



PELABELAN TOTAL SUPER (a, d) -SISI
ANTIMAGIC PADA GABUNGAN SALING LEPAS
GRAF FIRECRACKER

SKRIPSI Asal:	Hadiah Pembelian 26 MAR 2010	Klass 511.5 AB1 P
Tanggal Tgl:		
Jumlah Ekst:		
Pengantar:		
Oleh:		

Zainal Abidin
NIM: 050210101283

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER

2010



**PELABELAN TOTAL SUPER (a, d) -SISI
ANTIMAGIC PADA GABUNGAN SALING LEPAS
GRAF FIRECRACKER**

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi syarat-syarat untuk menyelesaikan Program Studi Pendidikan Matematika dan mencapai gelar Sarjana Pendidikan

Oleh:

Zainal Abidin

NIM: 050210101283

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER**

2010

PERSEMBAHAN

Puji syukur ke hadirat Allah SWT, Tuhan yang Maha pengasih lagi Maha Penyayang atas berkah dan karunia yang telah diberikan-Nya sehingga dapat kuselesaikan karya ini yang merupakan bagian dari perjalanan hidupku. Sholawat dan salam semoga senantiasa terlimpah kepada Nabi Muhammad S.A.W yang telah membawa cahaya terang di bumi ini. Dengan kerendahan hati ini, kupersembahkan karya ini teriring rasa terima kasih kepada:

1. Ibunda dan Ayahanda tercinta yang tak henti-hentinya mengalirkan untaian cinta, doa, dan dukungan moril serta materiil dalam setiap perjalanan hidupku;
2. Adik-adikku, Wiwin, Ridwan, Uus, dan Afif yang merupakan sumber inspirasiku dan selalu memberiku senyum kegembiraan dan kebersamaan sehingga memicu semangatku untuk mencapai kesuksesan;
3. Kakek dan nenekku yang selalu memberiku nasehat berharga dalam hidupku.
4. Bapak Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D dan Bapak Drs. Antonius C.P., M.App.Sc., selaku pembimbing skripsi yang selalu sabar untuk memberikan ilmu dan bimbingan selama menyelesaikan skripsiku;
5. Para guru dan dosen, yang telah memberikan ilmu dan membimbingku dengan penuh kesabaran;
6. Saudara sekaligus sahabat terbaikku, Khud Biyadi, yang telah memberiku dukungan dan do'a dalam perjalanan hidupku di jember selama ini;
7. Sahabat-sahabatku, suwondo club (Beni, Andi, Anton, dan Arif), dan feza yang senantiasa membantuku dan kebersamaan kita adalah kenangan tak terlupakan;
8. Teman-temanku FKIP Matematika: Debi, Iim, Endah, Riris, Ika, Fikri, Suryo, pengurus MSC 2005 dan semuanya yang senantiasa memberikan semangat dan membantuku selama kuliah hingga akhirnya dapat kuselesaikan skripsi ini;
9. Almamater Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

MOTO

Menuntut ilmu merupakan tasbih, mencari ilmu merupakan jihad, mengejar ilmu merupakan ibadah, mengajarkan ilmu merupakan sedekah, dan menggunakan ilmu bagi yang membutuhkan suatu taqarrub
(Sabda Rasulullah SAW)

Ketahuilah bahwa kemenangan itu bersama kesabaran, kemudahan itu bersama kesulitan, dan kerumitan itu bersama kelapangan.
(HR. Tirmidzi)

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Zainal Abidin

NIM : 050210101283

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: Pelabelan Total Super(a, d)-sisi Antimagic pada Gabungan Saling Lepas Graf Firecracker adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali dalam pengutipan substansi yang disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 19 Januari 2010

Yang menyatakan,



Zainal Abidin

NIM. 050210101283

SKRIPSI



**PELABELAN TOTAL SUPER (a, d) -SISI ANTIMAGIC PADA GABUNGAN
SALING LEPAS GRAF FIRECRACKER**

Oleh
Zainal Abidin
NIM. 050210101283

Pembimbing

Dosen Pembimbing I : Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D

Dosen Pembimbing II : Drs. Antonius C.P, M.App.Sc

PENGESAHAN

Skripsi berjudul "Pelabelan Total Super (a, d) -Sisi Antimagic pada Gabungan Saling Lepas Graf Firecracker" telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan pada:


hari : Rabu

tanggal : 03 Februari 2010

tempat : Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember

Tim Penguji:

Ketua,



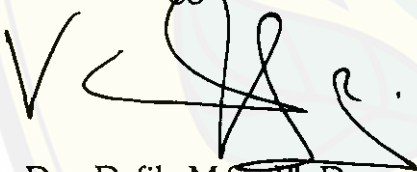
Drs. Slamin, M.Comp.Sc., Ph.D
NIP. 19670420 199201 1 001

Sekretaris,



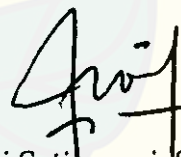
Drs. Antonius C.P, M.App.Sc
NIP. 19690928 199302 1 001

Anggota I,



Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D
NIP. 19680802 199303 1 004

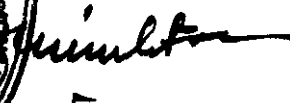
Anggota II,



Susi Setiawani, S.Si, M.Sc
NIP. 19700307 199512 2 001

Mengesahkan

Dekan Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan
Universitas Jember,



Drs. H. Inam Muchtar, S.H, M.Hum
NIP. 19540712 198003 1 005

RINGKASAN

Pelabelan Total Super-(a,d)-sisi Antimagic pada Gabungan Saling Lepas Graf Firecracker; Zainal Abidin, 050210101283; 2010; 77 halaman; Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember.

Salah satu topik teori graf yang menarik dan dapat diaplikasikan dalam berbagai bidang ilmu adalah pelabelan graf. Pelabelan total super(a,d)-sisi antimagic (SEATL) adalah salah satu jenis pelabelan graf yang sulit ditemukan khususnya pada gabungan graf yang saling lepas karena melibatkan banyak angka dan jumlah graf yang tidak sedikit. Suatu graf dapat dinotasikan dengan $G(V, E)$ yang merupakan suatu graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E . Sebuah pemetaan satu-satu f dari $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3, \dots, v + e\}$ disebut pelabelan total (a, d)-sisi antimagic jika himpunan bobot sisinya $W(uv) = f(u) + f(v) + f(uv)$ sehingga pada semua sisi G adalah $\{a, a+d, \dots, a+(e-1)d\}$ untuk $a > 0$ dan $d \geq 0$ keduanya adalah bilangan bulat. Sebuah pelabelan total (a, d)-sisi antimagic disebut pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic jika $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, v\}$ dan $f(E) = \{v + 1, v + 2, \dots, v + e\}$.

Dalam penelitian ini, pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic pada gabungan saling lepas graf firecracker (mF_n, k) dapat ditemukan pada m, n ganjil ($m \geq 2$ dan $n \geq 2$) dan $k \geq 3$. Graf firecracker merupakan graf yang diperoleh dari penggabungan graf-graf bintang dengan tepat satu daun masing-masing graf tersebut dihubungkan (Chen et al. 1997, Gallian 2007), biasanya dilambangkan $F_{n,k}$ dengan n adalah banyaknya graf bintang yang digabung, sedangkan k adalah jumlah titik dari tiap satu graf bintang yang digabungkan. Jika terdapat gabungan saling lepas graf firecracker (mF_n, k) dalam penelitian ini, maka berarti terdapat sejumlah m buah graf firecracker $F_{n,k}$ yang akan dilabeli. Pelabelan ini diawali dengan menghitung nilai batas atas d yang melibatkan juga jumlah sisi dan jumlah titik pada gabungan graf yang diteliti dan pendeteksian pola (*pattern recognition*) terlebih dahulu ketika memulai menentukan pelabelannya. Berdasarkan lemma yang telah ditemukan, nilai d dapat dihi-

tung yaitu $d \in \{0, 1, 2, 3\}$. Setelah itu, pola pelabelan ditemukan sehingga menghasilkan beberapa lemma dan teorema baru terkait dengan jenis pelabelan yang diteliti.

Beberapa lemma dan teorema dihasilkan berdasarkan pola pelabelan yang telah ditemukan dan dapat dibuktikan secara deduktif matematik. Pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan saling lepas graf *firecracker* terlihat pada fungsi-fungsi bijektif yang dihasilkan dalam lemma dan teorema yang dihasilkan. Berikut ini beberapa lemma dan teorema yang dihasilkan:

- Lemma 4.3.1 Ada pelabelan titik $(\frac{2mn+m+3}{2}, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf *firecracker* $mF_{n,k}$ jika m dan n ganjil, $m \geq 2$, $n \geq 2$, dan $k \geq 3$
- Teorema 4.3.1 Ada pelabelan total super $((2k+1)mn + \frac{3-m}{2}, 0)$ -sisi antimagic pada gabungan graf *firecracker* $mF_{n,k}$ jika m dan n ganjil, $m \geq 2$, $n \geq 2$, dan $k \geq 3$
- Teorema 4.3.2 Ada pelabelan total super $((k+1)mn + \frac{m+5}{2}, 2)$ -sisi antimagic pada gabungan graf *firecracker* $mF_{n,k}$ jika m dan n ganjil, $m \geq 2$, $n \geq 2$, dan $k \geq 3$
- Lemma 4.3.2 Ada pelabelan titik $(m+2, 2)$ -sisi antimagic pada gabungan graf *firecracker* $mF_{n,k}$ jika $m \geq 2$ dan n genap ($n \geq 2$), dan $k \geq 3$
- Teorema 4.3.3 Ada pelabelan total super $(2mnk + 2, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf *firecracker* $mF_{n,k}$ jika $m \geq 2$, n genap ($n \geq 2$), dan $k \geq 3$
- Teorema 4.3.4 Ada pelabelan total super $(mnk + m + 3, 3)$ -sisi antimagic pada gabungan graf *firecracker* $mF_{n,k}$ jika $m \geq 2$, n genap ($n \geq 2$), dan $k \geq 3$

Kesimpulan yang didapat dari hasil penelitian ini adalah ada pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan saling lepas graf *firecracker* (mF_n, k) . Pelabelan tersebut berlaku pada m, n ganjil ($m \geq 2$ dan $n \geq 2$) dan $k \geq 3$, untuk $d = 0$ dan $d = 2$ serta berlaku pada $m \geq 2$, n genap ($n \geq 2$), dan $k \geq 3$ untuk $d = 1$ dan $d = 3$. Nilai a dapat dilihat pada lemma dan teorema yang dihasilkan dan nilai beda d adalah 0,1,2,3.

PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Allah Swt atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih dan penghargaan sebesar-besarnya atas bantuan dan bimbingan dalam penulisan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Pendidikan MIPA Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
3. Ketua Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember yang sekaligus menjadi Dosen Pembimbing I;
4. Dosen Pembimbing II dan Dosen Pembahas;
5. Seluruh Dosen dan Karyawan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
6. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Januari 2010

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSEMBAHAN	ii
HALAMAN MOTO	iii
HALAMAN PERNYATAAN	iv
HALAMAN PEMBIMBINGAN	v
HALAMAN PENGESAHAN	vi
RINGKASAN	vii
PRAKATA	ix
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvi
DAFTAR LAMPIRAN	xvii
DAFTAR LAMBANG	xviii
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Batasan Masalah	5
1.4 Tujuan Penelitian	5
1.5 Manfaat Penelitian	5

2	TINJAUAN PUSTAKA	7
2.1	Aplikasi Teori Graf	7
2.2	Terminologi Dasar Graf	10
2.2.1	Definisi Graf	10
2.2.2	Jenis-jenis Graf	11
2.2.3	Istilah-istilah Dasar dalam Graf	13
2.3	Beberapa Jenis Graf Khusus	13
2.3.1	Graf Lengkap	13
2.3.2	Graf Lingkaran	14
2.3.3	Graf Bipartit dan Graf Bipartit Lengkap	14
2.3.4	Graf Pohon (Tree)	15
2.4	Pelabelan Graf	18
2.4.1	Definisi Pelabelan Graf	19
2.4.2	Pelabelan Total Super (a, d) -sisi Antimagic	20
2.4.3	Hasil-hasil Pelabelan Total Super (a, d) -sisi Antimagic pada Graf Diskonektif	21
2.4.4	Pelabelan Total Super (a, d) -sisi Antimagic pada Graf Firecracker	23
3	METODE PENELITIAN	31
3.1	Metode Penelitian	31
3.2	Definisi Operasional	31
3.2.1	Pelabelan Total Super (a, d) -Sisi Antimagic	31
3.2.2	Graf Firecracker	32
3.3	Teknik Penelitian	32

4	HASIL DAN PEMBAHASAN	35
4.1	Jumlah Titik dan Sisi pada Gabungan Graf <i>Firecracker</i> $mF_{n,k}$	35
4.1.1	Jumlah Titik Graf <i>Firecracker</i> $F_{n,k}$	36
4.1.2	Jumlah Sisi Graf <i>Firecracker</i> $F_{n,k}$	36
4.1.3	Jumlah Titik dan Sisi pada Gabungan Graf <i>Firecracker</i> $mF_{n,k}$	37
4.2	Nilai Beda d pada Pelabelan Total Super(a,d)-sisi Antimagic Gabungan Graf <i>Firecracker</i> $mF_{n,k}$	38
4.3	Pelabelan Total Super(a, d)-Sisi Antimagic pada Gabungan Graf <i>Firecracker</i> $mF_{n,k}$	38
4.3.1	Pelabelan Titik ($a, 1$)-Sisi Antimagic pada Gabungan Graf <i>Firecracker</i> $mF_{n,k}$	39
4.3.2	Pelabelan Total Super ($a, 0$)-Sisi Antimagic Gabungan Graf <i>Firecracker</i> $mF_{n,k}$	44
4.3.3	Pelabelan Total Super ($a, 2$)-Sisi Antimagic Gabungan Graf <i>Firecracker</i> $mF_{n,k}$	47
4.3.4	Pelabelan Titik ($a, 2$)-Sisi Antimagic pada Gabungan Graf <i>Firecracker</i> $mF_{n,k}$	50
4.3.5	Pelabelan Total Super ($a, 1$)-Sisi Antimagic Gabungan Graf <i>Firecracker</i> $mF_{n,k}$	53
4.3.6	Pelabelan Total Super ($a, 3$)-Sisi Antimagic Gabungan Graf <i>Firecracker</i> $mF_{n,k}$	56
4.4	Pembahasan	59
5	KESIMPULAN DAN SARAN	61
5.1	Kesimpulan	61
5.2	Saran	62

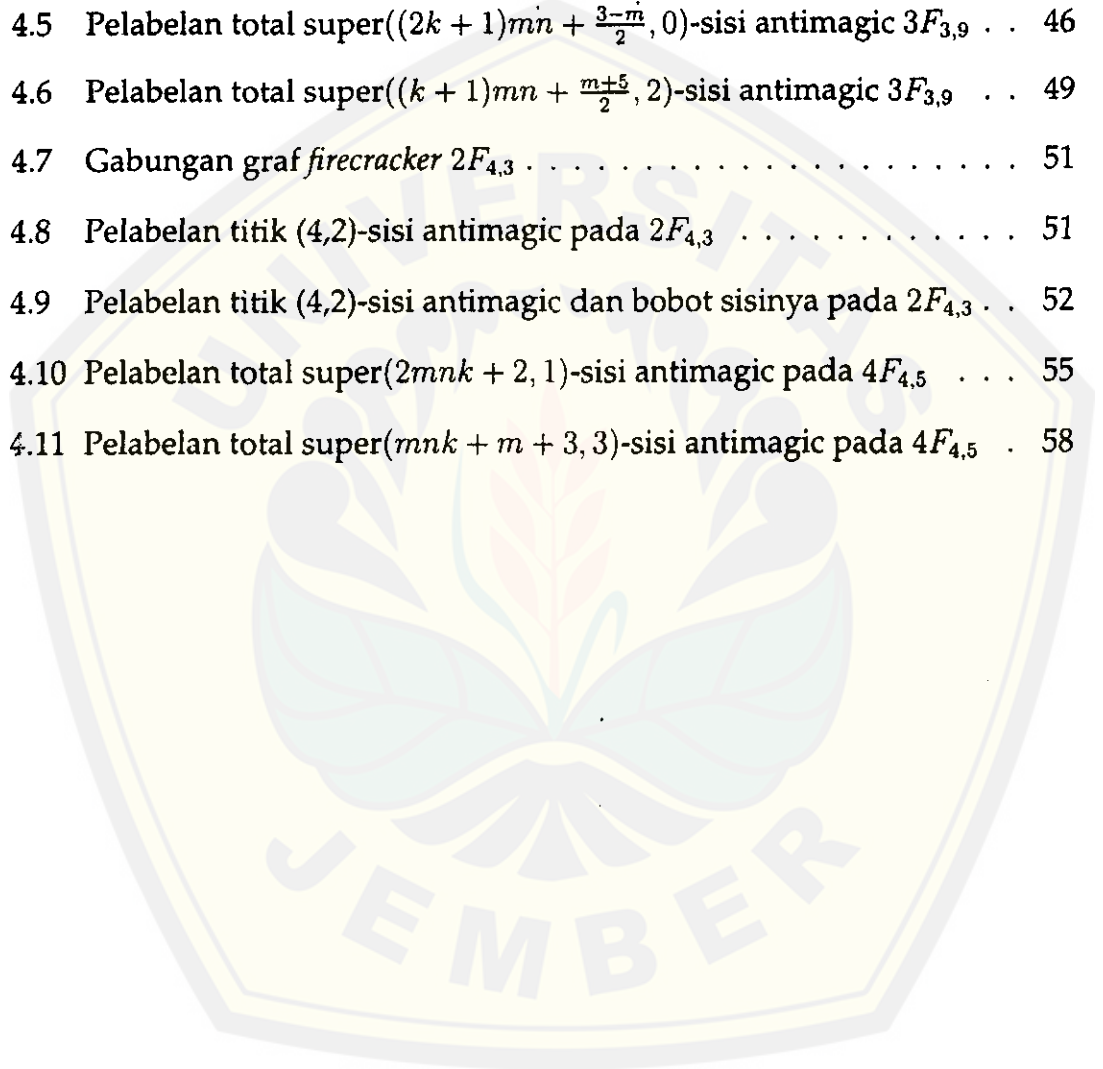
DAFTAR ISTILAH	64
DAFTAR PUSTAKA	66
LAMPIRAN	68



DAFTAR GAMBAR

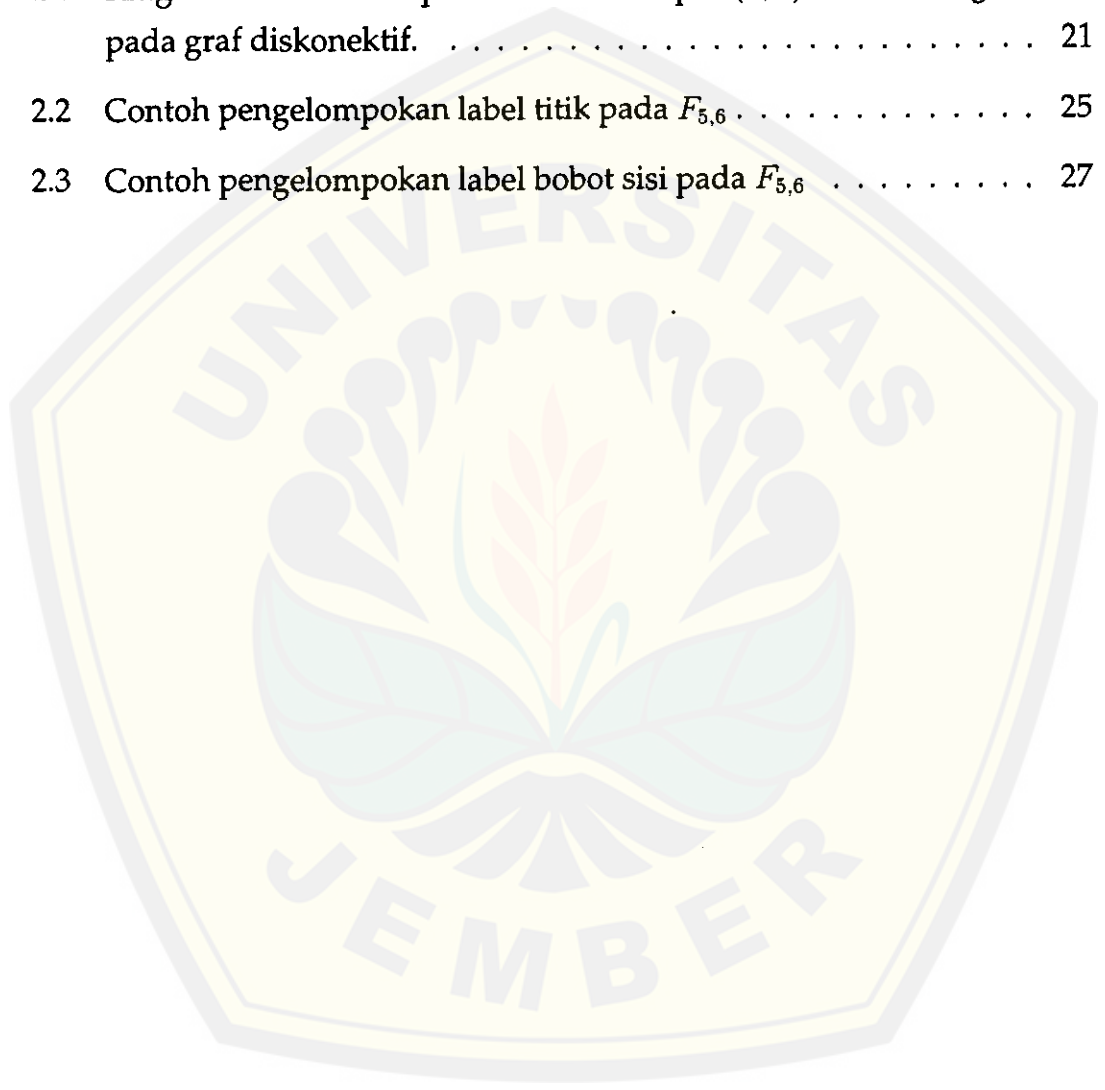
1.1	Graf yang mempresentasikan jembatan Knigsberg	1
1.2	Topologi jaringan jenis bintang	2
1.3	Contoh gabungan diskonektif dua graf firecracker ($2F_{3,6}$)	4
2.1	(a)Mesh, (b)Star, (c)Bus, (d)Tree, (e)Ring	9
2.2	Contoh graf	11
2.3	Contoh: Graf sederhana, Graf Ganda, dan Graf semu	12
2.4	Contoh: Graf tak berarah dan Graf berarah	12
2.5	Graf lengkap K_4	14
2.6	Graf lingkaran C_6	14
2.7	(a)Graf bipartit dan (b)Graf bipartit lengkap	15
2.8	Graf caterpillar \hat{C}_{13}	16
2.9	Graf Star S_6	17
2.10	Graf banana tree $B_{3,5}$	17
2.11	Graf firecracker $F_{3,6}$	18
2.12	(a) Pelabelan titik, (b) Pelabelan sisi, (c) Pelabelan total	19
2.13	EAVL pada $F_{5,6}$	24
2.14	EAVL pada $F_{7,5}$	25
2.15	SEATL untuk graf firecracker $F_{5,6}$ dengan $d = 2$	28
3.1	Diagram alir penelitian	34

4.1	Graf <i>firecracker</i> $F_{n,k}$	37
4.2	Gabungan graf <i>firecracker</i> $3F_{5,6}$	41
4.3	Pelabelan titik (18,1)-sisi antimagic pada $3F_{5,6}$	42
4.4	Pelabelan titik (18,1)-sisi antimagic dan bobot sisinya pada $3F_{5,6}$.	43
4.5	Pelabelan total super($(2k + 1)mn + \frac{3-m}{2}, 0$)-sisi antimagic $3F_{3,9}$. .	46
4.6	Pelabelan total super($(k + 1)mn + \frac{m+5}{2}, 2$)-sisi antimagic $3F_{3,9}$. .	49
4.7	Gabungan graf <i>firecracker</i> $2F_{4,3}$	51
4.8	Pelabelan titik (4,2)-sisi antimagic pada $2F_{4,3}$	51
4.9	Pelabelan titik (4,2)-sisi antimagic dan bobot sisinya pada $2F_{4,3}$. .	52
4.10	Pelabelan total super($2mnk + 2, 1$)-sisi antimagic pada $4F_{4,5}$. . .	55
4.11	Pelabelan total super($mnk + m + 3, 3$)-sisi antimagic pada $4F_{4,5}$.	58



DAFTAR TABEL

2.1	Ringkasan hasil-hasil pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf diskonektif.	21
2.2	Contoh pengelompokan label titik pada $F_{5,6}$	25
2.3	Contoh pengelompokan label bobot sisi pada $F_{5,6}$	27



DAFTAR LAMPIRAN

MATRIK PENELITIAN	66
FORMULIR PENGAJUAN JUDUL DAN PEMBIMBINGAN SKRIPSI . . .	67
LEMBAR KONSULTASI PENYUSUNAN SKRIPSI	68
Gambar 1. SEATL gabungan graf <i>firecracker</i> $5F_{7,8}$ dengan $d = 0$	70
Gambar 2. SEATL gabungan graf <i>firecracker</i> $7F_{5,10}$ dengan $d = 0$	71
Gambar 3. SEATL gabungan graf <i>firecracker</i> $5F_{7,9}$ dengan $d = 2$	72
Gambar 4. SEATL gabungan graf <i>firecracker</i> $7F_{7,7}$ dengan $d = 2$	73
Gambar 5. SEATL gabungan graf <i>firecracker</i> $3F_{4,7}$ dengan $d = 1$	74
Gambar 6. SEATL gabungan graf <i>firecracker</i> $2F_{6,6}$ dengan $d = 1$	75
Gambar 7. SEATL gabungan graf <i>firecracker</i> $3F_{4,7}$ dengan $d = 3$	76
Gambar 8. SEATL gabungan graf <i>firecracker</i> $2F_{6,6}$ dengan $d = 3$	77

