MODUL INTEGRAL

Dr. Erfan Yudianto, S.Pd., M.Pd.

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MIPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER
2020

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT yang mana atas berkat dan rahmatnya penyusun dapat menyelesaikan modul integral untuk mata kuliah Matematika Dasar IPA dengan bobot 3 SKS, sebagai sarana untuk mendampingi langkah-demi langkah konsep integral kepada mahasiswa termasuk ide-ide kreatif yang mungkin muncul melalui masalah-masalah yang ada dalam modul ini. Penyusun sangat sadar bahwa modul ini masih banyak sekali kekurangan. Oleh karena itu penyusun sangat terbuka sekali bagi berbagai kritikan dan saran demi perbaikan di masa yang akan datang.

Akhirnya penyusun mohon maaf atas segala kekurangan dan mengucapkan banyak terima kasih kepada pihak-pihak yang telah membantu dalam penyusunan modul ini.

Jember, September 2019

Dr. Erfan Yudianto, M.Pd.

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR i
DAFTAR ISI i
DAFTAR TABEL ii
DAFTAR GAMBAR iii
1.1 Pengertian Integral 1
1.2 Integral Tak Tentu 1
1.2.1 Pengertian Integral Tak Tentu 1
1.2.2 Penerapan Integral Tak Tentu 12
1.3 Integral Tentu 14
1.4 Teknik-Teknik Pengintegralan 16
1.4.1 Bentuk Subtitusi-1 16
1.4.2 Integral yang Memuat Bentuk $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$ 18
1.5 Integral Parsial 20
1.6 Beberapa Penggunaan Integral Tertentu 21
1.6.1 Luas Daerah antara Kurva dan Sumbu X 21
1.6.2 Luas Daerah antara Dua Kurva 24
1.6.3 Volume Benda Putar 26
1.7 Aplikasi Integral dalam Kehidupan Sehari-hari 30
1.8 Referensi 31

DAFTAR TABEL

Tabel 1 Turunan Fungsi Trigonometri 7
Tabel 2 Tabel Subtitusi Lanjutan 18
Tabel 3 Batas Integral 19

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1 Luas Daerah antara Kurva dan Sumbu X 22
Gambar 2 Kurva $y = x^3$ 23
Gambar 3 Kurva $y = 4 - 2x$ dan $x = 4$ 24
Gambar 4 Luas Daerah antara Dua Kurva 25
Gambar 5 Kurva $y = x^2 + 3x$ dan $y = 2x + 2$ 26
Gambar 6 Kurva Mengelilingi Sumbu X 26
Gambar 7 Kurva Mengelilingi Sumbu Y 27
Gambar 8 Dua Kurva Mengelilingi Sumbu X 28
Gambar 9 Dua Kurva Mengelilingi Sumbu Y 28

INTEGRAL

1.1 Pengertian Integral

Di Kelas XI, kalian telah mempelajari konsep turunan. Pemahaman tentang konsep turunan ini dapat kalian gunakan untuk memahami konsep integral. Untuk itu, coba tentukan turunan fungsi berikut. Perhatikan bahwa fungsi ini memiliki bentuk umum $f(x)=2x^3$. Setiap fungsi ini memiliki turunan $f'(x)=6x^2$. Jadi, turunan fungsi $f(x)=2x^3$ adalah $f'(x)=6x^2$. Menentukan fungsi $f(x)$ dari $f'(x)$, berarti menentukan antiturunan dari $f'(x)$. Sehingga, integral merupakan antiturunan (antidiferensial) atau operasi invers terhadap diferensial. Jika $f(x)$ adalah fungsi umum yang bersifat $f'(x)=f(x)$, maka $f(x)$ merupakan antiturunan atau integral dari $F'(x)=f(x)$.

1.2 Integral Tak Tentu

1.2.1 Pengertian Integral Tak Tentu

Pengintegralan fungsi $f(x)$ yang ditulis sebagai $\int f(x)\,dx$ disebut integral tak tentu dari $f(x)$. Jika $F(x)$ anti turunan dari $f(x)$, maka $\int f(x)dx = F(x)+c$, dengan c adalah konstanta.

Ada dua jenis integral tak tentu yang akan dipelajari pada bagian ini yaitu integral tak tentu dari fungsi aljabar dan integral tak tentu dari fungsi trigonometri.

a. Rumus Dasar Integral Tak Tentu dan Fungsi Aljabar

Sekarang, perhatikan turunan fungsi-fungsi berikut.

- $g_1(x)=x$, didapat $g_1'(x)=1$.

