BUKU AJAR

PENGANTAR MATEMATIKA 2 UNTUK TEKNIK SIPIL

Nanin Meyfa Utami, ST., MT
Ir. Sri Sukmawati,ST.,MT

UPT PENERBITAN
UNIVERSITAS JEMBER

2022

PENGANTAR MATEMATIKA 2 UNTUK TEKNIK SIPIL

Penulis:
Nanin Meyfa Utami, ST., MT
Ir. Sri Sukmawati,ST.,MT

Penjamin Mutu:
M. Arifin , Satria Janu P.

ISBN: 978-623-6039-97-7

Cetakan Pertama : April 2022

Penerbit:
UPT Penerbitan Universitas Jember

Redaksi:
Jl. Kalimantan 37, Jember 68121
Telp. 0331-330224, Voip. 00319
e-mail: upt-penerbitan @unej.ac.id

Distributor Tunggal:
UNEJ Press
Jl. Kalimantan 37, Jember 68121
Telp. 0331-330224, Voip. 00319
e-mail: upt-penerbitan @unej.ac.id

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Tuhan Yang Maha Esa, dengan segala rahmad dan hidayah yang diberikan kepada penulis sehingga bisa menyelesaikan penyusunan buku Pengantar Matematika 2 untuk Teknik Sipil ini. Tujuan dari penyusunan buku ini adalah untuk mempermudah mahasiswa dalam proses belajar dan memahami materi matematika 2 yang diterapkan pada bidang teknik sipil dan memberikan kemudahan dosen pengampu dalam memberikan kerangka satuan ajar pembelajaran pada setiap minggunya.

Buku ini dibuat dengan mempertimbangkan segala aspek kebutuhan mahasiswa dalam mempelajari materi Matematika 2. Buku ini penulis konsep untuk menumbuhkan kemandirian mahasiswa dan dosen pengampu matakuliah. Buku ini disusun dengan mengacu beberapa sumber referensi dari teori dasar kalkulus hingga perhitungan aplikatif di bidang teknik sipil.

Buku ini masih memerlukan penyempurnaan di kemudian hari sehingga penulis memerlukan masukan dan saran dari berbagai kalangan pembaca buku ini. Tak lupa penulis ucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu menyusun buku ajar ini hingga tuntas.

Jember, 10 Nopember 2021

Penulis

PRAKATA

Penulis memanjatkan rasa syukur yang mendalam kepada Allah Yang Maha Penyayang.Karena dengan ijinnya, naskah buku ini terselesaikan tepat waktu mengingat tugas dan kewajiban lain yang bersamaan hadir. Penulis merasa memiliki kewajiban untuk mewujudkan naskah buku ini sebagai bagian dari slogan pribadi *banyak memberi banyak menerima.* Buku ini ditulis berdasarkan keinginan penulis yang sering mengamati sikap belajar mahasiswa. Para mahasiswa terkadang mengalami kesusahan untuk mendapatkan sumber materi yang jelas dan tepat. Melihat keadaan tersebut, penulis berusaha menyusun buku ini dengan memuat materi pengantar matematika 2 untuk teknik sipil.

Penulisan buku ini juga merupakan dukungan dan bantuan beberapa pihak. Karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada Universitas Jember, atas kepercayaan ini, penulis yakin bahwa itu dapat menunjang penulis dalam upaya meningkatkan kualitas diri dan karya untuk masa yang akan datang. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada seluruh rekan dosen Fakultas Teknik Universitas Jemberuntuk semua bantuan, motivasi, dan saran-sarannya.

Meskipun telah berusaha untuk menghindarkan kesalahan, penulis menyadari juga bahwa buku ini masih mempunyai kelemahan sebagai kekurangannya. Karena itu, penulis berharap agar pembaca berkenan menyampaikan kritikan. Dengan segala pengharapan dan keterbukaan, penulis menyampaikan rasa terima kasih dengan setulus-tulusnya. Kritik merupakan perhatian agar dapat menuju kesempurnaan. Akhir kata, penulis berharap agar buku ini dapat membawa manfaat kepada pembaca.

Jember, 10 Nopember 2021

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

BAB 2

TRANSFORMASI LAPLACE DAN LAPLACE INVERS

KAD: Mampu memahami konsep tentang Transformasi Laplace dan Transformasi Laplace Invers dan mampu menyelesaikan perhitungannya.

Indikator:

- Menjelaskan Konsep Transformasi Laplace
- Menjelaskan Sifat Trasformasi Laplace
- Menjelaskan Konsep Transformasi Laplace Invers
- Menjelaskan Sifat Transformasi Laplace Invers

2.1. Transformasi Laplace

Penggunaan konpsep transformasi laplace mengacu pada teori dasar aljabar linier dengan perhitungan matematis yang kompleks. Fungsi transformasi Laplace antara lain untuk menyelesaikanpermasalahan berikut :

- Digunakan untuk sistem komunikasi
- Digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial
- Digunakan untuk menyelesaikan persamaan linier
- Digunakan pada Vibrasi transien
- Digunakan untuk Gelombangperiodik dan non periodik
- Dan pada rangkaian linier di transienitas

9) Sifat konvolusi

Jika $L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ dan $L^{-1}\{g(s)\} = G(t)$ maka $L^{-1}\{f(s)g(s)\} = \int_0^t F(u)G(t-u)du = F * G$

F*G dinamai konvolusi atau faltung dari F dan G, dan teoremanya disebut dengan teorema konvolusi atau sifat konvolusi.