DAFTAR LAMBANG

$V(G)$	= Himpunan titik pada graf G
$F_{n,k}$	= Graf <i>firecracker</i> yang diperumum
$mF_{n,k}$	= Gabungan graf <i>firecracker</i> yang diperumum sebanyak m buah
$E(G)$	= Himpunan sisi pada graf G
V	= Himpunan titik pada graf
E	= Himpunan sisi pada graf
(v_j, v_k)	= Sisi yang menghubungkan titik v_i dengan titik v_j pada graf
K_n	= Graf lengkap
C_n	= Graf lingkaran
$K_{m,n}$	= Graf bipartit lengkap
T_n	= Graf pohon
\hat{C}_n	= Graf caterpillar
S_n	= Graf bintang
$B_{n,k}$	= Graf <i>banana tree</i>
(V, E)	= Pasangan titik dengan sisi pada graf
\cup	= Gabungan himpunan
$x_{i,l}$	= Titik ke- i pada komponen n dan titik ke- l pada komponen k ($1 \leq i \leq n$ dan $0 \leq l \leq k - 1$) pada graf.
W	= Bobot sisi pada SEATL
$f(x_{i,l})$	= Label titik $x_{i,l}$ pada suatu graf <i>firecracker</i> $F_{n,k}$
w	= Bobot sisi untuk EAVL pada suatu graf <i>firecracker</i> $F_{n,k}$
$x_{i,0}x_{i,l}$	= Sisi yang titik ujungnya $x_{i,0}$ dan $x_{i,l}$ pada graf <i>firecracker</i> $F_{n,k}$
$x_{i,l}x_{i+1,l}$	= Sisi yang titik ujungnya $x_{i,l}$ dan $x_{i+1,l}$ pada graf <i>firecracker</i> $F_{n,k}$
$\alpha(x_{i,l})$	= Fungsi bijektif pelabelan titik $(x_{i,l})$
$w_\alpha(x_{i,0}x_{i,l})$	= Bobot sisi $x_{i,0}x_{i,l}$ dari pelabelan titik α
$w_\alpha(x_{i,l}x_{i+1,l})$	= Bobot sisi $x_{i,l}x_{i+1,l}$ dari pelabelan titik α
f_w	= Fungsi bijektif label sisi $x_{i,0}x_{i,l}$
W_t	= Bobot sisi $x_{i,0}x_{i,l}$ dari pelabelan total α
$ V $	= Jumlah titik pada graf <i>firecracker</i>
$ E $	= Jumlah sisi pada graf <i>firecracker</i>

- $x_{i,l}^j$ = Titik ke- i pada komponen n , ke- j pada komponen m dan titik ke- l pada komponen k ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ dan $0 \leq l \leq k-1$) pada gabungan graf *firecracker* $mF_{n,k}$
- $x_{i,0}^j x_{i,l}^j$ = Sisi yang titik ujungnya $x_{i,0}^j$ dan $x_{i,l}^j$ pada gabungan graf *firecracker* $mF_{n,k}$
- $x_{i,l}^j x_{i+1,l}^j$ = Sisi yang titik ujungnya $x_{i,l}^j$ dan $x_{i+1,l}^j$ pada gabungan graf *firecracker* $mF_{n,k}$
- $\alpha(x_{i,l}^j)$ = Fungsi bijektif pelabelan titik ($x_{i,l}^j$)
- $w_\alpha(x_{i,0}^j x_{i,l}^j)$ = Bobot sisi $x_{i,0}^j x_{i,l}^j$ dari pelabelan titik α
- $w_\alpha(x_{i,l}^j x_{i+1,l}^j)$ = Bobot sisi $x_{i,l}^j x_{i+1,l}^j$ dari pelabelan titik α
- $\alpha(x_{i,0}^j x_{i,l}^j)$ = Fungsi bijektif label sisi $x_{i,0}^j x_{i,l}^j$
- $\alpha(x_{i,l}^j x_{i+1,l}^j)$ = Fungsi bijektif label sisi $x_{i,l}^j x_{i+1,l}^j$
- $W_\alpha(x_{i,0}^j x_{i,l}^j)$ = Bobot sisi $x_{i,0}^j x_{i,l}^j$ dari pelabelan total α
- $W_\alpha(x_{i,l}^j x_{i+1,l}^j)$ = Bobot sisi $x_{i,l}^j x_{i+1,l}^j$ dari pelabelan total α .



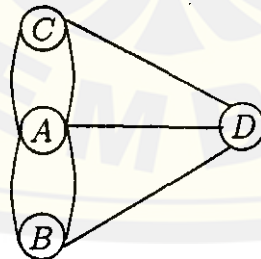
BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu dasar yang memiliki berbagai cabang ilmu dan dapat dimanfaatkan dalam kehidupan untuk pemecahan masalah. Suatu masalah dapat disajikan lebih sederhana agar bisa dipahami dan dipecahkan. Dalam menyederhanakan penyajian suatu masalah dapat dilakukan dengan membuat suatu model matematika dari masalah tersebut. Salah satu model matematika yang sering digunakan dalam pemecahan masalah dan juga merupakan cabang ilmu dari matematika adalah teori graf.

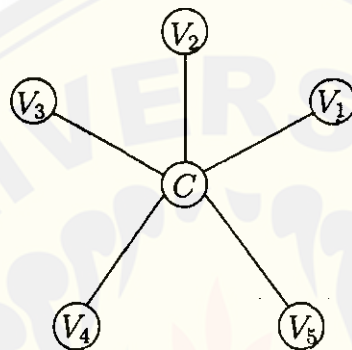
Teori graf ditemukan pada abad ke-18 dan aplikasinya dapat ditemukan di sekitar kita hingga saat ini. Teori yang ditemukan oleh Leonhard Euler, seorang matematikawan Swiss, berawal dari masalah jembatan Knigsberg. Euler mengungkapkan bahwa tidak mungkin seseorang berjalan melewati tepat satu kali pada masing-masing jembatan dan kembali lagi ke tempat semula karena pada graf model jembatan Knigsberg itu tidak semua simpul berderajat genap (derajat sebuah simpul adalah jumlah sisi yang menempel pada simpul tersebut). Model graf yang dibuat oleh Euler ditunjukkan pada Gambar 1.1



Gambar 1.1: Graf yang mempresentasikan jembatan Knigsberg

Ilmu pengetahuan dan teknologi menggunakan teori graf dalam hal pengembangan dan pemecahan masalah. Salah satu aplikasinya dapat ditemukan pada topologi jaringan komputer. Topologi jaringan ini menggunakan kon-

sep graf bintang (Gambar 1.2) pada salah satu model atau jenis topologinya. Jenis topologi jaringan ini memiliki simpul, dimana masing-masing simpul dalam jaringan terhubung ke sebuah simpul pusat. Seluruh data yang ditransmisikan oleh simpul dalam jaringan, kemudian ditransmisikan ke simpul pusat yang biasanya merupakan sejenis perangkat dalam komputer. Data transmisi tersebut akan ditransmisikan kembali ke beberapa atau seluruh simpul dalam jaringan.



Gambar 1.2: Topologi jaringan jenis bintang

Pelabelan graf pertama kali muncul pada pertengahan tahun 1960-an yang diawali oleh sebuah hipotesis oleh Ringel dan Rosa (Dafik, 2007:17). Pada tahun 1967 Rosa menyebut bahwa pelabelan ini sebagai pelabelan β -valuation dari suatu graf G dengan e sisi, jika terdapat fungsi yang memetakan satu-satu dari himpunan titik $V(G)$ ke himpunan bilangan bulat $0, 1, 2, \dots, e$ sedemikian hingga setiap sisi xy di graf G mendapat label $|f(x) - f(y)|$ yang berbeda untuk setiap sisi pada graf G .

Di dalam teori graf, yang dimaksud dengan pelabelan graf adalah pemetaan satu-satu yang memetakan himpunan dari elemen-elemen graf kepada himpunan bilangan bulat positif yang disebut label. Domain dari pemetaan tersebut dapat berupa himpunan titik, himpunan sisi, atau gabungan dari himpunan titik dan himpunan sisi. Berdasarkan domainnya, pelabelan di atas berturut-turut dinamakan pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total.

Pada tahun 1965 Sedlcek telah mengenalkan pelabelan graf tipe yang lain yang disebut pelabelan magic. Istilah ini dimotivasi dari ide bujur sangkar ajaib pada teori bilangan. Pelabelan magic adalah pemetaan dari himpunan sisi graf G pada bilangan real non-negatif, sehingga jumlah label sisi di sekitar titik pada graf G semuanya sama. Pada pelabelan Sedlcek diperbolehkan untuk menggunakan bilangan real tetapi biasanya hanya bilangan bulat saja yang digunakan. Jika himpunan label sisi graf terdiri dari bilangan bulat yang berurutan disebut pelabelan supermagic.

Salah satu jenis pelabelan graf adalah pelabelan total super (a,d) -sisi antimagic (SEATL), dimana a bobot sisi terkecil dan d nilai beda. Pelabelan ini diperkenalkan oleh Simanjutak, Bertault dan Miller pada tahun 2000 (Dafik, 2007:19). Pelabelan total (a,d) -sisi antimagic merupakan pelabelan total pada suatu jenis graf G yang dimulai dengan melabeli seluruh simpul graf terlebih dahulu dengan bilangan asli yang berurutan, kemudian dilanjutkan dengan melabeli seluruh sisi graf sedemikian hingga bobot sisinya membentuk barisan aritmatika dengan suku pertama a dan beda d . Dalam pelabelan ini yang dimaksud dengan bobot sisi adalah jumlah label sisi dengan label kedua titik yang terdapat pada ujung sisi tersebut.

Pelabelan total super (a,d) -sisi antimagic diawali dengan menentukan batas atas nilai beda d . Batas atas nilai beda d diperoleh dari suatu teorema tertentu yang kemudian dapat digunakan untuk menentukan pola pelabelan total super (a,d) -sisi antimagic. Berdasarkan pola pelabelan yang telah ditemukan, langkah akhir yang dilakukan adalah menentukan fungsi bijektif pelabelan total super (a,d) -sisi antimagic dan penarikan kesimpulan.

Pelabelan total super (a,d) -sisi antimagic (SEATL) gabungan graf yang diskonektif (saling lepas) sulit ditemukan karena melibatkan angka pelabelan dan jumlah graf yang cukup banyak. Gabungan diskonektif graf G biasanya dinotasikan dengan mG yang berarti gabungan diskonektif graf G sebanyak m buah.

Pada jenis graf bintang, pelabelan total super (a,d) -sisi antimagic (SEATL) belum banyak ditemukan. Salah satu famili dari graf bintang adalah graf *fire-*

cracker yang belum ditemukan pelabelannya.

Graf *firecracker* merupakan graf yang diperoleh dari penggabungan graf-graf bintang dimana tepat satu daun (titik yang berderajat 1) masing-masing graf tersebut dihubungkan. Graf *firecracker* dinotasikan dengan $F_{n,k}$ dengan $n \geq 2$ dan $k \geq 3$ dimana n adalah jumlah graf bintang yang digabungkan dan k adalah jumlah titik pada masing-masing graf bintang yang tergabung. Sedangkan gabungan diskonektif graf *firecracker* merupakan gabungan saling lepas pada graf *firecracker*. Gambar 1.3 menunjukkan contoh gabungan diskonektif (saling lepas) dua graf *firecracker* yaitu $2F_{3,6}$



Gambar 1.3: Contoh gabungan diskonektif dua graf *firecracker* ($2F_{3,6}$)

Berdasarkan hal di atas bahwa teori graf sangat berguna dalam ilmu pengetahuan dan teknologi seperti graf bintang yang dapat diaplikasikan dalam topologi jaringan. Selain itu, pelabelan graf juga dapat diaplikasikan dalam berbagai teori seperti teori pengkodean, kristalografi sinar-x, radar, sistem alamat jaringan komunikasi dan desain sirkuit. Dalam hal pelabelan khususnya SEATL, salah satu famili graf bintang (graf *firecracker*) belum ditemukan. Hal ini mendorong penulis untuk meneliti bagaimana pelabelan total super(a,d)-sisi antimagic (SEATL) pada gabungan diskonektif graf *firecracker* ($F_{n,k}$) sehingga penulis memilih judul "Pelabelan Total Super(a,d)-sisi Antimagic pada Gabungan Saling Lepas Graf *Firecracker*"

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan permasalahan dalam penelitian ini yaitu:

1. berapa batas atas d sehingga gabungan graf *firecracker* mempunyai pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic?
2. bagaimana fungsi bijektif pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan graf *firecracker*?

1.3 Batasan Masalah

Agar tidak meluas, penelitian ini perlu dibatasi pada pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan diskonektif graf *firecracker* $(mF_{n,k})$ yang merupakan graf tak berarah yang sederhana dan berhingga dengan $m \geq 2; n \geq 2; k \geq 3$. Dalam hal ini, m merupakan banyaknya graf *firecracker* yang digabung yaitu minimal 2 graf *firecracker* sedangkan n dan k merupakan ketentuan dari definisi graf *firecracker* yaitu graf *firecracker* $(mF_{n,k})$ dengan $m \geq 2; n \geq 2; k \geq 3$.

1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. mengetahui batas atas d sehingga gabungan graf *firecracker* mempunyai pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic;
2. mengetahui fungsi bijektif pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan graf *firecracker* beserta fungsi bijektifnya *firecracker*.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun beberapa manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. menambah pengetahuan yang baru dalam bidang teori graf, khususnya dalam pelabelan graf, yaitu mengetahui pelabelan total super (a,d) -sisi antimagic pada gabungan diskonektif graf *firecracker*;
2. memberikan motivasi pada peneliti lain untuk meneliti pelabelan total super (a,d) -sisi antimagic pada graf jenis yang lain;
3. dapat digunakan sebagai pengembangan ilmu pengetahuan dan teknologi serta aplikasi dalam masalah pelabelan total super (a,d) -sisi antimagic.



BAB 2

TINJAUAN PUSTAKA

Sebelum membahas masalah penelitian lebih lanjut, berikut akan dijelaskan terlebih dahulu beberapa hal dan konsep dasar yang berkaitan dengan penelitian ini. Hal tersebut diambil dari berbagai sumber yang tercantum dalam daftar pustaka. Beberapa hal dan konsep dasar yang terkait digunakan sebagai acuan dalam melakukan penelitian.

2.1 Aplikasi Teori Graf

Teori graf memiliki banyak aplikasi dalam berbagai bidang ilmu. Beberapa contoh aplikasi graf ditemukan dalam ilmu kimia yaitu struktur senyawa karbon, rekonstruksi rantai *Ribonucleic Acid* (RNA) dalam ilmu biologi, struktur hubungan masyarakat dalam ilmu sosiologi, dan pewarnaan graf dalam ilmu pemetaan (kartografi) bahkan dalam bidang ilmu informatika dapat ditemukan aplikasinya pada topologi jaringan. Berbagai aplikasi teori graf tersebut memberikan peranan penting terhadap perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi, khususnya aplikasi graf dalam informatika yang selalu berhubungan dengan informasi dan teknologi masa kini.

Aplikasi teori graf dalam ilmu informatika dapat dilihat pada topologi jaringan komputer. Topologi jaringan (*network topology*) adalah studi mengenai pengaturan atau pemetaan dari elemen-elemen (pranala, simpul, dan sebagainya) sebuah jaringan. Topologi suatu jaringan didasarkan pada cara penghubung sejumlah sentral dalam membentuk suatu sistem jaringan. Topologi jaringan yang umum dipakai adalah: *Mesh*, Bintang (*Star*), *Bus*, *Tree*, dan Cincin (*Ring*). Berbagai jenis topologi jaringan tersebut dapat dilihat pada Gambar 2.1.

Berdasarkan hal di atas, dapat dijelaskan beberapa macam tipe topologi jaringan yang sering dipakai pada berbagai jaringan komputer, yaitu:

1. Topologi Jaringan *Mesh*

Topologi jaringan ini menerapkan hubungan antar sentral secara penuh. Jumlah saluran harus disediakan untuk membentuk jaringan *Mesh* adalah jumlah sentral dikurangi 1 ($n - 1$, n = jumlah sentral). Tingkat kerumitan jaringan sebanding dengan meningkatnya jumlah sentral yang terpasang. Dengan demikian disamping kurang ekonomis juga relatif mahal dalam pengoperasiannya.

2. Topologi Jaringan Bintang (*Star*)

Dalam topologi jaringan bintang, salah satu sentral dibuat sebagai sentral pusat. Bila dibandingkan dengan sistem mesh, sistem ini mempunyai tingkat kerumitan jaringan yang lebih sederhana sehingga sistem menjadi lebih ekonomis, tetapi beban yang dipikul sentral pusat cukup berat. Dengan demikian kemungkinan tingkat kerusakan atau gangguan dari sentral ini lebih besar.

3. Topologi Jaringan *Bus*

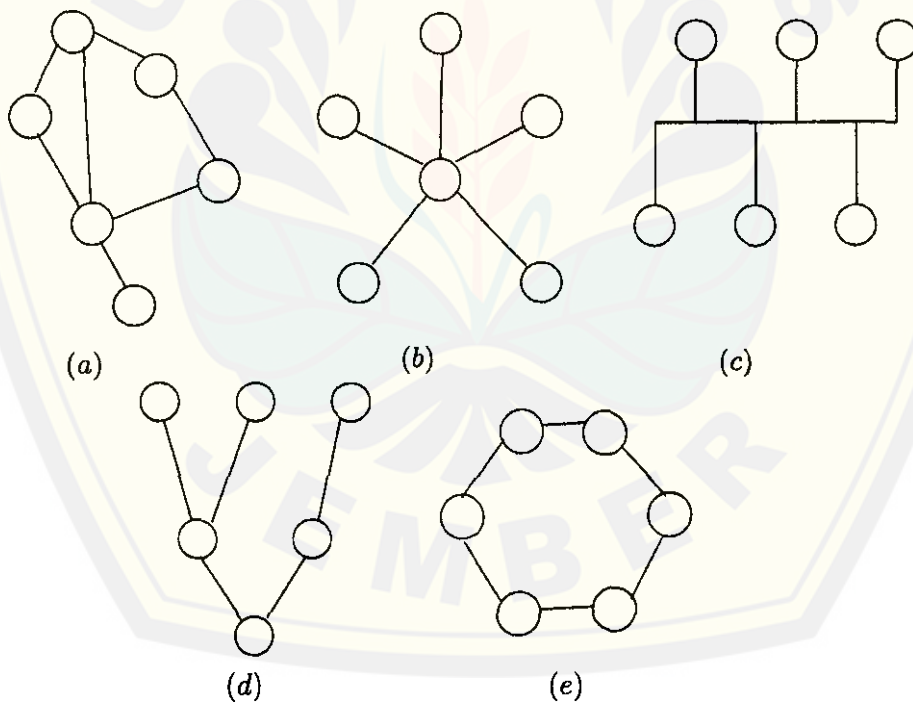
Pada topologi ini semua sentral dihubungkan secara langsung pada medium transmisi dengan konfigurasi yang disebut *bus*. Transmisi sinyal dari suatu sentral tidak dialirkan secara bersamaan dalam dua arah. Hal ini berbeda sekali dengan yang terjadi pada topologi jaringan mesh atau bintang, yang pada kedua sistem tersebut dapat dilakukan komunikasi atau interkoneksi antar sentral secara bersamaan. Topologi jaringan *bus* tidak umum digunakan untuk interkoneksi antar sentral, tetapi biasanya digunakan pada sistem jaringan komputer

4. Topologi Jaringan Pohon (*Tree*)

Topologi jaringan ini disebut juga sebagai topologi jaringan bertingkat. Topologi ini biasanya digunakan untuk interkoneksi antar sentral dengan hirarki yang berbeda. Untuk hirarki yang lebih rendah digambarkan pada lokasi yang rendah dan semakin keatas mempunyai hirarki semakin tinggi. Topologi jaringan jenis ini cocok digunakan pada sistem jaringan komputer

5. Topologi Jaringan Cincin (*Ring*)

Untuk membentuk jaringan cincin, setiap sentral harus dihubungkan seri satu dengan yang lain dan hubungan ini akan membentuk loop tertutup. Dalam sistem ini setiap sentral harus dirancang agar dapat berinteraksi dengan sentral yang berdekatan maupun berjauhan. Dengan demikian kemampuan melakukan switching ke berbagai arah sentral. Keuntungan dari topologi jaringan ini antara lain : tingkat kerumitan jaringan rendah (sederhana), juga bila ada gangguan atau kerusakan pada suatu sentral maka aliran trafik dapat dilewatkan pada arah lain dalam sistem. Yang paling banyak digunakan dalam jaringan komputer adalah jaringan bertipe bus dan pohon (*tree*), hal ini karena alasan kerumitan, kemudahan instalasi dan pemeliharaan serta harga yang harus dibayar. (Albert: 2008)



Gambar 2.1: (a)Mesh, (b)Star, (c)Bus, (d)Tree, (e)Ring

Aplikasi teori graf dalam topologi jaringan tersebut berkaitan dengan pelabelan graf. Peranan pelabelan graf dalam topologi jaringan dapat ditemukan pada pemberian alamat dan identifikasi dalam sistem jaringan (Bloom

and Golomb, 1977). Dalam topologi jaringan komunikasi khususnya komputer, sentral-sentral saling terhubung (interkoneksi) tetapi ada juga yang tak terhubung. Untuk melakukan interkoneksi, diperlukan alamat dan identifikasi sentral yang berbeda satu dengan lainnya untuk kelancaran komunikasi dalam jaringan. Pemberian alamat dan identifikasi ini dalam komputer biasanya dikenal dengan *IP address*. Pemberian alamat dan identifikasi memerlukan label angka dan tiap sentral harus berbeda labelnya. Dalam hal inilah, pelabelan graf sangat berperan.

2.2 Terminologi Dasar Graf

2.2.1 Definisi Graf

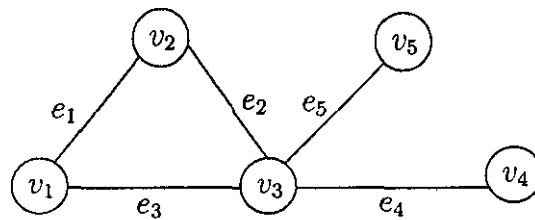
Graf adalah struktur diskrit yang terdiri dari simpul (*vertex*) dan sisi (*edge*), atau dengan kata lain, graf adalah pasangan himpunan (V, E) di mana V adalah himpunan tidak kosong dari *vertex* dan E adalah himpunan sisi yang menghubungkan sepasang simpul dalam graf tersebut. Secara matematis, graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) , yang dalam hal ini:

V = himpunan tidak kosong dari simpul-simpul (*vertices*) = $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan
 E = himpunan sisi yang menghubungkan sepasang simpul = $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ atau dapat disingkat dengan notasi $G = (V, E)$. Berdasarkan definisi tersebut, V tidak boleh kosong, sedangkan E boleh kosong. Jadi sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi tetapi titik/simpulnya harus ada minimal satu.

Simpul pada graf dapat dilabeli dengan huruf, seperti $a, b, c, \dots, v, w, \dots$ dengan bilangan asli atau gabungan keduanya. Sedangkan sisi yang menghubungkan simpul v_i dengan simpul v_j dinyatakan dengan pasangan (v_i, v_j) atau dengan lambang e_1, e_2, \dots . Dengan kata lain, jika e adalah sisi yang menghubungkan simpul v_i dengan simpul v_j , maka e dapat ditulis sebagai: $e = (v_i, v_j)$. Secara Geometri dapat digambarkan seperti contoh Gambar 2.2:

Gambar 2.2 memperlihatkan sebuah graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E adalah sebagai berikut :

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan



Gambar 2.2: Contoh graf

$$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_1, v_3), (v_3, v_4), (v_3, v_5)\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

2.2.2 Jenis-jenis Graf

Graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa kategori (jenis) bergantung pada sudut pandang pengelompokannya. Pengelompokan graf dapat dipandang berdasarkan ada tidaknya sisi ganda atau sisi kalang, berdasarkan jumlah simpul, atau berdasarkan orientasi arah pada sisi. Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf, maka secara umum graf dapat digolongkan menjadi dua jenis:

1. Graf Sederhana

Graf sederhana adalah graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi ganda

2. Graf tak sederhana

Graf tak sederhana adalah graf yang mengandung sisi ganda atau gelang. Ada dua macam graf tak-sederhana, yaitu graf ganda dan graf semu. Graf ganda adalah graf yang mengandung sisi ganda. Graf semu adalah graf yang mengandung gelang.

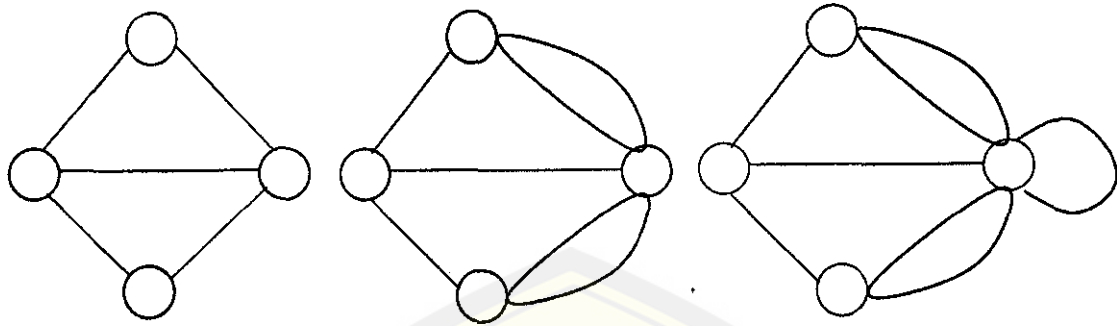
Berdasarkan jumlah simpul pada suatu graf, maka secara umum graf dapat dikelompokkan menjadi dua jenis:

1. Graf berhingga

Graf berhingga adalah graf yang jumlah simpulnya n , berhingga. Graf pada Gambar 2.3 merupakan contoh graf berhingga

2. Graf tak berhingga

Graf tak berhingga adalah graf yang jumlah simpulnya tidak berhingga.



