e-ISSN 2722-7774

CGANT

Journal of Mathematics and Applications

CGANT University of Jember

PUI-PT Combinatorics and Graph
CGANT-University of Jember
CGANT
Journal of
Mathematics and Applications
e-ISSN 2722-7774

VOL 3, NO 2 (2022)

CGANT JOURNAL OF MATHEMATICS AND APPLICATIONS

DOI: https://doi.org/10.25037/cgantjma.v3i2

Available in December 2022

TABLE OF CONTENTS

ARTICLES

Addres: Jl. Kalimantan Tegalboto No.37, Krajan Timur, Sumbersari, Kec. Sumbersari, Kabupaten Jember, Jawa Timur 68121

PUI-PT Combinatorics and Graph
CGANT-University of Jember

CGANT
Journal of
Mathematics and Applications

e-ISSN 2722-7774

EDITORIAL TEAM

Addres: Jl. Kalimantan Tegalboto No.37, Krajan Timur, Sumbersari, Kec. Sumbersari, Kabupaten Jember, Jawa Timur 68121

CGANT JMA
http://www.jcgantunej.or.id
Volume 3, No 2, 2022
DOI:
10.25037/cgantjma.v3i2.83

Journal of
MATHEMATICS AND APPLICATIONS

e-ISSN 2722-7774

Pewarnaan Sisi Ketakteraturan Lokal Refleksif pada Keluarga Graf Planar

N. I. Muttaqi[1], Dafik[1,2], R. Adawiyah[1,2]
[1]Pendidikan Matematika, Universitas Jember, Indonesia
[2]CGANT - Universitas Jember, Indonesia

E-mail: izzanuwaila@gmail.com, d.dafik@unej.ac.id, robiatul@unej.ac.id

Abstract. All graph in this paper are simple and connected graph. Let $V(G)$ and $E(G)$ be vertex set and edge set. A map $f : .V(G) \longrightarrow \{0, 2, ..., 2k_v\}$ and $f : E(G) \longrightarrow \{1, 2, ..., k_e\}$ are sind to be an irregular reflexive labelling where $k = max\{2k_v, k_e\}$ for k_v, k_e are natural number. The weight of edge $u, v \in E(G)$ under f is $w(u) = f(u)+\Sigma_{uv\in V(G)}f(uv)$. The function f is called local edge irregular reflexive labeling if every two adjacent edges has distinct weight and weight of a edge is defined as the sum of the labels of edge and the labels of all vertex incident this edge When we assign each edge of G with a color of the edge weight $w(uv)$, thus we say the graph G admits a local edge irregular reflexive coloring. The minimum number of colors produced from local edge irregular reflexive coloring of graph G is reflexive local irregular chromatic number denoted by $\chi_{lrecs}(G)$. Furthermore, the minimum k required such that $\chi_{lrecs}(G) = \chi(G)$ is called a local reflexive edge color strength, denoted by $lrecs(G)$. In this paper, we learn about the local edge irregular reflexive coloring and obtain $lrecs(G)$ of planar related graphs.

Keywords : *Local edge irregular reflexive coloring, planar graphs.*

1. Pendahuluan

Secara matematis sebuah graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan titik dan sisi dengan notasi $G(V, E)$, dimana V adalah himpunan berhingga tak kosong dari elemen yang disebut titik *(vertex)*, dan E adalah himpunan sisi (mungkin kosong) dari pasangan tidak terurut dua titik v_1, v_2. Jadi, sebuah graf dimungkinkan tidak memiliki sisi tetapi harus memiliki simpul/titik minimal satu. *Order* pada sebuah graf G dengan notasi $|V(G)|$ merupakan banyaknya titik yang dimiliki oleh sebuah graf G. Sedangkan size dengan notasi $|E(G)|$ merupakan banyaknya sisi yang dimiliki oleh graf tersebut [4]. Dua titik v_1 dan v_2 dikatakan bertetangga *(adjacent)* jika v_1 dan v_2 merupakan titik ujung dari sisi $e = v_1v_2$ pada graf G. sehingga sisi e dapat dikatakan terkait *(incident)* dengan titik v_1 dan v_2 [2].

Suatu graf dikatakan graf terhubung *(connected graph)*, jika dan hanya jika untuk setiap pasang titik v_i dan v_j di dalam himpunan V terdapat *path* dari v_i ke v_j. Sedangkan graf G dikatakan tidak terhubung *(disconnected graph)* jika tidak terdapat lintasan diantara titik v_i ke v_j [7]. Graf yang hanya terdiri atas satu titik saja tetap dikatakan terhubung, karena titik tunggalnya terhubung dengan dirinya sendiri disebut juga graf *trivial*. Suatu graf dikatakan sebagai graf sederhana jika graf tersebut tidak memuat gelang atau *loop* [1].

