



**DIMENSI METRIK SISI HASIL OPERASI AMALGAMASI
TITIK PADA KELUARGA GRAF POHON**

SKRIPSI

Oleh

Hilman Hanif Probo Purnomo

NIM 180210101131

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MIPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER**

2022



**DIMENSI METRIK SISI HASIL OPERASI AMALGAMASI
TITIK PADA KELUARGA GRAF POHON**

SKRIPSI

Oleh

Hilman Hanif Probo Purnomo

NIM 180210101131

Dosen Pembimbing 1 : Dr.Arika Indah Kristiana, S.Si., M.Pd.

Dosen Pembimbing 2 : Arif Fatahillah, S.Pd., M.Si.

Dosen Penguji 1 : Susi Setiawani, S.Si., M.Sc.

Dosen Penguji 2 : Ermita Rizki Albirri, S.Pd., M.Si.

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

JURUSAN PENDIDIKAN MIPA

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS JEMBER

2022

PERSEMBAHAN

Dengan menyebut Nama Allah SWT Yang Maha Pengasih dan Maha Penyayang, segala Puji bagi Allah SWT atas segala nikmat serta hidayah-Nya. Sholawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada junjungan Nabi Muhammad SAW. Dengan rasa syukur dan rasa terima kasih, skripsi ini dengan judul "Dimensi Metrik Sisi Hasil Operasi Amalgamasi Titik Pada Keluarga Graf Pohon" saya persembahkan kepada:

1. Orang tua saya tercinta, Bapak Putut Hidayat dan Ibu Rini Setyowati yang selalu memberikan doa, kasih sayang, dan motivasi, sehingga saya dapat dapat menyelesaikan tugas akhir ini pada waktunya. Semoga Allah SWT senantiasa memberikan ridho, perlindungan, serta keselamatan dunia dan akhirat;
2. Seluruh keluarga besar dan kerabat saya yang senantiasa memberikan dukungan dan mendoakan segala hal yang terbaik;
3. Bapak dan Ibu dosen Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember yang telah membimbing dan berbagi ilmu selama perkuliahan hingga terselesaikannya skripsi ini;
4. Keluarga besar Remaja Masjid Agung At-Taqwa Bondowoso, para Masyaikh, para Kyai yang selalu menyalurkan doa dan memberikan nasihat untuk menuntut ilmu;
5. Deddy Setyawan, Ahmad Aji, Firman, Sufirman, Aldi Maulana, Tri Ajeng K, Ayustika Raudatul J, Dewi Yunita, keluarga Mathematics Students Club (MSC), dan rekan CARTESIAN angkatan 18 Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember yang selalu berbagi ilmu dan pengalaman yang mengesankan di setiap waktunya;
6. Teman-teman pejuang graf dan pecinta graf yang telah memberikan saran, berbagi ilmu, dan pengalaman dalam mengkaji topik graf;
7. Almamater Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember, SMAN 2 Bondowoso, SMPN 1 Bondowoso, SDN Kotakulon 01, dan TK Aisyiyah Bondowoso yang telah memberikan ilmu serta pelajaran hidup yang bermanfaat.

HALAMAN MOTTO

وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ وَاللَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ

"Allah akan mengangkat derajat orang-orang yang beriman dan orang-orang yang berilmu di antara kamu sekalian."

(QS. Al-Mujadalah:11)

"Salah satu pengkerdilan terkejam dalam hidup adalah membiarkan pikiran yang cemerlang menjadi budak bagi tubuh yang malas, yang mendahulukan istirahat sebelum lelah."

(Buya Hamka)

"Jika nasib adalah titik, dan usaha adalah sisi, maka hidup adalah sebuah graf. Tantangan kita adalah bagaimana merangkai titik dan sisi tersebut agar tercipta sebuah graf yang keindahannya dapat dinikmati bersama."

(Slamin)

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Hilman Hanif Probo Purnomo

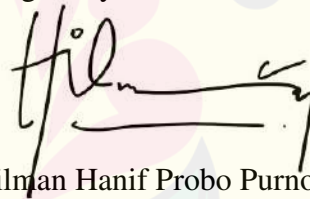
NIM : 180210101131

menyatakan dengan bersungguh-sungguh bahwa skripsi yang berjudul "Dimensi Metrik Sisi Hasil Operasi Amalgamasi Titik Pada Keluarga Graf Pohon" adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi mana pun, dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak mana pun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Bondowoso, 15 Juni 2022

Yang menyatakan,



Hilman Hanif Probo Purnomo

NIM. 180210101131

HALAMAN PEMBIMBINGAN

SKRIPSI

**DIMENSI METRIK SISI HASIL OPERASI AMALGAMASI TITIK
PADA KELUARGA GRAF POHON**

Oleh

Hilman Hanif Probo Purnomo

NIM. 180210101131

Pembimbing

Dosen Pembimbing 1 : Dr. Arika Indah Kristiana, S.Si., M.Pd.

Dosen Pembimbing 2 : Arif Fatahillah, S.Pd., M.Si.

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

JURUSAN PENDIDIKAN MIPA

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS JEMBER

2022

HALAMAN PENGAJUAN

**DIMENSI METRIK SISI HASIL OPERASI AMALGAMASI TITIK
PADA KELUARGA GRAF POHON**

Diajukan guna dipertahankan di depan Tim Penguji sebagai salah satu persyaratan untuk menyelesaikan Program Pendidikan Sarjana Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam dengan Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember

Oleh:

Nama : Hilman Hanif Probo Purnomo
NIM : 180210101131
Tempat, Tanggal Lahir : Bondowoso, 9 Juni 1999
Jurusan/Program Studi : Pendidikan MIPA/Pendidikan Matematika

Disetujui Oleh :

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Dr. Arika Indah Kristiana, S.Si., M.Pd.
NIP. 197605022006042001

Arif Fatahillah, S.Pd., M.Si.
NIP. 198205292009121003

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi berjudul : **"Dimensi Metrik Sisi Hasil Operasi Amalgamasi Titik Pada Keluarga Graf Pohon"** karya Hilman Hanif Probo Purnomo telah diuji dan disahkan pada:

Hari : Rabu

Tanggal : 15 Juni 2022

Fasilitas : Link Aplikasi Zoom Meeting

Tim Penguji :

Ketua,

Sekretaris,

Dr.Arika Indah Kristiana, S.Si., M.Pd.
NIP. 197605022006042001

Arif Fatahillah, S.Pd., M.Si.
NIP. 198205292009121003

Anggota I,

Anggota II,



Susi Setiawani, S.Si., M.Sc.
NIP. 197003071995122001



Ermita Rizki Albirri, S.Pd., M.Si.
NRP. 760017209

Mengetahui,
Dekan Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan
Universitas Jember

Prof. Dr. Bambang Soepeno, M.Pd.
NIP. 19600612 198702 1 001

RINGKASAN

Dimensi Metrik Sisi Hasil Operasi Amalgamasi Titik Pada Keluarga Graf

Pohon: Hilman Hanif Probo Purnomo, 180210101131; 2022 ; 74 halaman; Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Dimensi metrik sisi merupakan salah satu topik dalam graf. Dimensi metrik sisi adalah kardinalitas minimum dari himpunan titik pembeda (*resolving set*) pada graf G yang dinotasikan dengan $edim(G)$. Konsep awal dimensi metrik sisi adalah memilih *resolving set* pada graf G dengan kardinalitas seminimum mungkin untuk menghasilkan representasi jarak setiap sisi yang berbeda terhadap *resolving set*. Dimisalkan terdapat himpunan titik $W \in V(G) = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_k\}$, sehingga hasil representasi jarak sisi $e \in E(G)$ terhadap W dapat ditulis dengan $r(e | W) = (d(e, w_1), d(e, w_2), \dots, d(e, w_k))$. W dikatakan *resolving set* jika dan hanya jika hasil representasi jarak lintasan terpendek setiap sisi pada graf G berbeda terhadap W , yang dapat ditulis $r(e_1|W) \neq r(e_2|W) \neq r(e_3|W) \neq \dots \neq r(e_n|W)$. Topik dimensi metrik sisi sebagian besar membahas jarak dari setiap sisi pada graf G menuju himpunan *resolving set*. Jarak tempuh dari sisi graf G menuju *resolving set* harus memilih jarak tempuh terpendek. Sehingga akan menghasilkan representasi jarak sisi yang minimum terhadap *resolving set*.

Tujuan penelitian ini adalah mencari dimensi metrik sisi hasil operasi amalgamasi titik pada keluarga graf pohon. Keluarga graf pohon adalah graf tak berarah, terhubung, dan tidak mengandung sirkuit. Graf pohon yang digunakan dalam penelitian ini adalah hasil operasi amalgamasi titik graf bintang $amal(S_n, v, m)$, graf sapu $amal(B_d^n, v, m)$, graf lintasan $amal(P_n, v, m)$, dan graf pohon pisang $amal(Bt_{m,n}, v, k)$. Amalgamasi titik merupakan salah satu operasi dalam teori graf yang tujuannya adalah menggabungkan dua buah graf atau lebih, sehingga mendapatkan bentuk susunan graf baru. Operasi amalgamasi titik mendapatkan bentuk graf baru dengan cara meng-*copy* satu graf menjadi beberapa *copy*-an graf kemudian menggabungkannya dengan memilih satu titik untuk dijadikan titik tetap (titik terminal).

Jenis penelitian ini termasuk dalam penelitian eksploratif. Metode penelitian yang digunakan adalah metode pendeteksian pola (*pattern recognition*) dan metode deduktif aksiomatik. Metode pendeteksian pola digunakan untuk

menemukan pola dari himpunan titik pembeda (*resolving set*) dengan kardinalitas seminimum mungkin dan menemukan pola dari representasi sisi dari hasil operasi amalgamasi titik pada keluarga graf pohon. Metode deduktif aksiomatik adalah metode yang mengutamakan penggunaan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma, lemma, atau teorema yang dapat diterapkan dalam dimensi metrik sisi hasil operasi amalgamasi titik pada keluarga graf pohon.

Dari hasil penelitian yang dilakukan terhadap hasil operasi amalgamasi titik graf pohon, diperoleh empat Lemma dan empat Teorema. Berikut Lemma dan Teorema yang diperoleh :

Lemma 1. *Jika W adalah resolving set dari hasil operasi graf bintang $amal(S_n, v, m)$, maka $|W| = \sum_{i=1}^m (|U_i| - 1)$.*

Lemma 2. *Jika W adalah resolving set dari hasil operasi graf sapu $amal(B_d^n, v, m)$, maka $|W| = \sum_{i=1}^m (|U_i| - 1)$.*

Lemma 3. *Jika W adalah resolving set dari hasil operasi graf lintasan $amal(P_n, v, m)$, maka $|W| = (\sum_{i=1}^m |U_i|) - 1$.*

Lemma 4. *Jika W adalah resolving set dari hasil operasi graf pohon pisang $amal(Bt_{m,n}, v, k)$, maka $|W| = \sum_{i=1}^k (|U_i| - 2)$.*

Teorema 1. *Dimensi metrik sisi hasil operasi graf bintang $amal(S_n, v, m)$, dengan $n \geq 3, m \geq 2$ adalah $m(n - 2)$.*

Teorema 2. *Dimensi metrik sisi hasil operasi graf sapu $amal(B_d^n, v, m)$, dengan $n - d \geq 2, d = 4, m \geq 2$ adalah $m(n - d - 1)$.*

Teorema 3. *Dimensi metrik sisi hasil operasi graf lintasan $amal(P_n, v, m)$, dengan $n \geq 2, m \geq 2$ adalah $m - 1$.*

Teorema 4. *Dimensi metrik sisi hasil operasi graf pohon pisang $amal(Bt_{m,n}, v, k)$, dengan $m = 2, n \geq 3, k \geq 2$ adalah $2k(n - m)$.*

PRAKATA

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala rahmat, hidayah, serta karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Dimensi Metrik Sisi Hasil Operasi Amalgamasi Titik Pada Keluarga Graf Pohon". Skripsi ini disusun guna memenuhi salah satu syarat menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari doa, bimbingan, serta dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin menyampaikan rasa terima kasih kepada :

1. Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Pendidikan MIPA Universitas Jember;
3. Koordinator Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
4. Ketua Laboratorium Matematika Program Studi Pendidikan Matematika Jurusan Pendidikan MIPA FKIP Universitas Jember;
5. Ibu Dr. Arika Indah Kristiana, S.Si., M.Pd., dan Bapak Arif Fatahillah, S.Pd., M.Si., selaku dosen pembimbing yang senantiasa meluangkan waktunya membimbing saya dalam menyelesaikan skripsi ini;
6. Ibu Susi Setiawani, S.Si., M.Sc., dan Ibu Ermita Rizki Albirri, S.Pd., M.Si., selaku dosen penguji yang telah memberikan saran dan perbaikan dalam penulisan skripsi ini menjadi lebih baik;
7. Bapak Ridho Alfarisi, S.Pd., M.Si., yang telah meluangkan waktunya membantu dan memberikan saran dalam penyusunan skripsi ini;
8. Bapak dan Ibu Dosen serta Karyawan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
9. Semua pihak yang turut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini.

Semoga ibadah, bantuan, dan bimbingan beliau bermanfaat, barokah, dan dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT. Penulis juga menerima kritik dan saran yang membangun dari semua pihak demi perbaikan skripsi ini. Penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Bondowoso, 15 Juni 2022

Penulis

DAFTAR ISI

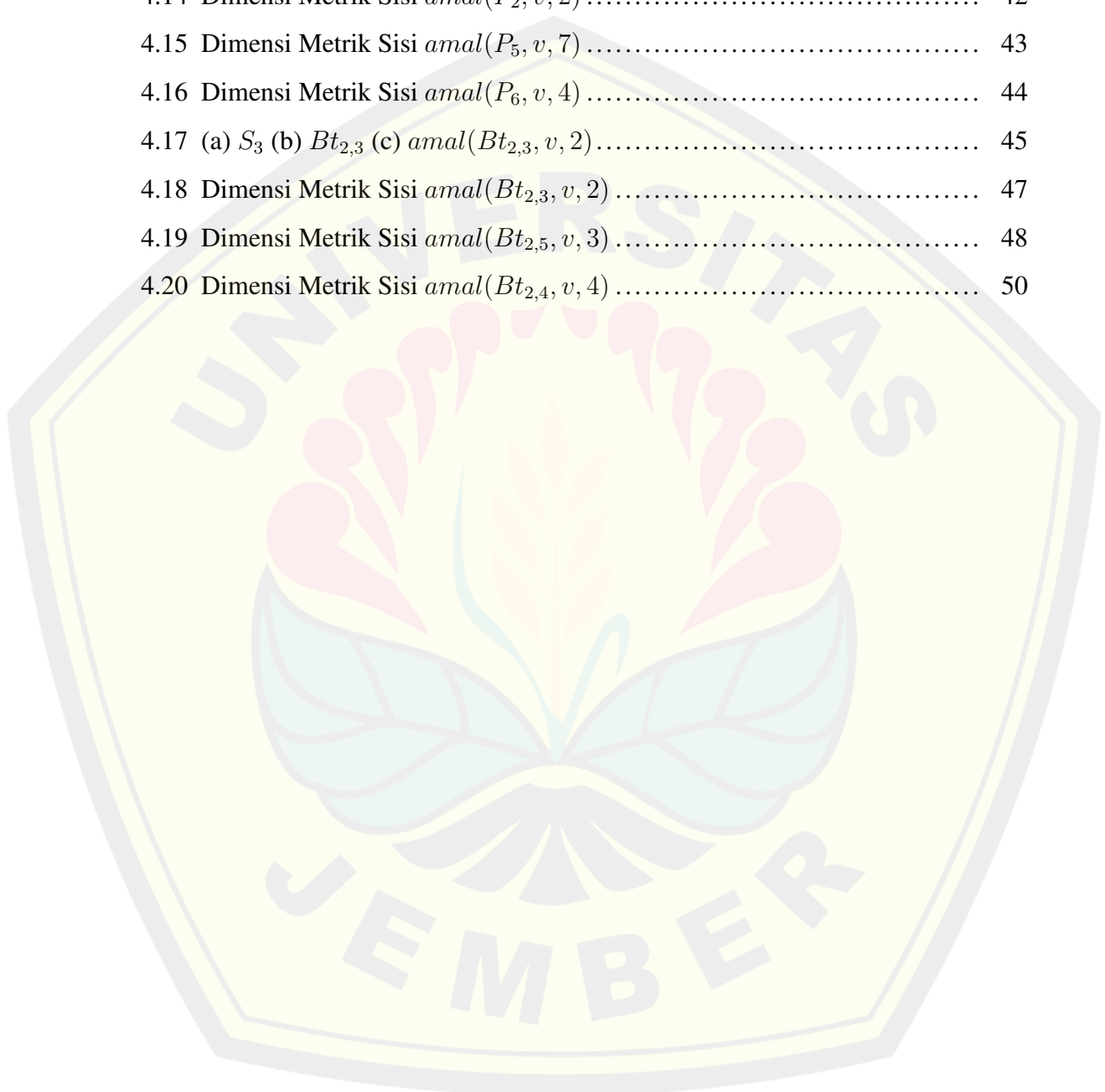
	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSEMBAHAN	ii
HALAMAN MOTTO	iii
HALAMAN PERNYATAAN	iv
HALAMAN PEMBIMBINGAN	v
HALAMAN PENGAJUAN	vi
HALAMAN PENGESAHAN	vii
RINGKASAN	viii
PRAKATA	x
DAFTAR ISI	xi
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR TABEL	xv
DAFTAR LAMBANG	xvi
BAB 1. PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah	4
1.4 Tujuan Penelitian	4
1.5 Manfaat Penelitian	4
1.6 Kebaruan Penelitian	5
BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA	6
2.1 Terminologi Dasar Graf	6
2.2 Keluarga Graf Pohon	7
2.3 Operasi Graf Amalgamasi Titik	10
2.4 Dimensi Metrik	14
2.5 Dimensi Metrik Sisi	15
2.6 Hasil Penelitian Sebelumnya	17

BAB 3. METODE PENELITIAN	19
3.1 Jenis Penelitian	19
3.2 Definisi Operasional	19
3.2.1 Dimensi Metrik Sisi	19
3.2.2 Graf Pohon	19
3.2.3 Operasi Amalgamasi titik	20
3.3 Metode Penelitian	22
3.4 Prosedur Penelitian	23
3.5 Observasi Awal Penelitian	24
BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN	28
4.1 Kardinalitas Graf	28
4.2 Hasil Penelitian Dimensi Metrik Sisi Hasil Operasi Amalgamasi Titik Pada Keluarga Graf Pohon	31
BAB 5. PENUTUP	52
5.1 Kesimpulan	52
5.2 Saran	53
DAFTAR PUSTAKA	54
LAMPIRAN	57

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
2.1 Contoh Graf G	6
2.2 Contoh Graf Bintang S_4	8
2.3 Contoh Graf Sapu B_4^7	9
2.4 Contoh Graf Lintasan P_6	9
2.5 Contoh Graf Pohon Pisang $Bt_{2,4}$	10
2.6 (a) Graf S_n (b) Graf $amal(S_n, v, m)$	11
2.7 (a) Graf B_d^n (b) Graf $amal(B_d^n, v, m)$	12
2.8 (a) Graf P_n (b) Graf $amal(P_n, v, m)$	13
2.9 (a) Graf $Bt_{m,n}$ (b) Graf $amal(Bt_{m,n}, v, k)$	14
2.10 Alur perkembangan dimensi metrik	15
2.11 Contoh Representasi Sisi Pada Graf Tangga L_5	16
3.1 (a) Graf S_n (b) Graf $amal(S_n, v, m)$	20
3.2 (a) Graf B_d^n (b) Graf $amal(B_d^n, v, m)$	21
3.3 (a) Graf P_n (b) Graf $amal(P_n, v, m)$	21
3.4 (a) Graf $Bt_{m,n}$ (b) Graf $amal(Bt_{m,n}, v, k)$	22
3.5 Alur Penelitian	24
3.6 Contoh Representasi isi pada graf $amal(P_4, v, 3)$	26
4.1 $amal(S_5, v, 3)$	29
4.2 $amal(B_4^8, v, 3)$	29
4.3 $amal(P_6, v, 4)$	30
4.4 $amal(Bt_{2,3}, v, 2)$	31
4.5 (a) S_4 (b) $amal(S_4, v, 4)$	31
4.6 Dimensi Metrik Sisi $amal(S_3, v, 2)$	33
4.7 Dimensi Metrik Sisi $amal(S_4, v, 5)$	34
4.8 Dimensi Metrik Sisi $amal(S_4, v, 6)$	35
4.9 (a) B_4^6 (b) $amal(B_4^6, v, 2)$	36