Gambar 2.3: Contoh: Graf sederhana, Graf Ganda, dan Graf semu

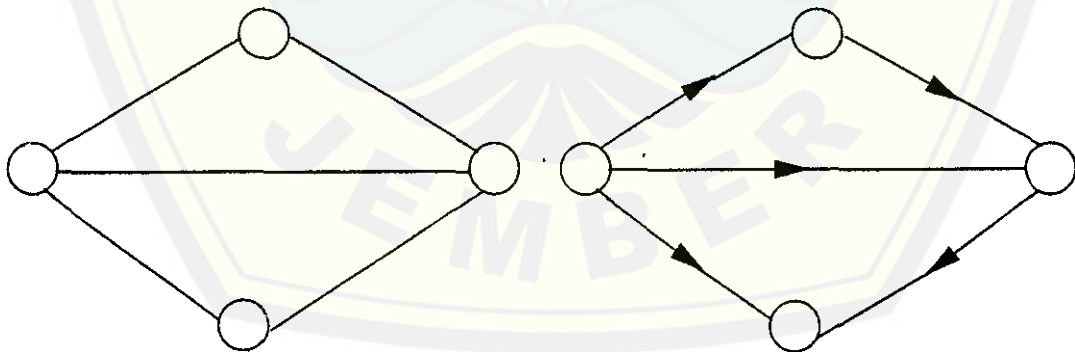
Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dibedakan atas dua jenis:

1. Graf tak berarah

Graf tak berarah adalah graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah. Pada graf tak berarah, urutan pasangan simpul yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan. Jadi $(v_j, v_k) = (v_k, v_j)$ adalah sisi yang sama.

2. Graf berarah

Graf berarah adalah graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah. Jadi $(v_j, v_k) \neq (v_k, v_j)$ adalah sisi yang berbeda.



Gambar 2.4: Contoh: Graf tak berarah dan Graf berarah

2.2.3 Istilah-istilah Dasar dalam Graf

Dalam penelitian ini, graf yang akan diteliti adalah graf tak berarah. Adapun terminologi (istilah) yang berkaitan dalam graf tak berarah adalah sebagai

berikut : bertetangga (*adjacent*), bersisian (*incident*), simpul (*vertex*), sisi (*edge*), simpul terpencil (*isolated vertex*), graf kosong (*empty graph*), derajat (*degree*), lintasan (*path*), siklus/*cycle* (*circuit*), graf berbobot dan sebagainya. Istilah-istilah tersebut di atas adalah istilah umum yang sering digunakan dalam mempelajari teori graf. Istilah-istilah yang akan digunakan dalam penelitian ini hanya beberapa yang terkait dengan topik atau judul yang telah dipilih.

Beberapa istilah yang akan sering digunakan dalam penelitian dan pembahasan diantaranya adalah : simpul (*vertex*), sisi (*edge*), derajat (*degree*), dan graf berbobot (*weighted graph*). Simpul (*vertex*) merupakan sekumpulan titik pada graf, sedangkan sisi (*edge*) merupakan sekumpulan garis pada suatu graf. Adapun yang dimaksud dengan derajat (*degree*) suatu simpul pada graf tak berarah adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut. Dalam hal ini juga akan muncul istilah graf berbobot (*weighted graph*) yaitu sebuah graf yang setiap sisinya diberi sebuah harga (bobot). Istilah tersebut di atas adalah beberapa yang akan sering digunakan, akan tetapi tidak menutup kemungkinan akan menggunakan istilah graf yang lain. Hal tersebut akan dijelaskan pada bab selanjutnya.

2.3 Beberapa Jenis Graf Khusus

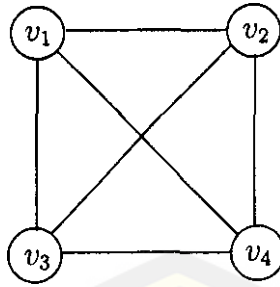
Dalam Dalam teori graf, jenis-jenis graf cukup banyak. Berikut ini akan dijelaskan beberapa jenis graf khusus dan graf yang terkait dengan graf yang akan diteliti.

2.3.1 Graf Lengkap

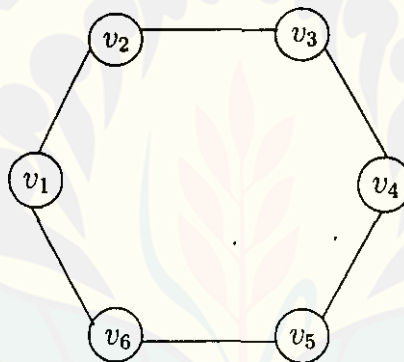
Graf lengkap merupakan graf sederhana yang setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya. Graf lengkap dengan n buah simpul dilambangkan dengan K_n . Setiap simpul pada K_n berderajat $n - 1$. Contoh graf lengkap dapat dilihat pada Gambar 2.5.

2.3.2 Graf Lingkaran

Graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n simpul dilambangkan dengan C_n . Jika simpul-

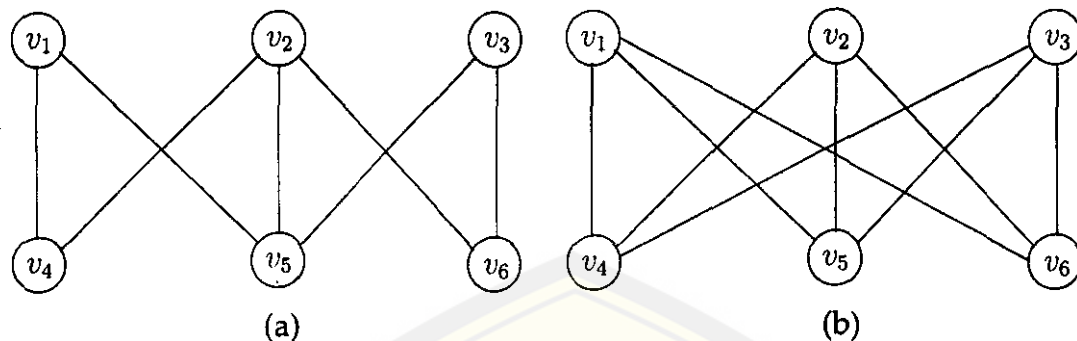
Gambar 2.5: Graf lengkap K_4

simpul pada C_n adalah v_1, v_2, \dots, v_n maka sisi-sisinya adalah $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n)$ dan (v_n, v_1) . Dengan kata lain, ada simpul terakhir v_n terhubung dengan simpul pertama v_1 . Gambar 2.6 adalah contoh graf lingkaran.

Gambar 2.6: Graf lingkaran C_6

2.3.3 Graf Bipartit dan Graf Bipartit Lengkap

Graf $G = (V(G), E(G))$ disebut graf bipartit, dinotasikan dengan $G(V_1, V_2)$ jika $V(G)$ dapat dipartisi menjadi dua subhimpunan tak kosong V_1 dan V_2 sedemikian sehingga setiap sisi di $E(G)$ menghubungkan dua titik yang berasal dari partisi yang berbeda. Apabila setiap simpul di V_1 bertetangga dengan simpul di V_2 , maka disebut graf bipartit lengkap dilambangkan dengan $K_{m,n}$. Jumlah sisi pada graf bipartit lengkap adalah mn . Gambar 2.7 adalah contoh dari graf bipartit dan graf bipartit lengkap.



Gambar 2.7: (a)Graf bipartit dan (b)Graf bipartit lengkap

2.3.4 Graf Pohon (Tree)

Graf pohon T_n merupakan graf terhubung dengan n titik dan tidak memuat graf lingkaran (*cycle*). Pengurangan satu sisi pada suatu graf pohon mengakibatkan graf tersebut menjadi graf tak-terhubung, sebaliknya penambahan satu sisi mengakibatkan terbentuknya subgraf lingkaran. Graf pohon yang terdiri dari simpul tunggal dan tidak mempunyai sisi disebut *tree degenerate*. Beberapa graf yang termasuk tipe graf pohon adalah *caterpillar*, bintang *star*, *banana tree* dan *firecracker*.

1. Graf Caterpillar

Caterpillar \hat{C}_n adalah graf pohon yang terdiri dari n titik dengan sifat apabila semua titik berderajat satu dihapus maka dihasilkan graf lintasan.

2. Graf Bintang (*Star*)

Graf bintang S_n , $n \geq 3$ adalah graf pohon yang terdiri dari 1 titik yang berderajat $n - 1$ dan $n - 1$ titik yang berderajat 1. Titik yang berderajat 1 pada graf bintang disebut juga daun. Jadi, graf bintang S_n terdiri dari n titik dan $n - 1$ sisi. Sebagai ilustrasinya, perhatikan gambar 2.9

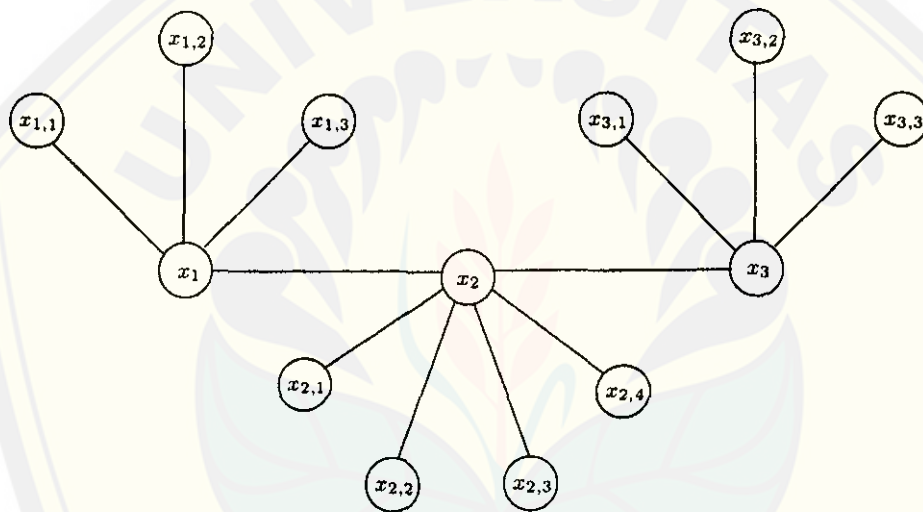
3. Graf *Banana tree*

Graf *bananatree* $B_{n,k}$ ($n \geq 2, k \geq 4$) adalah suatu graf yang diperoleh dengan menghubungkan tepat satu daun (titik yang berderajat 1) dari n *copy* graf bintang ke suatu titik tunggal yang disebut akar. Contoh graf *banana tree* dapat dilihat pada gambar 2.10

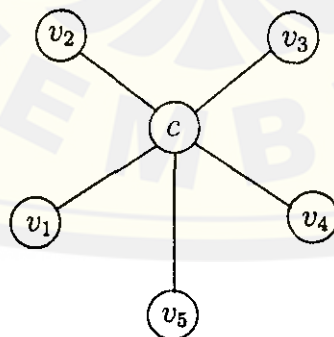
4. Graf Firecracker

Graf *firecracker* adalah graf yang diperoleh dari penggabungan graf-graf bintang dengan tepat satu daun masing-masing graf tersebut dihubungkan (Chen et al. 1997, Gallian 2007), biasanya dilambangkan $F_{n,k}$ dengan n adalah banyaknya graf bintang yang digabung, sedangkan k adalah jumlah titik dari tiap satu graf bintang yang digabungkan.

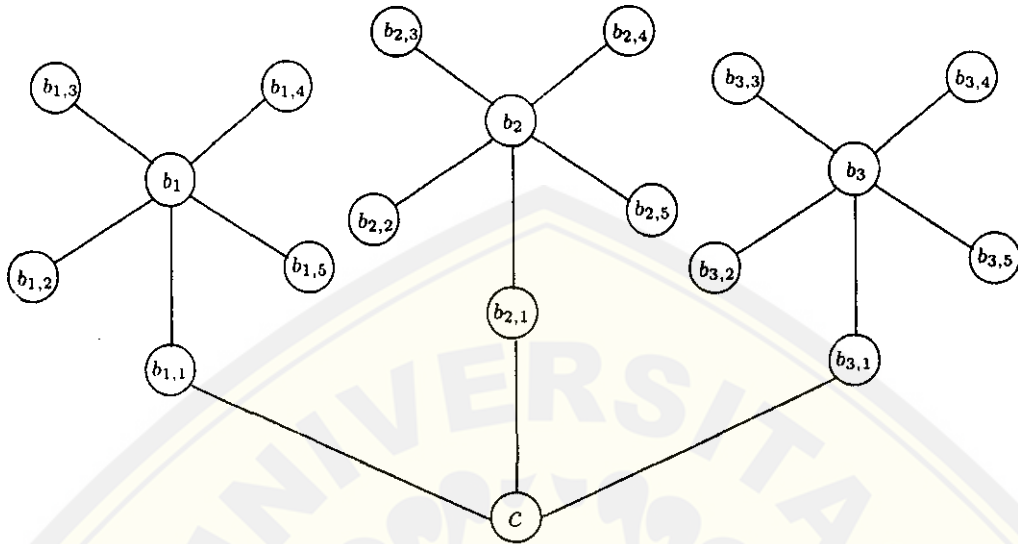
Berikut ini contoh gambar graf dari *family* graf pohon (*tree*). Graf yang digambarkan adalah graf *caterpillar* \hat{C}_{13} , *star* S_6 , *banana tree* $B_{3,5}$, dan *firecracker* $F_{3,6}$.



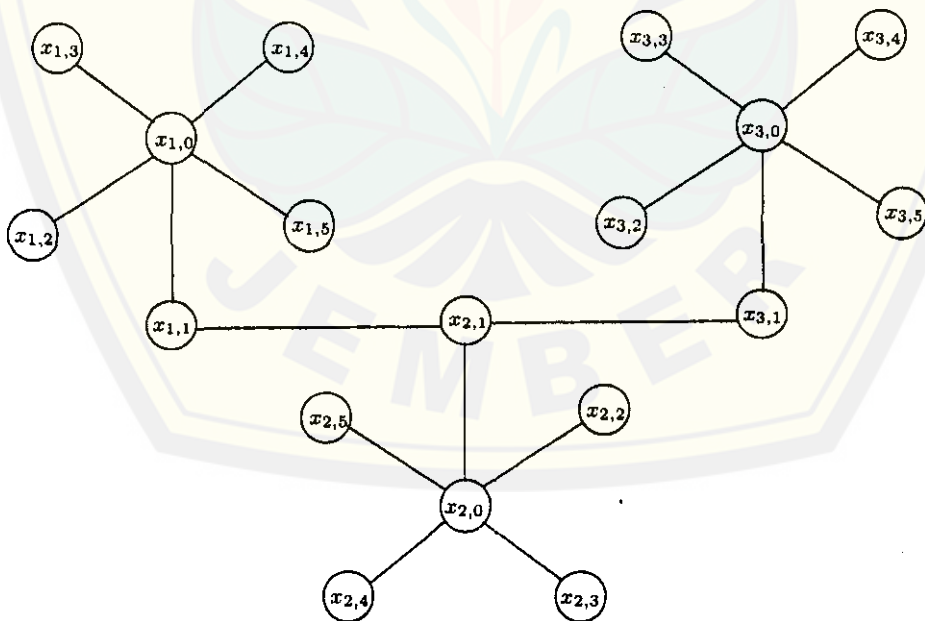
Gambar 2.8: Graf caterpillar \hat{C}_{13}



Gambar 2.9: Graf Star S_6



Gambar 2.10: Graf banana tree $B_{3,5}$



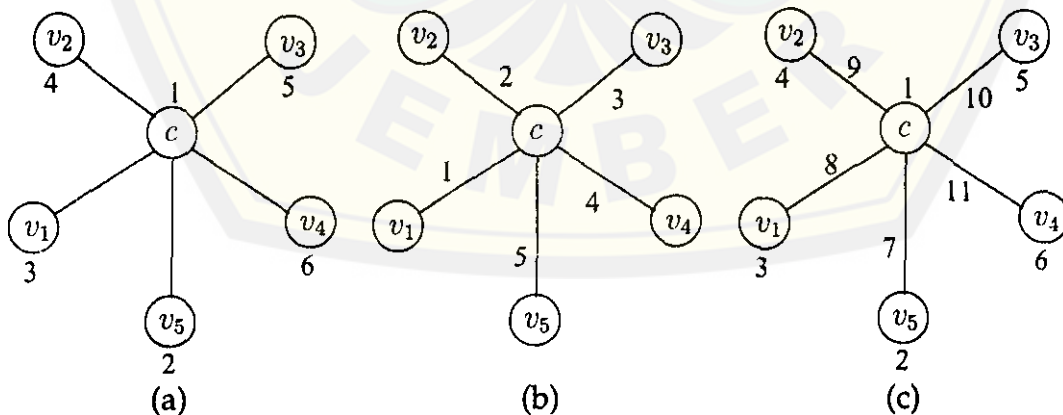
Gambar 2.11: Graf firecracker $F_{3,6}$

2.4 Pelabelan Graf

Pelabelan graf merupakan suatu pemetaan satu-satu (fungsi bijektif) yang memetakan himpunan dari elemen-elemen graf (titik dan sisi) ke himpunan bilangan bulat positif. Secara umum, fungsi f yang memetakan himpunan A ke dalam B disebut fungsi satu-satu jika elemen-elemen yang berbeda dalam B ditetapkan dengan elemen-elemen yang berbeda dalam A , atau $f : A \rightarrow B$ adalah satu-satu jika $f(a) = f(a')$ maka $a = a'$ (Silaban. 1990:50). Dengan kata lain, fungsi yang memetakan himpunan elemen-elemen graf ke himpunan bilangan bulat positif disebut fungsi bijektif jika semua elemen pada graf dinomori dengan bilangan bulat positif yang berbeda. Ada tiga jenis pelabelan graf yaitu pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total. Jika domain graf adalah titik maka disebut pelabelan titik, namun jika domain pelabelan grafnya adalah sisi maka disebut pelabelan sisi. Pelabelan total memiliki domain gabungan titik dengan sisi.

2.4.1 Definisi Pelabelan Graf

Secara matematis, pelabelan graf $G = (V, E)$ adalah suatu pemetaan : $D \rightarrow N$, dimana $D = \text{domain}$, $N = \text{himpunan label dari } G$. Jika : $D = V$ maka disebut pelabelan titik, $D = E$ maka disebut pelabelan sisi, $D = V \cup E$ maka disebut pelabelan total. Untuk lebih jelasnya, perhatikan Gambar 2.12. Gambar 2.12(a) merupakan contoh pelabelan titik yaitu hanya titik saja



Gambar 2.12: (a) Pelabelan titik, (b) Pelabelan sisi, (c) Pelabelan total

yang dilabeli, sedangkan gambar 2.12(b) menunjukkan pelabelan sisi, dimana hanya sisi graf saja yang dilabeli dan pelabelan total dapat dilihat pada Gambar 2.12(c), semua titik maupun sisi diberi label.

Dalam pelabelan total graf yang diteliti terdapat beberapa istilah yang saling berkaitan yaitu bobot sisi, pelabelan total sisi ajaib dan pelabelan total sisi anti ajaib. Bobot sisi merupakan jumlah label sisi dan label dua titik yang menempel pada sisi. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang sama maka pelabelan tersebut disebut pelabelan total sisi ajaib, sedangkan jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang berbeda dan himpunan bobot sisi dari semua sisi membentuk barisan aritmatika, suku pertama a dan beda b disebut pelabelan total sisi anti ajaib. Seperti Gambar 2.12(c), Pelabelan total tersebut mempunyai himpunan bobot sisi yang membentuk barisan aritmatika dengan suku pertama $a = 10$ dan beda $b = 2$.

2.4.2 Pelabelan Total Super(a, d)-sisi Antimagic

Suatu graf dikatakan memiliki pelabelan total (a, d)-sisi antimagic jika terdapat sebuah pemetaan satu-satu dari suatu $V(G) \cup E(G)$ ke bilangan bulat $1, 2, 3, \dots, p + q$ sehingga himpunan bobot sisinya $W(uv) = f(u) + f(v) + f(uv)$ pada semua sisi G adalah $a, a + d, \dots, a + (q - 1)d$ untuk $a > 0$ dan $d > 0$ keduanya bilangan bulat. Sebuah pelabelan total (a, d)-sisi antimagic disebut pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic jika $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, p\}$ dan $f(E) = \{p + 1, p + 2, p + 3, \dots, p + q\}$. Berdasarkan penjelasan sebelumnya dapat juga diartikan bahwa pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic pada sebuah graf $G = (V, E)$ adalah pelabelan titik dengan bilangan bulat $1, 2, 3, \dots, p$ dan pelabelan sisi dengan bilangan bulat $f(E) = \{p + 1, p + 2, p + 3, \dots, p + q\}$ dari sebuah graf G dimana p adalah banyaknya titik dan q adalah banyaknya sisi pada graf G . Himpunan bobot sisi yang terbentuk adalah $W = w(xy) \mid xy \in E(G) = \{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (q - a)d\}$ untuk $a \geq 0$ dan $d \geq 0$. $\alpha(u)$ adalah label dari titik u , $\alpha(v)$ adalah label dari titik v dan $\alpha(uv)$ adalah label dari sisi uv . Untuk mencari batas atas nilai beda d pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic dapat ditentukan dengan lemma 2.1 (dalam Dafik: 2007, 26):

Lemma 2.1 Jika sebuah graf (p, q) adalah pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic maka $d \leq \frac{2p+q-5}{q-1}$

Bukti: $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, p\}$ dan $f(E) = \{p+1, p+2, p+3, \dots, p+q\}$.

Misalkan graf (p, q) adalah pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic dengan pemetaan $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, p+q\}$. Nilai minimum yang mungkin dari bobot sisi terkecil $\alpha(u) + \alpha(uv) + \alpha(v) = 1 + (p+1) + 2 = p+4$ dan dapat ditulis $p+4 \leq a$. Sedangkan pada sisi yang lain, nilai maksimum yang mungkin dari bobot sisi terbesar diperoleh dari jumlah 2 label titik terbesar dan label sisi terbesar atau dapat ditulis $(p-1) + (p+q) + p = 3p+q-1$. Akibatnya:

$$a + (q-1)d \leq 3p+q-1 \tag{2.1}$$

$$d \leq \frac{3p+q-1-(p+4)}{q-1} \tag{2.2}$$

$$d \leq \frac{2p+q-5}{q-1} \tag{2.3}$$

Dari persamaan 2.3, lemma telah terbukti dan diperoleh nilai $d \leq \frac{2p+q-5}{q-1}$ dari berbagai jenis atau famili graf.

2.4.3 Hasil-hasil Pelabelan Total Super (a, d) -sisi Antimagic pada Graf Diskonektif

Pada bagian ini disajikan rangkuman hasil pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf diskonektif seperti yang terlihat pada tabel 2.1:

Tabel 2.1: Ringkasan hasil-hasil pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf diskonektif.