Salah satu konsep yang dikembangkan pada teori graf adalah pelabelan dan pewarnaan graf. Pelabelan graf merupakan fungsi yang memetakan elemen suatu graf ke bilangan bulat positif non negatif. sedangkan pewarnaan graf merupakan pemberian warna pada setiap elemen dari graf G, sehingga elemen yang bertetangga memiliki warna yang berbeda. Terdapat tiga macam pewarnaan dalam teori graf, yaitu pewarnaan titik, pewarnaan sisi, dan pewarnaan wilayah [3]. Pada artikel ini akan membahas mengenai pewarnaan sisi pada graf G, dimana warna pada sisi-sisi graf G diberikan satu warna untuk setiap sisi, sedemikian hingga sisi-sisi yang bertetangga diwarnai dengan warna berbeda [5]. Jumlah warna minimum yang digunakan untuk pewarnaan sisi pada graf G disebut dengan bilangan kromatik sisi graf G dan dinotasikan dengan $\chi_e(G)$ [8]. Topik pewarnaan sisi pada graf dapat dikembangkan menjadi sebuah topik baru yaitu pewarnaan sisi ketakteraturan lokal refleksif.

Pewarnaan sisi ketakteraturan lokal refleksif merupakan hasil penggabungan konsep dari pewarnaan sisi dan pelabelan sisi ketakteraturan lokal refleksif.[4][5] Pewarnaan sisi ketakteraturan lokal refleksif adalah pewarnaan yang diperoleh dengan cara melabeli titik dan sisi pada graf menggunakan pelabelan sisi ketakteraturan lokal refleksif, sedangkan bobot sisi yang dihasilkan dari pewarnaan sisi ketakteraturan lokal refleksif diperoleh dengan menjumlahkan label sisi dan label titik yang terkait dengan sisi tersebut dengan tujuan untuk menentukan nilai *local reflexive vertex color strength* yang merupakan label terkecil (*k-minimum*) dan digunakan untuk mendapatkan bilangan kromatik pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif $\chi_{(lrvs)}(G)$ yang sama dengan bilangan kromatik pewarnaan titik $\chi(G)$. Didapatkan definisi tentang pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif sebagai berikut :

Definisi 1 *Misalkan $\chi(G)$ merupakan bilangan kromatik dari pewarnaan sisi graf G. Diketahui sebuah fungsi $f : V(G) \to \{0, 2, ..., 2k_v\}$ dan $f : E(G) \to \{1, 2, ..., k_e\}$ dimana $k = max\{2k_v, k_e\}$ untuk k_v dan k_e bilangan asli. Bobot sisi yang bersesuaiaan $uv \in E(G)$ dalam f adalah $w(uv) = f(uv) + \sum_{u,v \in V(G)} f(uv)$. Fungsi f dikatakan sebuah pelabelan sisi ketakteraturan lokal refleksif jika setiap dua sisi yang bertetangga memiliki bobot yang berbeda. Jika setiap sisi dari G diwarnai dengan bobot sisi $w(uv)$, maka G dikatakan memiliki pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif. Banyaknya bobot minimal yang dibutuhkan untuk mewarnai semua sisinya sehingga setiap sisi yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama disebut bilangan kromatik pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif, dinotasikan dengan $\chi_{lrecs}(G)$. Selanjutnya minimum k yang dibutuhkan sehingga $\chi_{lrecs}(G) = \chi(G)$ disebut dengan local reflexive vertex color strength, disimbolkan dengan $lrecs(G)$.*

Untuk menduga nilai *local reflexive edge color strength* pewarnaan sisi ketakteraturan lokal refleksif dari graf G digunakan lemma terkait pewarnaan sisi ketakteraturan lokal refleksif yaitu:

Lemma 1 *Diberikan graf centipede C_n, untuk $n \geq 3$ bilangan kromatik $\chi_e(C_n) = 3$.*

Lemma 2 *Diberikan graf tangga L_n, untuk $n \geq 3$ bilangan kromatik $\chi_e(L_n) = 3$.*

Lemma 3 *Diberikan graf tangga miring SL_n, untuk $n \geq 3$ bilangan kromatik $\chi_e(SL_n) = 3$.*

Lemma 4 *Misalkan G merupakan graf terhubung dengan derajat maksimum $(\triangle)$. Local reflexive edge color strength dari graf G adalah*

$$lrecs(G) = \left\lceil \frac{\Delta}{3} \right\rceil$$

Namun, apabila nilai *local reflexive edge color strength* pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada lemma 4 tidak memenuhi untuk diterapkan pada saat melakukan pelabelan graf, maka label terbesar yang digunakan dapat ditambahkan dengan $1(+1)$ hingga didapatkan nilai *local reflexive edge color strength*nya yang sesuai dengan definisi pewarnaan sisi ketakteraturan lokal refleksif.