Contoh:

Karena $L^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} = e^{-4t}$ dan $L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = e^{2t}$

Maka diperoleh hasil

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)(s-2)}\right\} = \int_0^t e^{-4u} e^{2(t-u)} du = e^{2t} + e^{-4t}$$

2.2.3. Contoh Soal Laplace Invers

a. Tentukanlah Penyelesaian $L^{-1}\left\{\frac{5s+1}{(s^2-s-12}\right\}$

Pertama,kita periksa apakah derajat pembilang lebih rendah dari penyebut.

$$\frac{5s+1}{s^2-s-12} = \frac{5s+1}{(s+4)(s+3)}$$

Sehingga didapat pecahan parsial dari persamaan di atas yaitu:

$$\frac{A}{s-4} = \frac{B}{s+3}$$

a. carilah $L\{F(t)\}$

b. carilah $L\{F'(t)\}$

c. apakah $L\{F'(t)\} = sf(s) - F(0)$ berlaku untuk contoh kasus ini

6. Hitung : $L\{19\sin 4t + 5t^2\}$

7. Hitung: $L\{e^{3t}(\sin 2t - \sin 5t)\}$

BAB 3
PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL DENGAN TRANSFORMASI LAPLACE DAN TRANSFORMASI LAPLACE INVERS

KAD: mampu memahami konsep penyelesaian persamaan diferensial dengan transformasi laplace dan transformasi laplace invers

Indikator:

- Menjelaskan Transformasi Laplace untuk penyelesaian Persamaan Differensial
- Menjelaskan Transformasi Laplace Invers untuk penyelesaian Persamaan Differensial
- Menjelaskan Penerapan persamaan diferensial di Bidang Teknik Sipil

3.1. Transformasi Laplace dan Transformasi Laplace Invers untuk Penyelesaian Persamaan Differensial

Transformasi Laplace dan Transformasi Laplace Invers dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial baik yang homogen maupun non homogen, baik dengan koefisien konstan maupun koefisien variabel x. Sebagai contoh ditentukan persamaan diferensial sebagai berikut:

$\frac{d^2y}{dx}+p\frac{dy}{dx}+qy=r(x)$ atau $y''+py'+qy=r(x)$ dengan p,q adalah konstanta dan persamaan tersebut memiliki kondisi batas y(0) = A dan y'(0) = B, A dan B bisa merupakan sebuah konstanta, bisa juga variabel x. Penyelesaian persamaan diferensial dengan cara Transformasi Laplace dan Transformasi Laplace dan Transformasi

$$L\{F''(t)\} = L\{y''(x)\} = f(s).s^2 - 3s - 2$$

$$L\{F'(t)\} = sf(s) - F(0) \quad L\{F'(t)\} = L\{y'(x)\} = sf(s) - 3$$

$$L\{F'(t)\} = L\{y'(x)\} = f(s).s - 3$$

$$L\{F(t)\} = f(s)$$

$$L\{F(t)\} = L\{y(x)\} = f(s)$$

$$L\{e^{2x}\} = \frac{1}{s-2}$$

Sehingga:

$$L\{y''\} - 2L\{y'\} - 3L\{y\} = 3L\{e^{2x}\}$$

$$\left(s^2.f(s) - 2s - 3\right) - 2(s.f(s) - 3) - 3(f(s)) = \frac{1}{s-2}$$

$$\left(s^2.f(s) - 2s.f(s) - 3f(s)) - 2s + 3\right) = \frac{1}{s-2}$$

$$\left(s^2 - 2s - 3\right)f(s) = \frac{1}{s-2} + 2s - 3$$

$$\left(s^2 - 2s - 3\right)f(s) = \frac{2s^2 - 7s + 7}{s-2}$$

$$f(s) = \frac{2s^2 - 7s + 7}{s-2} \cdot \frac{1}{s^2 - 2s - 3}$$

$$f(s) = \frac{2s^2 - 7s + 7}{(s-2)\left(s^2 - 2s - 3\right)}$$

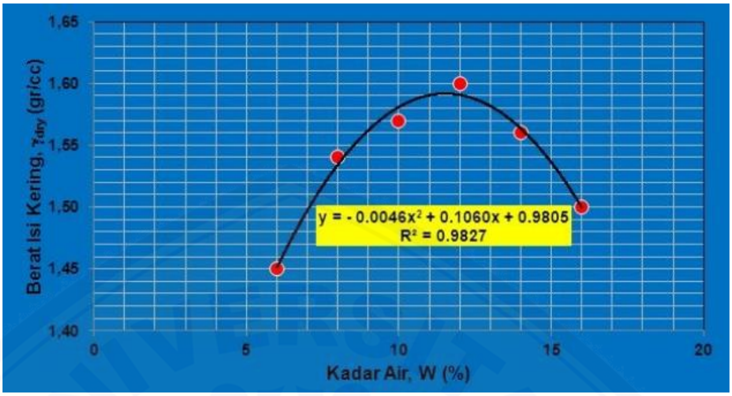
$$f(s) = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+3}$$

$$y(x) = L^{-1}\{f(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+3}\right\}$$

Dicari nilai A, B dan C dengan cara:

$$2s^2 - 7s + 7 = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+3}$$

a. Tentukan persamaan kepadatan dari perkerasan jalan!