4.10	Dimensi Metrik Sisi $amal(B_4^6, v, 2)$	38
4.11	Dimensi Metrik Sisi $amal(B_4^9, v, 3)$	38
4.12	Dimensi Metrik Sisi $amal(B_4^7, v, 5)$	39
4.13	(a) P_3 (b) $amal(P_3, v, 4)$	41
4.14	Dimensi Metrik Sisi $amal(P_2, v, 2)$	42
4.15	Dimensi Metrik Sisi $amal(P_5, v, 7)$	43
4.16	Dimensi Metrik Sisi $amal(P_6, v, 4)$	44
4.17	(a) S_3 (b) $Bt_{2,3}$ (c) $amal(Bt_{2,3}, v, 2)$	45
4.18	Dimensi Metrik Sisi $amal(Bt_{2,3}, v, 2)$	47
4.19	Dimensi Metrik Sisi $amal(Bt_{2,5}, v, 3)$	48
4.20	Dimensi Metrik Sisi $amal(Bt_{2,4}, v, 4)$	50



DAFTAR TABEL

	Halaman
2.1 Hasil representasi sisi graf tangga L_5	17
2.2 Hasil Penelitian Dimensi Metrik Sisi	18
3.1 Kardinalitas Keluarga Graf Pohon Hasil Operasi Amalgamasi Titik	25
3.2 Representasi sisi graf $amal(P_4, v, 3)$	26
4.1 Representasi sisi graf $amal(S_n, v, m)$	32
4.2 Hasil representasi sisi graf $amal(S_3, v, 2)$	33
4.3 Hasil representasi sisi graf $amal(S_4, v, 5)$	34
4.4 Hasil representasi sisi graf $amal(S_4, v, 6)$	35
4.5 Representasi sisi graf $amal(B_d^n, v, m)$	37
4.6 Hasil representasi sisi graf $amal(B_4^6, v, 2)$	38
4.7 Hasil representasi sisi graf $amal(B_4^9, v, 3)$	39
4.8 Hasil representasi sisi graf $amal(B_4^7, v, 5)$	40
4.9 Representasi sisi graf $amal(P_n, v, m)$	42
4.10 Hasil representasi sisi graf $amal(P_2, v, 2)$	43
4.11 Hasil representasi sisi graf $amal(P_5, v, 7)$	44
4.12 Hasil representasi sisi graf $amal(P_6, v, 4)$	45
4.13 Representasi sisi graf $amal(Bt_{m,n}, v, k)$	46
4.14 Hasil representasi sisi graf $amal(Bt_{2,3}, v, 2)$	48
4.15 Hasil representasi sisi graf $amal(Bt_{2,5}, 3)$	48
4.16 Hasil representasi sisi graf $amal(Bt_{2,4}, 4)$	50

DAFTAR LAMBANG

G	=	Graf G
$G(V, E)$	=	Graf G yang tersusun atas titik dan sisi
$V(G)$	=	Himpunan titik pada graf G
$E(G)$	=	Himpunan sisi pada graf G
(u, v)	=	Sisi yang dihubungkan oleh titik u dan v
\in	=	Menyatakan elemen
v_n	=	Titik ke- n pada graf
e_n	=	Sisi ke- n pada graf
$ V(G) $	=	<i>order</i> atau banyaknya titik pada graf G
$ E(G) $	=	<i>size</i> atau banyaknya sisi pada graf G
$ U_i $	=	Banyaknya titik daun subgraf G di graf hasil $amal(G, v, m)$
$\sum_{i=1}^m$	=	Banyak salinan subgraf G di hasil $amal(G, v, m)$
$d(v)$	=	Derajat titik pada graf G
$d(e, v)$	=	Jarak sisi e ke titik v
$r(e W)$	=	Representasi sisi e terhadap himpunan titik pembeda W
$dim(G)$	=	Dimensi metrik graf G
$edim(G)$	=	Dimensi metrik sisi graf G
P_n	=	Graf lintasan sebanyak n titik
B_d^n	=	Graf Sapu sebanyak n titik dan d titik graf lintasan
S_n	=	Graf bintang sebanyak $n + 1$ titik
$Bt_{m,n}$	=	Graf pohon pisang sebanyak m salinan graf bintang S_n
$amal(G, v, n)$	=	Hasil operasi amalgamasi titik graf G
$amal(P_n, v, m)$	=	Hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan P_n
$amal(S_n, v, m)$	=	Hasil operasi amalgamasi titik graf bintang S_n
$amal(B_d^n, v, m)$	=	Hasil operasi amalgamasi titik graf sapu B_d^n
$amal(Bt_{m,n}, v, k)$	=	Hasil operasi amalgamasi titik graf pohon pisang ($Bt_{m,n}$)

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Sejarah munculnya teori graf berawal pada permasalahan jembatan Könisberg yang terletak di Kota Könisberg sekarang bernama kota Kaliningrad, Jerman pada tahun 1736. Pada kota tersebut terdapat sebuah sungai Pregal yang mengalir mengelilingi pulau Kneiphof. Terdapat tujuh buah jembatan menghubungkan daratan yang dipisahkan oleh sungai Pregal. Permasalahan dalam jembatan Könisberg adalah apakah mungkin melintasi semua jembatan tersebut tepat satu kali dan kembali lagi ke tempat semula? Pada tahun yang sama, seorang matematikawan Swiss bernama Leonhard Euler berhasil menemukan solusi dari permasalahan tersebut dengan cara memodelkannya ke dalam bentuk graf. Daratan diasumsikan sebagai titik (*vertex*) dan jembatan diasumsikan sebagai sisi (*edge*). Euler mengemukakan bahwa, tidak mungkin melintasi ketujuh buah jembatan tepat satu kali jika dan hanya jika derajat (*order*) dari tiap titik tidak sama dengan genap, artinya banyaknya jembatan yang menghubungkan tiap daratannya haruslah berjumlah genap. Derajat (*order*) merupakan banyaknya sisi yang bersisian dengan titik. Dari solusi permasalahan yang diberikan Euler, seiring berjalannya waktu graf semakin berkembang melalui topik yang banyak diteliti. Salah satu topik penelitian dalam graf adalah dimensi metrik sisi.

Dimensi metrik sisi merupakan pengembangan dari topik dimensi metrik. Pada dimensi metrik memfokuskan pembahasan pada jarak antar titik, namun pada dimensi metrik sisi pembahasan menjadi lebih kompleks (Adawiyah dkk., 2021). Dimensi metrik sisi dari graf G merupakan kardinalitas minimum dari himpunan pembeda sisi pada G (Adawiyah dkk., 2019). Konsep dari dimensi metrik sisi berawal dari pemilihan himpunan titik pembeda (*resolving set*) yang dipilih seminimum mungkin pada titik graf, sehingga setiap sisi pada graf G menghasilkan representasi jarak antar sisi yang berbeda terhadap *resolving set*. Jika dimisalkan W adalah himpunan terurut dari elemen *resolving set* pada graf G , maka W dapat dikatakan himpunan *resolving set* jika dan hanya jika hasil

representasi jarak setiap sisi berbeda terhadap *resolving set*, dan dikatakan sebagai dimensi metrik sisi jika dan hanya jika kardinalitas dari himpunan *resolving set* tersebut minimum (Kelenc dkk., 2016). Jadi dalam topik dimensi metrik sisi diharuskan memilih himpunan *resolving set* dengan kardinalitas seminimum mungkin dan representasi jarak setiap sisi pada graf G terhadap *resolving set* harus berbeda.

Terdapat beberapa penelitian sebelumnya mengenai topik dimensi metrik sisi diantaranya adalah Kelenc dkk (2016) yang meneliti identifikasi keunikan sisi graf dengan dimensi metrik sisi. Kemudian Nasir dkk (2018) meneliti tentang dimensi metrik sisi pada keluarga graf *n-sunlet* serta keluarga graf $(G_{n,k})$. Selanjutnya Adawiyah dkk (2019) yang meneliti tentang dimensi metrik sisi pada keluarga graf pohon. Kemudian ada Aprilianto dkk (2020) yang meneliti tentang dimensi metrik sisi pada keluarga graf *unicyclic*. Kemudian Adawiyah dkk (2021) yang meneliti tentang dimensi metrik sisi pada keluarga graf tangga.

Operasi graf merupakan sebuah cara untuk mendapatkan bentuk susunan graf baru. Graf yang dioperasikan berasal dari graf dasar kemudian dioperasikan dengan hasil *copy*-annya. Pada penelitian ini operasi graf yang digunakan adalah operasi amalgamasi titik. Graf hasil operasi amalgamasi titik diperoleh dengan cara menyalin n buah graf kemudian memilih satu titik tetap atau titik terminal pada setiap salinan n graf lalu ditempelkan menjadi satu titik pada titik tetap. Penelitian sebelumnya terkait hasil operasi amalgamasi titik adalah Fitriani dkk (2016) meneliti tentang bilangan koneksi pelangi dari hasil operasi amalgamasi pada beberapa graf yaitu graf komplit, graf roda, dan graf kipas. Kemudian Utomo dkk (2018) meneliti tentang dimensi metrik amalgamasi graf Komplit (nK_m) . Minarti dkk (2019) meneliti topik pewarnaan r -dinamis pada graf hasil operasi amalgamasi titik keluarga graf pohon dan kaitannya dengan keterampilan tingkat tinggi. Citra dkk (2021) meneliti bilangan kromatik pewarnaan packing hasil operasi amalgamasi titik pada keluarga graf pohon.

Graf pohon adalah graf tak berarah yang setiap titiknya terhubung dalam satu lintasan dan tidak memiliki sirkuit (Adawiyah dkk., 2019). Graf pohon telah digunakan oleh matematikawan Inggris Arthur Cayley pada tahun 1857. Arthur Cayley menggunakan graf pohon untuk menghitung jumlah senyawa kimia. Jadi graf pohon adalah sebuah graf tak berarah dan terhubung yang setiap pasang titiknya dihubungkan dengan sebuah lintasan, dan memiliki titik awal dan titik akhir yang berbeda.

Dari beberapa hasil penelitian sebelumnya, pada penelitian ini tertarik untuk mengkaji lebih lanjut penelitian topik dimensi metrik sisi pada hasil operasi amalgamasi titik keluarga graf pohon serta menggeneralisasikan pengetahuan baru topik dimensi metrik sisi. Latar belakang dipilihnya beberapa graf pohon dan dilakukan operasi amalgamasi titik adalah mengembangkan penelitian yang dilakukan Adawiyah dkk (2019) dengan melakukan operasi amalgamasi titik dari graf pohon yaitu graf lintasan, graf bintang, graf sapu dan graf pohon pisang, serta melanjutkan penelitian dimensi metrik sisi yang dilakukan oleh Aprilianto dkk (2020) dan Adawiyah dkk (2021). Keempat graf tersebut dipilih sebagai objek penelitian karena apabila dioperasikan dengan amalgamasi titik akan menghasilkan graf yang simetris dan tidak jauh berbeda dengan subgraf amalgamasinya. Dipilihnya operasi amalgamasi titik karena keempat graf pohon tersebut jika dioperasikan dengan amalgamasi titik, maka hasil operasinya identik dengan graf awalnya (sebelum dioperasikan), dan berdasarkan *literatur review*, topik dimensi metrik sisi pada keluarga graf pohon belum pernah diteliti sebelumnya menggunakan operasi amalgamasi titik. Berdasarkan latar belakang, penelitian ini berjudul **“Dimensi Metrik Sisi Hasil Operasi Amalgamasi Titik Keluarga Graf Pohon”**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang sudah dipaparkan, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah berapa dimensi metrik sisi hasil operasi amalgamasi titik pada keluarga graf pohon?

1.3 Batasan Masalah

Untuk menghindari meluasnya permasalahan yang akan diteliti, maka batasan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

- a. Amalgamasi graf bintang (S_n, v, m) dengan $n \geq 3, m \geq 2, v$ adalah salah satu titik daun berderajat satu;
- b. Amalgamasi graf sapu (B_d^n, v, m) dengan $n - d \geq 2, d = 4, m \geq 2, v$ adalah titik daun lintasan yang berderajat satu;
- c. Amalgamasi graf lintasan (P_n, v, m) dengan $n \geq 2, m \geq 2, v$ adalah salah satu titik ujung lintasan yang berderajat satu;
- d. Amalgamasi graf pohon pisang $(Bt_{m,n}, v, k)$, dengan $m = 2, n \geq 3, k \geq 2, v$ adalah titik pusat yang menghubungkan graf bintang di graf pohon pisang.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui dimensi metrik sisi hasil operasi amalgamasi titik pada keluarga graf pohon.

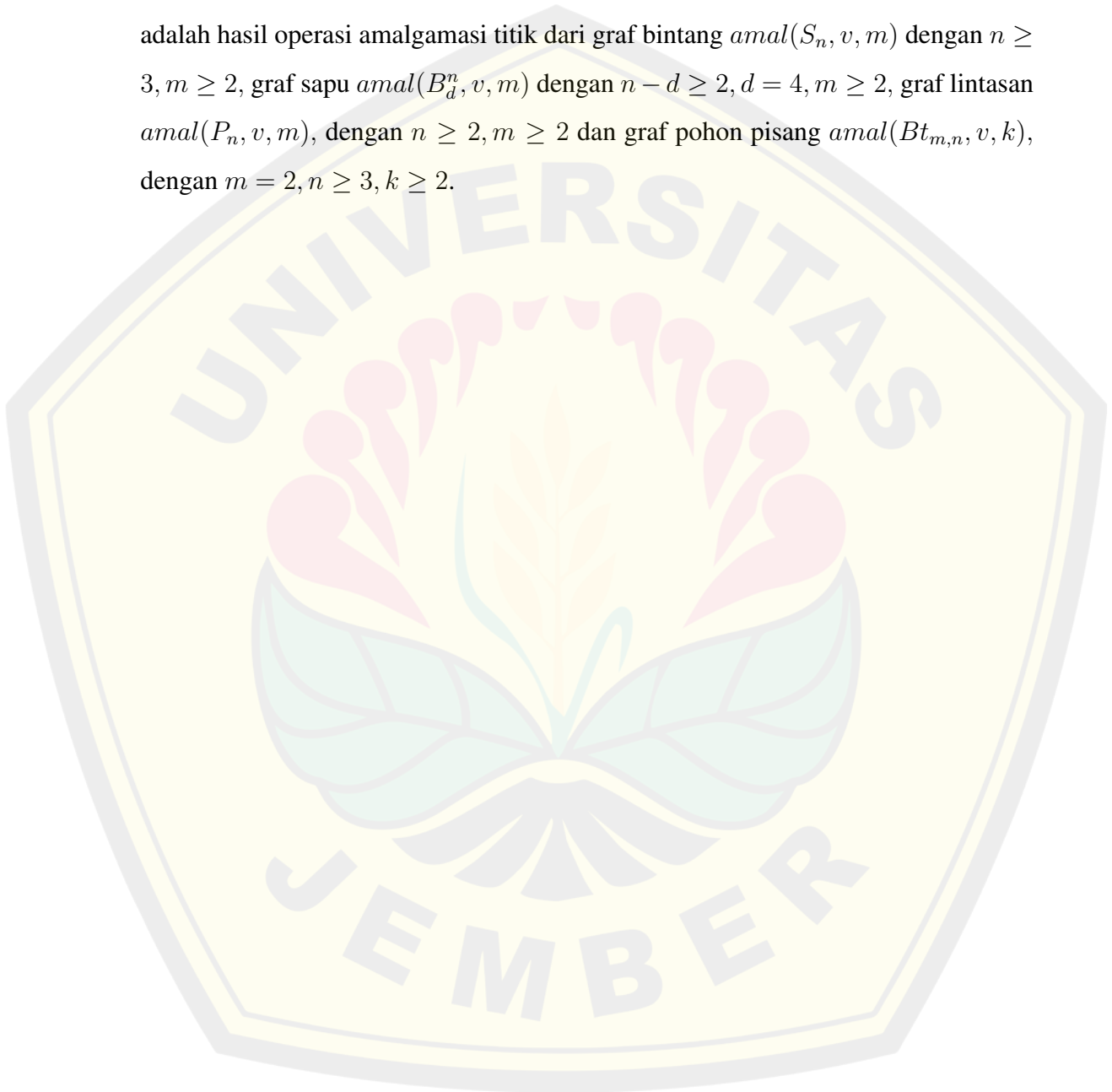
1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini antara lain:

- a. Menambah dan memberikan ilmu pengetahuan baru dalam teori graf khususnya topik dimensi metrik sisi bagi pembaca;
- b. Menumbuhkan semangat dan memberikan inspirasi bagi pembaca agar dapat mengembangkan penelitian dalam topik dimensi metrik sisi pada graf yang lain;
- c. Penelitian ini diharapkan dapat dimanfaatkan sebagai salah satu sumber rujukan dalam pengembangan topik dimensi metrik sisi pada graf yang belum diteliti.

1.6 Kebaruan Penelitian

Kebaruan dari penelitian ini adalah melanjutkan penelitian yang dilakukan oleh Adawiyah dkk (2021) mengenai dimensi metrik sisi dan mengembangkan penelitian yang dilakukan oleh Adawiyah dkk (2019). Pada penelitian ini meneliti graf yang berbeda dan belum pernah diteliti sebelumnya. Graf pohon yang diteliti adalah hasil operasi amalgamasi titik dari graf bintang $amal(S_n, v, m)$ dengan $n \geq 3, m \geq 2$, graf sapu $amal(B_d^n, v, m)$ dengan $n - d \geq 2, d = 4, m \geq 2$, graf lintasan $amal(P_n, v, m)$, dengan $n \geq 2, m \geq 2$ dan graf pohon pisang $amal(Bt_{m,n}, v, k)$, dengan $m = 2, n \geq 3, k \geq 2$.



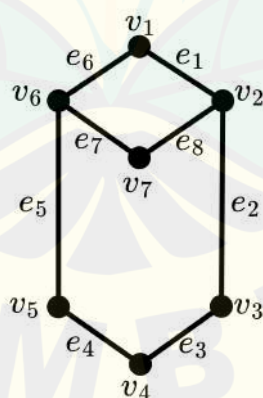
BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Terminologi Dasar Graf

Sebuah graf G adalah pasangan himpunan terurut dari $G(V, E)$ dengan $V(G)$ merupakan himpunan berhingga tak kosong dari elemen yang disebut titik (*vertex*), sedangkan $E(G)$ merupakan himpunan berhingga dan boleh kosong dari pasangan tak terurut antara dua titik u dan $v \in V(G)$ yang disebut sisi.

Definisi 2.1.1. Graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) , ditulis dengan notasi $G = (V, E)$, yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari titik-titik (*vertices*) dan E adalah himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang titik (Munir, 2010:356).

Himpunan titik pada graf G dinotasikan dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$, dan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ (Slamin, 2009). Suatu graf dimungkinkan tidak memiliki sisi, tetapi simpulnya harus ada minimal satu (Febrianti dkk., 2019). Graf yang hanya memiliki satu simpul tanpa sebuah sisi dinamakan graf *trivial* (Munir, 2010 : 356). Contoh dari sebuah graf G dapat dilihat pada Gambar 2.1



Gambar 2.1 Contoh Graf G

Pada Gambar 2.1 menunjukkan himpunan titik dari graf G adalah $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ dan himpunan sisinya adalah

$E(G) = \{(v_1v_2), (v_2v_3), (v_3v_4), (v_4v_5), (v_5v_6), (v_6v_1), (v_6v_7), (v_7v_2)\}$. Dalam sebuah graf terdapat istilah kardinalitas sisi dan kardinalitas titik. Kardinalitas titik dan sisi adalah banyaknya himpunan titik dan sisi pada graf G . Kardinalitas dari himpunan titik graf G disebut *order* dinotasikan dengan $|V(G)|$, sedangkan kardinalitas sisi sebuah graf G disebut *size* dinotasikan dengan $|E(G)|$ (Chartrand dkk., 1996:1). Pada Gambar 2.1 kardinalitas titiknya adalah $|V(G)| = 7$, dan kardinalitas sisi adalah $|E(G)| = 8$. Kemudian ada pula derajat suatu titik pada sebuah graf. Derajat (*degree*) titik graf adalah banyaknya titik yang bertetangga pada graf G dinotasikan dengan $d(V)$ (Munir, 2010:366). Sebuah titik yang memiliki derajat nol dinamakan titik terpencil (*isolated vertex*), artinya titik tersebut tidak memiliki sisi yang bersisian dan tidak memiliki titik yang bertetangga. Titik yang hanya memiliki derajat satu dinamakan titik daun (*pendant vertex*) (Rosen, 2019:652). Titik u dan v dikatakan bertetangga (*adjacent*) apabila terdapat sisi yang menghubungkan antara kedua titik tersebut (Balakrishnan & Ranganathan, 2012:3). Pada Gambar 2.1 titik v_4 bertetangga dengan titik v_3 dan v_5 , titik v_6 bertetangga dengan v_7, v_5 , dan v_1 . Sisi $e = (u, v)$ dikatakan bersisian (*incident*) dengan titik u dan v jika sisi e menghubungkan titik u dengan titik v (Munir, 2010:365). Pada Gambar 2.1 sisi e_1 bersisian dengan v_1 dan v_2 .