Penelitian yang dilakukan oleh Dafik, dkk. (2021) [5], menghasilkan nilai *local reflexive vertex color strength* pewarnaan titik ketakteraturan lokal refleksif pada beberapa graf meliputi graf lingkaran (C_n), graf bintang (S_n), graf roda (W_n), graf persahabatan (F_{rn}), dan graf tangga (L_n). Mengingat bahwa penelitian yang dilakukan terkait pewarnaan ketakteraturan lokal refleksif masih tergolong penelitian baru dimana masih sedikit yang meneliti pewarnaan sisi ketakteraturan lokal refleksif, sehingga masih banyak jenis graf yang belum diteliti termasuk keluarga graf planar.

Menurut Guichard (2017) [7], Suatu graf G adalah planar jika dapat direpresentasikan oleh suatu gambar di bidang tanpa terdapat sisi yang bersilangan. Jadi, graf planar yaitu graf yang dapat digambarkan pada bidang datar dengan sisi-sisi tidak saling memotong. Berikut merupakan keluarga graf planar yang digunakan dalam penelitian, yaitu graf *centipede* CP_n, graf tangga L_n, graf tangga miring SL_n.

2. Hasil Penelitian

Dalam artikel ini, kami membahas teorema pewarnaan sisi ketakteraturan lokal refleksif pada keluarga graf planar. Teorema yang dihasilkan berupa teorema yang berkaitan dengan *local reflexive edge color strength* (*lrecs*) pada keluarga graf planar yang meliputi graf *centipede*, graf tangga, graf tangga miring, sehingga menghasilkan teorema sebagai berikut:

Theorem 1 *Misalkan graf G adalah graf centipede C_n, untuk setiap bilangan bulat positif $n \geq 3$, nilai $lrecs(C_n) = 2$.*

Bukti. Misalkan C_n adalah graf *centipede* dengan *order* $2n$. Berdasarkan nilai pewarnaan sisi graf *centipede* C_n pada Lemma 1 didapatkan $\chi(C_n) = 3$. Kita ketahui bahwa k-minimum yang diperlukan sehingga $\chi_{lrecs}(G) = \chi(G)$ disebut pewarnaan sisi ketakteraturan lokal refleksif, dilambangkan dengan $lrecs(G)$. Untuk membuktikan nilai $lrecs(C_n) = 2$, harus dibuktikan terlebih dahulu batas bawah dan batas atas *local reflexive edge color strength* pada graf *centipede* C_n. Berdasarkan Lemma 4, maka batas bawah dari *local reflexive edge color strength* pada graf *centipede* C_n sebagai berikut:

$$lrecs(C_n) \geq \left\lceil \frac{\Delta(C_n)}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{3}{3} \right\rceil = 1$$

Berdasarkan perhitungan batas bawah *local reflexive edge color strength* pada graf *centipede* C_n diperoleh nilai $lrecs(C_n) \geq 1$. Namun demikian, batas bawah dari $lrecs(C_n)$ tidak akan mencapai nilai 1, karena bila kita melabeli 0 sebagai label titik dan 1 sebagai label sisi, berdasarkan label tersebut mengakibatkan beberapa sisi yang bertetangga memiliki bobot sisi yang sama, hal ini kontradiksi dengan definisi pelabelan sisi ketakteraturan lokal refleksif untuk sisi yang bertetangga harus memiliki bobot sisi yang berbeda. Oleh karena itu $lrecs(C_n) > 1$ atau $lrecs(C_n) \geq 2$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan batas atas dari pelabelan sisi ketakteraturan lokal refleksif pada graf *centipede* C_n yang dilihat pada pelabelan maksimumnya dengan fungsi f untuk label titik dan fungsi g untuk label sisi.

$$\begin{aligned} f(x_i) &= 0 \\ f(y_i) &= 2 \end{aligned}$$

$$g(x_i x_{i+1}) = \begin{cases} 1, \text{ jika } i & \equiv 1(\text{mod}2) \\ 2, \text{ jika } i & \equiv 0(\text{mod}2) \end{cases}$$

$$g(x_iy_i) \quad = \quad 1$$

Berdasarkan label titik dan label sisinya, maka diperoleh $lrecs(C_n) \leq 2$. Dikarenakan batas bawah dan batas atas *local reflexive edge color strength* adalah $lrecs(C_n) \geq 2$ dan $lrecs(C_n) \leq 2$, maka dapat disimpulkan bahwa $lrecs(C_n) = 2$.