Graf	d	Catatan
$P_n \cup P_{n+1}$	$1 \leq d \leq 3$	(i) $d \in \{1, 3\}$ dan $n \geq 2$ (ii) $d = 2, n \geq 3$, dan n bilangan ganjil (Sudarsana, et all, 2005) <u>Open problem:</u> • $d = 2$ untuk n genap
$nP_2 \cup P_n$	$1 \leq d \leq 3$	$d \in \{1, 2\}$ dan $n \geq 2$ (Sudarsana, et all, 2005)
halaman selanjutnya		

Graf	d	Catatan
$nP_2 \cup P_{n+2}$	$1 \leq d \leq 4$	<p><u>Open problem:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • $d = 3$ for $n \geq 2$ <p>$d \in \{1, 2\}$ dan $n \geq 1$</p> <p>(Sudarsana, <i>et all</i>, 2005)</p>
mK_n	$d \leq 5$	<p><u>Open problem:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • $d \in \{3, 4\}$ untuk $n \geq 1$ <p>jika dan hanya jika</p> <p>(i) $d \in \{0, 2\}$ dan $n \in \{2, 3\}$, $m \geq 3$ ganjil, atau</p> <p>(ii) $d = 1$ dan $m, n \geq 2$, atau</p> <p>(iii) $d \in \{3, 5\}$ dan $n = 2$, $m \geq 2$, atau</p> <p>(iv) $d = 4$ dan $n = 2$, $m \geq 3$ ganjil</p> <p>(M. Bača dan C. Barrientos, submitted)</p>
$mK_{n,n}$	$d \leq 5$	<p>(i) jika $d = 1$ untuk semua m dan n</p> <p>(ii) jika $d \in \{0, 2\}$ untuk $n = 1$ dan $m \geq 3$ ganjil</p> <p>(iii) jhj $d \in \{3, 5\}$ untuk $n = 1$ dan semua $m \geq 2$</p> <p>(iv) jhj $d = 4$ untuk $n = 1$ dan semua $m \geq 3$ ganjil</p> <p>(M. Bača dan C. Barrientos, submitted)</p>
mC_n	$d \leq 2$	<p><u>Open problem:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • jika $d \in \{0, 2\}$ untuk $n = 3$ dan $m \geq 3$ ganjil <p>jika setiap</p> <p>(i) $d \in \{0, 2\}$ untuk $m, n \geq 3$ ganjil</p> <p>(ii) $d = 1$ untuk semua $m \geq 2$ dan $n \geq 3$</p> <p>(Dafik, <i>et all</i>, in press)</p>
mP_n	$d \leq 5$	<p>jika setiap</p> <p>(i) $d \in \{1, 3\}$ untuk semua m dan n</p> <p>(ii) $d \in \{0, 2\}$ untuk semua m, n ganjil</p> <p>(iii) $d \in \{4, 5\}$ untuk semua m dan $n = 2$</p> <p>(Dafik, <i>et all</i>, in press)</p>
$mK_{n,n,n}$	$d \leq 2$	<p>$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk m ganjil dan n sembarang</p> <p>(Dafik, <i>et all</i>, in press)</p>
$mK_{n,n,\dots,n}$	$d \leq 2$	<p>$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk m, n ganjil</p>

Graf	d	Catatan
$mC_n \odot \bar{K}_n$	$d \leq 2$	(Dafik, et all, 2006) jika setiap (i) $d \in \{0, 2\}$ untuk $m, n \geq 3$ ganjil (ii) untuk semua $m \geq 2$ dan $n \geq 3$ (M. Bača, et all, in press)
$mP_n \cup \mu C_n$	$d \leq 2$	jika setiap (i) $d \in \{0, 2\}$ untuk setiap $m + \mu$ dan n ganjil (ii) $d = 1$ untuk m genap (Dafik, et all, in press)
$mK_{1,m} \cup K_{1,n}$	$d \leq 3$	$d \in \{0, 1, 2, 3\}$ untuk $n + 1$ faktor dari m (Dafik, et all, in press)
$mK_{1,m} \cup S_{k,1}$	$d \leq 3$	$d \in \{0, 1, 2, 3\}$ untuk m, n sembarang (Dafik, et all, in press)
m -caterpillar	$d \leq 5$	$d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ untuk m, n sembarang (M. Bača, et all, in press)
mL_n	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk m, n ganjil (M. Fuad, 2009)
$mP_{n,2}$	$d \leq 3$	$d \in \{0, 1, 2, 3\}$ untuk m, n ganjil (Debbi Viroisa I., In Preparation)
$mB_{n,k}$	$d \leq 3$	$d \in \{0, 1, 2, 3\}$ untuk m, n ganjil dan $k \geq 3$ (Khud Biyadi I., In Preparation)

2.4.4 Pelabelan Total Super (a, d) -sisi Antimagic pada Graf Firecracker

Pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf *firecracker* ini belum ada yang menemukan sebelumnya. Dengan pengembangan sendiri dan berdasarkan langkah-langkah menentukan pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic, peneliti akan menguraikannya dengan menggunakan contoh dan teknik berikut:

- i. Menentukan EAVL (*Edge Antimagic Vertex Labelling*) pada graf *firecracker* dengan teknik *pattern recognition*

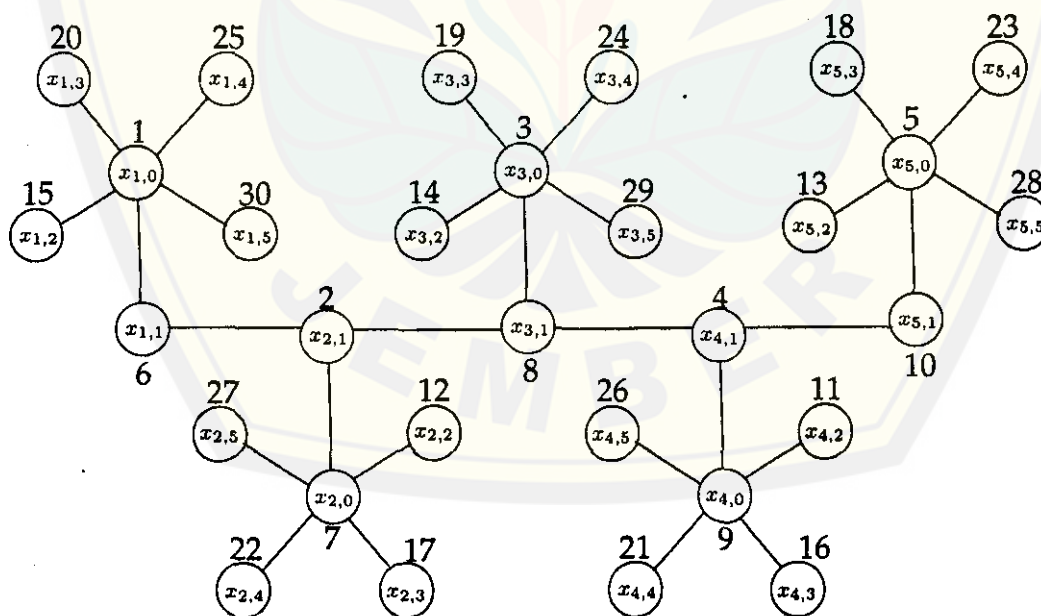
Dalam menentukan EAVL dengan cara *pattern recognition*, contoh beberapa gambar pelabelan graf beserta langkah-langkahnya sangat diper-

lukan. Hal ini dimaksudkan untuk memudahkan pendeteksian pola pada EAVL. Berikut ini akan dijelaskan langkah-langkah pelabelannya:

- Memilih secara acak salah satu graf *firecracker* (peneliti memilih $F_{5,6}$).
- Agar konsisten dalam melakukan pelabelan, simpul pada graf tersebut dilabeli terlebih dahulu sesuai gambar 2.11
- Melakukan pelabelan pada $F_{5,6}$ dengan cara:

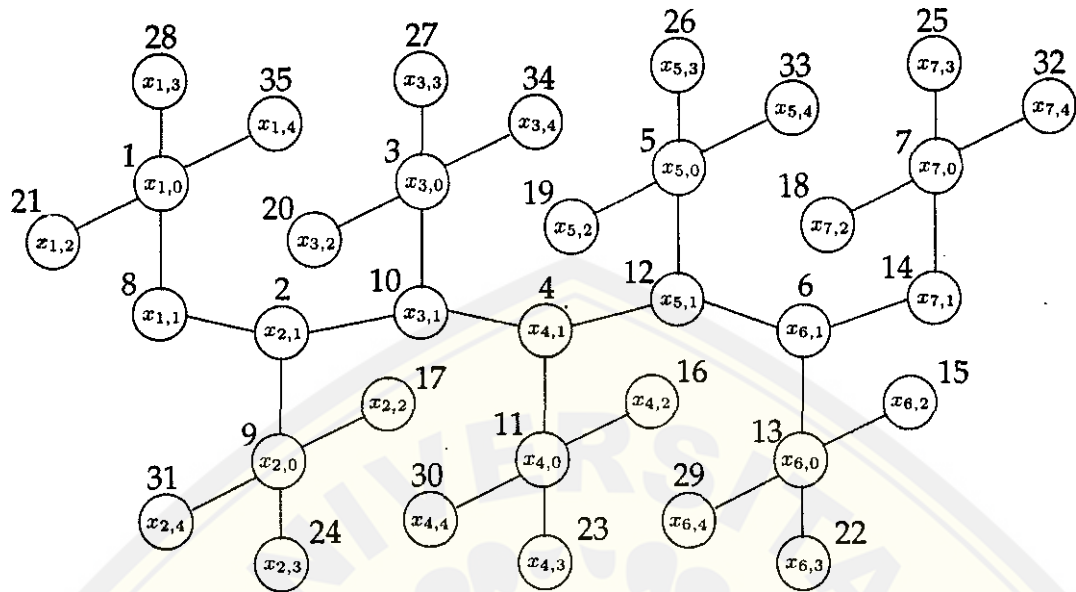
$f : x_{1,0} \rightarrow 1, f : x_{2,1} \rightarrow 2, f : x_{3,0} \rightarrow 3, f : x_{4,1} \rightarrow 4, f : x_{5,0} \rightarrow 5, f : x_{1,1} \rightarrow 6, f : x_{2,0} \rightarrow 7, f : x_{3,1} \rightarrow 8, f : x_{4,0} \rightarrow 9, f : x_{5,1} \rightarrow 10, f : x_{4,2} \rightarrow 11, f : x_{2,2} \rightarrow 12, f : x_{5,2} \rightarrow 13, f : x_{3,2} \rightarrow 14, f : x_{1,2} \rightarrow 15, f : x_{4,3} \rightarrow 16, f : x_{2,3} \rightarrow 17, f : x_{5,3} \rightarrow 18, f : x_{3,3} \rightarrow 19, f : x_{1,3} \rightarrow 20, f : x_{4,4} \rightarrow 21, f : x_{2,4} \rightarrow 22, f : x_{5,4} \rightarrow 23, f : x_{3,4} \rightarrow 24, f : x_{1,4} \rightarrow 25, f : x_{4,5} \rightarrow 26, f : x_{2,5} \rightarrow 27, f : x_{5,5} \rightarrow 28, f : x_{3,5} \rightarrow 29, f : x_{1,5} \rightarrow 30,$

Untuk lebih jelasnya, perhatikan gambar 2.13. Berdasarkan langkah-langkah pelabelan di atas, pola pelabelannya dapat ditemukan. Hal tersebut dapat ditunjukkan dengan pelabelan pada graf $F_{n,k}$ lainnya.



Gambar 2.13: EAVL pada $F_{5,6}$

2. Dengan melihat pola pelabelan pada Gambar 2.13, langkah selanjutnya adalah menentukan fungsi bijektif dengan menggunakan konsep $U_n =$



Gambar 2.14: EAVL pada $F_{7,5}$

$$a + (n + 1)b$$

Dalam menentukan algoritma fungsi bijektif ini, terlebih dahulu akan didefinisikan $f(x_{i,l})$ sebagai label titik pada $x_{i,l}$ dalam hal ini $1 \leq i \leq n$ dan $0 \leq l \leq k - 1, n = 5$ dan $k = 6$ Langkah selanjutnya adalah mengelompokkan label titik $x_{i,l}$ yang membentuk barisan aritmatika seperti tabel 2.2:

Tabel 2.2: Contoh pengelompokan label titik pada $F_{5,6}$

$i \setminus l$	0
1	1
3	3
5	5

Dengan menggunakan konsep barisan aritmatika, secara umum rumus suku ke n pada barisan aritmatika adalah $U_n = a + (n - 1)b, U_n =$ suku ke $n, a =$ suku awal, $b =$ beda dan n merupakan variabel bebasnya, maka

fungsi bijektif dapat ditentukan dengan cara seperti berikut:

- Untuk i ganjil ($1 \leq i \leq n$) dan $l = 0$

Pada tabel 2.2 terlihat bahwa bahwa label titik tersebut membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $a = 1$, beda $b = 2$ dan dalam hal ini variabel bebasnya adalah i .

$$\left. \begin{aligned} i = 1 &\implies f(x_{i,l}) = 1 \\ i = 3 &\implies f(x_{i,l}) = 3 \\ i = 5 &\implies f(x_{i,l}) = 5 \end{aligned} \right\} a = 1; b = 2$$

sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} f(x_{i,l}) &= 1 + \left(\frac{i-1}{2}\right)2 \\ f(x_{i,l}) &= i \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama seperti di atas, secara keseluruhan diperoleh fungsi bijektif label titik sebagai berikut:

$$f(x_{i,l}) = \begin{cases} i; & \text{untuk } i \text{ ganjil } (1 \leq i \leq n) \text{ dan } l = 0 \\ n + 1; & \text{untuk } i \text{ genap } (2 \leq i \leq n - 1) \text{ dan } l = 0 \\ i; & \text{untuk } i \text{ genap } (2 \leq i \leq n - 1) \text{ dan } l = 1 \\ n + 1; & \text{untuk } i \text{ ganjil } (1 \leq i \leq n) \text{ dan } l = 1 \\ \frac{(l+1)2n-i+1}{2}; & \text{untuk } i \text{ ganjil } (1 \leq i \leq n) \text{ dan } 2 \leq l \leq k - 1 \\ \left(\frac{(2ln)+n-i-1}{2}\right) + 1; & \text{untuk } i \text{ genap } (2 \leq i \leq n - 1), 2 \leq l \leq k - 1 \end{cases}$$

3. Menentukan fungsi bijektif bobot sisi EAVL

Berdasarkan pelabelan yang telah dilakukan pada langkah 1, bobot sisi yang terbentuk adalah:

$$x_{1,1}x_{1,0} = 7, \quad x_{1,1}x_{2,1} = 8, \quad x_{2,1}x_{2,0} = 9, \quad x_{2,1}x_{3,1} = 10, \quad x_{3,1}x_{3,0} = 11, \dots, \\ x_{2,5}x_{2,0} = 35.$$

Dengan melihat pola pelabelan yang telah dilakukan dan bobot sisi yang diperoleh (selanjutnya kita sebut dengan fungsi w), kita dapat mengelompokkan label w sesuai barisan aritmatika. Dalam hal ini bisa menggunakan konsep barisan aritmatika yang secara umum rumus suku ke n pada barisan aritmatika adalah $U_n = a + (n-1)b$, U_n =suku ke n , a =suku

awal, b = beda dan n merupakan variabel bebasnya.

Sebagai contoh dalam mengelompokkannya, kita dapat mendefinisikan terlebih dahulu $w(x_{i,l}x_{i,0})$ sebagai label bobot sisi pada $x_{i,l}x_{i,0}$ dimana $1 \leq i \leq n$, $n = 5$ dan $l = 1$, sehingga dapat diperlihatkan labelnya seperti tabel berikut ini: Berdasarkan Tabel 2.3 label bobot sisi $w(x_{i,l}x_{i,0})$

Tabel 2.3: Contoh pengelompokan label bobot sisi pada $F_{5,6}$

$i \setminus l$	1
1	7
2	9
3	11
4	13
5	15

membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $a = 7$ dan beda $b = 2$ maka fungsi bijektif label bobot sisi (w) dapat ditentukan dengan cara seperti berikut:

$$\left. \begin{array}{l} i = 1 \implies w(x_{i,l}x_{i,0}) = 7 \\ i = 2 \implies w(x_{i,l}x_{i,0}) = 9 \\ i = 3 \implies w(x_{i,l}x_{i,0}) = 11 \\ i = 4 \implies w(x_{i,l}x_{i,0}) = 13 \\ i = 5 \implies w(x_{i,l}x_{i,0}) = 15 \end{array} \right\} a = 7; b = 2$$

$$a = 7$$

$$a = 6 + 1$$

Menurut fungsi bijektif label titik pada langkah 2, $6 = n + 1$, sehingga dapat ditulis:

$$a = (n + 1) + 1$$

$$a = n + 2$$

Berdasarkan hal di atas, rumus fungsi bijektif label bobot sisi dapat diperoleh dengan cara:

$$w(x_{i,l}x_{i,0}) = a + (i - 1)b$$

$$w(x_{i,l}x_{i,0}) = (n + 2) + (i - 1)2$$

$$w(x_{i,l}x_{i,0}) = n + 2i$$

Dengan cara yang sama seperti di atas, secara keseluruhan diperoleh fungsi bijektif label bobot sisi sebagai berikut:

$$w_1(x_{i,l}x_{i,0}) = n + 2i; 1 \leq i \leq n \text{ dan } l = 1$$

$$w_2(x_{i,l}x_{i+1,l}) = n + 2i + 1; 1 \leq i \leq n - 1 \text{ dan } l = 1$$

$$w_3(x_{i,l}x_{i,0}) = (l + 1)n + \frac{i+1}{2}; i \text{ ganjil}(1 \leq i \leq n) \text{ dan } 2 \leq l \leq k - 1$$

$$w_4(x_{i,l}x_{i,0}) = (l + 1)n + \frac{n+i+1}{2}; i \text{ genap}(2 \leq i \leq n - 1) \text{ dan } 2 \leq l \leq k - 1$$

4. Menentukan pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic/*Super Edge Antimagic Total Labelling* (SEATL) pada graf *firecracker* $F_{5,6}$ dengan teknik:

- untuk $d = 2$

Sebelum menentukan pelabelan total super $(a, 2)$ -sisi antimagic, pelabelan titik (EAVL pada $F_{5,6}$) pada gambar 2.13 harus dilabeli sisi-sisinya terlebih dahulu sehingga menjadi pelabelan total dengan langkah sebagai berikut:

Bobot sisi (w)	:	7	8	9	10	...	32	33	34	35	
Label sisi (fw)	:	<u>31</u>	<u>32</u>	<u>33</u>	<u>34</u>	...	<u>56</u>	<u>57</u>	<u>58</u>	<u>59</u>	+
Bobot sisi total	:	38	40	42	44	...	88	90	92	94	

Jika digambarkan, pelabelan tersebut menjadi pelabelan total seperti gambar berikut:

Secara matematis, label sisi (fw) untuk dapat ditentukan dengan cara:

- Bobot sisi terkecil terletak pada w_1 , sehingga dapat didefinisikan f_1w_1 adalah label sisi yang terletak bersamaan dengan bobot sisi:

$w_1(x_{i,l}x_{i,0}) = n + 2i; 1 \leq i \leq n \text{ dan } l = 1$. Menurut data label sisi di atas, terlihat bahwa label sisi f_1w_1 membentuk barisan 31, 33, 35, 37, 39 yang merupakan barisan aritmatika dengan suku awal $a = 31$, beda $b = 2$ dan variabel bebasnya adalah i . Dengan hal ini, fungsi bijektif label sisi f_1 adalah sebagai berikut:

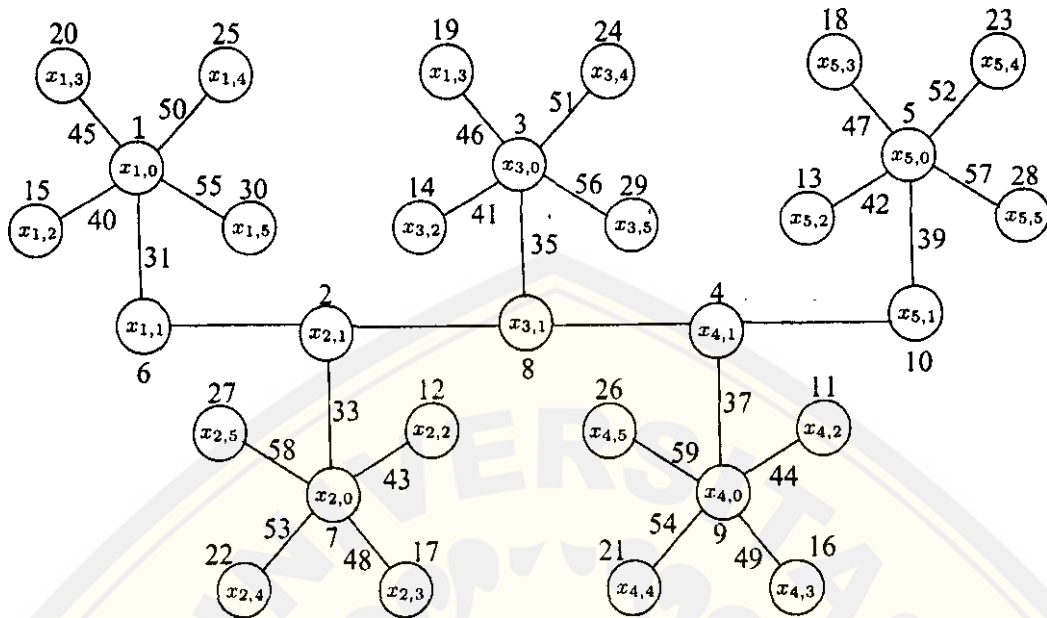
$$f_1w_1 = a + (i - 1)b$$

$$f_1w_1 = 31 + (i - 1)2$$

$$f_1w_1 = (nk + 1) + 2i - 2$$

$$f_1w_1 = nk + 2i - 1$$

karena $n = 5$ dan $k = 6$ pada $F_{5,6}$



Gambar 2.15: SEATL untuk graf *firecracker* $F_{3,6}$ dengan $d = 2$

- Barisan bobot sisi selanjutnya untuk melengkapi bilangan yang belum ada pada barisan bobot sisi sebelumnya adalah 8, 10, 12, 14 yang terletak di w_2 dan dapat didefinisikan f_1w_2 adalah label sisi yang terletak bersamaan dengan:

$$w_2(x_{i,l}x_{i+1,l}) = n + 2i + 1; 1 \leq i \leq n - 1 \text{ dan } l = 1$$

Dengan cara yang sama seperti sebelumnya (menggunakan konsep barisan aritmatika), fungsi bijektif label sisi f_1w_2 adalah

$$f_2w_2 = nk + 2i$$

Fungsi bijektif label sisi yang lainnya dapat ditentukan dengan cara yang sama seperti di atas, sehingga secara keseluruhan diperoleh:

$$f_1w_1(x_{i,l}x_{i,0}) = nk + 2i - 1; 1 \leq i \leq n \text{ dan } l = 1$$

$$f_1w_2(x_{i,l}x_{i+1,l}) = nk + 2i; 1 \leq i \leq n - 1 \text{ dan } l = 1$$

$$f_1w_3(x_{i,l}x_{i,0}) = (k+l)n + \frac{i-1}{2}; i \text{ ganjil dan } 2 \leq l \leq k-1$$

$$f_1w_4(x_{i,l}x_{i,0}) = (k+l)n + \frac{n+i-1}{2}; i \text{ genap dan } 2 \leq l \leq k-1$$

Berdasarkan teknik-teknik yang telah dilakukan dan fungsi-fungsi bijek-

tif yang telah ditemukan, langkah selanjutnya adalah menentukan fungsi bijektif bobot total (W) $\text{super}(a, 2)$ -EAT adalah:

- untuk W_1

$$W_1 = w_1(x_{i,l}x_{i,0}) + f_1w_1(x_{i,l}x_{i,0}); 1 \leq i \leq n \text{ dan } l = 1$$

$$W_1 = (n + 2i) + (nk + 2i - 1)$$

$$W_1 = (k + 1)n + 4i - 1$$
- untuk W_2

$$W_2 = w_2(x_{i,l}x_{i+1,l}) + f_1w_2(x_{i,l}x_{i+1,l}); 1 \leq i \leq n \text{ dan } l = 1$$

$$W_2 = (n + 2i + 1) + (nk + 2i)$$

$$W_2 = (k + 1)n + 4i + 1$$
- untuk W_3

$$W_3 = w_3(x_{i,l}x_{i,0}) + f_1w_3(x_{i,l}x_{i,0}); i \text{ ganjil}; 2 \leq l \leq k - 1$$

$$W_3 = \left((l + 1)n + \frac{i + 1}{2} \right) + \left((k + l)n + \frac{i - 1}{2} \right)$$

$$W_3 = (k + 2l + 1)n + i$$
- untuk W_4

$$W_4 = w_4(x_{i,l}x_{i,0}) + f_1w_4(x_{i,l}x_{i,0}); i \text{ genap}; 2 \leq l \leq k - 1$$

$$W_4 = \left((l + 1)n + \frac{n + i + 1}{2} \right) + \left((k + l)n + \frac{n + i - 1}{2} \right)$$

$$W_4 = (k + 2l + 2)n + i$$

5. Menarik kesimpulan dari berbagai langkah yang telah dilakukan.

Berdasarkan fungsi bijektif di atas, dapat disimpulkan bahwa:

$$\bigcup W_i = \{(k + 1)n + 3, (k + 1)n + 5, (k + 1)n + 7, \dots, (3k + 1)n - 1\}$$

Pernyataan di atas telah menyatakan pelabelan total $\text{super}(a, d)$ -sisi antimagic (SEATL) pada graf *firecracker* $F_{5,6}$ yaitu:

Super $((k + 1)n + 3, 2)$ – *Edge Antimagic Total Labelling*.

Keseluruhan langkah tersebut berlaku untuk menentukan nilai d selain $d = 2$. Dalam penelitian ini akan menggunakan langkah-langkah seperti di atas untuk menemukan pelabelan total $\text{super}(a, d)$ -sisi antimagic. Pelabelan total $\text{super}(a, d)$ -sisi antimagic atau SEATL ini dilakukan pada m buah gabungan graf diskonektif *firecracker* $mF_{n,k}$ dengan $m \geq 2, n \geq 2, k \geq 3, m, n, k \in \text{bilangan asli}$.



BAB 3

METODE PENELITIAN

3.1 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode deskriptif aksiomatik, yaitu dengan menurunkan aksioma atau teorema yang telah ada, kemudian diterapkan dalam pelabelan total super (a,d) -sisi antimagic pada gabungan graf *firecracker*. Dalam penelitian ini, terlebih dahulu akan ditentukan nilai beda (d) pada gabungan graf *firecracker*, selanjutnya nilai d tersebut diterapkan dalam pelabelan total super (a,d) -sisi antimagic pada gabungan graf *firecracker*. Jika terdapat pelabelan total super (a,d) -sisi antimagic, maka akan dirumuskan pola pelabelan total super (a,d) -sisi antimagic pada gabungan graf *firecracker* dengan menggunakan metode pendeteksian pola (*pattern recognition*) untuk menentukan pola umum fungsi bijektifnya.

3.2 Definisi Operasional

Definisi operasional variabel digunakan untuk memberikan gambaran secara sistematis dalam penelitian dan untuk menghindari terjadinya perbedaan pengertian makna. Definisi operasional variabel yang dimaksud adalah sebagai berikut :

3.2.1 Pelabelan Total Super (a, d) -Sisi Antimagic

Pelabelan total (a,d) -sisi antimagic adalah sebuah pemetaan satu-satu f dari $V(G) \cup E(G)$ ke bilangan bulat $\{1, 2, 3, \dots, v + e\}$ sehingga himpunan bobot sisinya pada semua sisi G adalah $\{a, a + d, \dots, (a + (e - 1)d)\}$ untuk $a > 0$ dan $d \geq 0$ adalah bilangan bulat. Sebuah pelabelan total (a,d) -sisi antimagic disebut pelabelan total super (a,d) -sisi antimagic jika $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, v\}$ dan $f(E) = \{v + 1, v + 2, \dots, v + e\}$.

3.2.2 Graf Firecracker

Sebelum menjelaskan definisi graf *firecracker*, terlebih dulu akan dijelaskan tentang graf bintang karena graf *firecracker* merupakan famili dari graf bintang. Graf bintang S_n , $n \geq 3$ adalah graf pohon yang terdiri dari 1 titik yang berderajat $n - 1$ dan $n - 1$ titik yang berderajat 1. Jadi, graf bintang S_n terdiri dari titik dan $n - 1$ sisi. Misalkan x_0 adalah titik yang berderajat $n - 1$ (titik pusat) dan $V(S_n) = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$, maka $E(S_n) = \{x_0x_1, x_0x_2, \dots, x_0x_{n-1}\}$.