Gambar 3. 1 Grafik Persamaan Kepadatan Dari Perkerasan Jalan

Didapatkan persamaan kepadatan

$y = -0{,}0046x^2+0{,}1060x+0{,}9805$

$\gamma dry = -0{,}0046W^2+0{,}1060W+0{,}9805$

b. Tentukan kadar air optimum dan kepadatan maksimum dengan menggunakan konsep persamaan diferensial!
   Kadar air optimum dicari dengan persamaan:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\gamma dry}{dW} = -0{,}0092x + 0{,}1060$$

$$= -0{,}0092W + 0{,}1060$$

Teorema Maxima/Minima:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\gamma dry}{dW} = 0$$

$-0{,}0092W + 0{,}1060 = 0$

Maka, $W = 11{,}52\%$

Kepadatan Maksimum dicari dengan persamaan:

BAB 4

FUNGSI GAMMA DAN FUNGSI BETA

KAD: Mampu memahami konsep dan perhitungan fungsi Gamma dan fungsi Beta

Indikator:

- Menjelaskan Konsep Fungsi Gamma
- Menjelaskan Contoh Soal dan Pembahasan Fungsi Gamma
- Menjelaskan Konsep Fungsi Beta

4.1. Fungsi Gamma

4.1.1 Konsep Fungsi Gamma

Bentuk Umum:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = (n-1)!$$

Konvergen untuk n > 0

Bila n bilangan bulat positip, maka:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

dan

$$\Gamma(1) = 1$$

Contoh:

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1! = 1$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{15}{8}} = -\frac{8}{15}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{8\sqrt{\pi}}{15}$$

4.2. Fungsi Beta

4.2.1 Konsep Fungsi Beta

Bentuk umum:

$$\beta(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$$

Konvergen untuk m dan n > 0

Fungsi Beta, sama seperti halnya fungsi Gamma, dapat digunakan untuk menyelesaikan integral parsial yang berulang

Berikut ini penulisan dari Fungsi Beta:

a. $$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1}\varphi \cos^{2m-1}\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}\beta(m,n)$$

b. $$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi} \qquad (0 < p < 1)$$

c. $$\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\,.\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

4.2.2 Contoh Soal Fungsi Beta

1. Hitung $\int_0^1 x^3(1-x)^2\,dx$

   Jawab:

   Fungsi integral di atas, jika diselesaikan dengan menggunakan rumus integral, masih memungkinkan,

BAB 5

FUNGSI BESSEL

KAD: mampu memahami konsep dan perhitungan persamaan diferensial Bessel

Indikator

- Menjelaskan Konsep Fungsi Bessel

5.1 Fungsi Bessel

5.1.1 Konsep Fungsi Bessel

Bentuk umum PD Bessel

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \quad , n > 0 \quad \text{.............................(5.1)}$$

atau,

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0 \quad \text{.........................(5.2)}$$

Penyelesaian umum (y) nya adalah:

$$y(x) = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x) \text{..(5.3)}$$

Persamaan diferensial Bessel umumnya digunakan untuk menyelesaikan masalah-masalah fisika dan teknik. Persamaan diferensial Bessel termasuk persamaan diferensial linier orde 2 biasa, hanya PD Bessel mempunyai koefisien variabel x, bukan konstanta. Penyelesaian PD Bessel terdiri dari 2 jenis, yaitu fungsi Bessel jenis pertama dan fungsi Bessel jenis kedua.

Penyelesaian J_n (x) ,memiliki limit berhingga untuk x yang mendekati nol disebut sebagai *fungsi Bessel jenis pertama dan berorde n*. Penyelesaian Y_n (x) yang tidak memiliki limit berhingga (artinya tak terbatas) untuk x yang mendekati nol disebut juga dengan *fungsi Bessel jenis kedua dan berorde-n atau fungsi Neumann*.

5.1.3 Fungsi Bessel Jenis Kedua

Fungsi Bessel jenis kedua berorde *n* didefinisikan sebagai :

$$Y_n(x) = \begin{cases} \dfrac{J_n(x)\cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi} & n \neq 0,1,2,3,\ldots \\[2ex] \lim\limits_{p \to n} \dfrac{J_p(x)\cos p\pi - J_{-p}(x)}{\sin p\pi} & n = 0,1,2,3,\ldots \end{cases}$$

.......(5.11)

Apabila n adalah 0,1,2,3,… maka deret untuk $Y_n(x)$ adalah:

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi}\left\{\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma\right\} J_n(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k-1)\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\{\Phi(k) + \Phi(k+1)\}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}}{k!(n+k)!}$$

…(5.12)

$$\Phi(0) = 0$$

5.1.4 Fungsi Pembangkit J_n(X) (Generating Function)

Fungsi

$$e^{\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-} J_n(x)t^n \quad \ldots\ldots(5.13)$$

Dinamakan *fungsi pembangkit* untuk fungsi Bessel jenis pertama berorde bulat, yang sangat banyak gunanya dalam memperoleh sifat-sifat fungsi ini untuk nilai *n* bulat dan kemudian seringkali dapat dibuktikan berlaku untuk semua *n*.