Selanjutnya, kita akan menunjukkan bilangan kromatik *local reflexive edge color strength* C_n yang sama dengan bilangan kromatik C_n. Berdasarkan label titik dan label sisi graf *centipede* C_n, maka diperoleh bobot sisi dari graf *centipede* C_n sebagai berikut :

$$w(x_ix_{i+1}) \quad = \quad \begin{cases} 1, \text{ jika } i & \equiv 1(\text{mod}2) \\ 2, \text{ jika } i & \equiv 0(\text{mod}2) \end{cases}$$

$$w(x_iy_i) \quad = \quad 3$$

Berdasarkan fungsi bobot sisi, maka didapatkan banyaknya bobot sisi yang sama dengan bilangan kromatik dari graf *centipede* C_n pada Lemma 1, yaitu $\chi_{lrecs}(C_n) = \chi_e(C_n) = 3$.

Untuk memperjelas gambaran pewarnaan sisi ketakteraturan lokal refleksif pada graf *centipede*, berikut visualisasi $\chi_{lrecs}(C_5) = 3$ dengan $lrecs(C_5) = 2$ yang ditunjukkan pada Gambar 1.

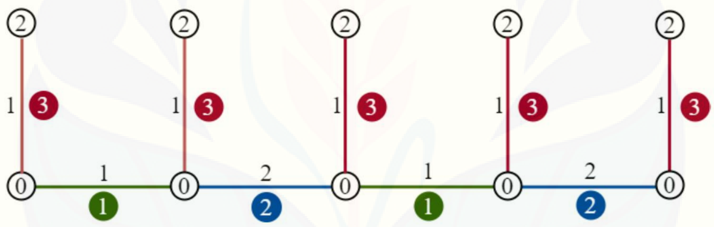

Figure 1. Ilustrasi $\chi_{lrecs}(C_5) = 3$ dengan $lrecs(C_5) = 2$ dari graf *centipede* CP_5

Gambar 1 merupakan hasil pewarnaan sisi ketakteraturan lokal refleksif pada graf *centipede* C_n. Terdapat 3 warna berbeda yang diperoleh melalui pelabelan dengan label minimum yaitu 2 dan perhitungan bobot sisinya yang disesuaikan dengan definisi pewarnaan sisi ketakteraturan lokal refleksif.

Theorem 2 *Misalkan graf G adalah graf tangga L_n, untuk setiap bilangan bulat positif $n \geq 3$, nilai $lrecs(L_n) = 3$.*

Bukti. Misalkan L_n adalah graf *shackle* dengan *order* $2n$. Berdasarkan nilai pewarnaan sisi graf tangga L_n pada Lemma 2 didapatkan $\chi(L_n) = 3$. Kita ketahui bahwa k-minimum yang diperlukan sehingga $\chi_{lrecs}(G) = \chi(G)$ disebut pewarnaan sisi ketakteraturan lokal refleksif, dilambangkan dengan $lrecs(G)$. Untuk membuktikan nilai $lrecs(L_n) = 2$, harus dibuktikan terlebih dahulu batas bawah dan batas atas *local reflexive edge color strength* pada graf tangga L_n. Berdasarkan lemma 4, maka batas bawah dari *local reflexive edge color strength* pada graf tangga L_n sebagai berikut:

$$lrecs(L_n) \geq \left\lceil \frac{\Delta(L_n)}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{3}{3} \right\rceil = 1$$

Berdasarkan perhitungan batas bawah *local reflexive edge color strength* pada graf tangga L_n diperoleh nilai $lrecs(L_n) \geq 1$. Namun demikian, batas bawah dari $lrecs(L_n)$ tidak akan mencapai 1 karena, bila kita melabeli 0 sebagai label titik dan 1 sebagai label sisi, berdasarkan label tersebut mengakibatkan beberapa sisi yang bertetangga memiliki bobot sisi yang sama, hal ini kontradiksi dengan definisi pelabelan sisi ketakteraturan lokal refleksif untuk sisi yang bertetangga harus memiliki bobot sisi yang berbeda. Oleh karena itu $lrecs(L_n) > 1$ atau $lrecs(L_n) \geq 2$.