Graf *firecracker* adalah graf yang diperoleh dari penggabungan graf-graf bintang dimana tepat satu daun masing-masing graf tersebut dihubungkan. Gabungan graf *firecracker* $F_{n,k}$ (untuk $n \geq 2, k \geq 3$) didefinisikan sebagai gabungan saling lepas dari sebanyak m buah graf *firecracker* yang sama mempunyai himpunan titik $V(mF_{n,k}) = \{x_{i,l}^j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, 0 \leq l \leq k - 1\}$ dan himpunan sisi $E(mF_{n,k}) = \{x_{i,0}^j x_{i,l}^j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, 1 \leq l \leq k - 1\} \cup \{x_{i,l}^j x_{i+1,l}^j : 1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq j \leq m, l = 1\}$.

3.3 Teknik Penelitian

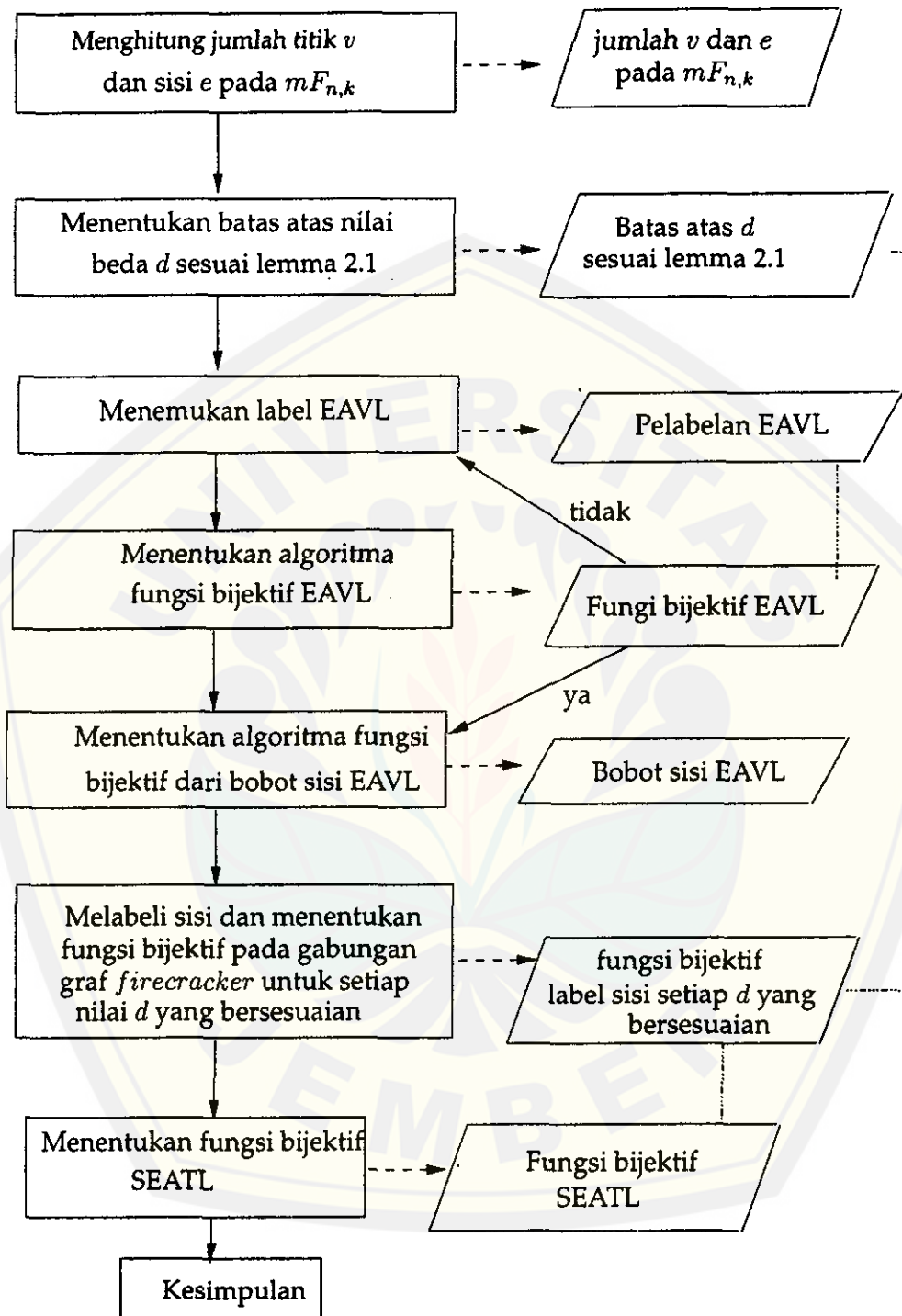
Penelitian ini dilakukan pada gabungan graf *firecracker* $F_{n,k}$. Jika pada graf tersebut ditemukan pola pelabelannya dengan cara pendeteksian pola (*pattern recognition*) maka dilanjutkan dengan menemukan pelabelan total super (a,d) -sisi antimagic. Adapun teknik penelitian secara sistematis adalah sebagai berikut:

1. menghitung jumlah titik v dan sisi e pada gabungan graf *firecracker* $F_{n,k}$;
2. menentukan batas atas nilai beda d pada gabungan graf *firecracker* $F_{n,k}$ sesuai dengan Lemma 2.1 (pada Bab 2);
3. menentukan atau menemukan label EAVL (*edge-antimagic vertex labeling*) atau pelabelan titik (a,d) -sisi antimagic pada beberapa gabungan graf *firecracker* $F_{n,k}$.
4. menentukan algoritma fungsi bijektif EAVL (*edge-antimagic vertex labeling*) $f(x_{i,l})$ pada gabungan graf *firecracker* $F_{n,k}$ dengan cara melihat pola

pelabelan pada gabungan graf *firecracker* $F_{n,k}$ yang telah ditemukan kemudian mengelompokkan bilangan-bilangan pada label titik yang membentuk barisan aritmatika;

5. menentukan algoritma fungsi bijektif dari bobot sisi EAVL (w) pada gabungan graf *firecracker* $F_{n,k}$ dengan melihat pola pelabelan gabungan graf *firecracker*;
6. melabeli sisi pada gabungan graf *firecracker* $F_{n,k}$ dengan SEATL (*Super Edge Antimagic Total Labelling*) atau pelabelan total super (a,d) -sisi antimagic untuk setiap nilai beda d yang bersesuaian kemudian menentukan algoritma fungsi bijektifnya;
7. menentukan fungsi bijektif SEATL (*Super Edge Antimagic Total Labelling*) atau pelabelan total super (a,d) -sisi antimagic pada gabungan graf *firecracker* $F_{n,k}$.
8. menarik kesimpulan dari langkah-langkah dan hasil penelitian yang telah dilakukan

Secara umum, langkah-langkah penelitian di atas dapat juga disajikan dalam diagram alir 3.1.



Keterangan:

————> : aliran proses

- - - -> : aliran hasil

..... : aliran pengecekan algoritma

Gambar 3.1: Diagram alir penelitian



BAB 4

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil-hasil penelitian akan dipaparkan terlebih dahulu, kemudian pembahasannya disajikan pada bagian akhir bab ini. Hasil penelitian ini adalah pelabelan total super (a,d) -sisi antimagic pada gabungan graf *firecracker* yang bermula dari menentukan jumlah titik dan sisi pada gabungan graf *firecracker*, menentukan nilai d , menentukan $EAVL$ dan bobot sisi $EAVL$, lalu menentukan $SEATL$ dan diakhiri dengan menentukan bobot sisi $SEATL$ untuk membuktikan adanya $SEATL$ pada gabungan graf *firecracker*.

Hasil utama penelitian yang akan dibahas terkait dengan pelabelan total super (a,d) -sisi antimagic pada gabungan graf *firecracker* yaitu lemma dan teorema yang diberi tanda \diamond . Terdapat 2 (dua) lemma dan 4 (empat) teorema baru yang telah ditemukan. Format penyajian Lemma dan teorema dalam bab ini diawali dengan pernyataan lemma atau teorema kemudian dilanjutkan dengan bukti dan contoh gambar atau ilustrasi sebagai visualisasi kebenarannya. Berikut ini akan dijelaskan secara bertahap bagaimana lemma-lemma serta teorema-teorema tersebut ditemukan sekaligus menjawab rumusan masalah yang telah disajikan sebelumnya.

4.1 Jumlah Titik dan Sisi pada Gabungan Graf *Firecracker* $mF_{n,k}$

Pada bagian ini akan menjelaskan tentang penentuan jumlah titik dan sisi pada gabungan graf *firecracker* $mF_{n,k}$. Sebelum menentukan jumlah titik dan sisi pada gabungan graf *firecracker* $mF_{n,k}$, jumlah titik dan sisi pada *firecracker* $F_{n,k}$ akan dicari dan ditentukan terlebih dahulu dengan menggunakan definisi. Selain definisi graf *firecracker* sendiri, definisi lain yang akan digunakan adalah definisi graf bintang karena graf *firecracker* berkaitan dengan graf bintang.

4.1.1 Jumlah Titik Graf *Firecracker* $F_{n,k}$

Sebelum menentukan jumlah titik pada graf *firecracker*, hal yang perlu diperhatikan terlebih dahulu adalah jumlah titik pada graf bintang. Hal ini dikarenakan, definisi graf *firecracker* adalah graf yang diperoleh dari penggabungan graf-graf bintang dengan tepat satu daun masing-masing graf tersebut dihubungkan. Berdasarkan definisi tersebut, jumlah titik graf *firecracker* dapat ditentukan bila jumlah titik graf bintang telah ditentukan terlebih dahulu.

Definisi graf bintang (pada subbab 2.3.4 no.2) menyatakan bahwa graf bintang S_n terdiri dari n titik dan $n - 1$ sisi. Berdasarkan definisi tersebut jumlah titik dari graf bintang adalah n buah titik. Definisi selanjutnya yang perlu diperhatikan adalah definisi graf *firecracker*. Selain itu, graf *firecracker* dilambangkan dengan $F_{n,k}$ dengan n adalah banyaknya graf bintang yang digabung, sedangkan k adalah jumlah titik dari tiap satu graf bintang yang digabungkan. Berdasarkan hal tersebut, jumlah titik pada graf *firecracker* dapat ditentukan yaitu nk buah titik. Agar tampak lebih jelas, perhatikan gambar 4.1.

4.1.2 Jumlah Sisi Graf *Firecracker* $F_{n,k}$

Dalam menentukan jumlah sisi graf *firecracker* perlu memperhatikan juga definisi graf bintang. Definisi graf bintang menyatakan bahwa graf bintang S_n memiliki $n - 1$ sisi. Hal tersebut menunjukkan bahwa jika terdapat graf bintang S_3 maka graf tersebut memiliki 2 sisi, sedangkan jika terdapat graf bintang S_4 maka dapat ditentukan jumlah sisinya adalah 3, demikian seterusnya.

Berdasarkan definisi graf *firecracker*, jumlah sisi graf *firecracker* $F_{n,k}$ dapat ditentukan dengan cara menjumlahkan seluruh sisi n buah graf bintang yang digabungkan dengan jumlah sisi yang menghubungkan daun graf bintang yang satu dengan lainnya. Secara matematis, jumlah sisi graf *firecracker* $F_{n,k}$ dapat dinyatakan seperti berikut:

$$|E| = |E_s| + |E_{ss}|$$

$$|E| = (n(k - 1)) + (n - 1)$$

$$|E| = nk - n + n - 1$$

$$|E| = nk - 1$$

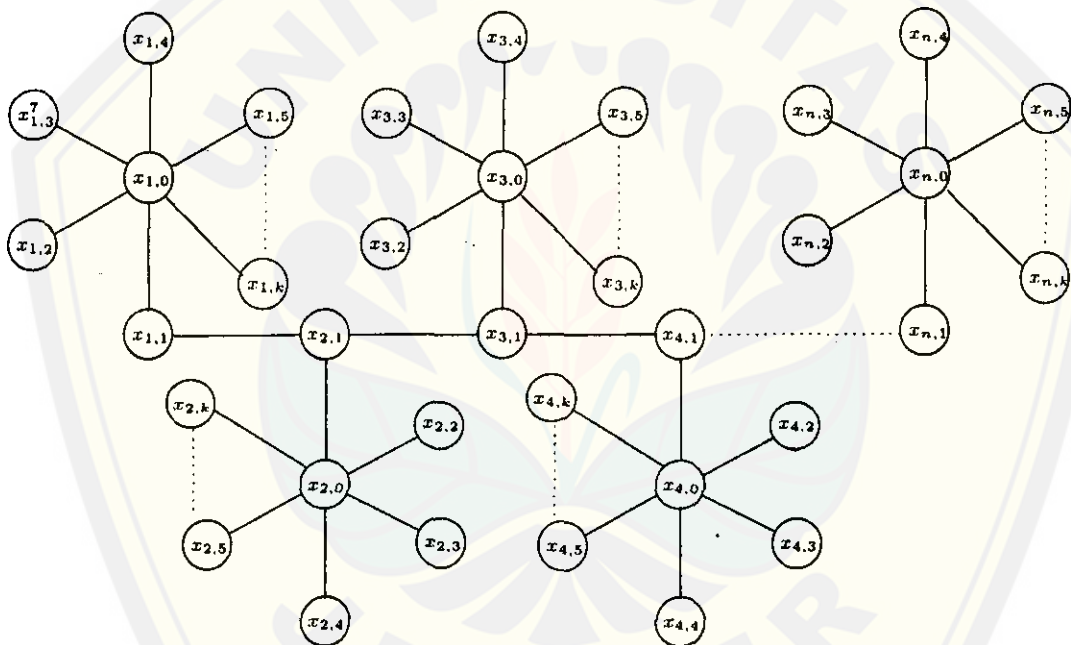
keterangan:

$|E|$ = jumlah sisi pada graf firecracker $F_{n,k}$

$|E_s|$ = jumlah seluruh sisi n-graf bintang S_k yang digabungkan

$|E_{ss}|$ = jumlah sisi penghubung daun graf bintang yang satu dengan lainnya.

Jadi, jumlah sisi graf firecracker $F_{n,k}$ yaitu $nk - 1$ buah sisi. Untuk lebih jelasnya, perhatikan Gambar 4.1. Pada gambar tersebut, terlihat bahwa terdapat graf bintang sebanyak n buah dan masing-masing graf bintang memiliki sejumlah titik yang sama yaitu k buah titik, sehingga jumlah titik pada graf $F_{n,k}$ adalah sebanyak nk buah. Selain itu, jumlah sisi dapat dihitung dengan menggunakan rumus jumlah sisi pada graf firecracker yang sebelumnya telah dibahas.



Jumlah titik = $n \cdot k = nk$ buah titik
 Jumlah sisi = $n \cdot k - 1 = nk - 1$ buah sisi

Gambar 4.1: Graf firecracker $F_{n,k}$

4.1.3 Jumlah Titik dan Sisi pada Gabungan Graf Firecracker $mF_{n,k}$

Setelah jumlah titik dan sisi pada graf firecracker $F_{n,k}$ ditentukan, jumlah titik dan sisi pada gabungannya dapat ditemukan. Gabungan graf firecracker $mF_{n,k}$ terdiri dari m buah graf firecracker $F_{n,k}$, sehingga :

- jumlah titik pada gabungan graf *firecracker* $mF_{n,k}$ sebanyak mk kali jumlah titik graf *firecracker* $F_{n,k}$ atau dapat ditulis dengan $|V| = mnk$.
- jumlah sisi pada gabungan graf *firecracker* $mF_{n,k}$ sebanyak mk kali jumlah sisi graf *firecracker* $F_{n,k}$ atau dapat ditulis dengan $|E| = m(nk - 1)$.

4.2 Nilai Beda d pada Pelabelan Total Super(a,d)-sisi Antimagic Gabungan Graf *Firecracker* $mF_{n,k}$

Nilai beda d dapat ditentukan dengan menggunakan lemma 2.1. Pada gabungan graf *firecracker* $mF_{n,k}$, dimisalkan jumlah titiknya $|V| = mnk$ dan jumlah sisinya $|E| = m(nk - 1)$. Nilai beda d dapat ditentukan dengan cara sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 d &\leq \frac{2|V| + |E| - 5}{|E| - 1} \\
 d &\leq \frac{2(mnk) + m(nk - 1) - 5}{m(nk - 1) - 1} \\
 d &\leq \frac{2mnk + mnk - m - 5}{mnk - m - 1} \\
 d &\leq \frac{3mnk - m - 5}{mnk - m - 1} \\
 d &\leq \frac{3mnk - 3m - 3 + 2m - 2}{mnk - m - 1} \\
 d &\leq \frac{3(mnk - m - 1)}{mnk - m - 1} + \frac{2m - 2}{mnk - m - 1} \\
 d &\leq 3 + \frac{2(m - 1)}{mnk - m - 1} < 3 + 1 && \text{karena } \frac{2(m - 1)}{mnk - m - 1} < 1 \\
 d &< 4
 \end{aligned}$$

Berdasarkan hal di atas, dapat disimpulkan bahwa $d < 4$ dan karena $d \geq 0$ maka $d \in \{0, 1, 2, 3\}$.

4.3 Pelabelan Total Super(a,d)-Sisi Antimagic pada Gabungan Graf *Firecracker* $mF_{n,k}$

Setelah langkah awal di atas (menentukan nilai beda d), langkah selanjutnya adalah menentukan pelabelan total super(a,d)-sisi antimagic. Dalam

menentukan pelabelan ini, hal yang perlu diperhatikan adalah langkah-langkah dan teknik yang akan digunakan seperti yang diuraikan pada bab tinjauan pustaka (subbab 2.4.4). Beberapa langkah telah dilakukan dalam upaya menemukan pelabelannya dan diawali dengan teknik pendeteksian pola (*pattern recognition*) hingga batas m , n , dan k yang telah ditemukan. Selanjutnya untuk menentukan pola secara umum, fungsi bijektif harus ditemukan dengan menggunakan prinsip barisan aritmatika. Fungsi bijektif tersebut juga digunakan untuk membuktikan kebenaran lemma atau teorema secara deduktif matematik. Lemma dan teorema dalam penelitian ini tidak bersifat *biimplikatif* sehingga pembuktiannya hanya dilakukan satu arah.

Berdasarkan hasil penelitian melalui *pattern recognition* dan konsep barisan aritmatika (lihat lampiran), beberapa lemma dan teorema telah diperoleh terkait pelabelan total super(a, d)-sisi antimagic. Lemma dan teorema yang telah ditemukan ini bersifat keberadaan tetapi tidak tunggal (*existence but not unique*). Berikut ini akan disajikan lemma dan teorema yang telah ditemukan beserta pembuktian dan ilustrasi sebagai visualisasi kebenarannya.

4.3.1 Pelabelan Titik $(a, 1)$ -Sisi Antimagic pada Gabungan Graf Firecracker $mF_{n,k}$

Dalam subbab ini akan ditunjukkan adanya pelabelan titik $(a, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf firecracker sekaligus fungsi bijektifnya. Ini merupakan tahap awal dalam menentukan pelabelan total super(a, d)-sisi antimagic yang akan menggunakan teknik pendeteksian pola *pattern recognition*, menu-runkan lemma 2.1 dan definisi dari graf firecracker. Setelah menemukan pola pelabelannya, suatu lemma dihasilkan. Berikut ini adalah lemma terkait dengan pelabelan titik $(a, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf firecracker.

◇ **Lemma 4.3.1** Ada pelabelan titik $(\frac{2mn+m+3}{2}, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf firecracker $mF_{n,k}$ jika m dan n ganjil, $m \geq 2$, $n \geq 2$, dan $k \geq 3$.

Bukti. Terlebih dahulu didefinisikan $x_{i,l}^j$ adalah titik $x_{i,l}$ pada komponen graf ke- j dengan $1 \leq j \leq m$, $1 \leq i \leq n$ dan $0 \leq l \leq k - 1$ pada gabungan graf

firecracker $mF_{n,k}$. Untuk lebih jelasnya, perhatikan ilustrasi gabungan graf firecracker $3F_{5,6}$ beserta titik $x_{i,l}^j$ pada gambar 4.2. Berdasarkan hasil penelitian, jika $\alpha_1 : V(mF_{n,k}) \rightarrow \{1, 2, \dots, mnk\}$ maka pelabelan α_1 dapat dituliskan:

$$\alpha_1(x_{i,l}^j) = \begin{cases} (i-1)m+j; & \text{jika } 1 \leq j \leq m, i \text{ ganjil}, l=0; \\ & 1 \leq j \leq m, i \text{ genap}, l=1 \\ (n+i-\frac{1-(-1)^j}{4})m-\frac{j}{2}+1; & \text{jika } 1 \leq j \leq m, i \text{ genap}, l=0; \\ & 1 \leq j \leq m, i \text{ ganjil}, l=1 \\ ((l+1)n+\frac{1+(-1)^j-2i}{4})m-\frac{j}{2}+1; & \text{jika } 1 \leq j \leq m, i \text{ ganjil}, \\ & 2 \leq l \leq k-1 \\ (\frac{(2l+1)n-i-1}{2})m+j; & \text{jika } 1 \leq j \leq m, i \text{ genap}, \\ & 2 \leq l \leq k-1 \end{cases} \quad (4.1)$$

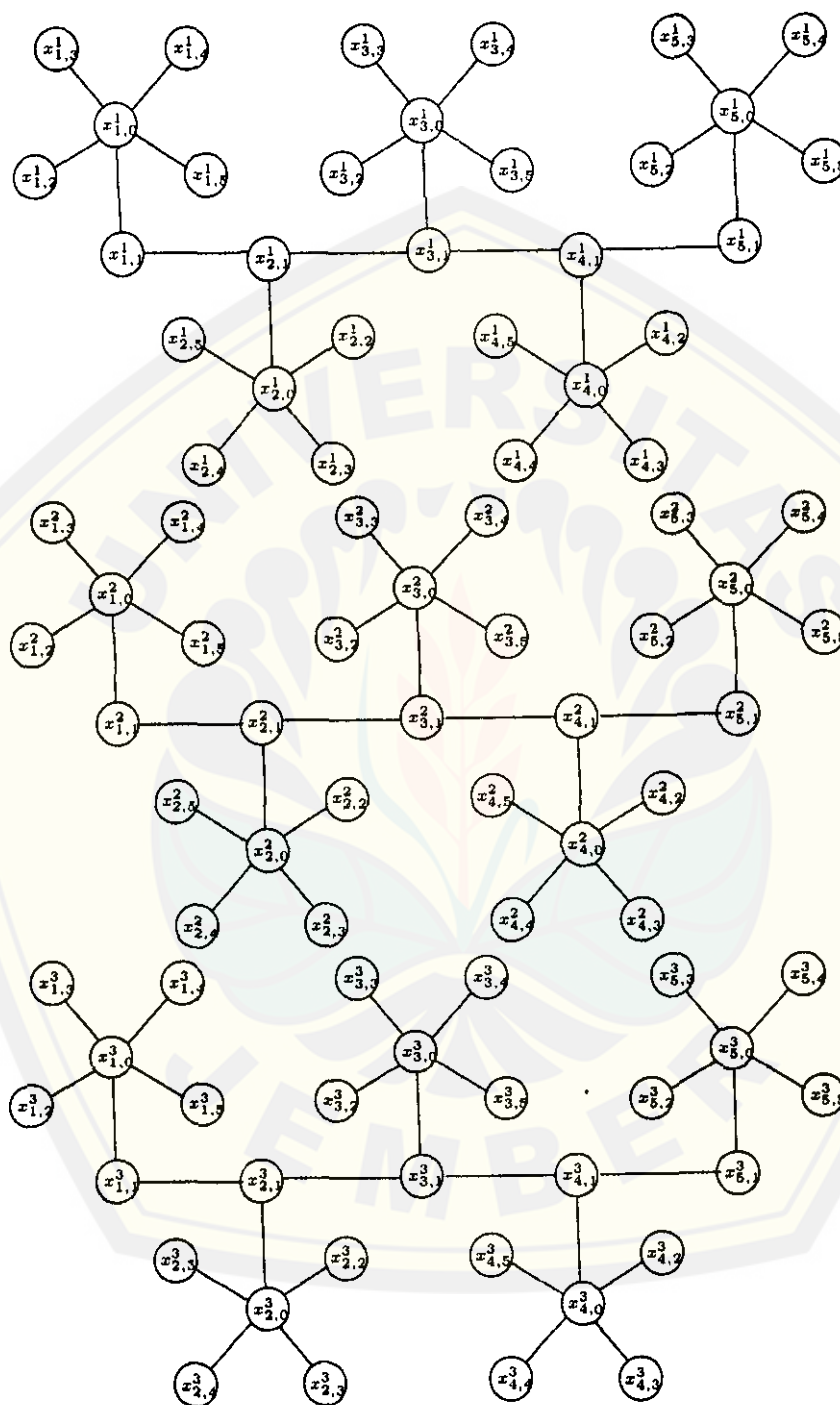
Dari persamaan di atas, $\alpha_1(x_{i,l}^j)$ adalah fungsi bijektif yang memetakan $V(mF_{n,k}) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{mnk}\}$ ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, \dots, mnk\}$. Jika w_{α_1} didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan titik α_1 , maka w_{α_1} dirumuskan:

$$\begin{aligned} w_{\alpha_1}^1(x_{i,l}^j x_{i,0}^j) &= \{(n+2i-1-\frac{1-(-1)^j}{4})m+\frac{j+2}{2}; 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n, l=1\} \\ w_{\alpha_1}^2(x_{i,l}^j x_{i+1,l}^j) &= \{(n+2i-\frac{1-(-1)^j}{4})m+\frac{j+2}{2}; 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n-1, l=1\} \\ w_{\alpha_1}^3(x_{i,l}^j x_{i,0}^j) &= \{((l+1)+\frac{1+(-1)^j}{4})n+\frac{i}{2}-\frac{3-(-1)^j}{4})m+\frac{j+2}{2}; 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n, \\ & 2 \leq l \leq k-1\} \end{aligned}$$