5.1.5 Rumus–rumus Pengulangan (Recurrence Formula)

Hasil berikut ini berlaku untuk setiap nilai *n*.

1. $J_{n+1}(x) = \dfrac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x)$
2. $J'_n(x) = \dfrac{1}{2}\left[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\right]$

BAB 6
FUNGSI LEGENDRE

KAD: Mampu memahami konsep dan perhitungan persamaan diferensial Legendre

Indikator:

- Menjelaskan Konsep Dasar Fungsi Legendre
- Menjelaskan Polinom Legendre

6.1 Fungsi Legendre

6.1.1 Konsep Dasar Fungsi Legendre

Bentuk umum polinom legendre:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0$$

atau,

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$$

Penyelesaiannya:

$$y(x)=c_1P_n(x)+c_2Q_n(x)$$

Dalam hal ini, suku banyak $P_n(x)$ dinamakan suku banyak Legendre dan $Q_n(x)$ dinamakan fungsi Legendre jenis kedua, yang tak terbatas di $x=\pm 1$

6.2 Polinom Legendre

Polinom Legendre pada bab ini adalah himpunan fungsi Eigen dari suatu kasus Sturm-Liouville Singular, disini akan dibahas dengan rumus Rodrigues:

$$P_n(x)=\frac{C_n}{\omega(x)}\frac{d^n}{dx^n}\left[\omega(x)Q(x)^n\right]^n$$

$$2^n n!(f,P_n)=\int_{-1}^{1} f(x)\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\,dx=(-1)^n\int_{-1}^{1} f^{(n)}(x)(x^2-1)^n\,dx$$

Sehingga, untuk nilai $m < n$, kita peroleh $\langle P_m,P_n\rangle = 0$. Jika ditukar fungsi m dan n, apabila juga diperoleh $\langle P_m,P_n\rangle = 0$ untuk $m > n$. Selanjutnya, dengan mengambil $f = P_n$, didapatkan

$$\left\|P_n(x)\right\|^2=\frac{2n!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx=\frac{2}{n+1}\bigg|$$

Dengan demikian Polinom P_n memenuhi persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\left[\left(1-x^2\right)P'_n(x)\right]'+n(n+1)P_n(x)=0$$

Teorema. Himpunan $P_n(x)_0^\infty\Big|$ merupakan dasar ortogonal untuk $L^2(-1,1)$.

Polinomial Legendre berderajat n juga dapat dinyatakan dengan $P_n(x)$

$$P_n(x)=\sum_{m=0}^{M}(-1)^m\frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!}x^{n-2m}$$

$$=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n-\frac{(2n-2)!}{2^n(n-1)!(n-2)!}x^{n-2}+\ldots$$

dengan $M={}^{n}\!/_{2}$ atau $M={}^{(n-1)}\!/_{2}$ tergantung mana M yang bilangan bulat

6.3 Rumus-rumus pengulangan (Recurrence Formula) :

1. $P_{n+1}(x)=\dfrac{2n+1}{n+1}xP_n(x)-\dfrac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$
2. $P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)=(2n+1)P_n(x)$

6.4 Fungsi Legendre Jenis Kedua

$Q_n(x)$ adalah fungsi legendre jenis kedua jika |x|<1. Fungsi legendre jenis kedua diberikan oleh rumus berikut ini, masing-masing untuk n genap dan n ganjil:

$$= 55.\frac{(2n+1)}{2^n}\sum_{m=0}^{M}(-1)^m \frac{(2n-2m)!}{m!(n-m)!(n-2m)!}.\frac{1}{n-2m+1}$$

$$= 55.\frac{(2n+1)}{2^n}\sum_{m=0}^{M}(-1)^m \frac{(2n-2m)!}{m!(n-m)!(n-2m+1)!}$$

Dengan mengambil $n = 0$ maka diperoleh $A_0 = 55$.
Untuk n = 1, 2, …. diperoleh

$$A_1 = \frac{165}{2}.\frac{2!}{0!1!2!} = \frac{165}{2}$$

$$A_1 = \frac{175}{4}.\left(\frac{4!}{0!2!3!} - \frac{2!}{1!1!1!}\right) = 0$$

$$A_1 = \frac{385}{8}.\left(\frac{6!}{0!3!4!} - \frac{4!}{1!2!2!}\right) = -\frac{385}{8}$$

Jadi persamaan potensial di dalam bola adalah:

$$u(R,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\cos(\phi))$$

$$u(R,\phi) = 55 + \frac{165}{2}RP_1(\cos(\phi)) - \frac{385}{8}R^2 P_2(\cos(\phi)) + \ldots$$

dengan $P_1, P_2, P_3, \ldots$ seperti diberikan pada pembahasan polinomial Legendre dengan formula Rodrigues, maka diperoleh:

$$u(R,\phi) = 55 + \frac{165}{2}R(\cos(\phi)) - \frac{385}{8}R^2\left[\frac{5}{2}(\cos(\phi))^3 - \frac{3}{2}(\cos(\phi))\right] + \ldots$$

