga sekarang menjadi mudah menjelaskan pertanyaan bagaimana jika masing-masing sisi segitiga dibagi lima bagian, tujuh bagian, sembilan bagian dan seterusnya hingga k bagian, untuk k bilangan ganjil.

Berdasarkan hasil penelitian diatas, luas heksagon dalam yang terbentuk dapat diperoleh melalui proses perhitungan yang tidak sederhana mulai dari menentukan koordinat titik pada masing-masing sisi segitiga yang nantinya akan membentuk heksagon, lalu menentukan persamaan garisnya. Kemudian menentukan koordinat titik potong yang membentuk heksagon dalam (terkecil), dan diakhiri dengan mencari luas heksagon dalam (terkecil) tersebut.

Dari penelitian ini diperoleh 3 teorema baru. Teorema tersebut adalah sebagai berikut:

Jika masing-masing sisi segitiga dibagi menjadi lima bagian sama panjang maka diperoleh:

- Teorema 4.1.1: Jika sebuah segitiga sembarang, samakaki, dan samasisi, masing-masing sisinya dibagi dengan ruas garis penghubung titik sudut dengan titik-titik pada sisi segitiga di depannya menjadi lima bagian yang sama panjang, maka perbandingan luas heksagon terkecil yang terbentuk dengan luas segitiga asal adalah $1 : 28$.
- Teorema 4.2.1: Jika sebuah segitiga sembarang, masing-masing sisinya dibagi dengan ruas garis penghubung titik sudut dengan titik-titik pada sisi segitiga di depannya menjadi tujuh bagian yang sama panjang, maka perbandingan luas heksagon terkecil yang terbentuk dengan luas segitiga asal adalah $1 : 55$.
- Teorema 4.3.1: Jika sebuah segitiga sembarang, masing-masing sisinya dibagi dengan ruas garis penghubung titik sudut dengan titik-titik pada sisi segitiga di depannya menjadi k bagian yang sama panjang, maka perbandingan luas heksagon terkecil yang terbentuk dengan luas segitiga asal adalah $8 : (9k^2 - 1)$.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa perbandingan luas heksagon dengan luas segitiga asal yang terbentuk untuk sebarang segitiga yang masing-masing sisi segitiga dibagi menjadi tiga, lima, tujuh, dan k bagian sama panjang, untuk k bilangan asli ganjil, berturut-turut adalah $1 : 10, 1 : 28, 1 : 55, \ldots, 8 : (9k^2 - 1)$.

Dari hasil penelitian ini maka untuk pembagian masing-masing sisi segitiga dalam k bagian, dimana k bilangan ganjil, sudah terjawab semua termasuk teorema Marion Walter terkover dalam penelitian ini. Namun demikian penelitian ini belum dapat menjawab bagaimana jika masing-masing sisi segitiga tersebut, dibagi menjadi k bagian, dengan perbandingan tertentu (tidak sama panjang). Oleh karena itu peneliti mengajukan open problem, untuk peneliti selanjutnya.

Open Problem 4.4.1 *Jika sebarang segitiga, sisi-sisinya dibagi dengan garis bagi menjadi k bagian yang tidak sama panjang (perbandingan tertentu), bagaimanakah perbandingan luas heksagon dalam dengan segitiga asal yang terbentuk.*

BAB 5

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat ditarik kesimpulan bahwa:

1. Jika sebarang segitiga, sisi-sisinya dibagi dengan garis bagi menjadi lima bagian yang sama panjang, maka perbandingan luas heksagon terkecil yang terbentuk dengan segitiga asal adalah 1 : 28.

2. Jika sebarang segitiga, sisi-sisinya dibagi dengan garis bagi menjadi tujuh bagian yang sama panjang, maka perbandingan luas heksagon terkecil yang terbentuk dengan segitiga asal adalah 1 : 55.

3. Jika sebarang segitiga, sisi-sisinya dibagi dengan garis bagi menjadi k bagian yang sama panjang, maka perbandingan luas heksagon terkecil yang terbentuk dengan segitiga asal adalah $8 : (9k^2 - 1)$.

5.2 Saran

Penelitian telah dilakukan sehingga menemukan perbandingan luas heksagon terkecil yang terbentuk dengan segitiga asal bila masing-masing sisi segitiga dibagi menjadi k bagian sama panjang dengan k bilangan ganjil. Namun demikian penelitian ini belum dapat menjawab bagaimana jika masing-masing sisi segitiga tersebut, dibagi menjadi k bagian, dengan perbandingan tertentu. Oleh karena itu untuk penelitian selanjutnya dapat diajukan saran sebagai berikut "tentukan perbandingan luas heksagon bagian dalam yang terbentuk dengan segitiga asal jika sebarang segitiga sisi-sisinya dibagi dengan garis bagi menjadi k bagian yang tidak sama panjang (perbandingan tertentu), untuk k bilangan ganjil."

DAFTAR PUSTAKA

A. Brannan, David. 1999. Geometri. Australia : Cambridge University Press.

Adrian Soekotjo Loedji, Willi. 2008. Matematika Bilingual Untuk SMP/MTS Kelas VII. Bandung: Yrama Widya.

Anomin 1. http://www.archdaily.com/wp–content/uploads/2008/12/1457494 972_openhouse–002-528x352.jpg:23-11-2009

Anomin 2. http://ww2.edc.org/makingmath/mathprojects/link/marionwalter-lnk-1.asp,2004:20-6-2009.

Anomin 3. http://www.wallpaper.com/images/206_tate_am180708_f.jpg:23–11 –2009

Anomin 4. http://id.88db.com/id/Services/Post_Detail. page/Design/Building_Architecture/?PostID=269885:19-7-2010

Anomin 5. http://www.london–se1.co.uk/news/imageuploads/1153436829_62. 49.27.213.jpg:23–11–2009

Anomin 6. http://www.e–architect.co.uk/scotland/jpgs/rural_design_model_ portree.jpg:23–11–2009

Anomin 7. http://hendrydext.blogspot.com/2008/08/menghitung-luas-diketahu-i-titik.html:12-03-2010

Budiarto, Teguh. 2007. Sistem Geometri. Surabaya : UNESA press.

E.S, Pesta. 2008. Matematika Aplikasi untuk SMA dan MA kelas XII Program Studi Ilmu Alam. Jakarta : Pusat Perbukuan Departement Pendidikan Nasional.

Gustafon. 1991. Elementary Geometri third edition. United States of America: John Wiley and Sons, inc.

Kusno. 1988. Pengantar ke Geometri Bidang. Jember : Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Kusno. 2003. Diktat Kuliah Geometri. Jember : FMIPA Universitas Jember.

Kusno. 2004. Geometri. Jember : Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.

Riddle, D.F. 1992. Analytic Geometry. United States of America: PWS Publishing Company.

Triatmirachmawati, Endang. 2005. Panduan Materi dan Latihan Soal UAN SMA Negeri 2 Probolinggo. Probolinggo: SMA Negeri 2 Probolinggo.

Wahdah, Anisah. 2006. Pembuktian Teorema Marion Walter Menggunakan Sistem Koordinat Kartesius. Jember: Fakultas MIPA Universitas Jember.

Yousda, Ine I Amirman. 1993. Penelitian dan Statistik Pendidikan. Jakarta: Bumi Aksara.