Namun demikian, batas bawah ini juga tidak tercapai. Misal kita menetapkan bahwa $lrecs(L_n) \geq 2$, maka untuk label titik memiliki $n!$ permutasi, dimana $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots 2 \cdot 1$ permutasi. Ke $n!$ permutasi tersebut adalah $200\ldots, 020\ldots, 002\ldots$ dan $220\ldots, 202\ldots, 022\ldots$. Misal didefisikan $f : V \to \{0, 2\}$ dan $g : E \to \{1, 2\}$ maka pelabelan sisi ketaktearturan lokal refleksif pada graf tangga L_n adalah sebagai berikut.

$$f(x_i) = \begin{cases} 0, \text{ jika } i & \equiv 1(\text{mod}2) \\ 2, \text{ jika } i & \equiv 0(\text{mod}2) \end{cases}$$

$$f(y_i) = \begin{cases} 2, \text{ jika } i & \equiv 1(\text{mod}2) \\ 0, \text{ jika } i & \equiv 0(\text{mod}2) \end{cases}$$

$$g(x_i x_{i+1}) = \begin{cases} 2, \text{ jika } i & \equiv 1(\text{mod}2) \\ 1, \text{ jika } i & \equiv 0(\text{mod}2) \end{cases}$$

$$g(y_i y_{i+1}) = \begin{cases} 2, \text{ jika } i & \equiv 1(\text{mod}2) \\ 1, \text{ jika } i & \equiv 0(\text{mod}2) \end{cases}$$

$$g(x_i y_i) = \begin{cases} 2, \text{ jika } i & \equiv 1(\text{mod}2) \\ 1, \text{ jika } i & \equiv 0(\text{mod}2) \end{cases}$$

Berdasarkan label titik dan label sisinya, maka diperoleh $lrecs(L_n) \leq 2$. Bobot sisi dari pelabelan sisi ketaktearturan lokal refleksif pada graf tangga L_n adalah sebagai berikut:

$$w(x_i) = \begin{cases} 4, \text{ jika } i & \equiv 1(\text{mod}2) \\ 3, \text{ jika } i & \equiv 0(\text{mod}2) \end{cases}$$

$$w(y_i) = \begin{cases} 4, \text{ jika } i & \equiv 1(\text{mod}2) \\ 3, \text{ jika } i & \equiv 0(\text{mod}2) \end{cases}$$

$$w(x_i x_{i+1}) = \begin{cases} 2, \text{ jika } i & \equiv 1(\text{mod}2) \\ 5, \text{ jika } i & \equiv 0(\text{mod}2) \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi bobot sisi ini, didapatkan banyaknya bobot sisi adalah sebanyak 4 yang berbeda dengan bilangan kromatik dari graf tangga L_n yaitu 3, lihat Lemma 2. Kontradiksi dengan definisi bahwa nilai eksak $\chi_{lrecs}(L_n)$ yang diperoleh harus sama dengan nilai $\chi_e(L_n) = 3$. Dengan demikian batas bawahnya menjadi $lrecs(L_n) \geq 3$.

Untuk meyakinkan bahwa $lrecs(L_n) \geq 3$, dapat diberikan analisis sebagai berikut: Diberikan $n!$ permutasi tersebut adalah $200\ldots, 020\ldots, 002\ldots$ dan $220\ldots, 202\ldots, 022\ldots$.. Definisikan $f : V \to \{0, 2\}$ dan $g : E \to \{1, 2\}$. berdasarkan label tersebut mengakibatkan beberapa sisi yang bertetangga memiliki bobot sisi yang sama, hal ini kontradiksi dengan definisi pelabelan sisi ketakteraturan lokal refleksif untuk sisi yang bertetangga harus memiliki bobot sisi yang berbeda. Oleh karena itu $lrecs(L_n) \geq 3$, sehingga $g : E \rightarrow \{1, 2, 3\}$.

$$f(x_i, y_i) = 0$$

$$g(x_i x_{i+1}, y_i y_{i+1}) = \begin{cases} 1, \text{ jika } i & \equiv 1(\text{mod}2) \\ 2, \text{ jika } i & \equiv 0(\text{mod}2) \end{cases}$$

$$g(x_i y_i) = 3$$

Berdasarkan label titik dan label sisinya, maka diperoleh $lrecs(L_n) \leq 3$. Dikarenakan untuk batas bawah dan batas atas *local reflexive edge color strength* didapatkan $lrecs(L_n) \geq 3$ dan $lrecs(L_n) \leq 3$. Sehingga, dapat disimpulkan bahwa $lrecs(L_n) = 3$.