Karena $R = 1$ maka $B_n = A_n$, sehingga potensial di luar bola adalah:

$$u(R,\phi) = \frac{55}{R} + \frac{165}{2R^2}P_1(\cos(\phi)) - \frac{385}{8R^3}P_3(\cos(\phi)) + \ldots$$

BAB 7
DERET FOURIER

KAD: Mampu memahami konsep dan perhitungan Deret Fourier

Indikator:

- Menjelaskan Fungsi Periodik
- Menjelaskan Syarat Dirichlet
- Menjelaskan Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil
- Menjelaskan Sinus dan Cosinus Fourier ½ Jangkauan
- Menjelaskan Harmonic Analisis
- Menjelaskan Identitas Parsevel

7.1 Konsep Dasar Deret Fourier

Deret Fourier ditemukan oleh ilmuwan Prancis, Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) yang menyatakan bahwa semua bentuk fungsi/sinyal periodik dapat direpresentasikan ke dalam Deret Fourier yang merupakan deret Sinusoidal (sinus dan cosinus). Gelombang = Getaran = Sinyal = Fungsi (model matematiknya) mengakibatkan tekanan molekul udara di suatu daerah menjadi tinggi & daerah lain rendah. Jika tekanan diukur sebagai fungsi dari ***t***, maka akan diperoleh fungsi periodik $f(t)$.

Catatan :

- Jika suatu bentuk sinyal/fungsi tertentu akan berulang dengan bentuk yangg sama dalam setiap periode, maka sinyal tersebut dikatakan sebagai **sinyal periodik**.
- Gelombang suara merupakan gelombang sinus murni dengan frekwensi resultan gelombang suara merupakan sejumlah nada dengan frekwensi 2, 3, 4, ... kali frekwensi dasar.
- Frekwensi lebih tinggi berarti periode lebih pendek.
- Jika $\sin\omega t$ dan $\cos\omega t$ = ferkwensi dasar, maka $\sin\omega t$ dan $\sin n\omega t$ = nada harmonik yang lebih tinggi.

BAB 8

VEKTOR

KAD: memahami konsep tentang vektor

Indikator:

- Menjelaskan Konsep Vektor
- Menjelaskan Penulisan Vektor
- Menjelaskan Sifat-Sifat Vektor
- Menjelaskan Diferensial Vektor

8.1. Konsep Vektor

Pengertian vektor: vektor adalah besaran yang memiliki nilai dan arah

Contoh vektor:

1. Temperatur
2. Tekanan
3. Massa
4. Gaya
5. Kecepatan, percepatan, dll

Adapun perbedaan antara besaran vektor dan besaran skalar adalah:

Besaran skalar tidak mempunyai arah contohnya suhu, panjang dan luas. Namun vektor adalah besaran yang memiliki arah seperti yang dicontohkan di atas. Kegunaan vektor dalam teknik sipil: menghitung gerakan angin, menghitung perpindahan, regangan dan tegangan pada sebuah benda yang mendapatkan beban. Pada penggunaan vektor kita akan mengenal istilah eigen dan vektor eigen. Pengertian eigen value dan eigen vektor adalah fungsi dari elemen sebuah matriks bujur sangkar. Analisa matriks ini diterapkan

$$\underline{A}.\underline{B} = 2t^3 + 4t^2 + 2t.\sin t^2 + 4t^4$$
$$\underline{A}.\underline{B} = 4t^4 + 2t^3 + 4t^2 + 2t.\sin t^2$$
$$\frac{d(\underline{A}.\underline{B})}{dt} = 16t^3 + 6t^2 + 8t + 2\sin t^2 + 4t\cos t^2$$

Saat $t = 0$ maka, $\frac{d(\underline{A}.\underline{B})}{dt} = 0$

4. Misal persamaan kurva:

$$f(x,y,z) = f(t) = (t^2 + 1, 4t - 3, 2t^2 - 6t)$$

Dalam bentuk vektor:

$$\underline{r}(t) = (t^2 + 1)\underline{i} + (4t - 3)\underline{j} + (2t^2 - 6t)\underline{k}$$

Vektor singgung adalah:

$$\frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\left(t^2 + 1\right)\underline{i} + (4t - 3)\underline{j} + (2t^2 - 6t)\underline{k}\right]$$
$$\frac{d\underline{r}}{dt} = 2t\underline{i} + 4\underline{j} + (4t - 6)\underline{k} = (2t, 4, 4t - 6)$$

Misal T adalah vektor singgung satuan, maka: $T = \frac{d\underline{r}/dt}{\left|d\underline{r}/dt\right|}$

Dan,

$$\left|d\underline{r}/dt\right| = \sqrt{(2t)^2 + 4^2 + (4t - 6)^2} = \sqrt{4t^2 + 16 + 16t^2 - 48t + 36} = \sqrt{20t^2 - 48t + 52}$$
$$= \sqrt{4(5t^2 - 12t + 13)} = 2\sqrt{5t^2 - 12t + 13}$$

Saat $t = 2$, maka $\frac{d\underline{r}}{dt} = (2.2, 4, 4.2 - 6) = (4, 4, 2)$ dan

$$\left|\frac{d\underline{r}}{dt}\right| = 2\sqrt{5.4 - 12.2 + 13} = 2.\sqrt{9} = 2.3 = 6$$