Suatu graf dikatakan graf terhubung (*connected graph*) jika untuk setiap pasang titik $u, v \in V(G)$ terdapat suatu lintasan menghubungkan titik u dan v (Febrianti dkk., 2019). Pada Gambar 2.1 merupakan graf terhubung (*connected graph*) karena setiap pasang titik terhubung oleh sisi. Kemudian pada graf juga terdapat jarak antar titik. Jarak (*radius*) adalah panjang lintasan terpendek yang menghubungkan titik u dan titik v dinotasikan dengan $d(u, v)$ (Bondy & Murty, 1976). Berdasarkan Gambar 2.1, jarak antara dua titik v_5 dan v_7 adalah 2 atau dapat ditulis dengan $d(v_5, v_7) = 2$.

2.2 Keluarga Graf Pohon

Graf pohon adalah graf sederhana, terhubung, dan tak berarah yang tidak mengandung sirkuit (Rosen, 2019:746). Jadi, graf pohon adalah setiap pasang

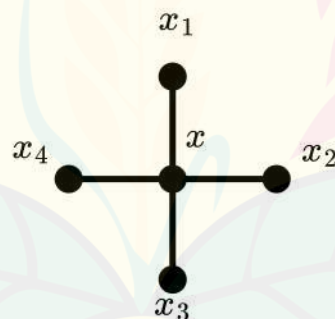
titiknya terhubung oleh satu buah lintasan dan tidak memiliki titik awal dan titik akhir yang sama.

Definisi 2.2.1. *Graf pohon adalah graf terhubung yang tidak memiliki sirkuit (Guichard, 2017:105)*

Graf pohon telah digunakan oleh matematikawan Arthur Cayley pada tahun 1857 untuk menghitung banyak jenis senyawa kimia. Beberapa contoh dari keluarga graf pohon adalah graf graf bintang (S_n), graf sapu (B_d^n), lintasan (P_n), dan pohon pisang ($Bt_{m,n}$). Penjelasan dari beberapa graf tersebut sebagai berikut.

a. Graf Bintang (S_n)

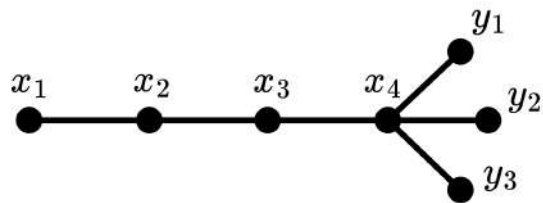
Graf bintang adalah graf pohon yang terdiri dari n daun yang dihubungkan pada satu titik pusat (Maowa, 2016:50). Jadi graf bintang terdiri dari $n + 1$ titik, dimana terdapat satu titik pusat berderajat n , dan n titik berderajat satu. Contoh dari graf bintang dapat dilihat pada Gambar 2.2.



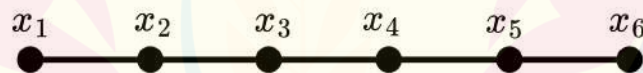
Gambar 2.2 Contoh Graf Bintang S_4

b. Graf Sapu (B_d^n)

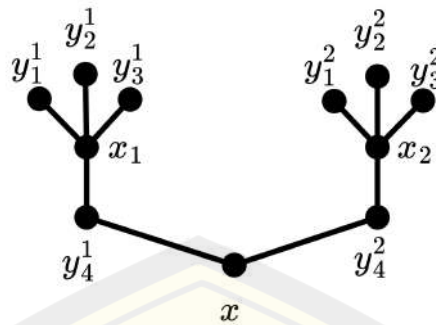
Graf sapu adalah graf yang memuat graf lintasan dengan d titik, bersama dengan $(n - d)$ daun yang semuanya bertetangga pada salah satu titik ujung graf lintasan. Graf sapu dinotasikan dengan B_d^n dengan $d \geq 3$ dan $n - d \geq 2$ (Sriram dkk., 2014). Contoh graf sapu B_d^n dapat dilihat pada Gambar 2.3.

Gambar 2.3 Contoh Graf Sapu B_4^7 c. Graf Lintasan (P_n)

Graf lintasan adalah graf pohon yang memiliki himpunan titik $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ dan himpunan sisi $\{v_i, v_{i+1}\}$ dimana $i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$ (Citra dkk., 2021). Ciri khas dari graf lintasan adalah minimal terdapat dua titik yang dihubungkan oleh satu lintasan sehingga memiliki derajat satu (titik daun). Namun jika terdapat titik yang lain, maka menjadi berderajat dua. Graf lintasan dinotasikan P_n , dengan *order* $n \geq 2$, dan *size* $n - 1$ (Maowa, 2016). Contoh graf lintasan P_n dapat dilihat pada Gambar 2.4.

Gambar 2.4 Contoh Graf Lintasan P_6 d. Graf Pohon Pisang ($Bt_{m,n}$)

Graf pohon pisang adalah graf yang menghubungkan n daun dari m salinan graf bintang pada satu titik cabang (Ajmal dkk, 2017). Jika pada graf bintang terdapat n daun, maka ketika graf bintang dibentuk menjadi graf pohon pisang akan terdapat $n - 1$ daun. Karena satu daun dijadikan penghubung dengan salinan graf bintang yang lain, sehingga terbentuk graf pohon pisang. Contoh dari graf pohon pisang dapat dilihat pada Gambar 2.5.

Gambar 2.5 Contoh Graf Pohon Pisang $Bt_{2,4}$

2.3 Operasi Graf Amalgamasi Titik

Operasi graf merupakan cara untuk mendapatkan susunan graf baru (Minarti dkk., 2019). Salah satu operasi dalam graf adalah operasi amalgamasi titik. Jika dimisalkan terdapat sebuah graf G dan graf H dengan masing-masing titik u dan titik v adalah titik tetap pada graf G dan H , maka hasil operasi amalgamasi titik graf G dan H adalah hasil penggabungan dari titik u dan titik v .

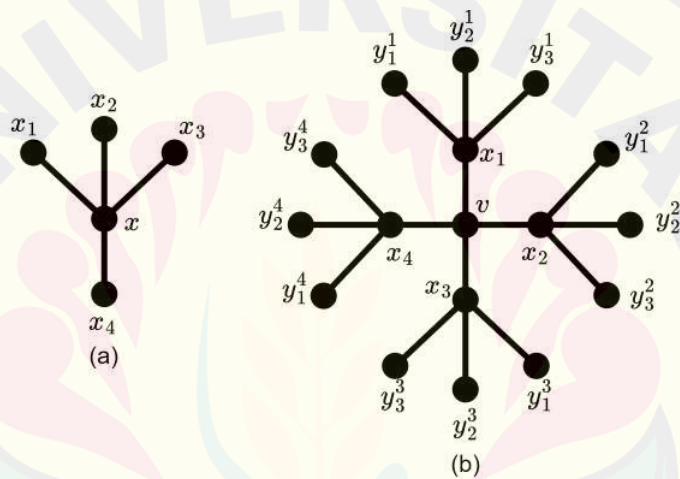
Definisi 2.3.1. Operasi amalgamasi titik dari banyaknya n copy graf G pada titik tetap $v \in V(G)$ dinotasikan dengan $amal(G, v, n)$, dengan $n \geq 2$ merupakan bilangan bulat (Figueroa-Centeno dkk., 2003).

Titik v disebut titik terminal (Fitriani & Salman, 2016). Titik terminal atau titik tetap adalah titik yang dipilih untuk dijadikan tempat melekatkan salinan graf sehingga mendapatkan susunan graf baru. Hasil operasi amalgamasi titik mendapatkan sebuah graf baru dengan cara menyalin satu graf menjadi sebanyak n graf, kemudian memilih satu titik sebagai titik tetap yang dilekatkan pada salah satu titik pada salinan graf yang lain. Berikut merupakan contoh graf pada penelitian ini yang dioperasikan amalgamasi titik.

- a. Amalgamasi titik graf bintang (S_n, v, m)

Definisi 2.3.2. Graf $amal(S_n, v, m)$ adalah hasil operasi amalgamasi titik graf bintang dengan $n \geq 3, m \geq 2$, dan v merupakan titik tetap yang dipilih dari salah satu titik daun berderajat satu.

Graf bintang S_n pada Gambar 2.6 dengan $n = 4$, dan hasil operasi $amal(S_n, v, m)$ dengan $n = 4, m = 4$. Graf $amal(S_n, v, m)$ dibentuk dengan membuat 4 salinan graf bintang S_4 . Pada graf asalnya S_4 , dipilih salah satu titik dari n daun yang berderajat satu untuk dijadikan titik tetap. Graf S_4 memiliki 4 titik daun, kemudian x_4 dijadikan titik tetap untuk diubah menjadi hasil operasi amalgamasi titik. Akibatnya x_4 disimbolkan menjadi v untuk memudahkan ketika melabeli titik hasil operasi amalgamasi titik graf bintang (Gambar 2.6 b). Oleh karena itu didapatkan nilai $m = 4$, yaitu banyaknya salinan graf bintang S_4 .



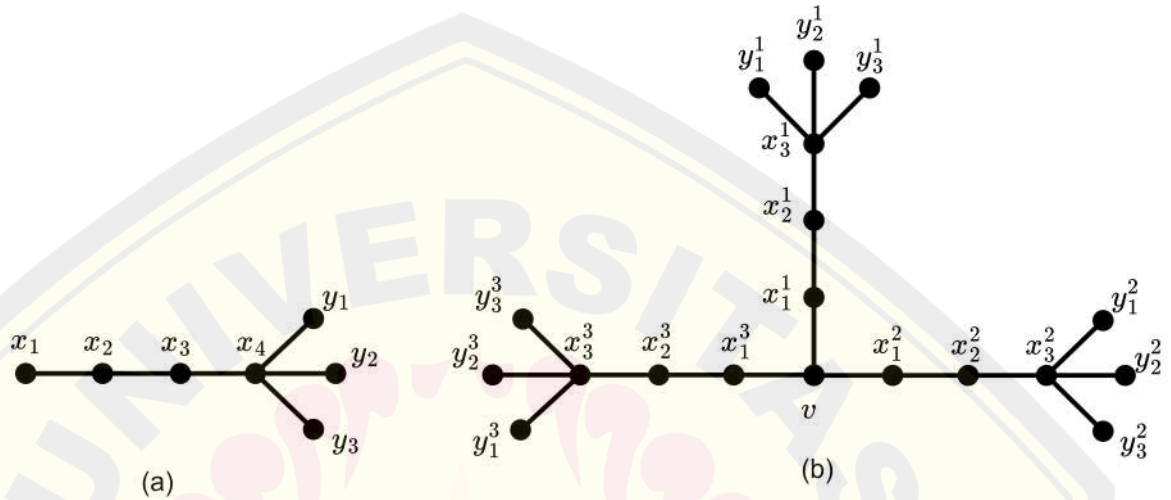
Gambar 2.6 (a) Graf S_n (b) Graf $amal(S_n, v, m)$

b. Amalgamasi titik graf sapu (B_d^n, v, m)

Definisi 2.3.3. Graf $amal(B_d^n, v, m)$ adalah hasil operasi amalgamasi titik graf sapu dengan $n - d \geq 2, d = 4, m \geq 2$ dan v merupakan titik tetap yang dipilih dari titik berderajat satu pada lintasan graf sapu.

Graf sapu B_d^n pada Gambar 2.7 dengan $n = 7, d = 4$ dan hasil operasi $amal(B_d^n, v, m)$, dengan $n = 7, d = 4, m = 3$. Graf $amal(B_d^n, v, m)$ dibentuk dengan membuat 3 salinan graf sapu B_4^7 . Pada graf asalnya B_4^7 , dipilih titik dari lintasan yang berderajat satu untuk dijadikan titik tetap. Graf sapu B_4^7 memiliki 3 daun, kemudian titik x_1 dijadikan titik tetap untuk diubah

menjadi hasil operasi amalgamasi titik. Akibatnya x_1 disimbolkan menjadi v untuk memudahkan ketika melabeli titik hasil operasi amalgamasi titik graf sapu (Gambar 2.7 b). Sehingga diperoleh nilai $m = 3$, yaitu banyaknya salinan graf sapu B_4^7 .

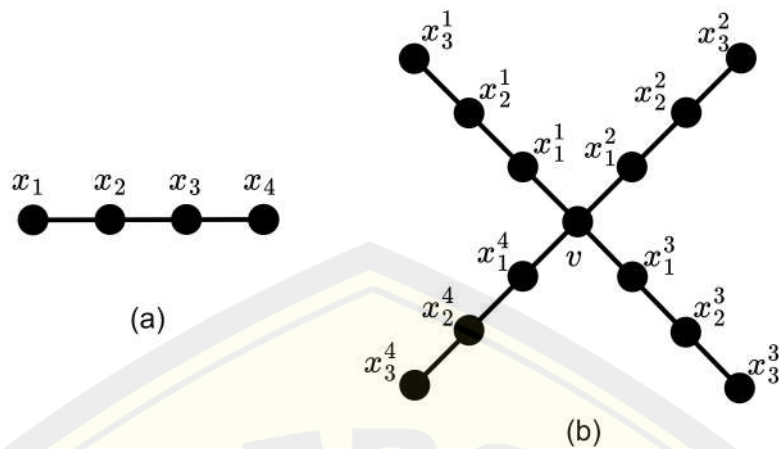


Gambar 2.7 (a) Graf B_d^n (b) Graf $amal(B_d^n, v, m)$

c. amalgamasi titik graf intasan (P_n, v, m)

Definisi 2.3.4. Graf $amal(P_n, v, m)$ adalah hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan dengan $n \geq 2, m \geq 2$, dan v merupakan titik tetap yang dipilih dari titik graf lintasan berderajat satu (titik daun).

Graf lintasan P_n pada Gambar 2.8 dengan $n = 4$, dan hasil operasi $amal(P_n, v, m)$ dengan $n = 4, m = 4$. Graf $amal(P_n, v, m)$ dibentuk dengan membuat 4 salinan graf lintasan P_4 . Pada graf asalnya P_4 , dipilih salah satu titik berderajat satu (titik daun) dari graf lintasan yang untuk dijadikan titik tetap atau titik terminal. Titik x_4 dipilih menjadi titik tetap untuk diubah menjadi hasil operasi amalgamasi titik. Akibatnya x_4 disimbolkan menjadi v untuk memudahkan ketika melabeli titik hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan (Gambar 2.8 b). Oleh karena itu didapatkan nilai $m = 4$, yaitu banyaknya salinan graf lintasan P_4 .

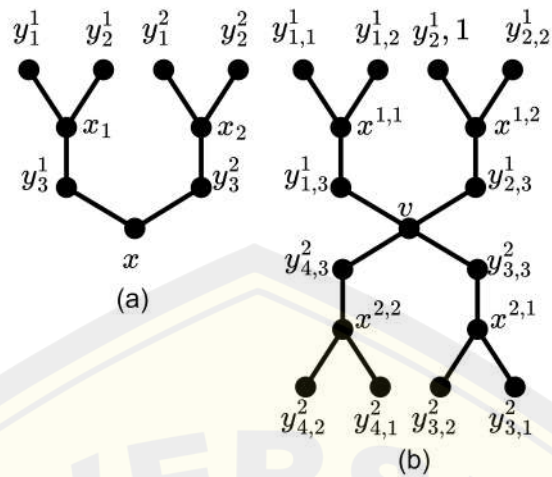


Gambar 2.8 (a) Graf P_n (b) Graf $amalg(P_n, v, m)$

d. Amalgamasi titik graf pohon pisang ($Bt_{m,n}, v, k$)

Definisi 2.3.5. Graf $amalg(Bt_{m,n}, v, k)$ adalah hasil operasi amalgamasi titik graf pohon pisang dengan $m = 2, n \geq 3, k \geq 2$, dan v merupakan titik tetap yang dipilih dari titik pusat yang menghubungkan graf bintang di graf pohon pisang.

Graf pohon pisang $Bt_{m,n}$ pada Gambar 2.9 dengan $m = 2, n = 3$ dan hasil operasi $amalg(Bt_{m,n}, v, k)$, dengan $m = 2, n = 3$ dan $k = 2$. Graf $amalg(Bt_{m,n}, v, k)$ dibentuk dengan membuat 2 salinan graf pohon pisang $Bt_{2,3}$. Pada graf asalnya $Bt_{2,3}$, dipilih titik pusat dari graf $Bt_{2,3}$ yang berderajat m untuk dijadikan titik tetap atau titik terminal. Graf pohon pisang $Bt_{2,3}$ memiliki 2 daun, kemudian titik x yang berderajat m dijadikan titik tetap untuk diubah menjadi hasil operasi amalgamasi titik. Akibatnya x disimbolkan menjadi v untuk memudahkan ketika melabeli titik hasil operasi amalgamasi titik graf pohon pisang (Gambar 2.9 b). Oleh karena itu didapatkan nilai $k = 2$ yaitu banyaknya salinan graf pohon pisang $Bt_{2,3}$.

Gambar 2.9 (a) Graf $Bt_{m,n}$ (b) Graf $amal(Bt_{m,n}, v, k)$

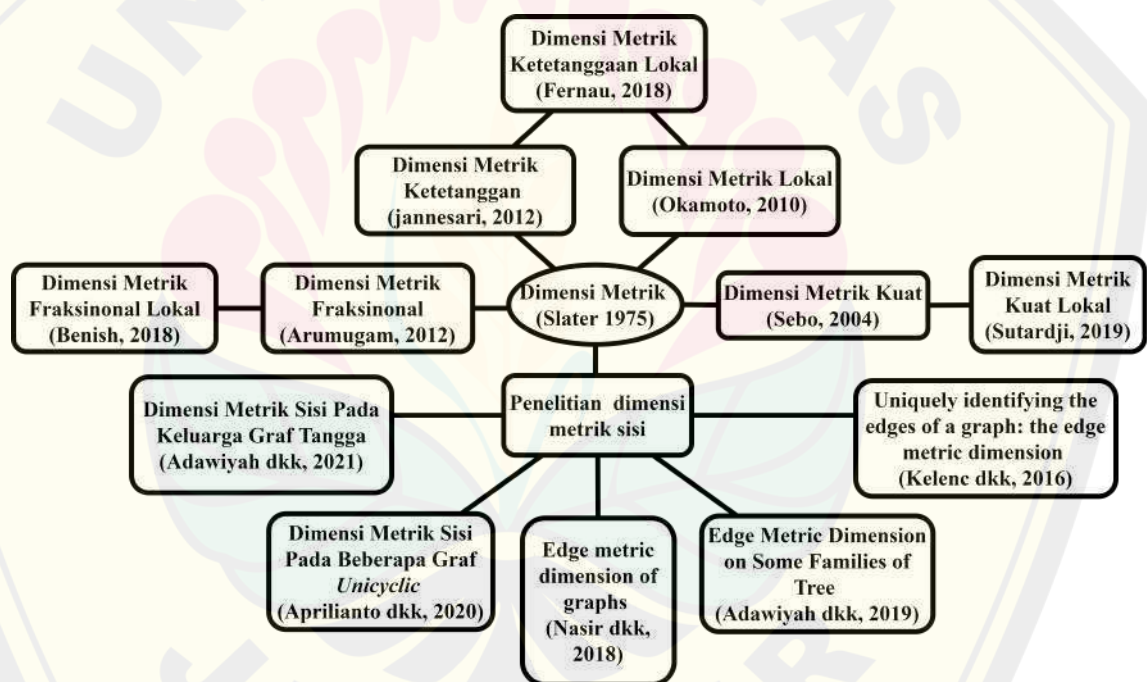
2.4 Dimensi Metrik

Dimensi metrik pertama kali diperkenalkan secara independen oleh Slater pada tahun 1975, yang menemukan himpunan titik pembeda atau disebut *locating set*. Pada tahun 1976 Harary dan Melter juga melakukan penelitian dimensi metrik, dimana himpunan titik pembeda disebut dengan *resolving set*.

Definisi 2.4.1. Dimensi metrik dinotasikan dengan $dim(G)$ adalah kardinalitas minimum dari himpunan titik pembeda G yang disebut *resolving set* dari G (Chartrand dkk., 2000).