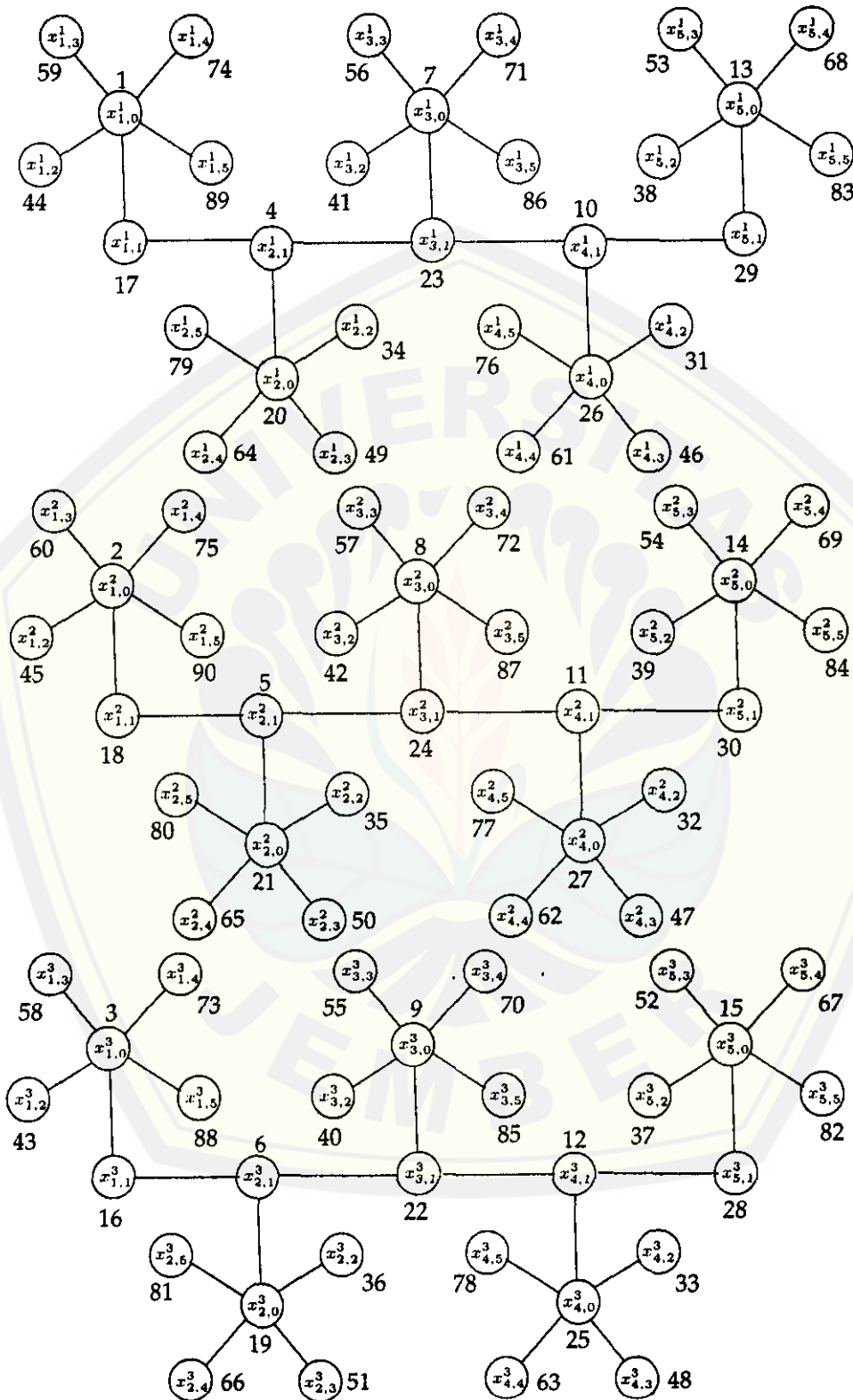
Himpunan bobot sisi pelabelan titik dapat ditulis: $w_{\alpha_1} = \{w_{\alpha_1}^1, w_{\alpha_1}^2, w_{\alpha_1}^3\}$. Angka 1, 2, 3 pada $w_{\alpha_1}^1, w_{\alpha_1}^2,$ dan $w_{\alpha_1}^3$ bukan merupakan pangkat, melainkan untuk membedakan w_{α_1} yang mempunyai syarat batas $i, j,$ dan l yang berbeda-beda. Dapat dilihat bahwa bobot sisi terkecil terletak pada $w_{\alpha_1}^1$ dan bobot sisi terbesar terletak pada $w_{\alpha_1}^3$. Dengan teknik substitusi dapat diperoleh nilai sebagai berikut:

- $i = 1, j = 1$ dan $l = 1$ pada $w_{\alpha_1}^1$ diperoleh $w_{\alpha_1} = \frac{2mn+m+3}{2}$, substitusi $i = 1, j = 3$ dan $l = 1$ pada $w_{\alpha_1}^1$ diperoleh $w_{\alpha_1} = \frac{2mn+m+5}{2}$, substitusi $i = 1, j = 5$ dan $l = 1$ pada $w_{\alpha_1}^1$ diperoleh $w_{\alpha_1} = \frac{2mn+m+7}{2}, \dots$, substitusi $i = n-1, j = m-1$ dan $l = k-1$ pada $w_{\alpha_1}^3$ diperoleh $w_{\alpha_1} = \frac{2mnk+2mn-m+1}{2}$.

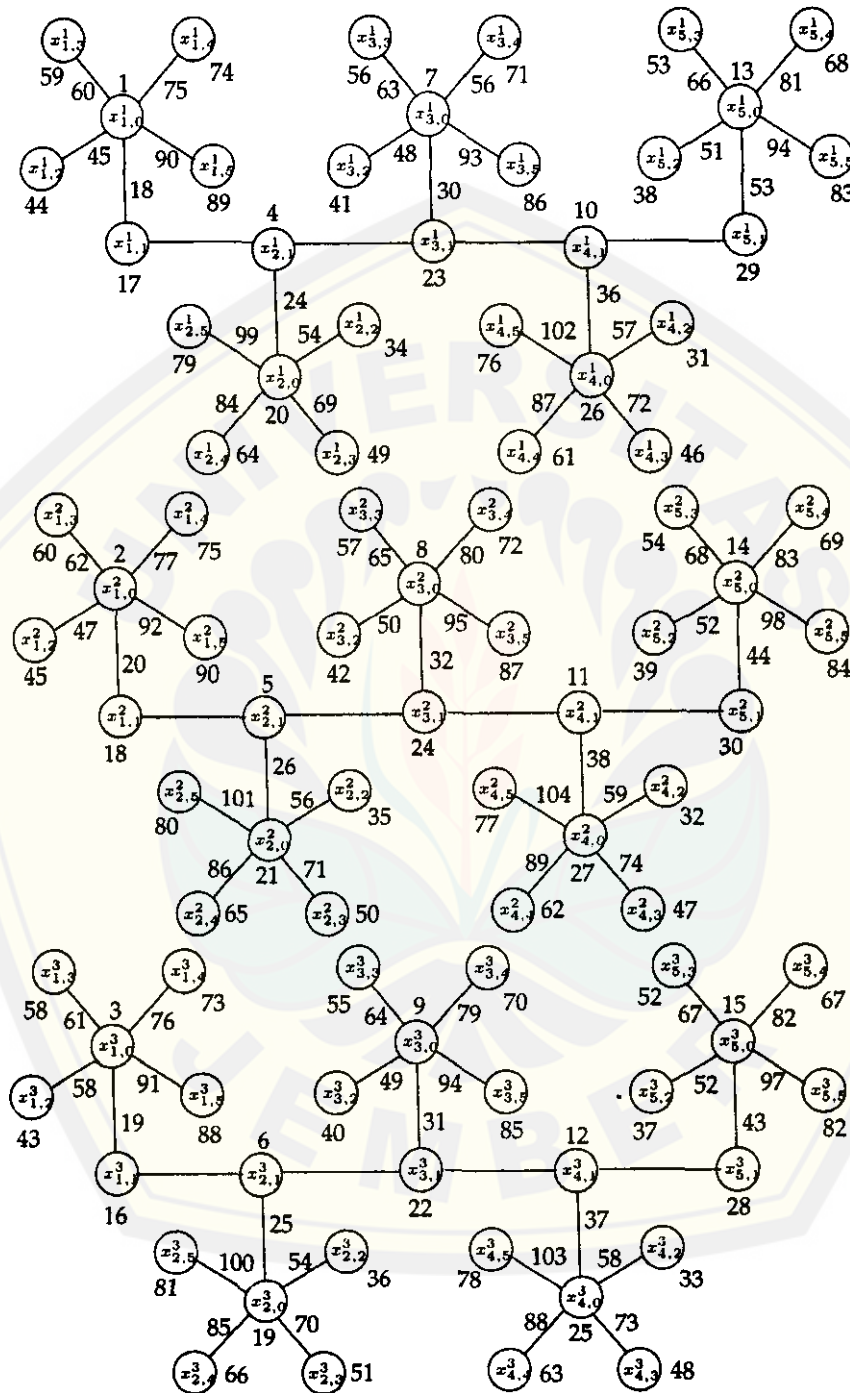
Oleh karena itu, dapat dinyatakan bahwa w_{α_1} membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $\frac{2mn+m+3}{2}$ dan beda 1 (satu), atau dapat dituliskan dengan



Gambar 4.2: Gabungan graf firecracker $3F_{5,6}$



Gambar 4.3: Pelabelan titik (18,1)-sisi antimagic pada $3F_{5,6}$



Gambar 4.4: Pelabelan titik (18,1)-sisi antimagic dan bobot sisinya pada $3F_{5,6}$

$\cup_{t=1}^3 w_{\alpha_1}^t = \{ \frac{2mn+m+3}{2}, \frac{2mn+m+5}{2}, \frac{2mn+m+7}{2}, \dots, \frac{2mnk+2mn-m+1}{2} \}$. Berdasarkan hal tersebut, terbukti bahwa pelabelan titik $\alpha_1(x_{i,l}^j)$ merupakan pelabelan titik $(a, 1)$ -sisi antimagic jika m dan n ganjil, $m \geq 2, n \geq 2, k \geq 3$. \square

Untuk lebih jelas tentang pembuktian teorema di atas, telah disajikan Gambar 4.3 dan Gambar 4.4. Gambar 4.3 merupakan contoh pelabelan titik $(\frac{2mn+m+3}{2}, 1)$ -sisi antimagic gabungan graf *firecracker* $mF_{n,k}$ dengan nilai $\frac{2mn+m+3}{2} = 18$, sedangkan gambar 4.4 merupakan contoh pelabelan titik beserta bobot EAVLnya.

4.3.2 Pelabelan Total Super $(a, 0)$ -Sisi Antimagic Gabungan Graf *Firecracker* $mF_{n,k}$

Dengan menggunakan lemma 4.3.1, pelabelan total super $(a, 0)$ -sisi antimagic dapat ditentukan dengan memberi label sisi dari pelabelan titik yang telah ditemukan. Letak label sisi ditentukan berdasarkan letak bobot sisi EAVL w dengan urutan yang berlawanan. Sisi dengan w terkecil dilabeli dengan label sisi terbesar demikian seterusnya secara berurutan hingga sisi dengan w terbesar dilabeli dengan label sisi terkecil. Dari uraian di atas dapat ditemukan teorema berikut:

\diamond **Teorema 4.3.1** *Ada pelabelan total super $((2k + 1)mn + \frac{3-m}{2}, 0)$ -sisi antimagic pada gabungan graf *firecracker* $mF_{n,k}$ jika m dan n ganjil, $m \geq 2, n \geq 2$, dan $k \geq 3$.*

Bukti. Terlebih dahulu definisikan label sisi $\alpha_1 : E(mF_{n,k}) = \{e_1, e_2, \dots, e_{mnk-m}\} \rightarrow \{mnk+1, mnk+2, \dots, 2mnk-m\}$, sehingga label sisi α_1 untuk pelabelan total super $(a, 0)$ -sisi antimagic pada graf $mF_{n,k}$ dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\alpha_1(x_{i,l}^j, x_{i,0}^j) = \begin{cases} (2nk - 2i + \frac{3-(-1)^j}{4})m + \frac{1-j}{2}; & \text{jika } 1 \leq j \leq m, \\ & 1 \leq i \leq n, \text{ dan} \\ & l = 1 \\ ((2k - l - \frac{1+(-1)^l}{4})n - \frac{i}{2} + \frac{1-(-1)^j}{4})m + \frac{1-j}{2}; & \text{jika } 1 \leq j \leq m, \\ & 1 \leq i \leq n, \text{ dan} \\ & 2 \leq l \leq k - 1 \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\alpha_1(x_{i,l}^j x_{i+1,l}^j) = \begin{cases} (2nk - 2i - \frac{1+(-1)^j}{4})m + \frac{1-j}{2}; & \text{jika } 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq \\ n - 1, \text{ dan } l = 1 \end{cases} \quad (4.3)$$

Selanjutnya, Jika terdapat W_{α_1} yang didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan total $\alpha_1(x_{i,l}^j)$, $\alpha_1(x_{i,l}^j x_{i,0}^j)$, dan $\alpha_1(x_{i,l}^j x_{i+1,l}^j)$ maka W_{α_1} dapat diperoleh dengan menjumlahkan rumus bobot sisi EAVL w_{α_1} dan rumus label sisi α_1 dengan syarat batas i, j , dan l yang bersesuaian dan dapat dinyatakan sebagai berikut:

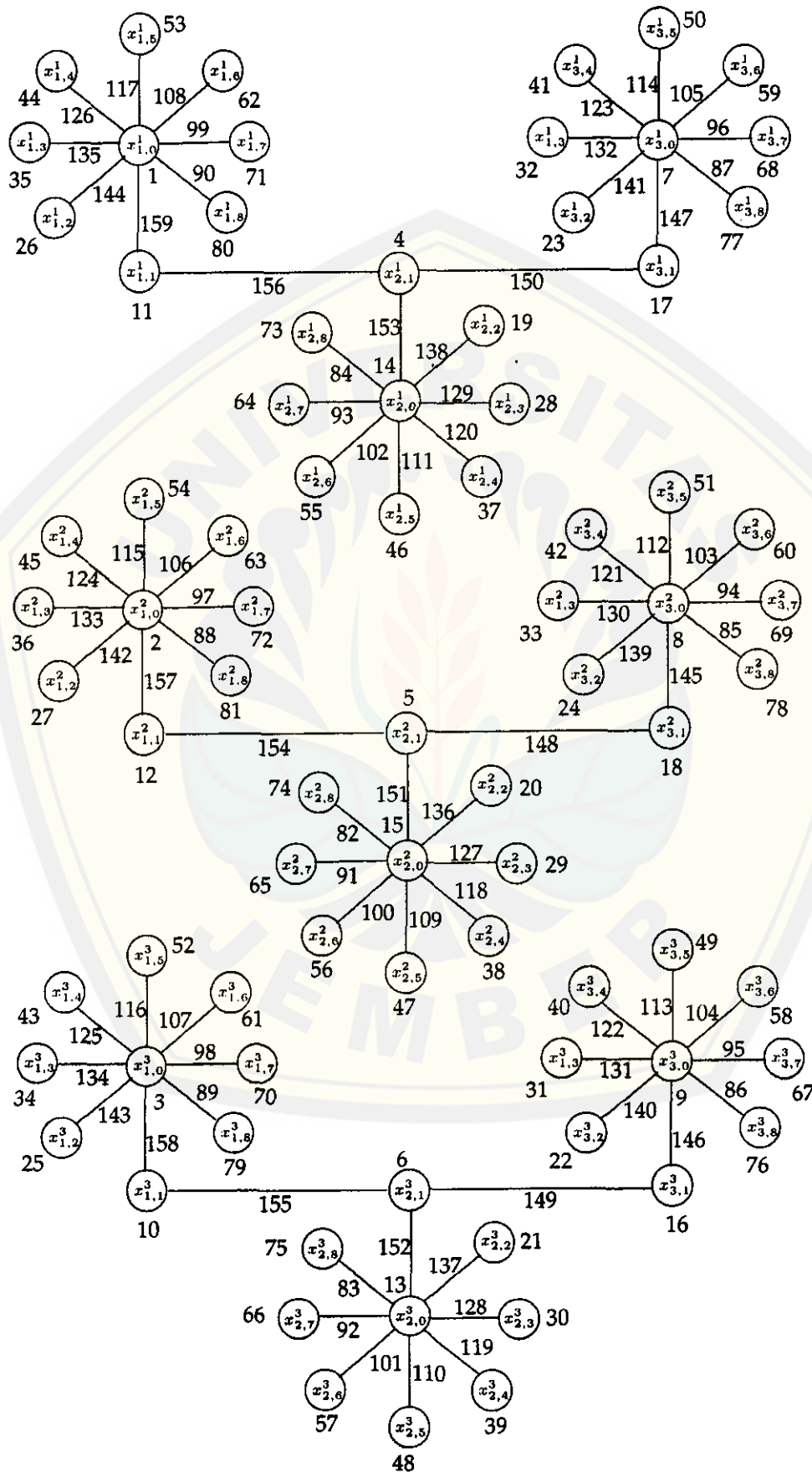
$$\begin{aligned} W_{\alpha_1}^1 &= \{w_{\alpha_1}^1(x_{i,l}^j x_{i,0}^j) + \alpha_1(x_{i,l}^j x_{i,0}^j); 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n, l = 1\} \\ W_{\alpha_1}^2 &= \{w_{\alpha_1}^2(x_{i,l}^j x_{i+1,l}^j) + \alpha_1(x_{i,l}^j x_{i+1,l}^j); 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n - 1, l = 1\} \\ W_{\alpha_1}^3 &= \{w_{\alpha_1}^3(x_{i,l}^j x_{i,0}^j) + \alpha_1(x_{i,l}^j x_{i,0}^j); 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n, 2 \leq l \leq k - 1\} \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (1.1), (1.2) dan (1.3) diperoleh:

$$\begin{aligned} W_{\alpha_1}^1 &= \left\{ \left((n + 2i - 1 - \frac{1-(-1)^j}{4})m + \frac{j+2}{2} \right) + \left((2nk - 2i + \frac{3-(-1)^j}{4})m + \frac{1-j}{2} \right) \right\} \\ &= \left\{ (2k + 1)mn + \frac{3-m}{2} \right\} \\ W_{\alpha_1}^2 &= \left\{ \left((n + 2i - \frac{1-(-1)^j}{4})m + \frac{j+2}{2} \right) + \left((2nk - 2i - \frac{1+(-1)^j}{4})m + \frac{1-j}{2} \right) \right\} \\ &= \left\{ (2k + 1)mn + \frac{3-m}{2} \right\} \\ W_{\alpha_1}^3 &= \left\{ \left((l + 1 + \frac{1+(-1)^i}{4})n + \frac{i}{2} - \frac{3-(-1)^j}{4} \right)m + \frac{j+2}{2} \right\} + \left\{ \left((2k - l - \frac{1+(-1)^i}{4})n - \frac{i}{2} + \frac{1-(-1)^j}{4} \right)m + \frac{1-j}{2} \right\} \\ &= \left\{ (2k + 1)mn + \frac{3-m}{2} \right\} \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan di atas, himpunan bobot sisi pelabelan total dapat ditulis dengan $W_{\alpha_1} = \{W_{\alpha_1}^1, W_{\alpha_1}^2, W_{\alpha_1}^3\}$. Angka 1, 2, dan 3 pada $W_{\alpha_1}^1, W_{\alpha_1}^2, W_{\alpha_1}^3$ bukan merupakan pangkat, melainkan untuk membedakan W_{α_1} yang mempunyai syarat batas i, j , dan l yang berbeda-beda. Dapat dilihat juga bahwa $W_{\alpha_1}^1 = W_{\alpha_1}^2 = W_{\alpha_1}^3 = (2k + 1)mn + \frac{3-m}{2}$ atau dapat dituliskan sebagai berikut: $\bigcup_{i=1}^3 W_{\alpha_1}^i = \{(2k + 1)mn + \frac{3-m}{2}, (2k + 1)mn + \frac{3-m}{2}, \dots, (2k + 1)mn + \frac{3-m}{2}\}$. Dari hal tersebut dapat disimpulkan bahwa gabungan graf *firecracker* $mF_{n,k}$ mempunyai Super $((2k + 1)mn + \frac{3-m}{2}, 0)$ -sisi antimagic jika m dan n ganjil, $m \geq 2, n \geq 2$, dan $k \geq 3$. \square

Untuk lebih jelas tentang pembuktian teorema di atas, perhatikan gambar 4.5. Gambar 4.5 merupakan contoh pelabelan total super $((2k + 1)mn + \frac{3-m}{2}, 0)$ -sisi antimagic (SEATL) pada gabungan graf *firecracker* $mF_{n,k}$. Contoh gambar lainnya dapat dilihat pada lampiran.



Gambar 4.5: Pelabelan total super $((2k + 1)mn + \frac{3-m}{2}, 0)$ -sisi antimagic $3F_{3,9}$

4.3.3 Pelabelan Total Super $(a, 2)$ -Sisi Antimagic Gabungan Graf Firecracker $mF_{n,k}$

Dengan menggunakan lemma 4.3.1, pelabelan total super $(a, 2)$ -sisi antimagic dapat ditentukan dengan memberi label sisi dari pelabelan titik yang telah ditemukan. Letak label sisi ditentukan berdasarkan letak bobot sisi EAVL w dengan urutan yang sama. Sisi dengan w terkecil dilabeli dengan label sisi terkecil demikian seterusnya secara berurutan hingga sisi dengan w terbesar dilabeli dengan label sisi terbesar juga. Dari uraian di atas dapat ditemukan teorema berikut:

◇ **Teorema 4.3.2** *Ada pelabelan total super $((k+1)mn + \frac{m+5}{2}, 2)$ -sisi antimagic pada gabungan graf firecracker $mF_{n,k}$ jika m dan n ganjil, $m \geq 2$, $n \geq 2$, dan $k \geq 3$.*

Bukti. Terlebih dahulu didefinisikan label titik α_2 dan w_{α_2} sedemikian hingga label titik $\alpha_2 = \alpha_1$ dan $w_{\alpha_2} = w_{\alpha_1}$. Selanjutnya, dapat didefinisikan juga $\alpha_2 : E(mF_{n,k}) \rightarrow \{mnk + 1, mnk + 2, \dots, 2mnk - m\}$, sehingga label sisi α_2 untuk pelabelan total super $(a, 0)$ -sisi antimagic pada graf $mF_{n,k}$ dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\alpha_2(x_{i,l}^j x_{i+1,l}^j) = \begin{cases} (nk + 2i - \frac{3-(-1)^j}{4})m + \frac{j+1}{2}; & \text{jika } 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n-1, \text{ dan } l = 1 \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\alpha_2(x_{i,l}^j x_{i,0}^j) = \begin{cases} (nk + 2i - 1 - \frac{3-(-1)^j}{4})m + \frac{j+1}{2}; & \text{jika } 1 \leq j \leq m, \\ & 1 \leq i \leq n, \\ & \text{dan } l = 1 \\ ((k + l + \frac{1+(-1)^i}{4})n + \frac{i}{2} - \frac{1-(-1)^j}{4} - 1)m + \frac{j+1}{2}; & \text{jika } 1 \leq j \leq m, \\ & 1 \leq i \leq n, \\ & 2 \leq l \leq k-1 \end{cases} \quad (4.5)$$

W_{α_2} didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan total $\alpha_2(x_{i,l}^j)$, $\alpha_2(x_{i,l}^j x_{i,0}^j)$, dan $\alpha_2(x_{i,l}^j x_{i+1,l}^j)$ maka W_{α_2} dapat diperoleh dengan menjumlahkan rumus bobot sisi EAVL w_{α_1} (karena $w_{\alpha_2} = w_{\alpha_1}$) dan rumus label sisi α_2 dengan syarat batas i ,

j , dan l yang bersesuaian dan dapat dinyatakan sebagai berikut:

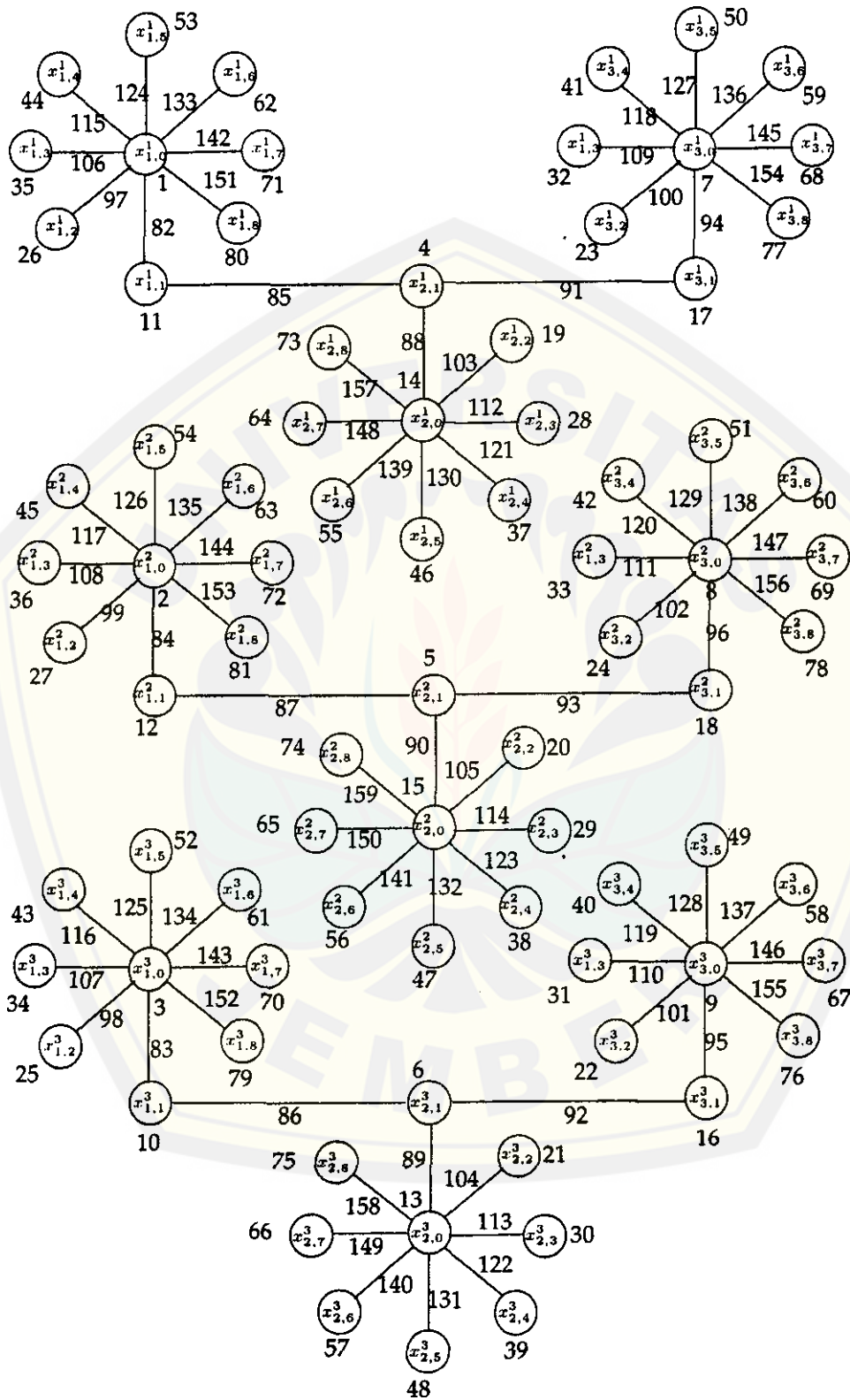
$$\begin{aligned} W_{\alpha_2}^1 &= \{w_{\alpha_1}^1(x_{i,l}^j x_{i,0}^j) + \alpha_2(x_{i,l}^j x_{i,0}^j); 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n, l = 1\} \\ W_{\alpha_2}^2 &= \{w_{\alpha_1}^2(x_{i,l}^j x_{i+1,l}^j) + \alpha_2(x_{i,l}^j x_{i+1,l}^j); 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n-1, l = 1\} \\ W_{\alpha_2}^3 &= \{w_{\alpha_1}^3(x_{i,l}^j x_{i,0}^j) + \alpha_2(x_{i,l}^j x_{i,0}^j); 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n, 2 \leq l \leq k-1\} \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (1.1), (1.4) dan (1.5) diperoleh:

$$\begin{aligned} W_{\alpha_1}^1 &= \left\{ \left((n+2i-1 - \frac{1-(-1)^j}{4})m + \frac{j+2}{2} \right) + \left((nk+2i-1 - \frac{3-(-1)^j}{4})m + \frac{j+1}{2} \right) \right\} \\ &= \left\{ (k+1)mn + (4i-3)m + \frac{(-1)^j m+3}{2} + j \right\} \\ W_{\alpha_1}^2 &= \left\{ \left((n+2i - \frac{1-(-1)^j}{4})m + \frac{j+2}{2} \right) + \left((nk+2i - \frac{3-(-1)^j}{4})m + \frac{j+1}{2} \right) \right\} \\ &= \left\{ (k+1)mn + (4i-1)m + \frac{(-1)^j m+3}{2} + j \right\} \\ W_{\alpha_1}^3 &= \left\{ \left((l+1 + \frac{1+(-1)^i}{4})n + \frac{i}{2} - \frac{3-(-1)^j}{4}m + \frac{j+2}{2} \right) + \left((k+l + \frac{1+(-1)^i}{4})n + \frac{i}{2} - \frac{1-(-1)^j}{4}m + \frac{j+1}{2} \right) \right\} \\ &= \left\{ (k+2l+1 + \frac{1+(-1)^i}{2})mn + (i-2)m + \frac{(-1)^j m+3}{2} + j \right\} \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan di atas, himpunan bobot sisi pelabelan total dapat ditulis dengan $W_{\alpha_2} = \{W_{\alpha_2}^1, W_{\alpha_2}^2, W_{\alpha_2}^3\}$. Angka 1, 2, dan 3 pada $W_{\alpha_2}^1, W_{\alpha_2}^2, W_{\alpha_2}^3$ bukan merupakan pangkat, melainkan untuk membedakan W_{α_2} yang mempunyai syarat batas i, j , dan l yang berbeda-beda. Dapat dilihat juga bahwa bobot sisi terkecil terletak pada $W_{\alpha_2}^1$ dan bobot sisi terbesar terletak pada $W_{\alpha_2}^3$. Dengan mensubstitusikan nilai $i = 1, j = 1$ dan $l = 1$ pada $W_{\alpha_2}^1$ diperoleh $W_{\alpha_2} = (k+1)mn + \frac{m+5}{2}$, substitusi $i = 1, j = 3$ dan $l = 1$ pada $W_{\alpha_2}^1$ diperoleh $W_{\alpha_2} = (k+1)mn + \frac{m+9}{2}, \dots$, substitusi $i = n-1, j = m-1$ dan $l = k-1$ pada $W_{\alpha_2}^3$ diperoleh $W_{\alpha_2} = (3k+1)mn + \frac{1-3m}{2}$. Dapat dinyatakan bahwa W_{α_2} membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $\frac{((4k-3)n+2)m+5}{2}$ dan beda 2 (dua), atau dapat dituliskan $\bigcup_{t=1}^3 W_{\alpha_2}^t = \left\{ (k+1)mn + \frac{m+5}{2}, (k+1)mn + \frac{m+9}{2}, (k+1)mn + \frac{m+13}{2}, \dots, (3k+1)mn + \frac{1-3m}{2} \right\}$. Dapat disimpulkan bahwa gabungan graf *firecracker* $mF_{n,k}$ mempunyai Super $\left((k+1)mn + \frac{m+5}{2}, 2 \right)$ -EAT; m dan n ganjil, $m \geq 2, n \geq 2$, dan $k \geq 3$. \square

Untuk lebih jelas tentang pembuktian teorema di atas, perhatikan gambar 4.6. Gambar 4.6 merupakan contoh pelabelan total super $\left((k+1)mn + \frac{m+5}{2}, 2 \right)$ -sisi antimagic (SEATL) pada gabungan graf *firecracker* $mF_{n,k}$. Contoh-contoh gambar pelabelan yang sejenis disajikan pada lampiran.



Gambar 4.6: Pelabelan total super $((k + 1)mn + \frac{m+5}{2}, 2)$ -sisi antimagic $3F_{3,9}$

4.3.4 Pelabelan Titik $(a, 2)$ -Sisi Antimagic pada Gabungan Graf Firecracker $mF_{n,k}$

Dalam subbab ini akan ditunjukkan adanya pelabelan titik $(a, 2)$ -sisi antimagic pada gabungan graf firecracker sekaligus fungsi bijektifnya. Pelabelan ini dapat digunakan untuk menemukan pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic dengan $d = 1$ dan $d = 3$. Berikut ini adalah lemma terkait dengan pelabelan titik $(a, 2)$ -sisi antimagic pada gabungan graf firecracker.

◇ **Lemma 4.3.2** Ada pelabelan titik $(m + 2, 2)$ -sisi antimagic pada gabungan graf firecracker $mF_{n,k}$ jika $m \geq 2$ dan n genap ($n \geq 2$), dan $k \geq 3$.

Bukti. Terlebih dahulu didefinisikan pelabelan titik $\alpha_3 : V(mF_{n,k}) \rightarrow \{1, 2, \dots, mnk + m\}$, seperti contoh gambar 4.7. Berdasarkan hasil penelitian:

$$\alpha_3(x_{i,l}^j) = \begin{cases} (i-1)mk + (l-2)2m + j; & \text{jika } 1 \leq j \leq m, i \text{ ganjil } (1 \leq i \leq n), \text{ dan } 2 \leq l \leq k-1 \\ (i-2)mk + (2l+1)m + j; & \text{jika } 1 \leq j \leq m, i \text{ genap } (2 \leq i \leq n), \text{ dan } 2 \leq l \leq k-1 \\ (i-1)mk + m + j; & \text{jika } 1 \leq j \leq m, i \text{ ganjil } (1 \leq i \leq n), \text{ dan } l = 0 \\ ((i+1)k - 4)m + j; & \text{jika } 1 \leq j \leq m, i \text{ ganjil } (1 \leq i \leq n), \text{ dan } l = 1 \\ (ik - 2)m + j; & \text{jika } 1 \leq j \leq m, i \text{ genap } (2 \leq i \leq n), \text{ dan } l = 1 \end{cases} \quad (4.6)$$

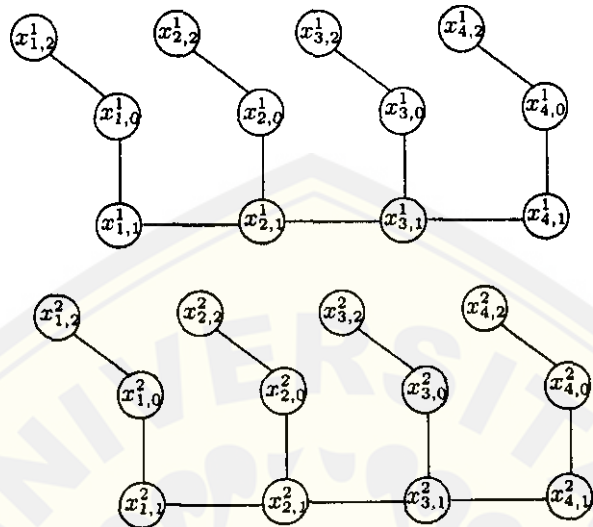
$\alpha_3(x_{i,l}^j)$ adalah fungsi bijektif yang memetakan $V(mF_{n,k}) = \{v_1, v_2, \dots, v_{mnk}\}$ ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, \dots, mnk\}$. w_{α_3} sebagai bobot sisi pelabelan titik α_3 , maka berdasarkan penelitian w_{α_3} dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$w_{\alpha_3}^1(x_{i,l}^j x_{i,0}^j) = \{(i-1)2k + 2l - 2 + (-1)^i m + 2j; \text{ jika } 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n, \text{ dan } 2 \leq l \leq k-1; 1 \leq j \leq m, i \text{ genap, dan } l = 1\}$$

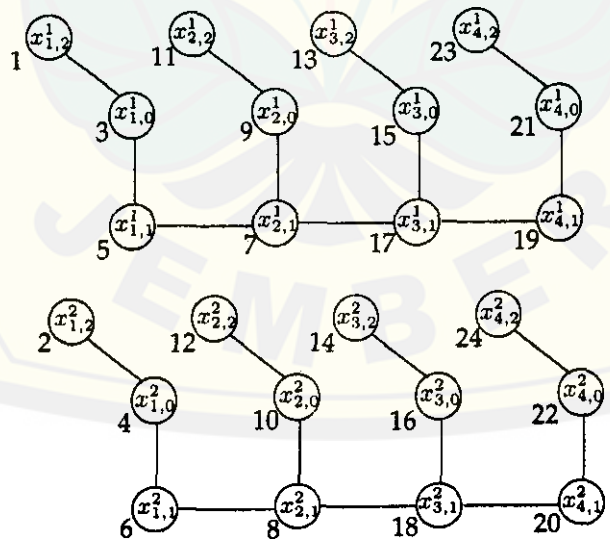
$$w_{\alpha_3}^2(x_{i,l}^j x_{i,0}^j) = \{(2ik - 3)m + 2j; \text{ jika } 1 \leq j \leq m, i \text{ ganjil, dan } l = 1\}$$

$$w_{\alpha_3}^3(x_{i,l}^j x_{i+1,l}^j) = \{(2ik - 1)m + 2j; \text{ jika } 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n-1, \text{ dan } l = 1\}$$

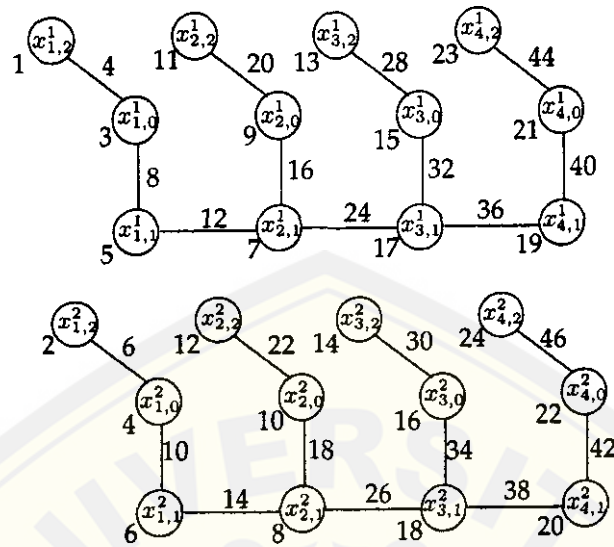
Berdasarkan rumus-rumus bobot sisi di atas, himpunan bobot sisi pelabelan titik dapat ditulis dengan $w_{\alpha_3} = \{w_{\alpha_3}^1, w_{\alpha_3}^2, w_{\alpha_3}^3\}$. Angka 1, 2, dan 3 pada



Gambar 4.7: Gabungan graf firecracker $2F_{4,3}$



Gambar 4.8: Pelabelan titik (4,2)-sisi antimagic pada $2F_{4,3}$



Gambar 4.9: Pelabelan titik (4,2)-sisi antimagic dan bobot sisinya pada $2F_{4,3}$

$w_{\alpha_3}^1, w_{\alpha_3}^2, w_{\alpha_3}^3$ bukan merupakan pangkat, melainkan untuk membedakan w_{α_3} yang mempunyai syarat batas i, j , dan l yang berbeda-beda. Dapat dilihat bahwa bobot sisi terkecil terletak pada $w_{\alpha_3}^1$ dan bobot sisi terbesar terletak juga pada $w_{\alpha_3}^1$. Dengan teknik substitusi dapat diperoleh nilai sebagai berikut:

- $i = 1, j = 1$ dan $l = 2$ pada $w_{\alpha_3}^1$ diperoleh $w_{\alpha_3} = m + 2$, substitusi $i = 1, j = 2$ dan $l = 2$ pada $w_{\alpha_3}^1$ diperoleh $w_{\alpha_3} = m + 4, \dots$, substitusi $i = 1, j = 1$ dan $l = 1$ pada $w_{\alpha_3}^2$ diperoleh $w_{\alpha_3} = (2k - 3)m + 2$, substitusi $i = 1, j = 2$ dan $l = 1$ pada $w_{\alpha_3}^2$ diperoleh $w_{\alpha_3} = (2k - 3)m + 4, \dots$, substitusi $i = n, j = m$ dan $l = k - 1$ pada $w_{\alpha_3}^1$ diperoleh $w_{\alpha_3} = 2mnk - m$.

Oleh karena itu, dapat dinyatakan bahwa w_{α_3} membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $m + 2$ dan beda 2 (dua), atau dapat dituliskan $\bigcup_{t=1}^3 w_{\alpha_3}^t = \{m + 2, m + 4, \dots, 2mnk - m\}$. Sehingga terbukti bahwa $\alpha_3(x_{i,l}^j)$ adalah pelabelan titik $(a, 2)$ -sisi antimagic jika $m \geq 2$ dan n genap ($n \geq 2, k \geq 3$). \square

Untuk lebih jelas tentang pembuktian teorema di atas, telah disajikan gambar 4.8 dan gambar 4.9. Gambar 4.8 merupakan contoh pelabelan titik $(m + 2, 1)$ -sisi antimagic gabungan graf *firecracker* $mF_{n,k}$, sedangkan gambar 4.9 merupakan contoh pelabelan titik beserta bobot EAVLnnya.

4.3.5 Pelabelan Total Super $(a, 1)$ -Sisi Antimagic Gabungan Graf Firecracker $mF_{n,k}$

Pelabelan total super $(a, 1)$ -sisi antimagic dapat ditentukan dengan memperhatikan dan menggunakan lemma 4.3.2. Pelabelan total super $(a, 1)$ -sisi antimagic dapat ditentukan dengan memberi label sisi dari pelabelan titik $(a, 2)$ -sisi antimagic pada gabungan graf firecracker. Letak label sisi ditentukan berdasarkan letak bobot sisi EAVL w dengan urutan berlawanan. Sisi dengan w terkecil dilabeli dengan label sisi terbesar demikian seterusnya secara berurutan hingga sisi dengan w terbesar dilabeli dengan label sisi terkecil.

◇ **Teorema 4.3.3** *Ada pelabelan total super $(2mnk + 2, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf firecracker $mF_{n,k}$ jika $m \geq 2$, n genap ($n \geq 2$), dan $k \geq 3$.*

Bukti. Untuk menentukan pelabelan total super $(a, 1)$ -sisi antimagic, terlebih dahulu didefinisikan $\alpha_3 : E(mF_{n,k}) = \{e_1, e_2, \dots, e_{mnk-m}\} \rightarrow \{mnk+1, mnk+2, \dots, 2mnk - m\}$ yang merupakan label sisi pelabelan tersebut dan dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\alpha_3(x_{i,l}^j x_{i,0}^j) = \begin{cases} ((2n - i + 1)k - l + \frac{1-(-1)^i}{2})m - j + 1; & \text{jika } 1 \leq j \leq m, \\ & 1 \leq i \leq n \\ & \text{dan } 2 \leq l \leq k - 1; \\ & 1 \leq j \leq m, \\ & i \text{ genap } (2 \leq i \leq n) \quad (4.7) \\ & \text{dan } l = 1 \\ (2n - i)mk + m + 1 - j; & \text{jika } 1 \leq j \leq m, \\ & i \text{ ganjil } (1 \leq i \leq n) \\ & \text{dan } l = 1 \end{cases}$$

$$\alpha_3(x_{i,l}^j x_{i+1,l}^j) = (2n - i)mk + 1 - j; \quad 1 \leq j \leq m, \quad 1 \leq i \leq n - 1, \quad l = 1 \quad (4.8)$$

Jika W_{α_3} didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan total $\alpha_3(x_{i,l}^j)$, $\alpha_3(x_{i,l}^j x_{i,0}^j)$, dan $\alpha_3(x_{i,l}^j x_{i+1,l}^j)$ maka W_{α_3} dapat diperoleh dengan menjumlahkan rumus bobot sisi w_{α_3} dan rumus label sisi α_3 dengan syarat batas i, j dan l yang bersesuaian

sebagai berikut:

$$W_{\alpha_3}^1 = \{w_{\alpha_3}^1(x_{i,l}^j x_{i,0}^j) + \alpha_3(x_{i,l}^j x_{i,0}^j); \text{ jika } 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n, 2 \leq l \leq k-1; \\ 1 \leq j \leq m, i \text{ genap}(2 \leq i \leq n), l = 1\}$$

$$W_{\alpha_3}^2 = \{w_{\alpha_3}^2(x_{i,l}^j x_{i,0}^j) + \alpha_3(x_{i,l}^j x_{i,0}^j); \text{ jika } 1 \leq j \leq m, i \text{ ganjil, dan } l = 1\}$$

$$W_{\alpha_3}^3 = \{w_{\alpha_3}^3(x_{i,l}^j x_{i+1,l}^j) + \alpha_3(x_{i,l}^j x_{i+1,l}^j); \text{ jika } 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n-1, l = 1\}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (1.6), (1.7) dan (1.8) diperoleh:

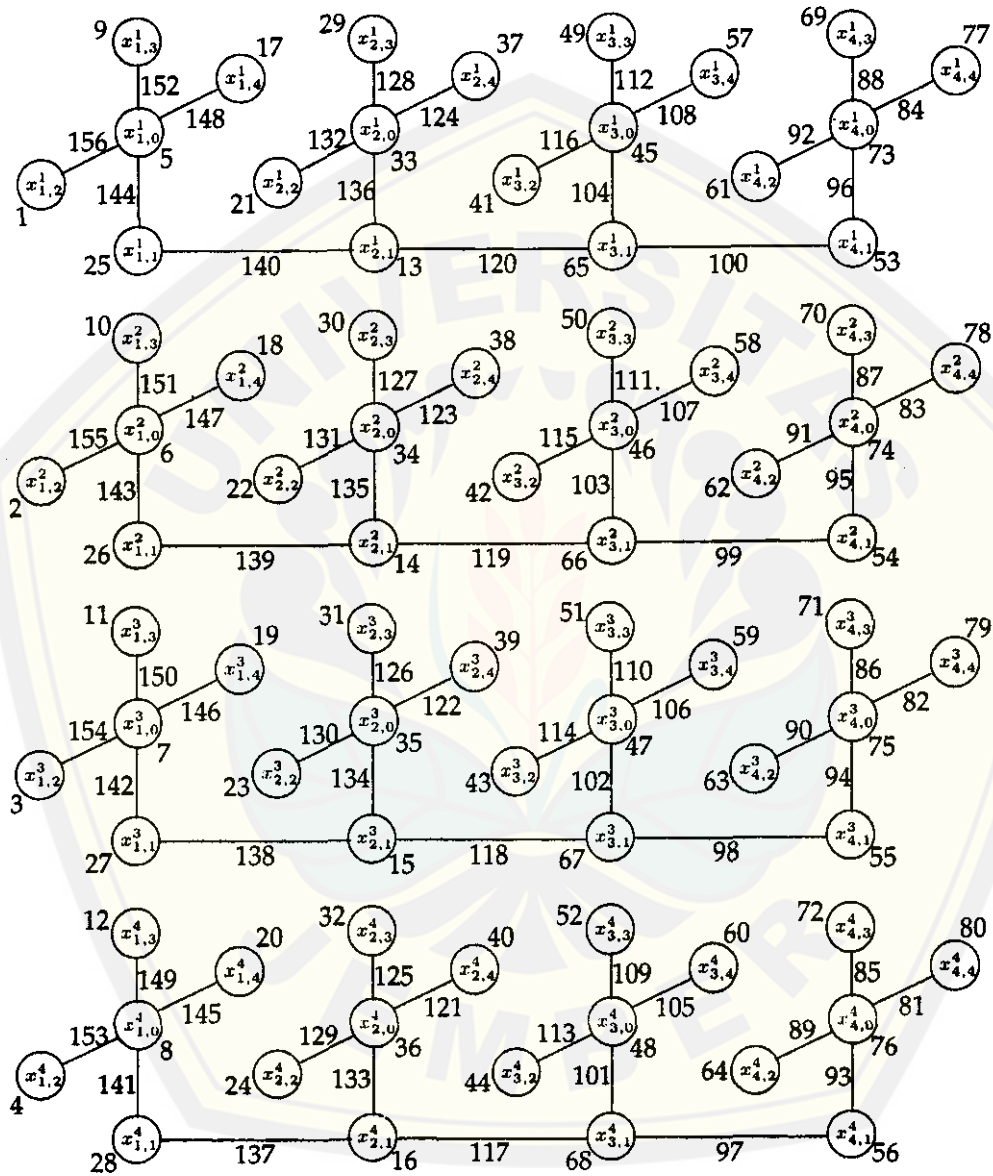
$$W_{\alpha_3}^1 = \{(((i-1)2k+2l-2+(-1)^i)m+2j) + (((2n-i+1)k-l + \frac{1-(-1)^i}{2})m-j+1)\} \\ = \{((2n+i-1)k+l-2 + \frac{1+(-1)^i}{2})m+j+1\}$$

$$W_{\alpha_3}^2 = \{((2ik-3)m+2j) + ((2n-i)mk+m+1-j)\} \\ = \{((2n+i)k-2)m+j+1\}$$

$$W_{\alpha_3}^3 = \{((2ik-1)m+2j) + ((2n-i)mk+1-j)\} \\ = \{((2n+i)k-1)m+j+1\}$$

Berdasarkan persamaan di atas, himpunan bobot sisi pelabelan total dapat ditulis dengan $W_{\alpha_3} = \{W_{\alpha_3}^1, W_{\alpha_3}^2, W_{\alpha_3}^3\}$. Angka 1, 2, dan 3 pada $W_{\alpha_3}^1, W_{\alpha_3}^2,$ dan $W_{\alpha_3}^3$ bukan merupakan pangkat, melainkan untuk membedakan W_{α_3} yang mempunyai syarat batas $i, j,$ dan l yang berbeda-beda. Dapat dilihat juga bahwa bobot sisi terkecil terletak pada $W_{\alpha_3}^1$ dan bobot sisi terbesar terletak pada $W_{\alpha_3}^1$. Hal ini dapat dibuktikan dengan mensubstitusikan nilai $i = 1, j = 1$ dan $l = 2$ pada $W_{\alpha_3}^1$ diperoleh $W_{\alpha_3} = 2mnk + 2$, substitusi $i = 1, j = 2$ dan $l = 2$ pada $W_{\alpha_3}^1$ diperoleh $W_{\alpha_3} = 2mnk + 3$, substitusi $i = 1, j = 3$ dan $l = 2$ pada $W_{\alpha_3}^1$ diperoleh $W_{\alpha_3} = 2mnk + 4, \dots$, substitusi $i = n, j = m$ dan $l = k-1$ pada $W_{\alpha_3}^1$ diperoleh $W_{\alpha_3} = ((3nk-1)m+1)$. Dapat dinyatakan bahwa W_{α_3} membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $2mnk+2$ dan beda 1 (satu), atau dapat dituliskan $\bigcup_{t=1}^3 W_{\alpha_3}^t = \{2mnk+2, 2mnk+3, 2mnk+4, \dots, ((3nk-1)m+1)\}$. Oleh karena itu, Dapat disimpulkan bahwa gabungan graf *firecracker* $mF_{n,k}$ mempunyai pelabelan total super(a, d)-sisi antimagic dengan $a = 2mnk + 2$ dan $d = 1$ atau gabungan graf *firecracker* $mF_{n,k}$ mempunyai Super $(2mnk + 2, 1)$ -EAT; $m \geq 2, n$ genap($n \geq 2$), dan $k \geq 3$. \square

Untuk lebih jelas tentang pembuktian teorema di atas, perhatikan gambar 4.10. Gambar 4.10 merupakan contoh pelabelan total super $(2mnk + 2, 1)$ -sisi antimagic (SEATL) pada gabungan graf *firecracker* $mF_{n,k}$.