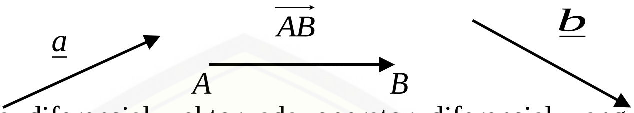
Sehingga didapatkan vektor singgung satuan saat $t = 2$

adalah: $T = \frac{(4,4,2)}{6} = \left(\frac{4}{6}, \frac{4}{6}, \frac{2}{6}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Atau $T = \frac{2}{3}\underline{i} + \frac{2}{3}\underline{j} + \frac{1}{3}\underline{k}$

8.7. Rangkuman

1. Pengertian vektor adaah besaran skalar yang memiliki arah Contohnya gaya, perpindahan, percepatan, kecepatan, dll.
2. Penulisan notasi untuk vektor : $\underline{a}$, $\bar{a}$, $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$
   Bisa juga digambarkan dengan anak panah



3. Pada diferensial vektor ada operator diferensial yang dapat digunakan, yang disebut dengan DEL atau Nabla
   $$\nabla = \frac{d}{dx}\underline{i} + \frac{d}{dy}\underline{j} + \frac{d}{dz}\underline{k} = \left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}\right)$$
   Ada gradien $(\nabla \underline{F})$ atau $(\nabla \Phi)$, ada divergensi $(\nabla . \underline{F})$ atau $(\nabla . \Phi)$, dan ada pula curl $(\nabla x \underline{F})$ atau $(\nabla x \Phi)$, yang kesemuanya dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan di bidang keteknikan
4. Pada integral vektor, ada :
   - Intrgral garis, untuk menghitung usaha : $W = \int_a^b \underline{F}.dr$
   - Integral untuk menghitung luasan : $S = \iint_S \underline{F}.\underline{n}.dS$
   - Integral untuk menghitung volume : $\iiint_V \underline{F}.dV = \iiint_V \underline{F}dxdydz$
   - Kombinasi antara ketiganya :

     a. Dalil Divergensi Gauss
     $$\iiint_V \nabla \underline{F}.dV = \oiint_L \underline{F}dL = \oiint_L \underline{F}.\underline{n}dL$$
     b. Dalil Stokes
     $$\iint_L (\nabla x \underline{F}).\underline{n}dL = \iint_L (\nabla x \underline{F})dL = \oint_C \underline{F}.dr$$
     c. Dalil Green Dalam Bidang
     $$\iint_R \left(\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy}\right)dxdy = \oint_C (Mdx + Ndy)$$

8.8. Diskusi Interaktif

Jika diketahui sebuah mobil bergerak sejauh 60 km ke utara, kemudian 75 km ke arah timur laut, dan dilanjutkan ke arah selatan sejauh 60 km juga. Dengan menggunakan skala yang sesuai, tentukan secara grafis dan matematis :

a. Berapa jauh dan
b. Dalam arah mana dia dari kedudukannya semula
Diskusikan dengan teman untuk menjawab pertanyaan ini.

8.9. Rujukan/Daftar Pustaka

Untuk mendalami materi pada bab 8 ini anda bisa membaca referensi sebagai berikut:

- Rawuh dan Bana Kartasasmita, Ph.D., 1984. *Kalkulus dan Geometri Analitis, Edisi3, Jilid 1*. Penerbit Erlangga.
- Soehardjo. *Analisa Vektor*. ITS Surabaya
- Spiegel, Murray R.; dan Martono, Koko. 1989. *Matematika Lanjutan untuk Para Insinyur dan Ilmuwan Edisi SI (Metrik).* Penerbit Erlangga.

8.10. Latihan soal-soal vektor

1. Gambarlah dan tuliskan dalam bentuk vektor $a\underline{i} + b\underline{j}$ dengan ketentuan sebagai berikut :
   a. Dari titik sumbu (0,0) ke titik (2,-3)
   b. Dari titik (2,3) ke titik (4,2)
   c. Mempunyai besar 6 dengan arah 150^o
2. Gambarlah vektor-vektor dibawah ini pada koordinat kartesian
   a. $\underline{a} = 4\underline{i} + 5\underline{j}$ b. $\underline{b} = 4\underline{i} - 5\underline{j}$ c. $\underline{c} = -4\underline{i} - 5\underline{j}$ d. $\underline{d} = -4\underline{i} + 5\underline{j}$
3. Diketahui vektor $\underline{a} = \frac{3}{2}\underline{i} + \sqrt{3}\underline{j}$, $\underline{b} = \sqrt{2}\underline{i} - 5\underline{j}$ dan $\underline{c} = \frac{1}{2}\underline{i} + \frac{5}{2}\underline{j}$
   Hitunglah: a. $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$ b. $\underline{a} - \underline{b} - \underline{c}$ c. $\underline{a}.\underline{b}.\underline{c}$ d. $\underline{a}x\underline{b}x\underline{c}$ e. $\underline{a}.\underline{b}x\underline{c}$
4. Hitunglah kerja yang dilakukan vektor $6\underline{i} - 8\underline{j}$ pada vektor

BAB 9
MATRIKS

KAD: Mampu memahami konsep dan perhitungan matrik

Indikator:

- Menjelaskan Konsep Matriks
- Menjelaskan Operasi Dasar Matriks
- Menjelaskan Invers Matriks
- Menjelaskan Determinan Invers

9.1. Konsep Matriks

Pengertian matriks : himpunan bilangan atau variabel yang tersusun dalam bentuk baris dan kolom (lajur) dalam bentuk persegi panjang yang terdapat didalam kurung biasa ( ) atau siku [ ].