Selanjutnya, kita akan menunjukkan bilangan kromatik *local reflexive edge color strength* L_n yang sama dengan bilangan kromatik L_n. Berdasarkan label titik dan label sisi graf tangga L_n, maka diperoleh bobot sisi dari graf tangga L_n sebagai berikut :

$$w(x_i x_{i+1}, y_i y_{i+1}) = \begin{cases} 1, \text{ jika } i & \equiv 1(\text{mod}2) \\ 2, \text{ jika } i & \equiv 0(\text{mod}2) \end{cases}$$
$$w(x_i y_i) = 3$$

Berdasarkan fungsi bobot sisi, didapatkan banyaknya bobot sisi yang sama dengan bilangan kromatik dari graf *shackle* pada Lemma 2, yaitu $\chi_{lrecs}(L_n) = \chi_e(L_n) = 3$.

Berikut ini ilustrasi pewarnaan sisi ketakteraturan lokal refleksif pada graf ladder untuk L_4 yang ditunjukkan pada gambar 2

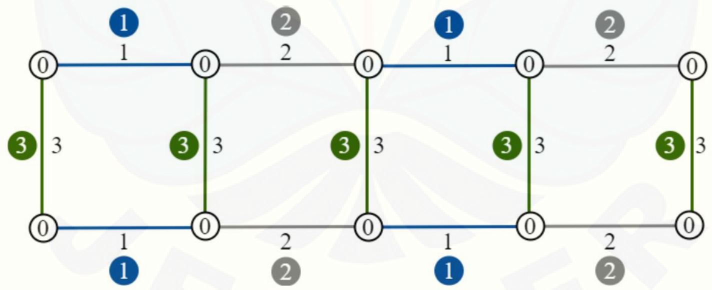

Figure 2. Graf tangga L_5

Gambar 2 merupakan hasil pewarnaan sisi ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga (L_4). Terdapat 3 warna berbeda yang diperoleh melalui pelabelan dengan label minimum yaitu 3 dan perhitungan bobot sisinya yang disesuaikan dengan definisi pewarnaan sisi ketakteraturan lokal refleksif.

Theorem 3 *Misalkan graf G adalah graf tangga miring SL_n, untuk setiap bilangan bulat positif $n \geq 3$, nilai $lrecs(SL_n) = 3$.*

Bukti. Misalkan SL_n adalah graf tangga miring dengan order $2n$. Berdasarkan nilai pewarnaan sisi graf tangga miring SL_n pada Lemma 3 didapatkan $\chi(SL_n) = 3$. Kita ketahui bahwa k-minimum yang diperlukan sehingga $\chi_{lrecs}(G) = \chi_e(G)$ disebut pewarnaan sisi ketakteraturan lokal refleksif, dilambangkan dengan $lrecs(G)$. Untuk membuktikan nilai $lrecs(SL_n) = 3$, harus dibuktikan terlebih dahulu batas bawah dan batas atas *local reflexive edge color strength* pada graf tangga miring SL_n. Selanjutnya, akan ditunjukkan batas bawah . Berdasarkan lemma 4, maka batas bawah dari *local reflexive edge color strength* pada graf tangga miring SL_n sebagai berikut:

$$lrecs(SL_n) \geq \left\lceil \frac{\Delta(SL_n)}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{3}{3} \right\rceil = 1$$

Berdasarkan perhitungan batas bawah *local reflexive edge color strength* pada graf tangga miring SL_n diperoleh nilai $lrecs(SL_n) \geq 1$. Namun demikian, batas bawah dari $lrecs(SL_n)$ tidak akan mencapai 1 karena, bila kita melabeli 0 sebagai label titik dan 1 sebagai label sisi, berdasarkan label tersebut mengakibatkan beberapa sisi yang bertetangga memiliki bobot sisi yang sama, hal ini kontradiksi dengan definisi pelabelan sisi ketakteraturan lokal refleksif untuk sisi yang bertetangga harus memiliki bobot sisi yang berbeda. Oleh karena itu $lrecs(SL_n) > 1$ atau $lrecs(SL_n) \geq 2$.

Namun demikian, batas bawah ini juga tidak tercapai. Misal kita menetapkan bahwa $lrecs(SL_n) \geq 2$, maka untuk label titik memiliki $n!$ permutasi, dimana $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots 2 \cdot 1$ permutasi. Ke $n!$ permutasi tersebut adalah $200\ldots, 020\ldots, 002\ldots$ dan $220\ldots, 202\ldots, 022\ldots$. Misal didefisikan $f: V \to \{0, 2\}$ dan $g: E \to \{1, 2\}$ maka pelabelan sisi ketaktearturan lokal refleksif pada graf tangga miring SL_n adalah sebagai berikut.