Seiring berjalannya waktu banyak dilakukan penelitian dan pengembangan dari dimensi metrik, diantaranya adalah dimensi metrik kuat yang diteliti oleh Sebo (2004) dengan judul "On Metric Generators of Graphs". Okamoto dkk (2010) meneliti dimensi metrik lokal dengan judul "The Local Metric Dimension of A Graph". Jannesari dkk (2012) meneliti tentang ketetanggaan dimensi metrik dengan judul "The Metric Dimension of The Lexicographic Product of Graphs" dan Arumugam meneliti dimensi metrik fraksional dengan judul "The Fractional Metric Dimension of Graphs". Kelenc dkk (2016) melakukan penelitian dimensi metrik sisi dengan judul "Uniquely Identifying the Edges of a Graph: The Edge Metric Dimension". Fernau dkk (2018) meneliti tentang dimensi metrik

ketetangaan lokal yang merupakan pengembangan dari dimensi metrik lokal dan dimensi metrik ketetangaan dengan judul "On The (adjacency) Metric Dimension of Corona and Strong Product Graphs and Their Local Variants: Combinatorial and Computational Results". Benish dkk (2018) melakukan penelitian dimensi metrik fraksional lokal dengan judul "The Fractional Local Metric Dimension of Graphs", Aisyah dkk (2019) meneliti topik yang sama dengan judul "On The Local Fractional Metric Dimension of Corona Product Graphs" yang merupakan pengembangan dari topik dimensi metrik fraksional. Sutardji (2019) meneliti dimensi metrik kuat lokal yang berjudul "Dimensi Metrik Kuat Lokal Graf Hasil Operasi Kali Kartesian" yang merupakan pengembangan dari dimensi metrik kuat. Gambar 2.10 merupakan alur perkembangan dari dimensi metrik.



Gambar 2.10 Alur perkembangan dimensi metrik

2.5 Dimensi Metrik Sisi

Dimensi metrik sisi merupakan topik pengembangan dari dimensi metrik yang pertama kali dikenalkan oleh Slater pada tahun 1975 kemudian pada tahun 1976 oleh Harary dan Melter. Dimensi metrik sisi adalah salah satu topik dalam

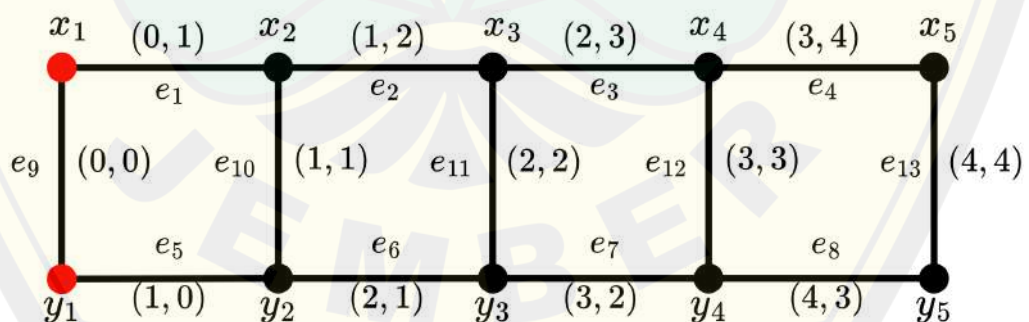
pembahasannya mengenai jarak dalam graf (Adawiyah & Rafiantika, 2021). Jarak yang dimaksud adalah lintasan terpendek untuk dilalui dari setiap sisi yang bertetangga pada graf G menuju titik pembeda (*resolving set*). Konsep awal dimensi metrik sisi adalah memilih *resolving set* seminimum mungkin pada graf G , sedemikian sehingga *resolving set* membedakan representasi jarak setiap sisi pada graf G .

Definisi 2.5.1. *Himpunan titik W di graf terhubung G dikatakan resolving set G jika setiap representasi sisi di G berbeda terhadap W (Adawiyah dkk.,2019).*

Dimisalkan terdapat himpunan dari elemen titik W pada graf G , dengan $W = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_k\}$, sehingga hasil representasi jarak sisi $e \in E(G)$ terhadap W dapat ditulis $r(e | W) = (d(e, w_1), d(e, w_2), \dots, d(e, w_k))$ (Kelenc dkk., 2016). W dikatakan *resolving set* jika dan hanya jika hasil representasi jarak lintasan terpendek setiap sisi yang bertetangga berbeda terhadap W , dapat ditulis $r(e_1|W) \neq r(e_2|W) \neq r(e_3|W) \neq \dots \neq r(e_n|W)$.

Definisi 2.5.2. *Dimensi metrik sisi adalah kardinalitas minimum dari resolving set pada G yang dinotasikan dengan $edim(G)$ (Kelenc dkk., 2016).*

Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada Gambar 2.11 contoh representasi sisi pada graf tangga L_5 .



Gambar 2.11 Contoh Representasi Sisi Pada Graf Tangga L_5

Contoh dimensi metrik sisi pada Gambar 2.11 dipilih *resolving set* adalah $W = \{x_1, y_1\}$, representasi untuk menghasilkan jarak yang berbeda di setiap sisi

graf L_5 . Pada Gambar 2.11 representasi sisi e_{13} dengan sisi yang bertetangga e_4 , e_8 dan sisi yang lain terhadap *resolving set* $\{x_1, y_1\}$ sudah berbeda. Lintasan yang dipilih e_{13} menuju titik pembeda x_1 adalah melalui sisi $\{e_4, e_3, e_2, e_1\}$ karena jarak lintasannya berjarak 4 satuan sisi. Jika e_{13} menuju titik pembeda x_1 melalui sisi $\{e_8, e_7, e_6, e_5, e_9\}$, maka jarak lintasannya berjarak 5 satuan sisi. Sehingga dipilih jalur lintasan terpendeknya adalah berjarak 4 satuan sisi. Untuk lebih jelasnya, hasil representasi jarak antar sisi terhadap W dapat dilihat pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1 Hasil representasi sisi graf tangga L_5

<i>edge</i>	$r(e W)$	<i>edge</i>	$r(e W)$
e_1	(0, 1)	e_8	(4, 3)
e_2	(1, 2)	e_9	(0, 0)
e_3	(2, 3)	e_{10}	(1, 1)
e_4	(3, 4)	e_{11}	(2, 2)
e_5	(1, 0)	e_{12}	(3, 3)
e_6	(2, 1)	e_{13}	(4, 4)
e_7	(3, 2)		

Dari hasil Tabel 2.1, hasil representasi sisi terhadap $W = \{x_1, y_1\}$ sudah berbeda. Sehingga W dapat dikatakan sebagai *resolving set* dimensi metrik sisi dari graf tangga L_5 dan $edim(L_5) = 2$

2.6 Hasil Penelitian Sebelumnya

Pada bagian ini akan diberikan beberapa hasil penelitian dimensi metrik sisi sebelumnya, sehingga dapat dijadikan sebagai sumber rujukan dalam penelitian ini. Hasil penelitian sebelumnya dapat dilihat pada Tabel 2.2.

Tabel 2.2 Hasil Penelitian Dimensi Metrik Sisi

Graf	$edim(G)$	Keterangan
$G = P_r \square P_t$	$edim(G) = 2$ dengan $r \geq t \geq 2$	Kelenc dkk., 2016
$W_{1,n}$	$edim(W_{1,n}) = \begin{cases} n, & n = 3, 4 \\ n - 1, & n \geq 5 \end{cases}$	Kelenc dkk., 2016
$F_{1,n}$	$edim(F_{1,n}) = \begin{cases} n, & n = 1, 2, 3 \\ n-1, & n \geq 4 \end{cases}$	Kelenc dkk., 2016
$Sun S_n$	$edim(S_n) = \begin{cases} 2, & n \text{ genap} \\ 3, & n \text{ ganjil} \end{cases}$	Nasir dkk., 2018
$G_{n,k}$	$edim(G_{n,k}) = \begin{cases} 2, & 1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \\ 3, & \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq k \leq n \end{cases}$	Nasir dkk., 2018
S_n	$edim(S_n) = n - 1, n \geq 4$	Adawiyah dkk., 2019
$B_{n,m}$	$edim(B_{n,m}) = m, n \geq 1, m \geq 2$	Adawiyah dkk., 2019
Bt_n	$edim(Bt_n) = 2n - 2, n \geq 2$	Adawiyah dkk., 2019
$T_{m,n}$	$edim(T_{m,n}) = 2, m \geq 3, n \geq 2$	Aprilianto dkk.,2020
$Cr_{m,n}$	$edim(Cr_{m,n}) = 3, m, n \geq 3$	Aprilianto dkk.,2020
L_n	$edim(L_n) = 2, n \geq 2$	Adawiyah dkk.,2021
SL_m	$edim(SL_m) = 2, m \geq 2$	Adawiyah dkk.,2021

Tabel 2.2 menunjukkan penelitian dimensi metrik sisi hasil operasi amalgamasi titik keluarga graf pohon belum pernah diteliti sebelumnya. Tabel 2.2 menunjukkan hasil penelitian Kelenc dkk (2016) meneliti identifikasi keunikan sisi graf dengan dimensi metrik sisi. Nasir dkk (2018) meneliti dimensi metrik sisi graf n -*sunslet* dan keluarga graf $G_{n,k}$. Adawiyah dkk (2019) meneliti tentang dimensi metrik sisi pada keluarga graf pohon, Aprilianto dkk (2020) meneliti tentang dimensi metrik sisi pada keluarga graf *unicyclic*. Adawiyah dkk (2021) meneliti tentang dimensi metrik sisi keluarga graf tangga. Penelitian ini mengembangkan penelitian yang telah dilakukan oleh Adawiyah dkk (2019) yaitu dengan cara mengoperasikan menggunakan amalgamasi titik pada keluarga graf pohon.

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan adalah penelitian eksploratif. Penelitian eksploratif adalah jenis penelitian dengan tujuan mencari dan menemukan hal-hal baru, mencari ide terbaru dari topik yang ingin diteliti kemudian hasilnya dapat digunakan untuk dasar penelitian selanjutnya.

3.2 Definisi Operasional

Definisi operasional digunakan untuk memberikan keterangan gambaran sistematis agar menghindari perbedaan pengertian makna. Berikut definisi operasional yang digunakan dalam penelitian ini :

3.2.1 Dimensi Metrik Sisi

Dimensi metrik sisi merupakan kardinalitas minimum dari himpunan titik pembeda (*resolving set*) pada graf terhubung G yang dinotasikan dengan $edim(G)$. Dimisalkan terdapat himpunan titik dari elemen W pada graf G , dengan $W = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_k\}$ dikatakan *resolving set* jika dan hanya jika hasil representasi jarak lintasan terpendek setiap sisi yang bertetangga pada graf G berbeda terhadap W yang dapat ditulis $r(e_1|W) \neq r(e_2|W) \neq r(e_3|W) \neq \dots \neq r(e_n|W)$. Kemudian, W dapat dikatakan dimensi metrik sisi pada G jika kardinalitas *resolving set* W sudah minimum.

3.2.2 Graf Pohon

Graf pohon adalah graf terhubung, sederhana, dan tidak berarah yang titik awal dan titik akhirnya berbeda. Sehingga graf pohon adalah graf yang tidak memiliki sirkuit. Yang dimaksud dengan sirkuit adalah jika titik awal dan titik akhirnya sama, maka akan membentuk lintasan tertutup (sirkuit). Graf pohon yang digunakan dalam penelitian ini adalah hasil operasi amalgamasi titik graf bintang

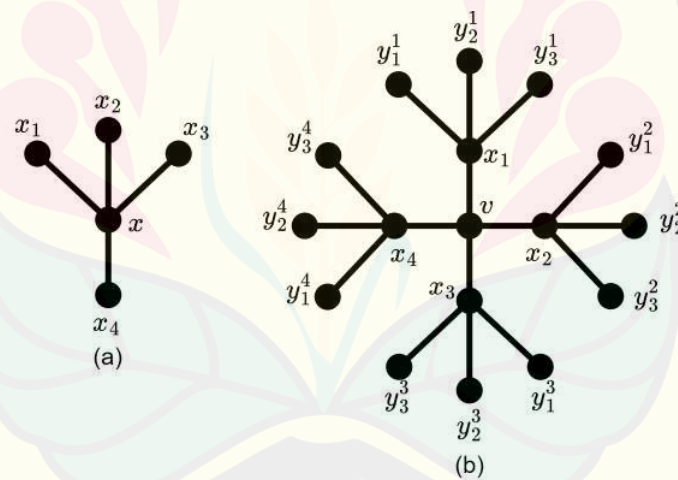
$amal(S_n, v, m)$, graf sapu $amal(B_d^n, v, m)$, graf lintasan $amal(P_n, v, m)$, dan graf pohon pisang $amal(Bt_{m,n}, v, k)$.

3.2.3 Operasi Amalgamasi titik

Operasi amalgamasi titik pada graf G dinotasikan dengan $amal(G, v, n)$. Setiap G memiliki sebuah titik v yang menjadi titik tetap dan n adalah banyaknya salinan (*copy*) dari graf G . Berikut adalah contoh hasil operasi amalgamasi titik graf yang diteliti.

a. Amalgamasi titik graf bintang (S_n, v, m)

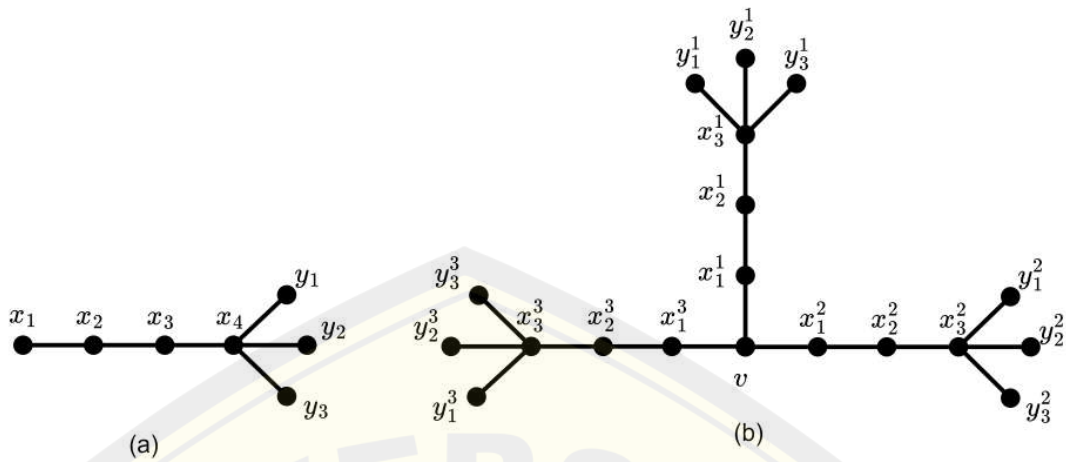
Graf bintang (S_n) yang dioperasikan dengan amalgamasi titik dinotasikan dengan $amal(S_n, v, m)$ dengan $n \geq 3, m \geq 2$ dan v merupakan salah satu titik daun yang berderajat satu. Hasil graf bintang (S_n) yang dioperasikan dapat dilihat pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 (a) Graf S_n (b) Graf $amal(S_n, v, m)$

b. Amalgamasi titik graf sapu (B_d^n, v, m)

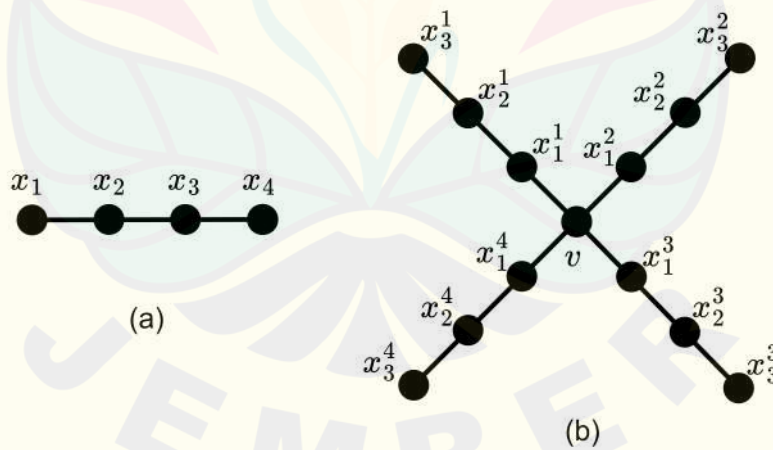
Graf sapu (B_d^n) yang dioperasikan dengan amalgamasi titik dinotasikan dengan $amal(B_d^n, v, m)$ dengan $n - d \geq 2, d = 4, m \geq 2$, dan v merupakan titik daun lintasan yang berderajat satu. Hasil graf sapu (B_d^n) yang dioperasikan dapat dilihat pada Gambar 3.2.



Gambar 3.2 (a) Graf B_d^n (b) Graf $amal(B_d^n, v, m)$

c. Amalgamasi titik graf lintasan (P_n, v, m)

Graf lintasan (P_n) yang dioperasikan dengan amalgamasi titik dinotasikan dengan $amal(P_n, v, m)$ dengan $n \geq 2, m \geq 2$, dan v merupakan salah satu titik ujung lintasan yang berderajat satu. Hasil graf lintasan (P_n) yang dioperasikan dapat dilihat pada Gambar 3.3.

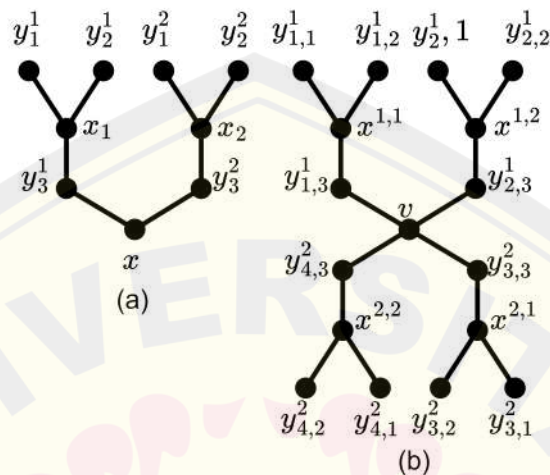


Gambar 3.3 (a) Graf P_n (b) Graf $amal(P_n, v, m)$

d. Amalgamasi titik graf pohon pisang ($Bt_{m,n}, v, k$)

Graf pohon pisang ($Bt_{m,n}$) yang dioperasikan dengan amalgamasi titik dinotasikan dengan $amal(Bt_{m,n}, v, k)$ dengan $m = 2, n \geq 3, k \geq 2$, dan v

merupakan titik pusat yang menghubungkan subgraf bintang di graf pohon pisang. Hasil graf pohon pisang ($Bt_{m,n}$) yang dioperasikan dapat dilihat pada Gambar 3.4.



Gambar 3.4 (a) Graf $Bt_{m,n}$ (b) Graf $amal(Bt_{m,n}, v, k)$

3.3 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deduktif aksiomatik dan metode pendeteksian pola. Penjelasan dari setiap metode sebagai berikut:

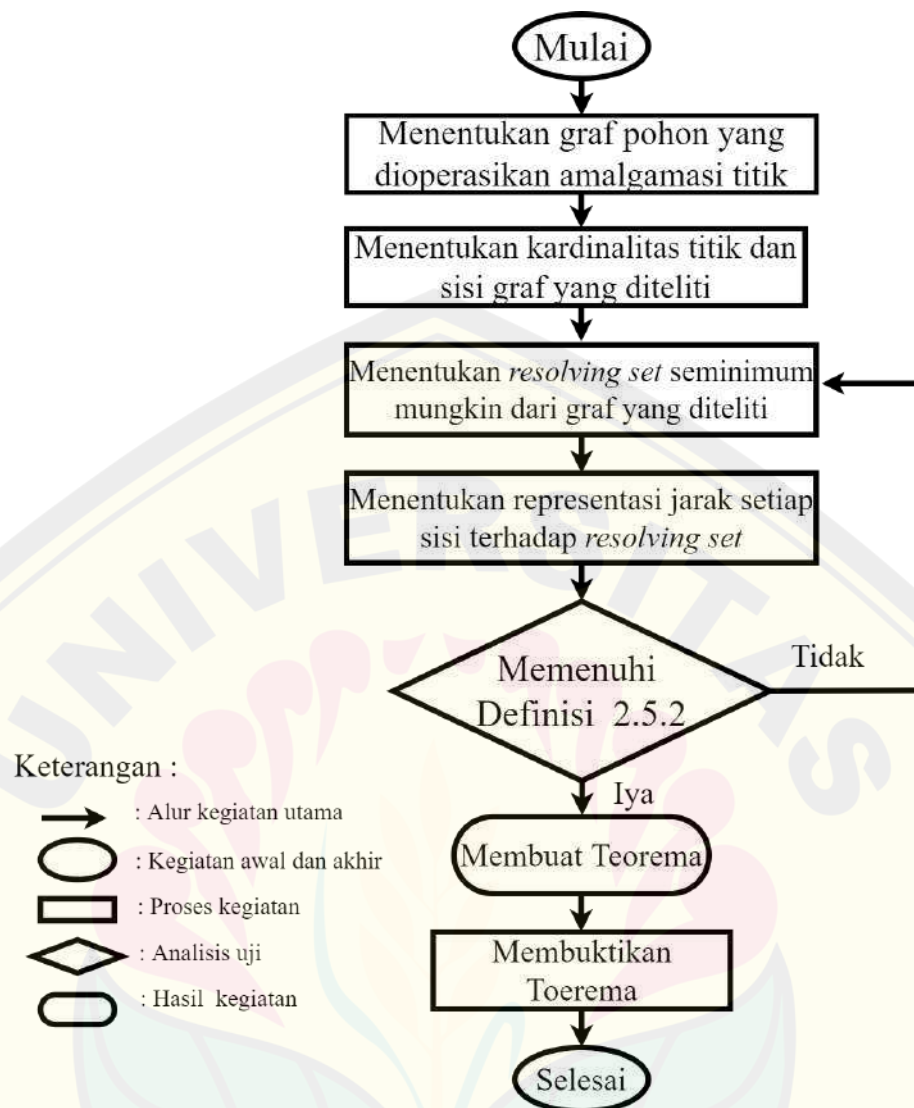
1. Metode deduktif aksiomatik merupakan sebuah metode penelitian yang mengedepankan penggunaan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma, teorema, ataupun lemma yang sudah ada guna mendapatkan solusi dari permasalahan dimensi metrik sisi hasil operasi amalgamasi titik pada keluarga graf pohon.
2. Metode pendeteksian pola (*pattern recognition*) merupakan metode untuk mencari, menemukan pola *resolving set* seminimum mungkin dan pola hasil representasi sisi hasil operasi amalgamasi titik keluarga graf pohon.