Contoh penulisan:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} \end{pmatrix}$$

Baris pertama

Baris kedua

Baris ke i

Kolom pertama

Kolom kedua

Kolom ke i

Keterangan :

A = Notasi matriks

$i \times j$ = Ordo matriks

i = jumlah baris

j = jumlah kolom

5. Tentukan determinan, invers, nilai eigen dan vektor eigen dari matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

9.9. Rujukan/Daftar Pustaka

Untuk mendalami materi pada bab 9 ini coba anda baca referensi buku di bawah ini:

- Spiegel, Murray R.; dan Martono, Koko. 1989. *Matematika Lanjutan untuk Para Insinyur dan Ilmuwan Edisi SI (Metrik).* Penerbit Erlangga.
- Rawuh dan Bana Kartasasmita, Ph.D., 1984. *Kalkulus dan Geometri Analitis, Edisi3, Jilid 1.* Penerbit Erlangga.

9.10. Latihan Soal

1. Jika matriks A = $\begin{bmatrix} 2x & 4 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ x & 3y \end{bmatrix}$, C = $\begin{bmatrix} z & 1 \\ 3 & x+y \end{bmatrix}$

   Jika A – B = 2C, maka akan diperoleh himpunan jawab $x, y, z = ...$
2. Diketahui matriks :

   I = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, A = $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 11 & -3 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$

   Nilai 3A – B = …
3. Diketahui matriks M = $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, N = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

   Hasil perkalian M $\times$ N adalah …
4. Diketahui A = $\begin{bmatrix} 2x & 1 \\ x^2 & -3 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} -6 & -7 \\ -x & 5 \end{bmatrix}$, jika det.(A) = det.(B)

   maka nilai x adalah …
5. Invers matriks $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$ adalah …

BAB 10
SISTEM PEERSAMAAN LINIER 2 VARIABEL

KAD: Mampu memahami konsep dan penyelesaian sistem persamaan linier 2 variabel

Indikator:

- Menjelaskan Cara Subtitusi sistem persamaan linier 2 variabel
- Menjelaskan Eleminasi sistem persamaan linier 2 variabel
- Menjelaskan Grafik Sistem persamaan linier 2 variabel
- Menjelaskan Matriks sistem persamaan 2 variabel dan

10.1 Cara Subtitusi sistem persamaan linier 2 variabel

Persamaan linear dua variabel (PLDV) merupakan persamaan yang memiliki dua variabel dan pangkat dari setiap variabelnya adalah satu. Apabila terdapat dua variabel misalnya x dan y, maka PLDV-nya dapat dituliskan :

$ax + by = c$ dengan $a, b \neq 0$

Contoh : :

1). $2x + 2y = 3$

2). $y = 3x - 2$

3). $6y + 4 = 4x$

Penyelesaian dapat dilakukan dengan cara substitusi. Hal ini dilakukan dengan cara memasukkan atau mengganti salah satu variabel dengan variabel dari persamaan kedua.

Contoh :

Tentukan penyelesaian dari SPLDV : $x + y = 4$ dan $x - 2y = -2$ dengan metode substitusi!

Jawab :

- $x + y = 4 \Rightarrow x = 4 - y$
- $x = 4 - y$ disubstitusikan pada $x - 2y = -2$ akan diperoleh :

$$x - 2y = -2$$
$$(4 - y) - 2y = -2$$
$$4 - 3y = -2$$
$$-3y = -6$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{aq-bp}\begin{bmatrix} q & -b \\ -p & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ r \end{bmatrix}$$

Atau juga bisa dengan aturan Cramer, seperti berikut:

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ r & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{Dy}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ p & r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix}}$$

Contoh: :

Carilah nilai x dan y yang memenuhi sistem persamaan linear, dengan cara matriks:

$$2x + y = 5$$
$$x + y = 7$$

Selanjutnya, akan diselesaikan SPLDV di atas menggunakan matriks. Bentuk matriks dari persamaan SPLDV pada soal adalah sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2-1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Jadi, solusi dari dua persamaan linear dua variabel $2x + y = 5$ dan $x + y = 7$ adalah $x = -2$ dan $y = 9$

Sehingga didapatkan:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ F_2 \end{bmatrix}^{(1)} = 1.6e^9 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}^{(1)},$$

$$\begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}^{(1)} = 400e^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}^{(2)}$$

Dengan menggabungkan kedua matriks ini, didapat matriks global sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = 100e^6 \begin{bmatrix} 16 & -16 & 0 \\ -16 & 16+4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \\ 10000 \end{bmatrix} = 100e^6 \begin{bmatrix} 16 & -16 & 0 \\ -16 & 16+4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Untuk menghitung u_2 dan u_3, hanya perlu dengan memecahkan sistem sebesar 2x2