$$f(x_i) = \begin{cases} 2, \text{ jika } i & \equiv 1(\text{mod}4) \\ 2, \text{ jika } i & \equiv 2(\text{mod}4) \\ 0, \text{ jika } i & \equiv 3(\text{mod}4) \\ 0, \text{ jika } i & \equiv 0(\text{mod}4) \end{cases}$$

$$f(y_i) = \begin{cases} 2, \text{ jika } i & \equiv 1(\text{mod}4) \\ 0, \text{ jika } i & \equiv 2(\text{mod}4) \\ 0, \text{ jika } i & \equiv 3(\text{mod}4) \\ 2, \text{ jika } i & \equiv 0(\text{mod}4) \end{cases}$$

$$g(x_i x_{i+1}) = \begin{cases} 1, \text{ jika } i & \equiv 1(\text{mod}4) \\ 2, \text{ jika } i & \equiv 2(\text{mod}4) \\ 2, \text{ jika } i & \equiv 3(\text{mod}4) \\ 2, \text{ jika } i & \equiv 0(\text{mod}4) \end{cases}$$

$$g(y_i y_{i+1}) = \begin{cases} 2, \text{ jika } i & \equiv 1(\text{mod}4) \\ 2, \text{ jika } i & \equiv 2(\text{mod}4) \\ 2, \text{ jika } i & \equiv 3(\text{mod}4) \\ 1, \text{ jika } i & \equiv 0(\text{mod}4) \end{cases}$$

$$g(x_i y_{i+1}) = 1$$

Berdasarkan label titik dan label sisinya, maka diperoleh $lrecs(SL_n) \leq 2$. Bobot sisi dari pelabelan sisi ketaktearturan lokal refleksif pada graf tangga miring SL_n adalah sebagai berikut:

$$w(x_ix_{i+1}) = \begin{cases} 5, \text{ jika } i & \equiv 1(\text{mod}4) \\ 4, \text{ jika } i & \equiv 0(\text{mod}2) \\ 2, \text{ jika } i & \equiv 3(\text{mod}4) \end{cases}$$

$$w(y_iy_{i+1}) = \begin{cases} 2, \text{ jika } i & \equiv 2(\text{mod}4) \\ 4, \text{ jika } i & \equiv 1(\text{mod}2) \\ 5, \text{ jika } i & \equiv 0(\text{mod}4) \end{cases}$$

$$w(x_iy_{i+1}) = 3$$

Berdasarkan fungsi bobot sisi ini, didapatkan banyaknya bobot sisi adalah sebanyak 4 yang berbeda dengan bilangan kromatik dari graf tangga miring SL_n yaitu 3, lihat Lemma 3. Kontradiksi dengan definisi bahwa nilai eksak $\chi_{lrecs}(SL_n)$ yang diperoleh harus sama dengan nilai $\chi_e(SL_n) = 3$. Dengan demikian batas bawahnya menjadi $lrecs(SL_n) \geq 3$.

Untuk meyakinkan bahwa $lrecs(SL_n) \geq 3$, dapat diberikan analisis sebagai berikut: Diberikan $n!$ permutasi tersebut adalah $200\ldots, 020\ldots, 002\ldots$ dan $220\ldots, 202\ldots, 022\ldots$.. Definisikan $f : V \rightarrow \{0, 2\}$ dan $g : E \rightarrow \{1, 2\}$. berdasarkan label tersebut mengakibatkan beberapa sisi yang bertetangga memiliki bobot sisi yang sama, hal ini kontradiksi dengan definisi pelabelan sisi ketakteraturan lokal refleksif untuk sisi yang bertetangga harus memiliki bobot sisi yang berbeda. Oleh karena itu $lrecs(SL_n) \geq 3$, sehingga $g : E \rightarrow \{1, 2, 3\}$.

$$f(x_i, y_i) = 0$$

$$g(x_ix_{i+1}, y_iy_{i+1}) = \begin{cases} 1, \text{ jika } i & \equiv 1(\text{mod}2) \\ 2, \text{ jika } i & \equiv 0(\text{mod}2) \end{cases}$$

$$g(x_iy_{i+1}) = 3$$

$$g(x_{i-1}x_i) = \begin{cases} 1, \text{ jika } i & \equiv 1(\text{mod}2) \\ 2, \text{ jika } i & \equiv 0(\text{mod}2) \end{cases}$$

Berdasarkan label titik dan label sisinya, maka diperoleh $lrecs(SL_n) \leq 3$. Dikarenakan untuk batas bawah dan batas atas *local reflexive edge color strength* didapatkan $lrecs(SL_n) \geq 3$ dan $lrecs(SL_n) \leq 3$. Sehingga, dapat disimpulkan bahwa $lrecs(SL_n) = 3$.