3.4 Prosedur Penelitian

Prosedur penelitian merupakan alur atau langkah yang direncanakan sebelum pelaksanaan penelitian untuk mendapatkan hasil yang sesuai dengan tujuan penelitian. Prosedur penelitian ini dilakukan untuk menentukan *resolving set* seminimum mungkin dari dimensi metrik sisi hasil operasi amalgamasi titik keluarga graf pohon. Alur prosedur penelitian adalah sebagai berikut :

1. Menentukan graf yang akan diteliti meliputi graf lintasan, graf bintang, graf sapu, dan graf pohon pisang kemudian dioperasikan dengan amalgamasi titik;
2. Menentukan kardinalitas titik dan kardinalitas sisi graf yang akan diteliti yaitu hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan, graf bintang, graf sapu, dan graf pohon pisang. Kardinalitas graf dibutuhkan untuk memberikan notasi dan nama yang digunakan dalam graf diteliti. Selain itu, kardinalitas juga dibutuhkan untuk mengetahui banyaknya titik dan sisi sehingga dapat membantu mengetahui banyaknya dimensi metrik sisi dari graf yang diteliti;
3. Menentukan *resolving set* pada hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan;
4. Menentukan representasi jarak setiap sisi terhadap *resolving set* pada amalgamasi titik graf lintasan;
5. Mengecek kembali representasi sisi terhadap *resolving set*. Jika terdapat representasi sisi yang sama, maka kembali ke tahap tiga. Namun, jika representasi setiap sisi sudah berbeda, maka penelitian dapat dilanjutkan ke tahap berikutnya;
6. Menentukan teorema dimensi metrik sisi amalgamasi titik graf lintasan;
7. Melakukan pembuktian teorema yang sudah didapatkan;
8. Mengulangi langkah ketiga hingga langkah ketujuh untuk amalgamasi titik graf bintang, graf sapu, dan graf pohon pisang.

Untuk lebih jelasnya, alur penelitian ini dapat dilihat pada Gambar 3.5



Gambar 3.5 Alur Penelitian

3.5 Observasi Awal Penelitian

Sebelum melakukan penelitian, terlebih dahulu melakukan observasi awal penelitian terhadap graf $amal(S_n, v, m)$, $amal(B_d^n, v, m)$, $amal(P_n, v, m)$, dan $amal(Bt_{m,n}, v, k)$. Pada Tabel 3.1 adalah observasi awal terhadap graf yang diteliti.

Tabel 3.1 Kardinalitas Keluarga Graf Pohon Hasil Operasi Amalgamasi Titik

Graf	Kardinalitas
Graf Bintang $amal(S_n, v, m)$	$V(G) = \{x_i, y_j^i \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n - 1\} \cup \{v\}$ $E(G) = \{vx_i, x_i y_j^i \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n - 1\}$ $ V(G) = m(n) + 1$ $ E(G) = m(n)$
Graf Sapu $amal(B_d^n, v, m)$	$V(G) = \{x_j^i, y_k^i \mid 1 \leq j \leq d - 1, 1 \leq k \leq n - d, 1 \leq i \leq m\} \cup \{v\}$ $E(G) = \{vx_1^i, x_j^i x_{j+1}^i, x_{d-1}^i y_k^i \mid 1 \leq j \leq d - 2, 1 \leq k \leq n - d, 1 \leq i \leq m\}$ $ V(G) = m(n - 1) + 1$ $ E(G) = m(n - 1)$
Graf Lintasan $amal(P_n, v, m)$	$V(G) = \{x_j^i \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n - 1\} \cup \{v\}$ $E(G) = \{vx_1^i, x_j^i x_{j+1}^i \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n - 2\}$ $ V(G) = m(n - 1) + 1$ $ E(G) = m(n - 1)$
Graf Pohon Pisang $amal(Bt_{m,n}, v, k)$	$V(G) = \{y_{j,q}^i \mid 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k \times m, 1 \leq q \leq n\} \cup \{x^{i,r} \mid 1 \leq i \leq k, 1 \leq r \leq m\} \cup \{v\}$ $E(G) = \{vy_{j,q}^i \mid 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k \times m, q = n\} \cup \{y_{j,q}^i x^{i,r} \mid 1 \leq i \leq k, 1 \leq r \leq m, 1 \leq j \leq k \times m, 1 \leq q \leq n\}$ $ V(G) = (m \times k(n + 1)) + 1$ $ E(G) = m \times k(n + 1)$

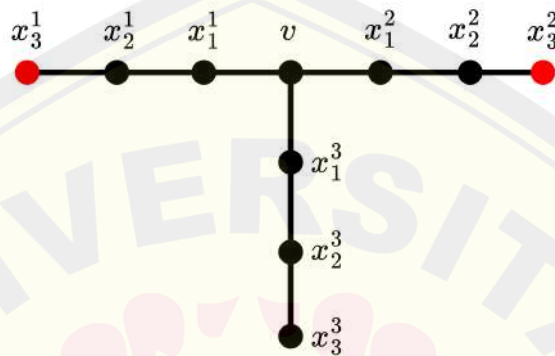
Sebelum melangkah ke penelitian yang lebih lanjut, dilakukan observasi awal terhadap salah satu graf pohon, yaitu amalgamasi titik graf lintasan. Pada observasi awal ditemukan pola letak himpunan titik pembeda sisi graf lintasan. Langkah-langkah observasi awal sebagai berikut :

1. Menentukan kardinalitas titik dan sisi hasil graf $amal(P_4, v, 3)$;
2. Menentukan *resolving set* dari graf $amal(P_4, v, 3)$;
3. Menentukan representasi setiap sisi dari graf $amal(P_4, v, 3)$ terhadap *resolving set*;
4. Meninjau ulang apakah sudah sesuai definisi 2.5.2;
5. Melakukan kembali langkah 2 hingga 5 pada *expand* graf $amal(P_4, v, 3)$

secara bertahap;

6. Mengulang langkah ketiga hingga langkah kelima pada graf $amal(P_n, v, m)$, $amal(S_n, v, m)$, $amal(B_d^n, v, m)$, dan $amal(Bt_{m,n}, v, k)$.

Gambar 3.6 merupakan observasi awal dimensi metrik sisi operasi amalgamasi titik graf lintasan, $P_4, v, 3$.



Gambar 3.6 Contoh Representasi isi pada graf $amal(P_4, v, 3)$

Dilihat pada Gambar 3.6 didapatkan *resolving set* graf $amal(P_4, v, 3)$ adalah $W = \{x_3^1, x_3^2\}$. Sehingga diperoleh dimensi metrik sisinya adalah $edim\ amal(P_4, v, 3) = 2$. Representasi sisi dapat dilihat pada Tabel 3.2.

Tabel 3.2 Representasi sisi graf $amal(P_4, v, 3)$

<i>edge</i>	$r(e W)$
x_3^1, x_2^1	$\{0, 5\}$
x_2^1, x_1^1	$\{1, 4\}$
x_1^1, v	$\{2, 3\}$
v, x_1^2	$\{3, 2\}$
x_1^2, x_2^2	$\{4, 1\}$
x_2^2, x_3^2	$\{5, 0\}$
v, x_1^3	$\{3, 3\}$
x_1^3, x_2^3	$\{4, 4\}$
x_2^3, x_3^3	$\{5, 5\}$

Dari langkah-langkah observasi awal, jika graf $amal(P_n, v, m)$ di-expand dengan $n \geq 2$ dan $m \geq 2$, maka didapatkan hasil dimensi metrik sisi pada graf $amal(P_n, v, m)$ yaitu $edim\ amal(P_n, v, m) = m - 1$, dengan $n \geq 2, m \geq 2$.

Dari hasil observasi awal yang sudah dilakukan pada graf $amal(P_n, v, m)$, didapatkan hasil dimensi metrik sisinya. Sehingga penelitian dimensi metrik sisi dapat dilanjutkan terhadap graf yang sudah ditentukan sesuai langkah observasi awal.



BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

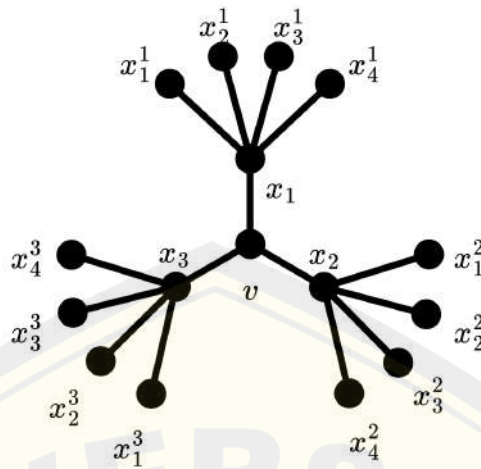
Pada bagian ini disajikan hasil penelitian dimensi metrik sisi hasil operasi amalgamasi titik pada keluarga graf pohon. Hasil penelitian ini adalah teorema serta lemma baru dalam dimensi metrik sisi hasil operasi amalgamasi titik pada keluarga graf pohon. Langkah awal penelitian ini adalah memilih beberapa keluarga graf pohon dan menentukan operasi graf yang digunakan. Graf pohon yang dioperasikan amalgamasi titik terdiri dari graf bintang $amal(S_n, v, m)$, graf sapu $amal(B_d^n, v, k)$, graf lintasan $amal(P_n, v, m)$, dan graf pohon pisang $amal(Bt_{m,n}, v, k)$. Selanjutnya menentukan kardinalitas titik dan kardinalitas sisi dari graf yang diteliti, kemudian menentukan himpunan titik pembeda (*resolving set*) semimum mungkin sehingga menghasilkan representasi jarak setiap sisi berbeda terhadap *resolving set*.

Format penyajian pada bab ini diawali dengan pernyataan lemma serta pembuktiannya dilanjutkan dengan teorema dan pembuktiannya, kemudian diakhiri dengan memberikan contoh gambar dari hasil operasi amalgamasi titik untuk memvisualisasikan *resolving set* yang dipilih dan hasil representasi sisi dari graf yang diteliti.

4.1 Kardinalitas Graf

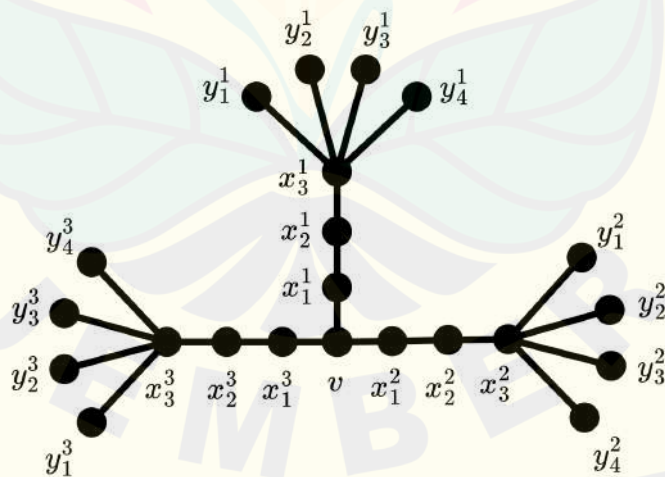
Penelitian ini diawali dengan mengobservasi kardinalitas titik dan kardinalitas sisi dari graf yang diteliti. Berikut hasil observasi dari graf yang diteliti.

Observasi 4.1.1. Hasil operasi graf bintang $amal(S_n, v, m)$ memiliki himpunan titik $V(G) = \{x_i, y_j^i \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{v\}$, dan himpunan sisi $E(G) = \{vx_i, x_i y_j^i \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1\}$. Kardinalitas titik dan kardinalitas sisi masing-masing adalah $|V(G)| = m(n) + 1$, dan $|E(G)| = m(n)$.



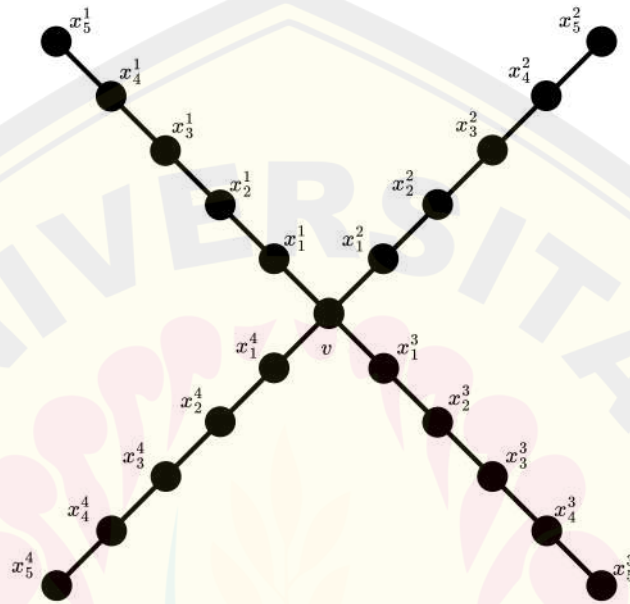
Gambar 4.1 $amal(S_5, v, 3)$

Observasi 4.1.2. Hasil Operasi graf sapu amal(B_d^n, v, m) memiliki himpunan titik $\{x_j^i, y_k^i \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq d - 1, 1 \leq k \leq n - d\} \cup \{v\}$, dan himpunan sisi $E(G) = \{vx_1^i, x_j^i x_{j+1}^i, x_{d-1}^i y_k^i \mid 1 \leq j \leq d - 2, 1 \leq k \leq n - d, 1 \leq i \leq m\}$. Kardinalitas titik dan kardinalitas sisi masing-masing adalah $|V(G)| = m(n - 1) + 1$, dan $m(n - 1)$.



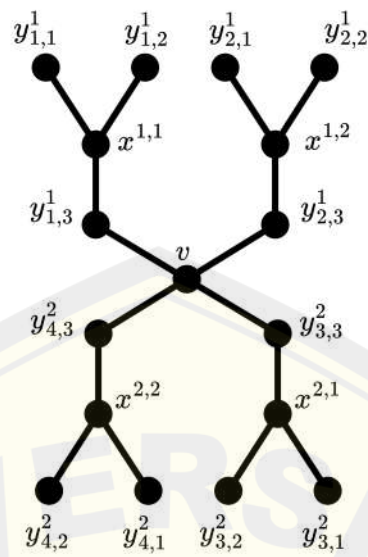
Gambar 4.2 $amal(B_4^8, v, 3)$

Observasi 4.1.3. Hasil Operasi graf lintasan amal (P_n, v, m) memiliki himpunan titik $V(G) = \{x_j^i \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n - 1\} \cup \{v\}$, dan himpunan sisi $E(G) = \{vx_1^i, x_j^i x_{j+1}^i \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n - 2\}$. Kardinalitas titik dan kardinalitas sisi masing-masing adalah $|V(G)| = m(n - 1) + 1$, dan $E(G) = m(n - 1)$.



Gambar 4.3 amal($P_6, v, 4$)

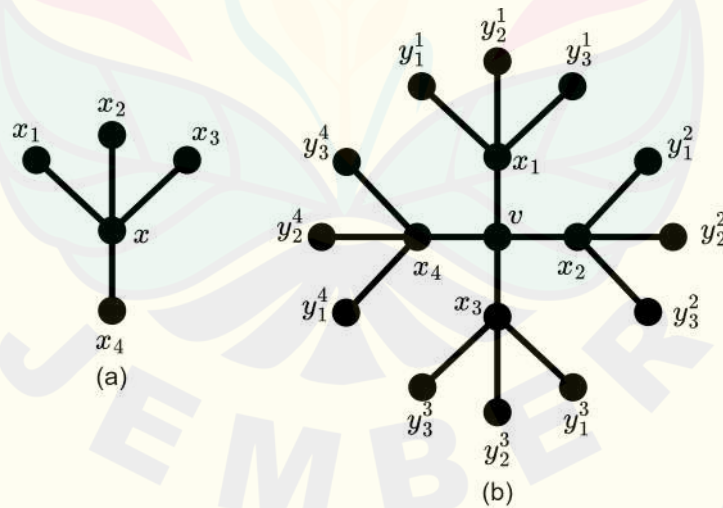
Observasi 4.1.4. Hasil Operasi graf pohon pisang amal $(Bt_{m,n}, v, k)$ memiliki himpunan titik $V(G) = \{y_{j,q}^i \mid 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k \times m, 1 \leq q \leq n\} \cup \{x^{i,r} \mid 1 \leq i \leq k, 1 \leq r \leq m\} \cup \{v\}$, dan himpunan sisi $E(G) = \{vy_{j,q}^i \mid 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k \times m, q = n\} \cup \{y_{j,q}^i x^{i,r} \mid 1 \leq i \leq k, 1 \leq r \leq m, 1 \leq j \leq k \times m, 1 \leq q \leq n\}$. Kardinalitas titik dan kardinalitas sisi masing-masing adalah $|V(G)| = (m \times k(n + 1)) + 1$, dan $E(G) = m \times k(n + 1)$.



Gambar 4.4 $amal(Bt_{2,3}, v, 2)$

4.2 Hasil Penelitian Dimensi Metrik Sisi Hasil Operasi Amalgamasi Titik Pada Keluarga Graf Pohon

Misalkan U_i didefinisikan sebagai himpunan titik daun dari subgraf bintang (S_n) di hasil operasi graf bintang $amal(S_n, v, m)$ dengan $|U_i| = n - 1, 1 \leq i \leq m$.



Gambar 4.5 (a) S_4 (b) $amal(S_4, v, 4)$

Lemma 4.2.1. *Jika W adalah resolving set dari hasil operasi graf bintang amal(S_n, v, m), maka $|W| = \sum_{i=1}^m (|U_i| - 1)$.*

Bukti. Misalkan W adalah *resolving set* dengan $|W| = \sum_{i=1}^m (|U_i| - 1)$. Jika asumsikan $|W| < \sum_{i=1}^m (|U_i| - 1)$ sedemikian sehingga ada $|S| = |W| - 1 = (\sum_{i=1}^m (|U_i| - 1)) - 1$, maka terdapat dua titik yang bukan elemen S (misalkan titik u dan titik q). Titik u dan titik q merupakan titik daun di subgraf $(S_n)_k$ dengan $1 \leq k \leq m$. Ketika u, q bukan elemen S , ada dua sisi ux dan qx untuk $x \in V(S_n)_k - S$ sedemikian sehingga $d(ux, w) = d(qx, w)$ untuk $w \in S$, yang berakibat $r(ux|S) = r(qx|S)$. Hal ini merupakan sebuah kontradiksi dengan **Definisi 2.5.1**. Jadi, terbukti bahwa *resolving set* $|W| = \sum_{i=1}^m (|U_i| - 1)$. ■

Teorema 4.2.1. *Dimensi metrik sisi hasil operasi graf bintang amal(S_n, v, m), dengan $n \geq 3, m \geq 2$ adalah $m(n - 2)$.*

Bukti. Untuk membuktikan bahwa $edim\ amal(S_n, v, m)$ adalah $m(n - 2)$, dilakukan pembuktian batas atas dan batas bawah dari dimensi metrik sisi graf $amal(S_n, v, m)$. Pertama, membuktikan batas atas dari graf tersebut adalah $edim\ amal(S_n, v, m) \leq m(n - 2)$. Misalkan jika dipilih *resolving set* di titik daun yakni $W = \{y_j^i, 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n - 2\}$, maka hasil representasi setiap sisi dari graf $amal(S_n, v, m)$ terhadap W dapat dilihat pada Tabel 4.1.