  Jadi, jika $g_1'(x)=1$

  maka,

$$g_1(x) = \int g_1'(x)dx$$
$$x = \int 1dx$$
$$\leftrightarrow \int 1dx = x$$

- $g_2(x) = \frac{1}{2}x^2$, didapat $g_2'(x) = x$

  Jadi, jika $g_2'(x) = x$

  maka,

$$g_2(x) = \int g_2'(x)dx$$
$$\frac{1}{2}x^2 = \int xdx$$
$$\leftrightarrow \int xdx = \frac{1}{2}x^2$$

Dari uraian ini, tampak bahwa jika $g'(x) = x^n$, maka $g(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$ atau dapat dituliskan $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c, n \neq 1$.

Sebagai contoh, turunan fungsi $f(x) = 2x^2 + c$ adalah $f'(x) = 4x$. Ini berarti, antiturunan dari $f'(x) = 4x$ adalah $f(x) = 2x^2 + c$ atau dituliskan $\int f'(x)dx = 2x^2 + c$. Uraian ini menggambarkan hubungan berikut. Jika $f'(x) = x^n$, maka $f(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c, n \neq 1$ dengan c suatu konstanta. Misalnya k konstanta real sembarang, $f(x)$ dan $g(x)$ merupakan fungsi yang dapat diintegralkan, maka akan berlaku:

1. $\int dx = x + c$

   Pembuktian:

Misal: $y = x$

$$dy = 1dx \rightarrow \frac{dy}{dx} = 1$$

Sehingga

$$\begin{aligned}\int dx &= \int \frac{dy}{dx} dx \\ &= \int dy \\ &= y + c \\ &= x + c\end{aligned}$$

Jadi, $\int dx = x + c$

2. $\int k \cdot f(x)dx = k\int f(x)dx \qquad ,k \in R$

Pembuktian: menggunakan kesamaan

Misal: $y = F(x)$

$$dy = f(x)dx \rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)$$

Sehingga

$$\begin{aligned}\int k \cdot f(x)dx &= \int k \frac{dy}{dx} dx \\ &= \int kdy \\ &= ky + c \\ &= k \cdot F(x) + c \qquad \text{..............................1)}\end{aligned}$$

Misal: $y = F(x)$

$$dy = f(x)dx \rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)$$

Sehingga

$$\begin{aligned}k\int f(x)dx &= k\int \frac{dy}{dx} dx \\ &= k\int dy \\ &= k(y + c) \\ &= ky + kc \\ &= k \cdot F(x) + C \qquad \text{..............................2)}\end{aligned}$$

Dari persamaan 1) dan 2) terbukti bahwa $\int k \cdot f(x)dx = k\int f(x)dx$

3. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Pembuktian:

- Misal: $y = F(x) + G(x)$

$$dy = (f(x) + g(x))dx \rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x) + g(x)$$

Sehingga

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int \frac{dy}{dx}dx = \int dy = y + c = F(x) + G(x) + c \quad ...1)$$

Misal: $w = F(x)$ dan $z = G(x)$

$$dw = f(x)dx \rightarrow \frac{dw}{dx} = f(x)$$

$$dz = g(x)dx \rightarrow \frac{dz}{dx} = g(x)$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \int f(x)dx + \int g(x)dx &= \int \frac{dw}{dx}dx + \int \frac{dz}{dx}dx \\ &= \int dw + \int dz \\ &= w + c + z + c \\ &= w + z + 2c \\ &= F(x) + G(x) + C \quad ...2) \end{aligned}$$

Dari persamaan 1) dan 2) terbukti bahwa

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \quad ...3)$$

- Misal: $y = F(x) - G(x)$

$$dy = (f(x) - g(x))dx \rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x) - g(x)$$

Sehingga

$$\int [f(x) - g(x)]dx = \int \frac{dy}{dx} dx = \int dy = y + c = F(x) - G(x) + c \quad ...4)$$

Misal: $w = F(x)$ dan $z = G(x)$

$$dw = f(x)dx \rightarrow \frac{dw}{dx} = f(x)$$

$$dz = g(x)dx \rightarrow \frac{dz}{dx} = g(x)$$

Sehingga

$$\begin{aligned}\int f(x)dx - \int g(x)dx &= \int \frac{dw}{dx} dx - \int \frac{dz}{dx} dx \\ &= \int dw - \int dz \\ &= w + c - (z + c) \\ &= w - z \\ &= F(x) + G(x) + c \qquad ,c = 0 \qquad ...5)\end{aligned}$$