Selanjutnya, kita akan menunjukkan bilangan kromatik *local reflexive edge color strength* (SL_n) yang sama dengan bilangan kromatik (SL_n). Berdasarkan label titik dan label sisi graf tangga miring (SL_n), maka diperoleh bobot sisi dari graf tangga miring (SL_n) sebagai berikut :

$$w(x_ix_{i+1}, y_iy_{i+1}) = \begin{cases} 1, \text{ jika } i & \equiv 1(\text{mod}2) \\ 2, \text{ jika } i & \equiv 0(\text{mod}2) \end{cases}$$

$$w(x_iy_i) = 3$$

$$w(x_{i-1}x_i) = \begin{cases} 1, \text{ jika } i & \equiv 1(\text{mod}2) \\ 2, \text{ jika } i & \equiv 0(\text{mod}2) \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi bobot sisi, didapatkan banyaknya bobot sisi yang sama dengan bilangan kromatik dari graf tangga miring pada Lemma 3, yaitu $\chi_{lrecs}(SL_n) = \chi_e(SL_n) = 3$. Untuk memperjelas gambaran pewarnaan sisi ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga miring, berikut visualisasi $\chi_{lrecs}(SL_4) = 3$. dengan $lrecs(SL_4) = 3$ yang ditunjukkan pada Gambar 3

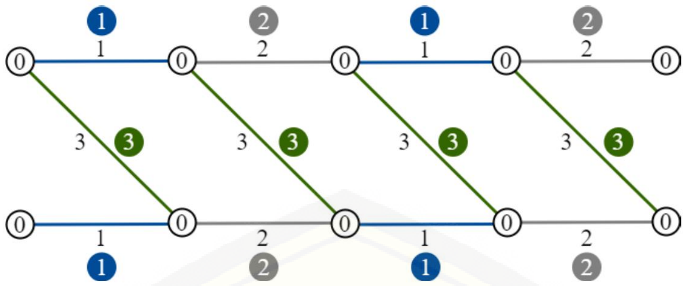

Figure 3. Graf tangga miring SL_5

Gambar 3 merupakan hasil pewarnaan sisi ketakteraturan lokal refleksif pada graf tangga miring (SL_4). Terdapat 3 warna berbeda yang diperoleh melalui pelabelan dengan label minimum yaitu 3 dan perhitungan bobot sisinya yang disesuaikan dengan definisi pewarnaan sisi ketakteraturan lokal refleksif.

3. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan, kami telah memperoleh nilai pasti dari *local reflexive edge color strength (lrecs)* pada keluarga graf roda yaitu graf *centipede*, graf tangga, graf tangga miring.

Ucapan Terima Kasih

Kami mengucapkan terima kasih atas dukungan dari CGANT Research Group dan CEREBEL Universitas Jember tahun 2022.

Referensi

[1] Agustin, I. H., Susilowati, L., Dafik, Cangul, I. N., dan Mohanapriya, N. (2022). *On the vertex irregular reflexive labeling of several regular and regular-like graphs.* Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography, 25(5), 1457-1473.

[2] Agustin, Ika Hesti, Imam Utoyo, Dafik, and M. Venkatachalam. *Edge irregular reflexive labeling of some tree graphs.* Journal of Physics: Conference Series. Vol. 1543. No. 1. IOP Publishing, 2020.

[3] Chartrand, G., dan P. Zhang. 2005. *Introduction to Graph Theory.* New York: McGraw-Hiil Companies,Inc.

[4] Dafik, D.J. Koesoemawati, I.H. Agustin. 2021. On local irregularity vertex coloring of comb product on star graphs. *Journal of Physics: Conference Series* 1836 012023. doi:10.1088/1742-6596/2157/1/012018.

[5] Dafik, D.J. Koesoemawati, I.H. Agustin, E.Y. Kurniawati and R. Nisviasari. 2022. On Local Vertex Irregular Reflexive Coloring of Graphs. *Journal of Physics: Conference Series* 2157 012018. doi:10.1088/1742-6596/2157/1/012018.

[6] Gross, J.L., dan J. Yellen. 2006. *Graph Theory and Its Aplication.* Second Edition. California: Chapman & Hall.

[7] Jonathan L. Gross, Jay Yellen. 2014. *Handbook of Graph Theory.* Second Edition. New York: CRC Press

[8] Kristiana, A. I., Alfarisi, R., Dafik, dan Azahra, N. (2022). *Local irregular vertex coloring of some families graph.* Journal of discrete mathematical sciences and cryptography, 25(1), 15-30.