Gambar 4.10: Pelabelan total super $(2mnk + 2, 1)$ -sisi antimagic pada $4F_{4,5}$

4.3.6 Pelabelan Total Super $(a, 3)$ -Sisi Antimagic Gabungan Graf Firecracker $mF_{n,k}$

Berdasarkan lemma 4.3.2, pelabelan total super $(a, 3)$ -sisi antimagic dapat ditentukan dengan memberi label sisi dari pelabelan titik $(a, 2)$ -sisi antimagic pada gabungan graf firecracker yang telah ditemukan. Letak label sisi ditentukan berdasarkan letak bobot sisi EAVL w dengan urutan yang sama. Sisi dengan w terkecil dilabeli dengan label sisi terkecil demikian seterusnya secara berurutan hingga sisi dengan w terbesar dilabeli dengan label sisi terbesar juga. Dari uraian di atas dapat ditemukan teorema berikut:

◇ **Teorema 4.3.4** *Ada pelabelan total super $(mnk + m + 3, 3)$ -sisi antimagic pada gabungan graf firecracker $mF_{n,k}$ jika $m \geq 2$, n genap ($n \geq 2$), dan $k \geq 3$.*

Bukti. Terlebih dahulu definisikan label titik α_4 dan w_{α_4} sedemikian hingga label titik $\alpha_4 = \alpha_3$ dan $w_{\alpha_4} = w_{\alpha_3}$. Selanjutnya, dapat didefinisikan juga $\alpha_4 : E(mF_{n,k}) = \{e_1, e_2, \dots, e_{mnk-m}\} \rightarrow \{mnk + 1, mnk + 2, \dots, 2mnk - m\}$, sehingga label sisi α_4 untuk pelabelan total super $(a, 3)$ -sisi antimagic pada graf $mF_{n,k}$ dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\alpha_4(x_{i,l}^j x_{i,0}^j) = \begin{cases} ((n+i-1)k + l - 1 - \frac{1-(-1)^i}{2})m + j; & \text{jika } 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n, \\ & \text{dan } 2 \leq l \leq k-1; \\ & 1 \leq j \leq m, i \text{ genap,} \\ & \text{dan } l = 1 \\ ((n+i)k - 2)m + j; & \text{jika } 1 \leq j \leq m, i \text{ ganjil,} \\ & \text{dan } l = 1 \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\alpha_4(x_{i,l}^j x_{i+1,l}^j) = ((n+i)k - 1)m + j; 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n-1, l = 1 \quad (4.10)$$

Kemudian, terdapat W_{α_4} yang didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan total $\alpha_4(x_{i,l}^j)$, $\alpha_4(x_{i,l}^j x_{i,0}^j)$, dan $\alpha_4(x_{i,l}^j x_{i+1,l}^j)$ maka W_{α_4} dapat diperoleh dengan menjumlahkan rumus bobot sisi EAVL w_{α_3} (karena $w_{\alpha_4} = w_{\alpha_3}$) dan rumus label sisi α_4 dengan syarat batas i, j , dan l yang bersesuaian dan dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$W_{\alpha_4}^1 = \{w_{\alpha_3}^1(x_{i,l}^j x_{i,0}^j) + \alpha_4(x_{i,l}^j x_{i,0}^j); \text{ jika } 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n, \text{ dan } 2 \leq l \leq k-1; \\ 1 \leq j \leq m, i \text{ genap } (2 \leq i \leq n), l = 1\}$$

$$W_{\alpha_4}^2 = \{w_{\alpha_3}^2(x_{i,l}^j x_{i,0}^j) + \alpha_4(x_{i,l}^j x_{i,0}^j); \text{ jika } 1 \leq j \leq m, i \text{ ganjil, dan } l = 1\}$$

$$W_{\alpha_4}^3 = \{w_{\alpha_3}^3(x_{i,l}^j x_{i+1,l}^j) + \alpha_4(x_{i,l}^j x_{i+1,l}^j); \text{ jika } 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n-1, \text{ dan } l = 1\}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (1.6), (1.9) dan (1.10) diperoleh:

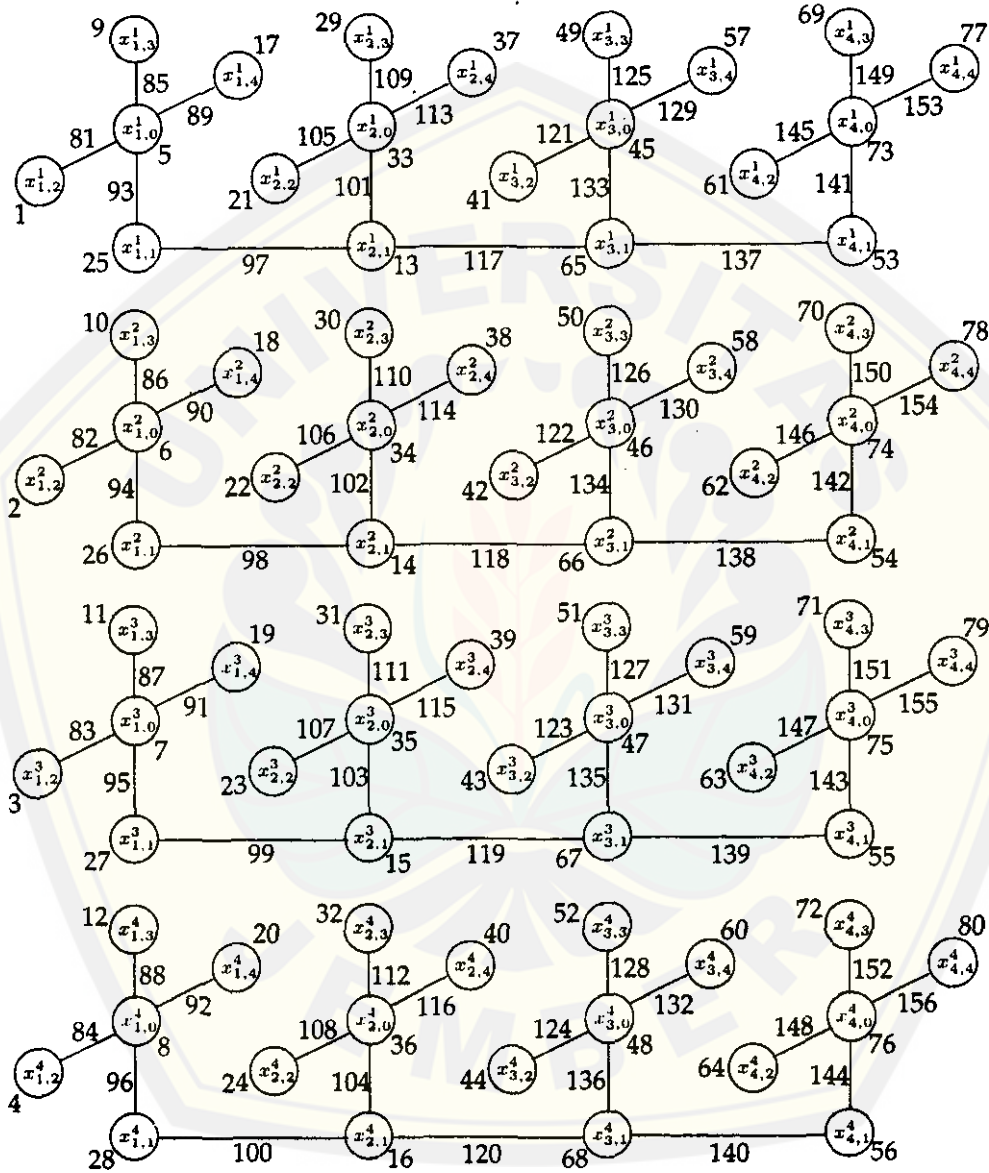
$$W_{\alpha_4}^1 = \{(((i-1)2k+2l-2+(-1)^i)m+2j) + (((n+i-1)k+l-1-\frac{1-(-1)^i}{2})m+j)\} \\ = \{((n+3i-3)k+3l-3-\frac{1-3(-1)^i}{2})m+3j\}$$

$$W_{\alpha_4}^2 = \{((2ik-3)m+2j) + (((n+i)k-2)m+j)\} \\ = \{(n+3i)mk-5m+3j\}$$

$$W_{\alpha_4}^3 = \{((2ik-1)m+2j) + (((n+i)k-1)m+j)\} \\ = \{(n+3i)mk-2m+3j\}$$

Berdasarkan persamaan di atas, himpunan bobot sisi pelabelan total dapat ditulis dengan $W_{\alpha_4} = \{W_{\alpha_4}^1, W_{\alpha_4}^2, W_{\alpha_4}^3\}$. Angka 1, 2, dan 3 pada $W_{\alpha_4}^1, W_{\alpha_4}^2, W_{\alpha_4}^3$, dan $W_{\alpha_4}^4$ bukan merupakan pangkat, melainkan untuk membedakan W_{α_4} yang mempunyai syarat batas i, j , dan l yang berbeda-beda. Dapat dilihat juga bahwa bobot sisi terkecil terletak pada $W_{\alpha_4}^1$ dan bobot sisi terbesar terletak pada $W_{\alpha_4}^1$. Hal ini dapat dibuktikan dengan mensubstitusikan nilai $i = 1, j = 1$ dan $l = 2$ pada $W_{\alpha_4}^1$ diperoleh $W_{\alpha_4} = mnk + m + 3$, substitusi $i = 1, j = 2$ dan $l = 2$ pada $W_{\alpha_4}^1$ diperoleh $W_{\alpha_4} = mnk + m + 6$, substitusi $i = 1, j = 3$ dan $l = 2$ pada $W_{\alpha_4}^1$ diperoleh $W_{\alpha_4} = mnk + m + 9, \dots$, substitusi $i = n, j = m$ dan $l = k-1$ pada $W_{\alpha_4}^1$ diperoleh $W_{\alpha_4} = (4n-3)mk + (3k-2)m$. Dapat dinyatakan bahwa W_{α_4} membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $mnk + m + 3$ dan beda 3 (tiga), atau dapat dituliskan $\bigcup_{t=1}^3 W_{\alpha_4}^t = \{mnk + m + 3, mnk + m + 6, mnk + m + 9, \dots, (4n-3)mk + (3k-2)m\}$. Oleh karena itu, Dapat disimpulkan bahwa gabungan graf *firecracker* $mF_{n,k}$ mempunyai pelabelan total $\text{super}(a, d)$ -sisi antimagic dengan $a = mnk + m + 3$ dan $d = 3$ atau gabungan graf *firecracker* $mF_{n,k}$ mempunyai Super $(mnk + m + 3, 3)$ -EAT; $m \geq 2, n$ genap ($n \geq 2$), dan $k \geq 3$. □

Untuk lebih jelas tentang pembuktian teorema di atas, perhatikan gambar 4.11. Gambar 4.11 merupakan contoh pelabelan total $\text{super}(mnk + m + 3, 3)$ -sisi antimagic (SEATL) pada gabungan graf *firecracker* $mF_{n,k}$.



Gambar 4.11: Pelabelan total super $(mnk + m + 3, 3)$ -sisi antimagic pada $4F_{4,5}$

4.4 Pembahasan

Berdasarkan hasil penelitian, batas atas nilai d telah diketahui dan ditentukan sehingga gabungan graf *firecracker* $mF_{n,k}$ mempunyai pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic. Batas atas nilai d diperoleh dari beberapa langkah penghitungan mulai dari menentukan jumlah titik dan sisi pada sebuah graf *firecracker* hingga gabungannya dan setelah itu, sebuah lemma digunakan untuk menentukan batas atas nilai d . Batas atas nilai d yang diperoleh dari hasil perhitungan yaitu $d < 4$ atau dapat ditulis $d \in 0, 1, 2, 3$.

Selain batas atas nilai d , 2 lemma dan 4 teorema dihasilkan dari penelitian ini. Lemma dan teorema tersebut mengandung hal-hal yang terkait tentang pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan graf *firecracker* $mF_{n,k}$ seperti fungsi bijektif dari pelabelan titik dan pelabelan totalnya. Berikut uraian singkat beberapa lemma dan teorema yang dihasilkan penelitian ini:

- Lemma 4.3.1: ada pelabelan titik $(\frac{2mn+m+3}{2}, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf *firecracker* $mF_{n,k}$ jika m dan n ganjil, $m \geq 2$, $n \geq 2$, dan $k \geq 3$.
- Lemma 4.3.2: ada pelabelan titik $(m+2, 2)$ -sisi antimagic pada gabungan graf *firecracker* $mF_{n,k}$ jika $m \geq 2$ dan n genap $n \geq 2$, dan $k \geq 3$
- Teorema 4.3.1: ada pelabelan total super $((2k+1)mn + \frac{3-m}{2}, 0)$ -sisi antimagic pada gabungan graf *firecracker* $mF_{n,k}$ jika m dan n ganjil, $m \geq 2$, $n \geq 2$, dan $k \geq 3$
- Teorema 4.3.2: Ada pelabelan total super $((k+1)mn + \frac{m+5}{2}, 2)$ -sisi antimagic pada gabungan graf *firecracker* $mF_{n,k}$ jika m dan n ganjil, $m \geq 2$, $n \geq 2$, dan $k \geq 3$
- Teorema 4.3.3: ada pelabelan total super $(2mnk+2, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf *firecracker* $mF_{n,k}$ jika n genap ($n \geq 2$), $m \geq 2$, dan $k \geq 3$
- Teorema 4.3.4: Ada pelabelan total super $(mnk+m+3, 3)$ -sisi antimagic pada gabungan graf *firecracker* $mF_{n,k}$ jika n genap ($n \geq 2$), $m \geq 2$, dan $k \geq 3$.

Dalam penelitian ini, seluruh pelabelan yang ditemukan menggunakan metode pendeteksian pola (*pattern recognition*) yang berarti konstruksi pelabelan dan fungsi bijektif yang dihasilkan, dimulai dengan penentuan pola yang berlaku sampai batas m , n , dan k yang ditemukan peneliti. Setelah itu, peneliti mengkonstruksi fungsi bijektif yang sekaligus digunakan untuk membuktikan kebenaran lemma dan teorema. Hal tersebut menunjukkan bahwa fungsi bijektif yang dihasilkan tidak dikembangkan secara induktif melainkan secara deduktif. Cara mengkonstruksi fungsi bijektif dari pelabelan yang telah ditemukan memang tidak disebutkan, akan tetapi pembuktian kebenaran lemma dan teorema yang terkait dengan pelabelan yang diteliti telah dipaparkan dan disajikan beberapa contoh pelabelan sebagai visualisasi dari kebenaran teorema. Contoh-contoh pelabelan yang lain yang terkait dengan penelitian ini juga telah disajikan dalam lampiran.

Dari hasil penelitian yang telah dipaparkan masih ada beberapa pelabelan gabungan graf *firecracker* yang belum ditemukan peneliti. Beberapa pelabelan yang belum ditemukan peneliti disajikan pada *open problem* berikut:

◊ *Open problem 1*: pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan graf *firecracker* $mF_{n,k}$ untuk $d = 0$ dan $d = 2$ dengan m, n genap, dan $k \geq 3$;

Pelabelan tersebut tidak dapat peneliti temukan dikarenakan pola pelabelan yang telah ditemukan pada graf *firecracker* (mF_n, k) untuk m dan n ganjil tidak dapat diterapkan pada jenis graf yang sama dengan nilai m dan n yang genap. Hal ini berarti harus ditemukan pola pelabelan baru terlebih dahulu untuk menentukan pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan graf *firecracker* $mF_{n,k}$ untuk $d = 0$ dan $d = 2$ dengan m, n genap, dan $k \geq 3$ dan untuk hal tersebut, peneliti mengalami kesulitan.

◊ *Open problem 2*: pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan graf *firecracker* $mF_{n,k}$ untuk $d = 1$ dan $d = 3$ dengan $m \geq 2$, n ganjil, dan $k \geq 3$.

Sama halnya dengan open problem sebelumnya, dikarenakan pola pelabelan yang tidak bisa diterapkan pada jenis graf yang sama tapi dengan syarat yang berbeda yaitu n ganjil, maka harus ditemukan pola pelabelan yang baru.

BAB 5

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat ditarik kesimpulan bahwa:

1. batas atas d pada pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada $mF_{n,k}$ adalah $d < 4$ dengan d bilangan cacah, sehingga diperoleh $d \in \{0, 1, 2, 3\}$. Dari nilai d tersebut dapat ditemukan 2(dua) lemma dan 4(empat) teorema baru terkait dengan pelabelan yang diteliti.
2. Fungsi-fungsi bijektif yang terkait dengan penelitian ini termasuk di dalamnya adalah pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada $mF_{n,k}$ dapat dilihat pada pembuktian teorema yang diberi tanda \diamond . Dari bukti teorema itu terlihat bahwa fungsi bijektif tersebut merupakan pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic dengan $d \in \{0, 1, 2, 3\}$. Berikut ini adalah fungsi-fungsi bijektif dari masing-masing pelabelan yang ditemukan.
 - Fungsi bijektif pelabelan titik $(\frac{2mn+m+3}{2}, 1)$ -sisi antimagic gabungan graf *firecracker* $mF_{n,k}$ jika m dan n ganjil, $m \geq 2$, $n \geq 2$, dan $k \geq 3$ adalah $\alpha_1(x_{i,l}^j)$ yang disebutkan pada persamaan 4.1
 - Fungsi bijektif pelabelan total super $((2k+1)mn + \frac{3-m}{2}, 0)$ -sisi antimagic (SEATL) pada gabungan graf *firecracker* $mF_{n,k}$ jika m dan n ganjil, $m \geq 2$, $n \geq 2$, dan $k \geq 3$ adalah $\alpha_1(x_{i,l}^j)$ yang disebutkan pada persamaan 4.1 $\alpha_1(x_{i,l}^j, x_{i,0}^j)$ yang disebutkan pada persamaan 4.2, dan $\alpha_1(x_{i,l}^j, x_{i+1,l}^j)$ yang disebutkan pada persamaan 4.3
 - Fungsi bijektif pelabelan total super $((k+1)mn + \frac{m+5}{2}, 2)$ -sisi antimagic pada gabungan graf *firecracker* $mF_{n,k}$ jika m dan n ganjil, $m \geq 2$, $n \geq 2$, dan $k \geq 3$ adalah $\alpha_2(x_{i,l}^j) = \alpha_2(x_{i,l}^j)$ yang disebutkan pada persamaan 4.1, $\alpha_2(x_{i,l}^j, x_{i,0}^j)$ yang disebutkan pada persamaan 4.4, dan $\alpha_2(x_{i,l}^j, x_{i+1,l}^j)$ yang disebutkan pada persamaan 4.5

- Fungsi bijektif pelabelan titik $(m + 2, 2)$ -sisi antimagic pada gabungan graf firecracker $mF_{n,k}$ jika $m \geq 2$ dan n genap ($n \geq 2$), dan $k \geq 3$ adalah $\alpha_3(x_{i,l}^j)$ yang disebutkan pada persamaan 4.6
- Fungsi bijektif pelabelan total super $(2mnk + 2, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf firecracker $mF_{n,k}$ jika n genap ($n \geq 2$), $m \geq 2$, dan $k \geq 3$ adalah $\alpha_3(x_{i,l}^j)$ yang disebutkan pada persamaan 4.6, $\alpha_3(x_{i,l}^j x_{i,0}^j)$ yang disebutkan pada persamaan 4.7, dan $\alpha_3(x_{i,l}^j x_{i+1,l}^j)$ yang disebutkan pada persamaan 4.8
- Fungsi bijektif pelabelan total super $(mnk + m + 3, 3)$ -sisi antimagic pada gabungan graf firecracker $mF_{n,k}$ jika n genap ($n \geq 2$), $m \geq 2$, dan $k \geq 3$ adalah $\alpha_4(x_{i,l}^j) = \alpha_3(x_{i,l}^j)$ yang disebutkan pada persamaan 4.6, $\alpha_4(x_{i,l}^j x_{i,0}^j)$ yang disebutkan pada persamaan 4.9, dan $\alpha_4(x_{i,l}^j x_{i+1,l}^j)$ yang disebutkan pada persamaan 4.10.

5.2 Saran

Penelitian telah dilakukan sehingga menemukan pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan graf *firecracker* beserta fungsi bijektifnya dengan syarat batas tertentu. Oleh karena itu peneliti dapat memberikan saran sebagai berikut:

1. pembaca dapat meneliti dan menemukan pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan graf *firecracker* $mF_{n,k}$ untuk $d = 0$ dan $d = 2$ dengan m, n genap, dan $k \geq 3$;
2. pembaca dapat meneliti dan menemukan pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan graf *firecracker* $mF_{n,k}$ untuk $d = 1$ dan $d = 3$ dengan $m \geq 2, n$ ganjil, dan $k \geq 3$;
3. pembaca dapat meneliti dan menemukan pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan graf-graf khusus yang lain; dan
4. pembaca dapat meneliti dan mempelajari hasil penelitian ini untuk dapat diaplikasikan dalam beberapa bidang ilmu, khususnya yang berkaitan dengan aplikasi pelabelan graf

DAFTAR ISTILAH

B

Banana Tree adalah suatu graf yang diperoleh dengan menghubungkan tepat satu daun (titik yang berderajat 1) dari n copy graf bintang ke suatu titik tunggal yang disebut akar.

Biimplikatif adalah suatu sifat pembuktian suatu lemma atau teorema yang berlaku dua arah (bolak-balik).

Bijektif adalah suatu jenis himpunan yang bersifat satu-satu dan onto.

C

Caterpillar adalah graf pohon yang terdiri dari n titik dengan sifat apabila semua titik berderajat satu dihapus maka dihasilkan graf lintasan.

D

Deduktif adalah suatu metode pembuktian lemma atau teorema dari hal-hal yang umum hingga hal-hal yang khusus (hingga menggunakan contoh-contoh sederhana).

Degree adalah derajat suatu graf atau banyaknya sisi yang menempel pada suatu titik pada graf.

Deskriptif Aksiomatik adalah suatu metode penelitian dengan cara menurunkan aksioma atau teorema yang telah ada.

E

EAVL (Edge Antimagic Vertex Labeling) adalah pelabelan titik sisi antimagic.

Edge adalah sisi pada graf.

Existence but not Unique adalah suatu sifat keberadaan pelabelan tetapi tidak tunggal (masih ada pelabelan lain dengan pola yang berbeda).

F

Firecracker adalah graf yang diperoleh dari penggabungan graf-graf bintang dengan tepat satu daun masing-masing graf tersebut dihubungkan.

G

Gabungan Diskonektif Graf adalah gabungan saling lepas suatu graf.

N

Network Topology adalah studi mengenai pengaturan atau pemetaan dari elemen-elemen (pranala, simpul, dan sebagainya) sebuah jaringan.

O

Open Problem adalah masalah terbuka atau suatu masalah hasil dari penelitian yang belum terpecahkan oleh peneliti.

P

Pattern Recognition adalah metode pendeteksian pola pada pelabelan graf.

S

SEATL (*Super Edge Antimagic Total Labeling*) adalah pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic.

Star adalah graf pohon yang terdiri dari 1 titik yang berderajat $n - 1$ dan $n - 1$ titik yang berderajat 1.

Substitusi adalah suatu metode penyelesaian persamaan dengan cara mengganti variabel dengan suatu nilai/bilangan tertentu yang memenuhinya.

T

Tree adalah Graf pohon atau graf terhubung dengan n titik dan tidak memuat graf lingkaran.

Tree Degenerate adalah graf pohon yang terdiri dari simpul tunggal dan tidak mempunyai sisi.

V

Vertex adalah titik atau simpul pada graf.

W

Weighted Graph adalah graf yang setiap sisinya diberi label atau bobot.

DAFTAR PUSTAKA

- Albert. 2008. *Aplikasi Graf dalam Jaringan Komputer* [serial on line]. <http://www.informatika.org/rinaldi/Matdis/2007-2008/Makalah/MakalahIF-2153-0708-046.pdf>. [15 Juni 2009].
- Dafik. 2007. *Structural Properties and Labeling of Graph*. Tidak dipublikasikan (Tesis). Australia: School of Information Technology and Mathematical Sciences University of Ballarat.
- Fuad, M. 2009. *Pelabelan Total Super (a,d)-Sisi Antimagic pada Gabungan Graf Triangular Ladder*. Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.
- Izzati, Nur. 2007. *Pelabelan Total Sisi ajaib pada Graf Bintang yang Diperumum*. Tidak dipublikasikan (Tesis). Bandung: Institut Teknologi Bandung.
- Gallian, J. 2009. *A Dynamic Survey of Graph Labelling*. Minnesota : University of Minnesota Duluth.
- Munir, R. 2003. *Matematika Diskrit: Buku teks ilmu komputer*. Bandung: Informatika Bandung.
- Seputro, H. 2008. *Graf dalam Berbagai Bidang Ilmu*[serial on line]. <http://www.informatika.org/rinaldi/Matdis/2007-2008/Makalah/MakalahIF-2153-0708-067.pdf>. [15 Juni 2009].
- Silaban, Pantur. 1990. *Teori Himpunan*. Jakarta: Erlangga.
- Sugeng, K.A. 2008. *Magic and Antimagic Labeling of Graph*. Tidak dipublikasikan (Tesis). Australia: School of Information Technology and Mathematical Sciences University of Ballarat.

Tando, Marselina. 2007. *Aplikasi Teori Graf dalam Topologi Jaringan* [serial on line].<http://www.informatika.org/rinaldi/Matdis/2007-2008/Makalah/MakalahIF2153-0708-100.pdf>. [15 Juni 2009].

Universitas Jember. 2006. *Pedoman Penulisan Karya Ilmiah*. Jember: Badan Penerbit Universitas Jember.