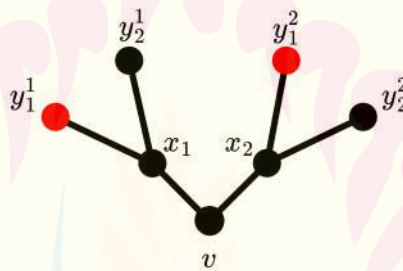
Tabel 4.1 Representasi sisi graf $amal(S_n, v, m)$

e	$r(e W)$	Kondisi
vx_i	$(\underbrace{2, \dots, 2}_{(n-2)(i-1)}, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-2}, \underbrace{2, \dots, 2}_{(n-2)(m-i)})$	$1 \leq i \leq m$
$x_i y_j^i$	$(\underbrace{3, \dots, 3}_{(n-2)(i-1)}, \underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-j-2}, \underbrace{3, \dots, 3}_{(n-2)(m-i)})$	$1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n - 2$
	$(\underbrace{3, \dots, 3}_{(n-2)(i-1)}, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-2}, \underbrace{3, \dots, 3}_{(n-2)(m-i)})$	$1 \leq i \leq m, j = n - 1$

Berdasarkan Tabel 4.1, menunjukkan bahwa representasi setiap sisi graf *amal* (S_n, v, m) terhadap W sudah berbeda. Jadi, dapat disimpulkan bahwa batas atas dimensi metrik sisi graf *amal* (S_n, v, m) adalah $edim\ amal(S_n, v, m) \leq m(n - 2)$.

Selanjutnya membuktikan batas bawah dari graf *amal* (S_n, v, m) . Akan ditunjukkan bahwa $edim\ amal(S_n, v, m) \geq m(n - 2)$. Berdasarkan **Lemma 4.2.1**, batas bawah dimensi metrik sisi graf *amal* (S_n, v, m) adalah $edim\ amal(S_n, v, m) \geq m(n - 2)$. Dari hasil pembuktian batas atas dan batas bawah, sudah sesuai dengan **Definisi 2.5.2**. Jadi $edim\ amal(S_n, v, m) = m(n - 2)$. ■

Sebagai ilustrasi, dimensi metrik sisi *amal* (S_n, v, m) dapat dilihat pada gambar berikut.

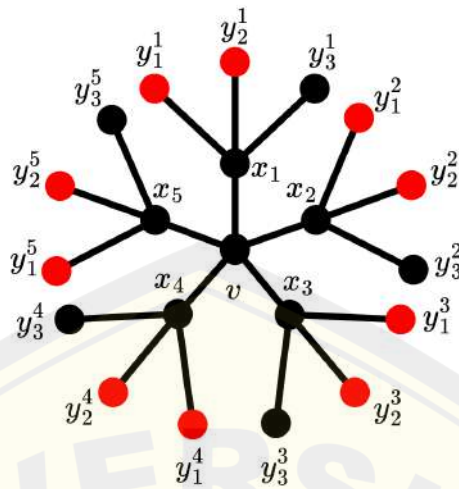


Gambar 4.6 Dimensi Metrik Sisi *amal* $(S_3, v, 2)$

Dari Gambar 4.6, dipilih *resolving set* pada titik daun dengan $W = \{y_1^1, y_1^2\}$. Sehingga diperoleh hasil representasi sisi yang dapat dilihat pada Tabel 4.2.

Tabel 4.2 Hasil representasi sisi graf *amal* $(S_3, v, 2)$

<i>edge</i>	$r(e W)$
vx_1	(1, 2)
$x_1y_1^1$	(0, 3)
$x_1y_2^1$	(1, 3)
vx_2	(2, 1)
$x_2y_1^2$	(3, 0)
$x_2y_2^2$	(3, 1)

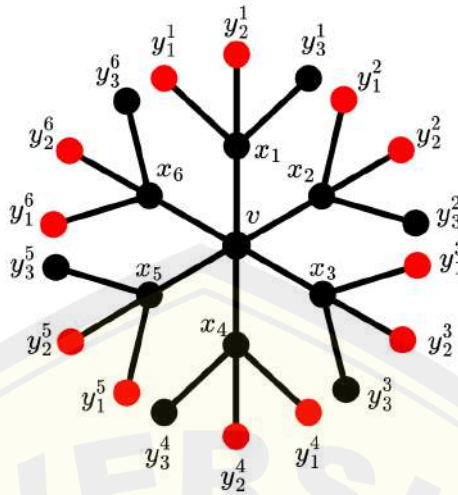


Gambar 4.7 Dimensi Metrik Sisi $amal(S_4, v, 5)$

Dari Gambar 4.7, dipilih *resolving set* pada titik daun dengan $W = \{y_1^1, y_2^1, y_1^2, y_2^2, y_1^3, y_2^3, y_1^4, y_2^4, y_1^5, y_2^5\}$. Sehingga diperoleh hasil representasi sisi yang dapat dilihat pada Tabel 4.3.

Tabel 4.3 Hasil representasi sisi graf $amal(S_4, v, 5)$

<i>edge</i>	$r(e W)$	<i>edge</i>	$r(e W)$
vx_1	(1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)	$x_3y_2^3$	(3, 3, 3, 3, 1, 0, 3, 3, 3)
$x_1y_1^1$	(0, 1, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)	$x_3y_3^3$	(3, 3, 3, 3, 1, 1, 3, 3, 3)
$x_1y_2^1$	(1, 0, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)	vx_4	(2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 2)
$x_1y_3^1$	(1, 1, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)	$x_4y_1^4$	(3, 3, 3, 3, 3, 3, 0, 1, 3, 3)
vx_2	(2, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2)	$x_4y_2^4$	(3, 3, 3, 3, 3, 3, 1, 0, 3, 3)
$x_2y_1^2$	(3, 3, 0, 1, 3, 3, 3, 3, 3)	$x_4y_3^4$	(3, 3, 3, 3, 3, 3, 1, 1, 3, 3)
$x_2y_2^2$	(3, 3, 1, 0, 3, 3, 3, 3, 3)	vx_5	(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1)
$x_2y_3^2$	(3, 3, 1, 1, 3, 3, 3, 3, 3)	$x_5y_1^5$	(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 0, 1)
vx_3	(2, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 2)	$x_5y_2^5$	(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 1, 0)
$x_3y_1^3$	(3, 3, 3, 3, 0, 1, 3, 3, 3)	$x_5y_3^5$	(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 1, 1)



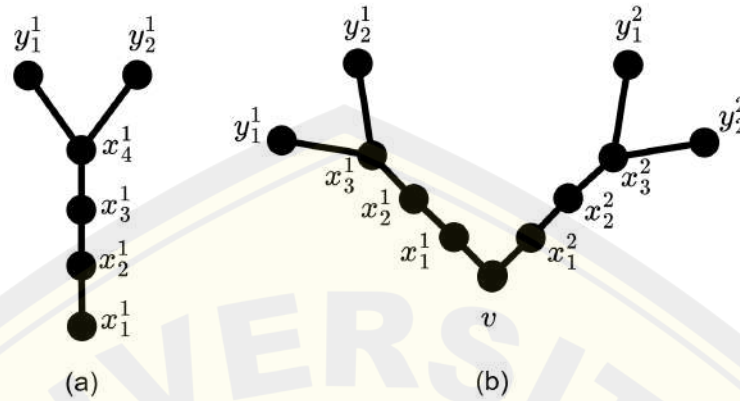
Gambar 4.8 Dimensi Metrik Sisi $amal(S_4, v, 6)$

Dari Gambar 4.8, dipilih *resolving set* pada titik daun dengan $W = \{y_1^1, y_2^1, y_1^2, y_2^2, y_3^3, y_2^3, y_4^4, y_2^4, y_1^5, y_2^5, y_1^6, y_2^6\}$. Sehingga diperoleh hasil representasi sisi yang dapat dilihat pada Tabel 4.4.

Tabel 4.4 Hasil representasi sisi graf $amal(S_4, v, 6)$

<i>edge</i>	$r(e W)$	<i>edge</i>	$r(e W)$
vx_1	(1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)	vx_4	(2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2)
$x_1y_1^1$	(0, 1, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)	$x_4y_1^4$	(3, 3, 3, 3, 3, 3, 0, 1, 3, 3, 3, 3)
$x_1y_2^1$	(1, 0, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)	$x_4y_2^4$	(3, 3, 3, 3, 3, 3, 1, 0, 3, 3, 3, 3)
$x_1y_3^1$	(1, 1, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)	$x_4y_3^4$	(3, 3, 3, 3, 3, 3, 1, 1, 3, 3, 3, 3)
vx_2	(2, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)	vx_5	(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 2)
$x_2y_1^2$	(3, 3, 0, 1, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)	$x_5y_1^5$	(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 0, 1, 3, 3)
$x_2y_2^2$	(3, 3, 1, 0, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)	$x_5y_2^5$	(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 1, 0, 3, 3)
$x_2y_3^2$	(3, 3, 1, 1, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)	$x_5y_3^5$	(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 1, 1, 3, 3)
vx_3	(2, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2)	vx_6	(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1)
$x_3y_1^3$	(3, 3, 3, 3, 0, 1, 3, 3, 3, 3, 3)	$x_6y_1^6$	(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 0, 1)
$x_3y_2^3$	(3, 3, 3, 3, 1, 0, 3, 3, 3, 3, 3)	$x_6y_2^6$	(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 1, 0)
$x_3y_3^3$	(3, 3, 3, 3, 1, 1, 3, 3, 3, 3, 3)	$x_6y_3^6$	(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 1, 1)

Misalkan U_i didefinisikan sebagai himpunan titik daun dari subgraf sapu (B_d^n) di hasil operasi graf sapu $amal(B_d^n, v, m)$ dengan $|U_i| = n - d, 1 \leq i \leq m$.



Gambar 4.9 (a) B_4^6 (b) $amal(B_4^6, v, 2)$

Lemma 4.2.2. Jika W adalah resolving set dari hasil operasi graf sapu $amal(B_d^n, v, m)$, maka $|W| = \sum_{i=1}^m (|U_i| - 1)$.

Bukti. Misalkan W adalah resolving set dengan $|W| = \sum_{i=1}^m (|U_i| - 1)$. Jika asumsikan $|W| < \sum_{i=1}^m (|U_i| - 1)$ sedemikian sehingga ada $|S| = |W| - 1 = (\sum_{i=1}^m (|U_i| - 1)) - 1$, maka terdapat dua titik yang bukan elemen S (misalkan titik u dan titik q). Titik u dan titik q merupakan titik daun di subgraf $(B_d^n)_k$ dengan $1 \leq k \leq m$. Ketika u, q bukan elemen S , ada dua sisi ux dan qx untuk $x \in V(B_d^n)_k - S$ sedemikian sehingga $d(ux, w) = d(qx, w)$ untuk $w \in S$, yang berakibat $r(ux|S) = r(qx|S)$. Hal ini merupakan sebuah kontradiksi dengan **Definisi 2.5.1**. Jadi, terbukti bahwa resolving set $|W| = \sum_{i=1}^m (|U_i| - 1)$. ■

Teorema 4.2.2. Dimensi metrik sisi hasil operasi graf sapu $amal(B_d^n, v, m)$ dengan $n - d \geq 2, d = 4, m \geq 2$ adalah $m(n - d - 1)$.

Bukti. Untuk membuktikan bahwa $edim amal(B_d^n, v, m)$ adalah $m(n - d - 1)$, dilakukan pembuktian batas atas dan batas bawah dari dimensi metrik sisi graf $amal(B_d^n, v, m)$. Pertama, membuktikan batas atas dari graf tersebut adalah $edim amal(B_d^n, v, m) \leq m(n - d - 1)$. Misalkan jika dipilih resolving set di titik daun

yakni $W = \{y_k^i; 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n - d - 1\}$, maka akan mendapatkan representasi setiap sisi dari graf $amal(B_d^n, v, m)$ terhadap W yang dapat dilihat pada Tabel 4.5.

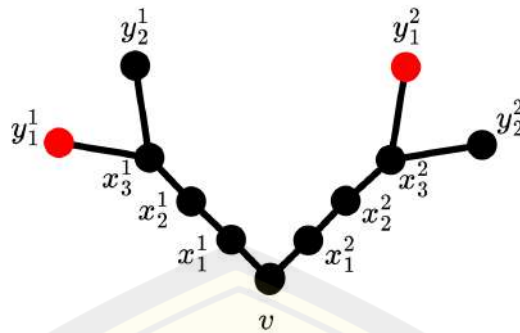
Tabel 4.5 Representasi sisi graf $amal(B_d^n, v, m)$

e	$r(e W)$	Kondisi
vx_j^i	$\underbrace{(4, \dots, 4)}_{(n-d-1)(i-1)} \underbrace{3, \dots, 3}_{n-d-1} \underbrace{4, \dots, 4}_{(n-d-1)(m-i)}$	$1 \leq i \leq m, j = 1$
$x_j^i x_{j+1}^i$	$\underbrace{(5, \dots, 5)}_{(n-d-1)(i-1)} \underbrace{2, \dots, 2}_{n-d-1} \underbrace{5, \dots, 5}_{(n-d-1)(m-i)}$	$1 \leq i \leq m, j = 1$
	$\underbrace{(6, \dots, 6)}_{(n-d-1)(i-1)} \underbrace{1, \dots, 1}_{n-d-1} \underbrace{6, \dots, 6}_{(n-d-1)(m-i)}$	$1 \leq i \leq m, j = 2$
$x_j^i y_k^i$	$\underbrace{(7, \dots, 7)}_{(n-d-1)(i-1)} \underbrace{1, \dots, 1}_{k-1} \underbrace{0, 1, \dots, 1}_{n-d-k-1} \underbrace{7, \dots, 7}_{(n-d-1)(m-i)}$	$1 \leq i \leq m, j = 3,$ $1 \leq k \leq n - d - 1$
	$\underbrace{(7, \dots, 7)}_{(n-d-1)(i-1)} \underbrace{1, \dots, 1}_{n-d-1} \underbrace{7, \dots, 7}_{(n-d-1)(m-i)}$	$1 \leq i \leq m, j = 3,$ $k = n - d$

Berdasarkan Tabel 4.5, menunjukkan bahwa representasi setiap sisi graf $amal(B_d^n, v, m)$ terhadap W sudah berbeda. Jadi, dapat disimpulkan bahwa batas atas dimensi metrik sisi graf $amal(B_d^n, v, m)$ adalah $edim amal(B_d^n, v, m) \leq m(n - d - 1)$.

Selanjutnya membuktikan batas bawah dari graf $amal(B_d^n, v, m)$. Akan ditunjukkan $edim amal(B_d^n, v, m) \geq m(n - d - 1)$. Berdasarkan **Lemma 4.2.2**, batas bawah dimensi metrik sisi graf $amal(B_d^n, v, m)$ adalah $edim amal(B_d^n, v, m) \geq m(n - d - 1)$. Dari hasil pembuktian batas atas dan batas bawah, sudah sesuai dengan **Definisi 2.5.2**. Jadi $edim amal(B_d^n, v, m)$ adalah $m(n - d - 1)$. ■

Sebagai ilustrasi, dimensi metrik sisi $amal(B_d^n, v, m)$ dapat dilihat pada gambar berikut.

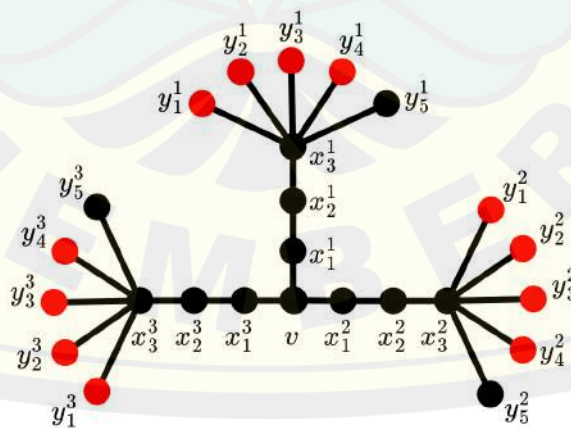


Gambar 4.10 Dimensi Metrik Sisi $amal(B_4^0, v, 2)$

Dari Gambar 4.10, dipilih *resolving set* pada titik daun dengan $W = \{y_1^1, y_1^2\}$. Sehingga diperoleh hasil representasi sisi yang dapat dilihat pada Tabel 4.6.

Tabel 4.6 Hasil representasi sisi graf $amal(B_4^0, v, 2)$

<i>edge</i>	$r(e W)$	<i>edge</i>	$r(e W)$
vx_1^1	(3, 4)	vx_1^2	(4, 3)
$x_1^1x_2^1$	(2, 5)	$x_1^2x_2^2$	(5, 2)
$x_2^1x_3^1$	(1, 6)	$x_2^2x_3^2$	(6, 1)
$x_3^1y_1^1$	(0, 7)	$x_3^2y_1^2$	(7, 0)
$x_3^1y_1^2$	(1, 7)	$x_3^2y_2^2$	(7, 1)

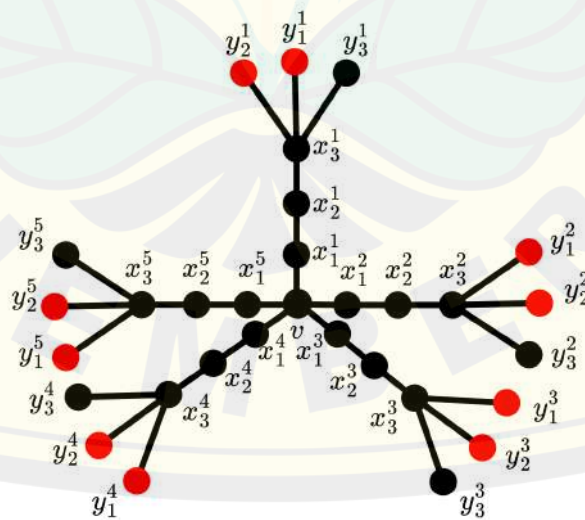


Gambar 4.11 Dimensi Metrik Sisi $amal(B_4^0, v, 3)$

Dari Gambar 4.11, dipilih *resolving set* pada titik daun dengan $W = \{y_1^1, y_2^1, y_3^1, y_4^1, y_1^2, y_2^2, y_3^2, y_4^2, y_1^3, y_2^3, y_3^3, y_4^3\}$. Sehingga diperoleh hasil representasi sisi yang dapat dilihat pada Tabel 4.7.

Tabel 4.7 Hasil representasi sisi graf $amal(B_4^9, v, 3)$

<i>edge</i>	$r(e W)$	<i>edge</i>	$r(e W)$
vx_1^1	(3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4)	$x_3^2y_2^2$	(7, 7, 7, 7, 1, 0, 1, 1, 7, 7, 7, 7)
$x_1^1x_2^1$	(2, 2, 2, 2, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5)	$x_3^2y_3^2$	(7, 7, 7, 7, 1, 1, 0, 1, 7, 7, 7, 7)
$x_2^1x_3^1$	(1, 1, 1, 1, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6)	$x_3^2y_4^2$	(7, 7, 7, 7, 1, 1, 1, 0, 7, 7, 7, 7)
$x_3^1y_1^1$	(0, 1, 1, 1, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7)	$x_3^2y_5^2$	(7, 7, 7, 7, 1, 1, 1, 1, 7, 7, 7, 7)
$x_3^1y_2^1$	(1, 0, 1, 1, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7)	vx_1^3	(4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 3)
$x_3^1y_3^1$	(1, 1, 0, 1, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7)	$x_1^3x_2^3$	(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 2, 2, 2, 2)
$x_3^1y_4^1$	(1, 1, 1, 0, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7)	$x_2^3x_3^3$	(6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 1, 1, 1, 1)
$x_3^1y_5^1$	(1, 1, 1, 1, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7)	$x_3^3y_1^3$	(7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 0, 1, 1, 1)
vx_1^2	(4, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4)	$x_3^3y_2^3$	(7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 1, 0, 1, 1)
$x_1^2x_2^2$	(5, 5, 5, 5, 5, 2, 2, 2, 2, 5, 5, 5, 5)	$x_3^3y_3^3$	(7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 1, 1, 0, 1)
$x_2^2x_3^2$	(6, 6, 6, 6, 6, 1, 1, 1, 1, 6, 6, 6, 6)	$x_3^3y_4^3$	(7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 1, 1, 1, 0)
$x_3^2y_1^2$	(7, 7, 7, 7, 0, 1, 1, 1, 7, 7, 7, 7)	$x_3^3y_5^3$	(7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 1, 1, 1, 1)



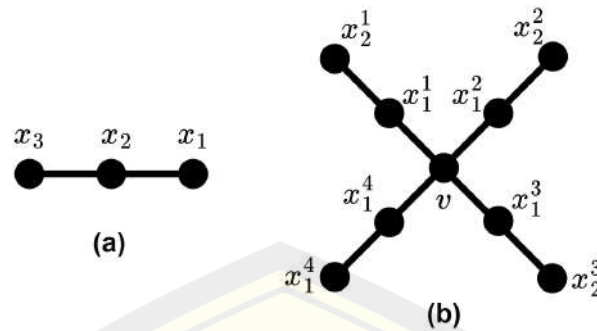
Gambar 4.12 Dimensi Metrik Sisi $amal(B_4^7, v, 5)$

Dari Gambar 4.12, dipilih *resolving set* pada titik daun dengan $W = \{y_1^1, y_2^1, y_1^2, y_2^2, y_1^3, y_2^3, y_1^4, y_2^4, y_1^5, y_2^5\}$. Sehingga diperoleh hasil representasi sisi yang dapat dilihat pada Tabel 4.8.