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 10000 \end{bmatrix} = 100e^6 \begin{bmatrix} 20 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Sehingga didapatkan

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.25 \\ 31.25 \end{bmatrix} e^{-3} mm$$

Gaya reaksi pada node 1 diberikan oleh persamaan pada lajur pertama

$$R_1 = 100e^6(-16x6.25e^{-6}) = -10kN$$

10.7 Diskusi Interaktif

Cobalah diskusikan dengan kelompokmu (buat kelompok 3 orang) kemudian diskusikan soal berikut:

(1) Jika terdapat sebuah batang terbebani gaya aksial sebesar 10 kN. Carilah pemanjangan akibat adanya gaya tarik batang ini. Selesaikan dengan menggunakan metode matriks.

BAB 11
SISTEM PERSAMAAN LINIER 3 VARIABEL

KAD: Mampu memahami konsep dan penyelesaian sistem persamaan linier 3 variabel

Indikator:

- Menjelaskan Cara Subtitusi sistem persamaan linier 3 variabel
- Menjelaskan Eleminasi sistem persamaan linier 3 variabel
- Menjelaskan Grafik Sistem persamaan linier 3 variabel
- Menjelaskan Matriks sistem persamaan 3 variabel

11.1 Cara Subtitusi Sistem Persamaan Linier 3 Variabel

Persamaan linear tiga variabel merupakan persamaan yang memiliki tiga variabel dan pangkat masing-masing variabelnya satu. Apabila terdapat tiga variabel tersebut *x*, *y*, dan *z*, maka PLTV-nya dapat dituliskan :

$$ax + by + cz = c \quad \text{dengan } a, b, c \neq 0$$

Langkah yang dilakukan pada metode substitusi yaitu:

1. Mengubah salah satu persamaan yang terdapat pada sistem dan nyatakan x sebagai fungsi dari *y* dan *z*, atau *y* sebagai fungsi dari *y* dan *z* , atau *z* sebagai fungsi dari *x* dan *y*.
2. Mensubtitusi fungsi *x* atau *y atau z* dari langkah pertama pada dua persamaan yang lain, sehingga didapatkan SPLDV.
3. Menyelesaikan SPLDV yang diperoleh dengan metode yang dibahas pada penyelesaian SPLDV pada bab sebelumnya.

Contoh:

Selesaikan himpunan penyelesaian sistem persamaan berikut dengan cara substitusi:

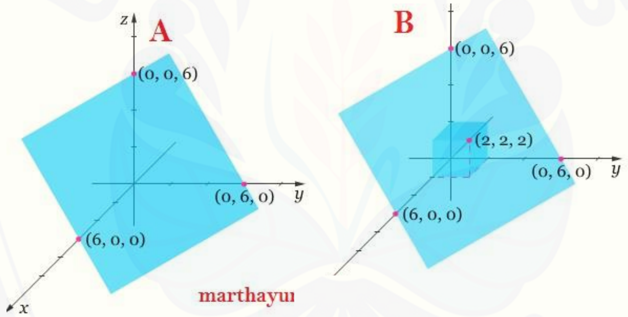
$$2x + 5y + 4z = 28$$

Substitusikan y = 2 ke persamaan (11.4) atau (11.5) untuk mendapatkan nilai z. Selanjutnya untuk mendapatkan nilai x, substitusikan y dan z dalam persamaan (11.1) atau (11.2) atau (11.3)

11.3 Cara Grafik Sistem Persamaan Linier 3 Variabel

Penyelesaian dari persamaan linier tiga variabel dengan cara grafik bisa dicari apabila terdapat 3 persamaan linier sejenis atau di bawahnya. Untuk menggambarkannya dibutuhkan koordinat 3 dimensi (sumbu x, sumbu y, sumbu z). Adapun hasilnya nanti berupa bidang.

Sebagai contoh jika terdapat sebuah persamaan linier tiga variabel x+y+z =6. Dimisalkan mengambil angka untuk x = 0, y =0 maka z = 6. Titik kedua x=0 z=0 dan didapat y =6. Terakhir y=0 , z = 0 dan x =6. Disini harus minimal digunakan 3 titik yang memenuhi persamaan linear. Hubungkan titik tersebut sehingga menjadi sebuah bidang. Sehingga di dapat gambar 11.1



Gambar 11. 1 Kurva Sistem Persamaan Linier 3 Variabel

Untuk mendapatkan titik tersebut tidak harus mengambil x =0, y =0 dst. Kita juga bisa menggunakan 3 kombinasi titik, dengan syarat yang paling penting jumlahnya harus 6. Sebagai contoh diambil titik (0,1,5) ; (0, 4,2) ; (5,2,-1) ; (-3,7,2) dan lainnya. Koordinat titik tersebut memenuhi persamaan yang diberikan – pada soal ini x+y+z =6. Hasilnya yang didapat seperti gambar b di atas.

Disini akan terlihat ada sedikit perbedaan dari gambar a dan gambar b. Akan tetapi pada dasarnya bidang tersebut sama apabila salah satu bidang diperluas dan akan berhimpit dengan bidang yang