Tabel 4.8 Hasil representasi sisi graf $amal(B_4^7, v, 5)$

<i>edge</i>	$r(e W)$	<i>edge</i>	$r(e W)$
vx_1^1	(3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4)	$x_3^3y_1^3$	(7, 7, 7, 7, 0, 1, 7, 7, 7, 7)
$x_1^1x_2^1$	(2, 2, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5)	$x_3^3y_2^3$	(7, 7, 7, 7, 1, 0, 7, 7, 7, 7)
$x_2^1x_3^1$	(1, 1, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6)	$x_3^3y_3^3$	(7, 7, 7, 7, 1, 1, 7, 7, 7, 7)
$x_3^1y_1^1$	(0, 1, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7)	vx_1^4	(4, 4, 4, 4, 4, 4, 3, 3, 4, 4)
$x_3^1y_2^1$	(1, 0, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7)	$x_1^4x_2^4$	(5, 5, 5, 5, 5, 5, 2, 2, 5, 5)
$x_3^1y_3^1$	(1, 1, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7)	$x_2^4x_3^4$	(6, 6, 6, 6, 6, 6, 1, 1, 6, 6)
vx_1^2	(4, 4, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4)	$x_3^4y_1^4$	(7, 7, 7, 7, 7, 7, 0, 1, 7, 7)
$x_2^2x_2^2$	(5, 5, 2, 2, 5, 5, 5, 5, 5, 5)	$x_3^4y_2^4$	(7, 7, 7, 7, 7, 7, 1, 0, 7, 7)
$x_2^2x_3^2$	(6, 6, 1, 1, 6, 6, 6, 6, 6, 6)	$x_3^4y_3^4$	(7, 7, 7, 7, 7, 7, 1, 1, 7, 7)
$x_3^2y_1^2$	(7, 7, 0, 1, 7, 7, 7, 7, 7, 7)	vx_1^5	(4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 3, 3)
$x_3^2y_2^2$	(7, 7, 1, 0, 7, 7, 7, 7, 7, 7)	$x_1^5x_2^5$	(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 2, 2)
$x_3^2y_3^2$	(7, 7, 1, 1, 7, 7, 7, 7, 7, 7)	$x_2^5x_3^5$	(6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 1, 1)
vx_1^3	(4, 4, 4, 4, 3, 3, 4, 4, 4, 4)	$x_3^5y_1^5$	(7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 0, 1)
$x_1^3x_2^3$	(5, 5, 5, 5, 2, 2, 5, 5, 5, 5)	$x_3^5y_2^5$	(7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 1, 0)
$x_2^3x_3^3$	(6, 6, 6, 6, 1, 1, 6, 6, 6, 6)	$x_3^5y_3^5$	(7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 1, 1)

Misalkan U_i didefinisikan sebagai himpunan titik daun subgraf lintasan (P_n) di hasil operasi graf lintasan $amal(P_n, v, m)$ dengan $|U_i| = 1, 1 \leq i \leq m$.



Gambar 4.13 (a) P_3 (b) $amal(P_3, v, 4)$

Lemma 4.2.3. Jika W adalah resolving set dari hasil operasi graf lintasan $amal(P_n, v, m)$, maka $|W| = (\sum_{i=1}^m |U_i|) - 1$.

Bukti. Misalkan W adalah resolving set dengan $|W| = (\sum_{i=1}^m |U_i|) - 1$. Jika asumsikan $|W| < (\sum_{i=1}^m |U_i|) - 1$ sedemikian sehingga ada $|S| = |W| - 1 = (\sum_{i=1}^m |U_i|) - 2$, maka terdapat dua titik (misalkan titik u dan titik q) elemen subgraf $(P_n)_k$ dengan $1 \leq k \leq m$ yang tidak memuat anggota resolving set. Titik u dan titik q bukan elemen S , dan merupakan titik yang bertetangga dengan titik terminal v . Ketika u, q bukan elemen S , ada dua sisi uv dan qv untuk $v \in V(P_n)_k - S$ sedemikian sehingga $d(uv, w) = d(qv, w)$ untuk $w \in S$, yang berakibat $r(uv|S) = r(qv|S)$. Hal ini merupakan sebuah kontradiksi dengan **Definisi 2.5.1**. Jadi, terbukti bahwa resolving set $|W| = (\sum_{i=1}^m |U_i|) - 1$. ■

Teorema 4.2.3. Dimensi metrik sisi hasil operasi graf lintasan $amal(P_n, v, m)$, dengan $n \geq 2, m \geq 2$ adalah $m - 1$.

Bukti. Untuk membuktikan bahwa $edim\ amal(P_n, v, m)$ adalah $m - 1$, dilakukan pembuktian batas atas dan batas bawah dari dimensi metrik sisi graf $amal(P_n, v, m)$. Pertama, membuktikan batas atas dari graf tersebut adalah $edim\ amal(P_n, v, m) \leq m - 1$. Misalkan jika dipilih resolving set $W = \{x_j^i; 1 \leq i \leq m - 1, j = n - 1\}$, maka akan mendapatkan representasi setiap sisi dari graf $amal(P_n, v, m)$ terhadap W yang dapat dilihat pada Tabel 4.9.

Tabel 4.9 Representasi sisi graf $amal(P_n, v, m)$

e	$r(e W)$	Kondisi
vx_j^i	$\underbrace{(n-1, \dots, n-1)}_{i-1}, n-2, \underbrace{(n-1, \dots, n-1)}_{m-i-1}$	$1 \leq i \leq m-1,$ $j = 1$
	$\underbrace{(n-1, \dots, n-1)}_{m-1}$	$i = m, j = 1$
$x_j^i x_{j+1}^i$	$\underbrace{(n-1+j, \dots, n-1+j)}_{i-1}, n-2-j, \underbrace{(n-1+j, \dots, n-1+j)}_{m-i-1}$	$1 \leq i \leq m-1,$ $1 \leq j \leq n-2$
	$\underbrace{(n-1+j, \dots, n-1+j)}_{m-1}$	$i = m,$ $1 \leq j \leq n-2$

Berdasarkan Tabel 4.9, menunjukkan bahwa representasi setiap sisi graf $amal(P_n, v, m)$ terhadap W sudah berbeda. Jadi, dapat disimpulkan bahwa batas atas dimensi metrik sisi graf $amal(P_n, v, m)$ adalah $edim amal(P_n, v, m) \leq m - 1$.

Selanjutnya membuktikan batas bawah dari graf $amal(P_n, v, m)$. Akan ditunjukkan $edim amal(P_n, v, m) \geq m - 1$. Berdasarkan **Lemma 4.2.3**, batas bawah dimensi metrik sisi graf $amal(P_n, v, m)$ adalah $edim amal(P_n, v, m) \geq m - 1$. Dari hasil pembuktian batas atas dan batas bawah, sudah sesuai dengan **Definisi 2.5.2**. Jadi $edim amal(P_n, v, m)$ adalah $m - 1$. ■

Sebagai ilustrasi, dimensi metrik sisi $amal(P_n, v, m)$ dapat dilihat pada gambar berikut.



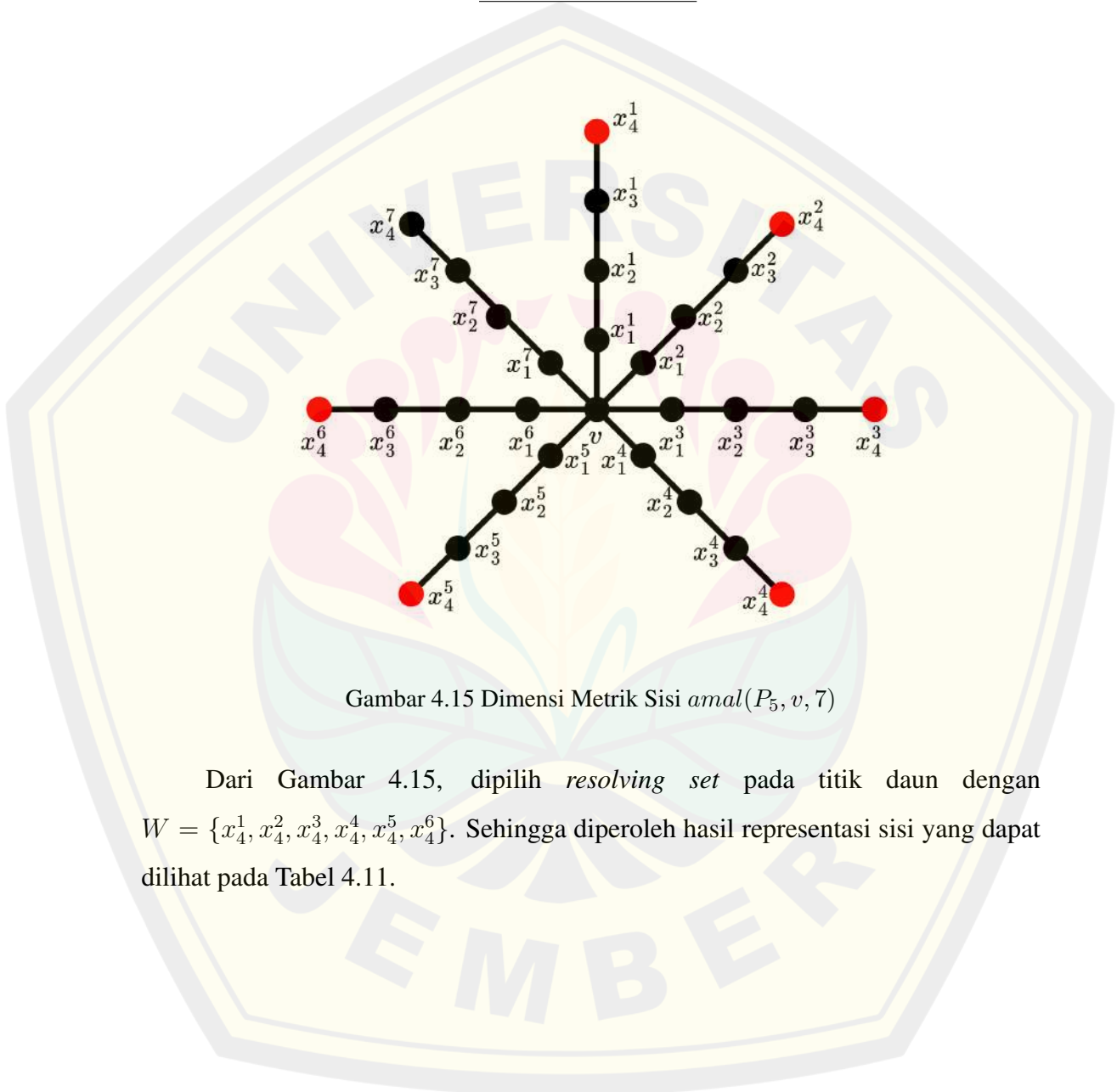
Gambar 4.14 Dimensi Metrik Sisi $amal(P_2, v, 2)$

Dari Gambar 4.14, dipilih *resolving set* pada titik daun dengan $W = \{x_1^1\}$.

Sehingga diperoleh hasil representasi sisi yang dapat dilihat pada Tabel 4.10.

Tabel 4.10 Hasil representasi sisi graf $amal(P_2, v, 2)$

$edge$	$r(e W)$
vx_1^1	(0)
vx_1^2	(1)

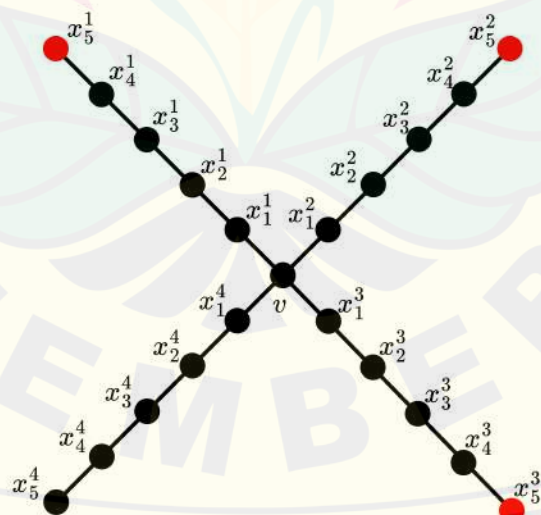


Gambar 4.15 Dimensi Metrik Sisi $amal(P_5, v, 7)$

Dari Gambar 4.15, dipilih *resolving set* pada titik daun dengan $W = \{x_4^1, x_4^2, x_4^3, x_4^4, x_4^5, x_4^6\}$. Sehingga diperoleh hasil representasi sisi yang dapat dilihat pada Tabel 4.11.

Tabel 4.11 Hasil representasi sisi graf $amal(P_5, v, 7)$

$edge$	$r(e W)$	$edge$	$r(e W)$
vx_1^1	(3, 4, 4, 4, 4, 4)	$x_2^4x_3^4$	(6, 6, 6, 1, 6, 6)
$x_1^1x_2^1$	(2, 5, 5, 5, 5, 5)	$x_3^4x_4^4$	(7, 7, 7, 0, 7, 7)
$x_2^1x_3^1$	(1, 6, 6, 6, 6, 6)	vx_1^5	(4, 4, 4, 4, 3, 4)
$x_3^1x_4^1$	(0, 7, 7, 7, 7, 7)	$x_1^5x_2^5$	(5, 5, 5, 5, 2, 5)
vx_1^2	(4, 3, 4, 4, 4, 4)	$x_2^5x_3^5$	(6, 6, 6, 6, 1, 6)
$x_1^2x_2^2$	(5, 2, 5, 5, 5, 5)	$x_3^5x_4^5$	(7, 7, 7, 7, 0, 7)
$x_2^2x_3^2$	(6, 1, 6, 6, 6, 6)	vx_1^6	(4, 4, 4, 4, 4, 3)
$x_3^2x_4^2$	(7, 0, 7, 7, 7, 7)	$x_1^6x_2^6$	(5, 5, 5, 5, 5, 2)
vx_1^3	(4, 4, 3, 4, 4, 4)	$x_2^6x_3^6$	(6, 6, 6, 6, 6, 1)
$x_1^3x_2^3$	(5, 5, 2, 5, 5, 5)	$x_3^6x_4^6$	(7, 7, 7, 7, 7, 0)
$x_2^3x_3^3$	(6, 6, 1, 6, 6, 6)	vx_1^7	(4, 4, 4, 4, 4, 4)
$x_3^3x_4^3$	(7, 7, 0, 7, 7, 7)	$x_1^7x_2^7$	(5, 5, 5, 5, 5, 5)
vx_1^4	(4, 4, 4, 3, 4, 4)	$x_2^7x_3^7$	(6, 6, 6, 6, 6, 6)
$x_1^4x_2^4$	(5, 5, 5, 2, 5, 5)	$x_3^7x_4^7$	(7, 7, 7, 7, 7, 7)



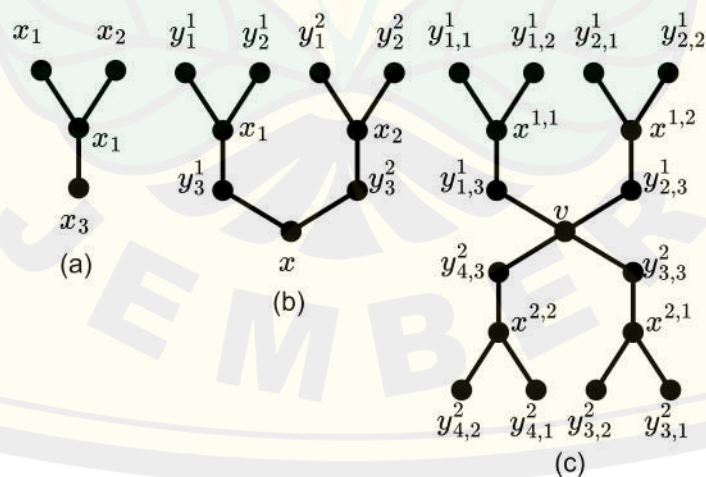
Gambar 4.16 Dimensi Metrik Sisi $amal(P_6, v, 4)$

Dari Gambar 4.16, dipilih *resolving set* pada titik daun dengan $W = \{x_5^1, x_5^2, x_5^3\}$. Sehingga diperoleh hasil representasi sisi yang dapat dilihat pada Tabel 4.12.

Tabel 4.12 Hasil representasi sisi graf $amal(P_6, v, 4)$

<i>edge</i>	$r(e W)$	<i>edge</i>	$r(e W)$
vx_1^1	(4, 5, 5)	vx_1^3	(5, 5, 4)
$x_1^1x_2^1$	(3, 6, 6)	$x_1^3x_2^3$	(6, 6, 3)
$x_2^1x_3^1$	(2, 7, 7)	$x_2^3x_3^3$	(7, 7, 2)
$x_3^1x_4^1$	(1, 8, 8)	$x_3^3x_4^3$	(8, 8, 1)
$x_4^1x_5^1$	(0, 9, 9)	$x_4^3x_5^3$	(9, 9, 0)
vx_1^2	(5, 4, 5)	vx_1^4	(5, 5, 5)
$x_1^2x_2^2$	(6, 3, 6)	$x_1^4x_2^4$	(6, 6, 6)
$x_2^2x_3^2$	(7, 2, 7)	$x_2^4x_3^4$	(7, 7, 7)
$x_3^2x_4^2$	(8, 1, 8)	$x_3^4x_4^4$	(8, 8, 8)
$x_4^2x_5^2$	(9, 0, 9)	$x_4^4x_5^4$	(9, 9, 9)

Misalkan U_i didefinisikan sebagai himpunan titik daun dari subgraf bintang (S_n) di graf pohon pisang $(Bt_{m,n})$ dengan $|U_i| = 2(n - 1), 1 \leq i \leq k$.



Gambar 4.17 (a) S_3 (b) $Bt_{2,3}$ (c) $amal(Bt_{2,3}, v, 2)$

Lemma 4.2.4. *Jika W adalah resolving set dari hasil operasi graf pohon pisang $amal(Bt_{m,n}, v, k)$, maka $|W| = \sum_{i=1}^k (|U_i| - 2)$*

Bukti. Misalkan W adalah *resolving set* dengan $|W| = \sum_{i=1}^k (|U_i| - 2)$. Jika asumsikan $|W| < \sum_{i=1}^k (|U_i| - 2)$ sedemikian sehingga ada $|S| = |W| - 1 = (\sum_{i=1}^k (|U_i| - 2)) - 1$, maka terdapat dua titik yang bukan elemen S (misalkan titik u dan titik q). Titik u dan titik q merupakan titik daun di subgraf $(Bt_{m,n})_p$ dengan $1 \leq p \leq k$. Ketika u, q bukan elemen S , ada dua sisi ux dan qx untuk $x \in V(Bt_{m,n})_p - S$ sedemikian sehingga $d(ux, w) = d(qx, w)$ untuk $w \in S$, yang berakibat $r(ux|S) = r(qx|S)$. Hal ini merupakan sebuah kontradiksi dengan

Definisi 2.5.1. Jadi, terbukti bahwa *resolving set* $|W| = \sum_{i=1}^k (|U_i| - 2)$. ■

Teorema 4.2.4. *Dimensi metrik sisi hasil operasi graf pohon pisang $amal(Bt_{m,n}, v, k)$, dengan $m = 2, n \geq 3, k \geq 2$ adalah $2k(n - m)$.*

Bukti. Untuk membuktikan bahwa $edim\ amal(Bt_{m,n}, v, k)$ adalah $2k(n - m)$, dilakukan pembuktian batas atas dan batas bawah dari dimensi metrik sisi graf $amal(Bt_{m,n}, v, k)$. Pertama, membuktikan batas atas dari graf tersebut adalah $edim\ amal(Bt_{m,n}, v, k) \leq 2k(n - m)$. Misalkan jika dipilih *resolving set* $W = \{y_{j,q}^i; 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k \times m, 1 \leq q \leq n - 2\}$, maka hasil representasi setiap sisi graf $amal(Bt_{m,n}, v, k)$ terhadap W dapat dilihat pada Tabel 4.13.

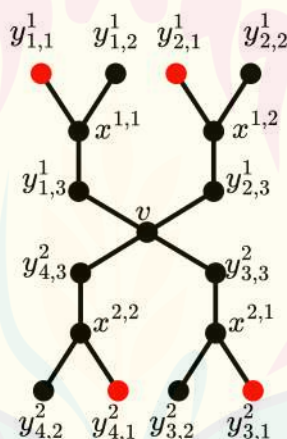
Tabel 4.13 Representasi sisi graf $amal(Bt_{m,n}, v, k)$

e	$r(e W)$	Kondisi
$vy_{j,q}^i$	$\underbrace{(3, \dots, 3)}_{(n-m)(j-1)} \underbrace{2, \dots, 2}_{n-m} \underbrace{3, \dots, 3}_{((k \times m)-j)(n-m)}$	$1 \leq i \leq k,$ $1 \leq j \leq k \times m, q = n$
$y_{j,q}^i x^{i,r}$	$\underbrace{(4, \dots, 4)}_{(n-m)(j-1)} \underbrace{1, \dots, 1}_{n-m} \underbrace{4, \dots, 4}_{((k \times m)-j)(n-m)}$	$1 \leq i \leq k, 1 \leq r \leq m,$ $1 \leq j \leq k \times m, q = n$
$y_{j,q}^i x^{i,r}$	$\underbrace{(5, \dots, 5)}_{(n-m)(j-1)} \underbrace{1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1}_{q-1} \underbrace{5, \dots, 5}_{(n-m-q)((k \times m)-j)(n-m)}$	$1 \leq i \leq k, 1 \leq r \leq m,$ $1 \leq j \leq k \times m, 1 \leq q \leq n - 2$
	$\underbrace{(5, \dots, 5)}_{(n-m)(j-1)} \underbrace{1, \dots, 1}_{n-m} \underbrace{5, \dots, 5}_{((k \times m)-j)(n-m)}$	$1 \leq i \leq k, 1 \leq r \leq m,$ $1 \leq j \leq k \times m, q = n - 1$

Berdasarkan Tabel 4.13, menunjukkan bahwa representasi setiap sisi graf $amal(Bt_{m,n}, v, k)$ terhadap W sudah berbeda. Jadi, dapat disimpulkan bahwa batas atas dimensi metrik sisi graf $amal(Bt_{m,n}, v, k) \leq 2k(n - m)$.

Selanjutnya membuktikan batas bawah dari graf $amal(Bt_{m,n}, v, k)$. Akan ditunjukkan bahwa $edim\ amal(Bt_{m,n}, v, k) \geq 2k(n - m)$. Berdasarkan **Lemma 4.2.4**, batas bawah dimensi metrik sisi graf $amal(Bt_{m,n}, v, k)$ adalah $edim\ amal(Bt_{m,n}, v, k) \geq 2k(n - m)$. Dari hasil pembuktian batas atas dan batas bawah, sudah sesuai dengan **Definisi 2.5.2**. Jadi $edim\ amal(Bt_{m,n}, v, k)$ adalah $2k(n - m)$. ■

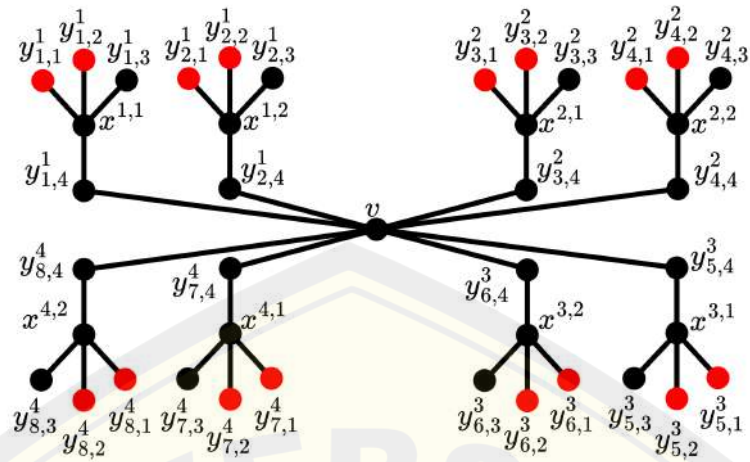
Sebagai ilustrasi, dimensi metrik sisi $amal(Bt_{m,n}, v, k)$ dapat dilihat pada Gambar 4.18.



Gambar 4.18 Dimensi Metrik Sisi $amal(Bt_{2,3}, v, 2)$

Dari Gambar 4.18, dipilih *resolving set* pada titik daun dengan $W = \{y_{1,1}^1, y_{2,1}^1, y_{3,1}^2, y_{4,1}^2\}$. Sehingga diperoleh hasil representasi sisi yang dapat dilihat pada Tabel 4.14.

<i>edge</i>	$r(e W)$
$y_{1,3}^1 x^{1,1}$	(1, 1, 0, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5)
$y_{1,4}^1 x^{1,1}$	(1, 1, 1, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5)
$y_{1,5}^1 x^{1,1}$	(1, 1, 1, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4)
$vy_{2,5}^1$	(3, 3, 3, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)
$y_{2,1}^1 x^{1,2}$	(5, 5, 5, 0, 1, 1, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5)
$y_{2,2}^1 x^{1,2}$	(5, 5, 5, 1, 0, 1, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5)
$y_{2,3}^1 x^{1,2}$	(5, 5, 5, 1, 1, 0, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5)
$y_{2,4}^1 x^{1,2}$	(5, 5, 5, 1, 1, 1, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5)
$y_{2,5}^1 x^{1,2}$	(4, 4, 4, 1, 1, 1, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4)
$vy_{3,5}^2$	(3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)
$y_{3,1}^2 x^{2,1}$	(5, 5, 5, 5, 5, 5, 0, 1, 1, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5)
$y_{3,2}^2 x^{2,1}$	(5, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 0, 1, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5)
$y_{3,3}^2 x^{2,1}$	(5, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 1, 0, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5)
$y_{3,4}^2 x^{2,1}$	(5, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 1, 1, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5)
$y_{3,5}^2 x^{2,1}$	(4, 4, 4, 4, 4, 4, 1, 1, 1, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4)
$vy_{4,5}^2$	(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3)
$y_{4,1}^2 x^{2,2}$	(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 0, 1, 1, 5, 5, 5, 5, 5)
$y_{4,2}^2 x^{2,2}$	(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 0, 1, 5, 5, 5, 5, 5)
$y_{4,3}^2 x^{2,2}$	(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 1, 0, 5, 5, 5, 5, 5)
$y_{4,4}^2 x^{2,2}$	(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 1, 1, 5, 5, 5, 5, 5)
$y_{4,5}^2 x^{2,2}$	(4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 1, 1, 1, 4, 4, 4, 4, 4)
$vy_{5,5}^3$	(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 3, 3, 3)
$y_{5,1}^3 x^{3,1}$	(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 0, 1, 1, 5, 5, 5)
$y_{5,2}^3 x^{3,1}$	(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 0, 1, 5, 5, 5)
$y_{5,3}^3 x^{3,1}$	(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 1, 0, 5, 5, 5)
$y_{5,4}^3 x^{3,1}$	(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 1, 1, 5, 5, 5)
$y_{5,5}^3 x^{3,1}$	(4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 1, 1, 1, 4, 4, 4)
$vy_{6,5}^3$	(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2)
$y_{6,1}^3 x^{3,2}$	(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 0, 1, 1)
$y_{6,2}^3 x^{3,2}$	(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 0, 1)
$y_{6,3}^3 x^{3,2}$	(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 1, 0)
$y_{6,4}^3 x^{3,2}$	(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 1, 1)
$y_{6,5}^3 x^{3,2}$	(4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 1, 1, 1)



Gambar 4.20 Dimensi Metrik Sisi $amal(Bt_{2,4}, v, 4)$

Dari Gambar 4.20, dipilih *resolving set* pada titik daun dengan $W = \{y_{1,1}^1, y_{1,2}^1, y_{2,1}^1, y_{2,2}^1, y_{3,1}^2, y_{3,2}^2, y_{4,1}^2, y_{4,2}^2, y_{5,1}^3, y_{5,2}^3, y_{6,1}^3, y_{6,2}^3, y_{7,1}^4, y_{7,2}^4, y_{8,1}^4, y_{8,2}^4\}$. Sehingga diperoleh hasil representasi sisi yang dapat dilihat pada Tabel 4.16.

Tabel 4.16 Hasil representasi sisi graf $amal(Bt_{2,4}, 4)$

edge	$r(e W)$
$vy_{1,4}^1$	(2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)
$y_{1,1}^1x^{1,1}$	(0, 1, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5)
$y_{1,2}^1x^{1,1}$	(1, 0, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5)
$y_{1,3}^1x^{1,1}$	(1, 1, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5)
$y_{1,4}^1x^{1,1}$	(1, 1, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4)
$vy_{2,4}^1$	(3, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)
$y_{2,1}^1x^{1,2}$	(5, 5, 0, 1, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5)
$y_{2,2}^1x^{1,2}$	(5, 5, 1, 0, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5)
$y_{2,3}^1x^{1,2}$	(5, 5, 1, 1, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5)
$y_{2,4}^1x^{1,2}$	(4, 4, 1, 1, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4)
$vy_{3,4}^2$	(3, 3, 3, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)
$y_{3,1}^2x^{2,1}$	(5, 5, 5, 5, 0, 1, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5)
$y_{3,2}^2x^{2,1}$	(5, 5, 5, 5, 1, 0, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5)
$y_{3,3}^2x^{2,1}$	(5, 5, 5, 5, 1, 1, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5)
$y_{3,4}^2x^{2,1}$	(4, 4, 4, 4, 1, 1, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4)
$vy_{4,4}^2$	(3, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)

<i>edge</i>	$r(e W)$
$y_{4,1}^2 x^{2,2}$	(5, 5, 5, 5, 5, 5, 0, 1, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5)
$y_{4,2}^2 x^{2,2}$	(5, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 0, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5)
$y_{4,3}^2 x^{2,2}$	(5, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 1, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5)
$y_{4,4}^2 x^{2,2}$	(4, 4, 4, 4, 4, 4, 1, 1, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4)
$vy_{5,4}^3$	(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3)
$y_{5,1}^3 x^{3,1}$	(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 0, 1, 5, 5, 5, 5, 5)
$y_{5,2}^3 x^{3,1}$	(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 0, 5, 5, 5, 5, 5)
$y_{5,3}^3 x^{3,1}$	(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 1, 5, 5, 5, 5, 5)
$y_{5,4}^3 x^{3,1}$	(4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 1, 1, 4, 4, 4, 4, 4)
$vy_{6,4}^3$	(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 3, 3, 3)
$y_{6,1}^3 x^{3,2}$	(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 0, 1, 5, 5, 5, 5)
$y_{6,2}^3 x^{3,2}$	(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 0, 5, 5, 5, 5)
$y_{6,3}^3 x^{3,2}$	(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 1, 5, 5, 5, 5)
$y_{6,4}^3 x^{3,2}$	(4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 1, 1, 4, 4, 4, 4)
$vy_{7,4}^4$	(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 3, 3)
$y_{7,1}^4 x^{4,1}$	(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 0, 1, 5, 5)
$y_{7,2}^4 x^{4,1}$	(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 0, 5, 5)
$y_{7,3}^4 x^{4,1}$	(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 1, 5, 5)
$y_{7,4}^4 x^{4,1}$	(4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 1, 1, 4, 4)
$vy_{8,4}^4$	(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2)
$y_{8,1}^4 x^{4,2}$	(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 0, 1)
$y_{8,2}^4 x^{4,2}$	(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 0)
$y_{8,3}^4 x^{4,2}$	(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 1)
$y_{8,4}^4 x^{4,2}$	(4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 1, 1)

BAB 5. PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada Bab 4, penelitian ini mendapatkan empat Lemma dan empat Teorema dari dimensi metrik sisi graf yang diteliti. Hasil Lemma dan Teorema adalah sebagai berikut:

Lemma 1. *Jika W adalah resolving set dari amal(S_n, v, m), maka $|W| = \sum_{i=1}^m (|U_i| - 1)$.*

Lemma 2. *Jika W adalah resolving set dari amal(B_d^n, v, m), maka $|W| = \sum_{i=1}^m (|U_i| - 1)$.*

Lemma 3. *Jika W adalah resolving set dari amal(P_n, v, m), maka $|W| = (\sum_{i=1}^m |U_i|) - 1$.*

Lemma 4. *Jika W adalah resolving set dari graf amal($Bt_{m,n}, v, k$), maka $|W| = \sum_{i=1}^m (|U_i| - 2)$.*

Teorema 1. *Dimensi metrik sisi hasil amal(S_n, v, m), dengan $n \geq 3, m \geq 2$ adalah $m(n - 2)$.*

Teorema 2. *Dimensi metrik sisi hasil amal(B_d^n, v, m), dengan $n - d \geq 2, d = 4, m \geq 2$ adalah $m(n - d - 1)$.*

Teorema 3. *Dimensi metrik sisi hasil amal(P_n, v, m), dengan $n \geq 2, m \geq 2$ adalah $m - 1$.*

Teorema 4. *Dimensi metrik sisi hasil amal($Bt_{m,n}, v, k$), dengan $m = 2, n \geq 3, k \geq 2$ adalah $2k(n - m)$.*

Dari teorema di atas, sehingga diperoleh banyaknya dimensi metrik sisi Keluarga graf pohon hasil operasi amalgamasi titik sebagai berikut :

1. Dimensi metrik sisi operasi graf bintang $amal(S_n, v, m) = m(n - 2)$;
2. Dimensi metrik sisi operasi graf sapu $amal(B_d^n, v, m) = m(n - d - 1)$;
3. Dimensi metrik sisi operasi graf lintasan $amal(P_n, v, m) = m - 1$;
4. Dimensi metrik sisi operasi graf pohon pisang $amal(Bt_{m,n}, v, k) = 2k(n - m)$.

Graf dalam penelitian ini terdiri dari graf bintang $amal(S_n, v, m)$, graf sapu $amal(B_d^n, v, m)$, graf lintasan $amal(P_n, v, m)$, dan graf pohon pisang $amal(Bt_{m,n}, v, k)$. Masing-masing graf memiliki kardinalitas titik, kardinalitas sisi, serta Lemma dan Teorema dimensi metrik sisi. Kardinalitas titik dengan kardinalitas sisi pada setiap graf, memiliki selisih $n + 1$. Artinya, jika sebuah graf G memiliki sebanyak n sisi, maka akan ada sebanyak $n + 1$ titik. Hal ini dapat terjadi karena dasar terbentuknya sebuah sisi adalah minimal terdapat dua titik, sehingga dua titik tersebut dihubungkan oleh satu buah sisi. Lemma pada penelitian ini digunakan untuk membantu terbentuknya Teorema dan proses pembuktian batas bawah dari Teorema. Teorema digunakan untuk memperoleh nilai dimensi metrik sisi dari graf yang diteliti hingga *expand* ke- n . Pemilihan *resolving set* masing-masing graf dipilih pada titik daun di setiap subgraf *copy-an* hasil operasi amalgamasi titik, dengan menyisakan satu titik daun yang bukan anggota *resolving set*.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian dimensi metrik sisi hasil operasi amalgamasi titik graf bintang, graf sapu, graf lintasan, dan graf pohon pisang, saran bagi pembaca jika ingin menggunakan operasi graf, maka sebaiknya menjelaskan bagaimana proses pembentukan operasi graf dan mendefinisikan terlebih dahulu hasil graf yang telah dioperasikan sebelum dilakukan penelitian lebih lanjut. Sehingga membuat pembaca lain lebih mudah memahami bagaimana proses dan hasil akhir dari operasi graf yang digunakan, dan untuk lebih teliti dalam merumuskan hasil pola representasi jarak sisi terhadap *resolving set*.

DAFTAR PUSTAKA

- Adawiyah, R., Dafik, R. Alfarisi, R.M. Prihandini, dan I. H. Agustin. 2019. Edge Metric Dimension on Some Families of Tree. *Journal of Physics: Conference Series*.1180(1): 012005.
- Adawiyah, R., Dafik, R. Alfarisi, R.M. Prihandini, I.H. Agustin, dan M. Venkatachalam. 2020. The local edge metric dimension of graph. *Journal of Physics: Conference Series*.1543(1): 012009.
- Adawiyah, R., dan R. M. Prihandini. 2021. Dimensi Metrik Sisi Pada Keluarga Graf Tangga. *Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*.12(1): 27.
- Ajmal, M. 2017. Zagreb Polynomials and Multiple Zagreb Indices for The Line Graphs of Banana Tree Graphs, Firecracker Graph, and Subdivision Graphs. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*. 13(6): 2659-2672.
- Balakrishnan, R., dan K. Ranganathan. 2012. *A Textbook of Graph Theory Second Edition*. New York: Springer Science+Business Media.
- Bondy, J. A., dan U. S. R. Murty. 1976. *Graph Theory with Applications*. United States of America: Elsevier Science Publishing Co., Inc.
- Chartrand, G., dan L. Lesniak. 1996. *Graphs Digraphs*. New York : Drew university.
- Chartrand, G., L. Eroh, M.A. Johnson, dan O. R. Oellerman. 2000. Resolvibility in Graphs and The Metric Dimension of A Graph. *Discrete Applied Mathematics*. 105(1-3): 99-113.
- Citra, S. M., A.I. Kristiana, R. Adawiyah, dan R.M. Prihandini. 2021. On The Packing Chromatic Number of Vertex Amalgamation of Some Related Tree Graph. *In Journal of Physics: Conference Series*. 1836(1).

Febrianti, F., L. Yulianti, dan N. Narwen. 2019. Dimensi Metrik Pada Graf

- Amalgamasi Tangga Segitiga Diperumum Homogen. *Jurnal Matematika UNAND*. 8(1): 84-90.
- Figuroa-Centeno, R.M., Ichishima, R., dan Muntaner-Batle, F.A. 2003. Labeling The Vertex Amalgamation of Graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*. 23(1): 129-139.
- Fitriani, D., dan A. N. M. Salman. 2016. Rainbow connection number of amalgamation of some graphs. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*. 13(1): 90–99.
- Guichard, D. 2017. *An introduction to combinatorics and graph theory*. California: Whitman College-Creative Commons.
- Kelenc, A., N. Tratnik, dan I. G. Yero. 2016. Uniquely identifying the edges of a graph: The edge metric dimension. *Discrete Applied Mathematics*. 251(1): 204–220.
- Maowa, J. 2016. A Study on Graceful Labeling of Trees. *Thesis*. Bangladesh: Departement of Computer Science and Engineering. Bangladesh University of Engineering and Technology.
- Minarti, L. D., Dafik, S. Setiawani, Slamim, dan A. Fatahillah. 2019. Pewarnaan Sisi r -Dinamis Pada Graf Hasil Operasi Amalgamasi Titik Keluarga Graf Pohon dan Kaitannya Dengan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi. *Saintifika*. 21(2):16-22.
- Munir, R. 2010. *Matematika Diskrit*. Edisi Ketiga. Bandung: Teknik Informatika.
- Nasir, R., S. Zafar, dan Z. Zahid. 2018. Edge metric dimension of a graph. *Ars Combinatoria*. 147 : 143–156.
- Rosen, K. H. 2019. *Discrete Mathematics and Its Applications Seventh Edition*. New York:Monmouth University.

Slamin. 2009. *Desain Jaringan: Pendekatan Teori Graf*. Jember: Universitas Jember.

Sriram, S., D. Ranganayakulu, I. Venkat, dan K. G. Subramanian. 2014. On Eccentric Graphs of Broom Graphs. *Annals of Pure and Applied Mathematics*. 5(2): 146–152.



LAMPIRAN

Lampiran A. Matrik Penelitian

Judul	Latar Belakang	Rumusan Masalah	Variabel	Indikator	Sumber Data	Jenis Penelitian	Metode Penelitian
Dimensi Metrik sisi Hasil Operasi Amalgamasi Titik pada Keluarga Graf Pohon	1. Teori graf 2. Dimensi metrik sisi 3. Operasi Graf 4. Keluarga graf pohon	Berapa dimensi metrik sisi hasil operasi amalgamasi titik pada keluarga graf pohon?	1. Keluarga graf pohon meliputi, graf bintang, graf sapu, graf lintasan, dan graf pohon pisang 2. Operasi amalgamasi titik 3. Dimensi metrik sisi	Untuk menentukan dimensi metrik sisi operasi amalgamasi titik pada keluarga graf pohon	Kepustakaan	Penelitian eksploratif	1. Metode pendekatan aksiomatik 2. Metode pendeteksian pola