Dari persamaan 4) dan 5) terbukti bahwa

$$\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx \qquad ...6)$$

Jadi, dari 3) dan 6) terbukti bahwa

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

4. $\int ax^n = \dfrac{a}{n+1} x^{n+1} + c$

Pembuktian:

Misal: $y = x^p$ dan $n = p - 1$

$$dy = px^{p-1}dx \rightarrow \frac{dy}{p} = x^{p-1}dx$$

Sehingga,

$$\int ax^{p-1}dx = \int a\frac{dy}{p}$$

$$= \frac{a}{p}\int dy$$

$$= \frac{a}{p}(y+c)$$

$$= \frac{a}{p}(x^{p}+c)$$

$$= \frac{a}{p}x^{p} + \frac{c}{p}$$

$$= \frac{a}{p}x^{p} + C$$

Substitusikan $n = p-1$

$n = p-1 \rightarrow p = n+1$

$$\int ax^{p-1}dx = \frac{a}{p}x^{p} + C$$

$$\leftrightarrow \int ax^{n}dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + C$$

Jadi, terbukti bahwa $\int ax^{n} = \dfrac{a}{n+1}x^{n+1} + c$

Latihan Soal!

1) Selesaikan integral berikut!

   a. $\int x^{3}dx$

   b. $\int x^{\frac{3}{2}}dx$

   c. $\int 2\cdot\sqrt[4]{x^{3}}dx$

   d. $\int (6x^{2}+2x-3)dx$

Penyelesaian:

   a. $\int x^{3}dx = \dfrac{1}{3+1}x^{3+1} + c = \dfrac{1}{4}x^{4} + c$

b. $\int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{\frac{3}{2}+1} x^{\frac{3}{2}+1} + c = \frac{1}{\frac{5}{2}} x^{\frac{5}{2}} + c = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + c$

c. $\int 2 \cdot \sqrt[4]{x^3}\, dx \quad = 2\int \sqrt[4]{x^3}\, dx$

$$= 2\int x^{\frac{3}{4}} dx$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\frac{3}{4}+1} x^{\frac{3}{4}+1} + c$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\frac{7}{4}} x^{\frac{7}{4}} + c$$

$$= 2 \cdot \frac{4}{7} x^{\frac{7}{4}} + c$$

$$= \frac{8}{7} x^{\frac{7}{4}} + c$$

d. $\int (6x^2 + 2x - 3) dx \quad = \int 6x^2 dx + \int 2x dx - \int 3dx$

$$= \left(\frac{6}{2+1} x^{2+1} + c\right) + \left(\frac{2}{1+1} x^{1+1} + c\right) - (3x + c)$$

$$= 2x^3 + x^2 - 3x + 3c$$

$$= 2x^3 + x^2 - 3x + C$$

b. Rumus Integral Tak Tentu dari Fungsi Trigonometri

Untuk memahami integral dari fungsi trigonometri, dibutuhkan pemahaman yang baik mengenai turunan trigonometri. Agar kamu lebih memahaminya, perhatikan tabel turunan fungsi trigonometri berikut:

Tabel 1 Turunan Fungsi Trigonometri

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\sec x$	$\tan x \cdot \sec x$

$\cot x$	$-\csc^2 x$
$\csc x$	$-\cot x \cdot \csc x$

Berdasarkan tabel di atas, rumus dasar pengintegralan trigonometri adalah sebagai berikut.

1. $\int \cos x dx = \sin x + c$

   Pembuktian:

   Misal: $y = \sin x$

   $$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

   Sehingga,

   $$\int \cos x dx = \int \frac{dy}{dx} dx = \int dy = y + c = \sin x + c$$

   Jadi, terbukti bahwa $\int \cos x dx = \sin x + c$

2. $\int \sin x dx = -\cos x + c$

   Pembuktian:

   Misal: $y = \cos x$

   $$\frac{dy}{dx} = -\sin x \leftrightarrow -\frac{dy}{dx} = \sin x$$

   Sehingga,

   $$\int \sin x dx = \int -\frac{dy}{dx} dx = -\int dy = -y + c = -\cos x + c$$

   Jadi, terbukti bahwa $\int \sin x dx = -\cos x + c$

3. $\int \sec^2 x dx = \tan x + c$

   Pembuktian:

   Misal: $y = \tan x$

   $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

   Sehingga,

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dy}{dx} dx = \int dy = y + c = \tan x + c$$

Jadi, terbukti bahwa $\int \sec^2 x dx = \tan x + c$

4. $\int \csc^2 x dx = -\cot x + c$

Pembuktian:

Misal: $y = \cot x$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x} \leftrightarrow -\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin^2 x}$$

Sehingga,

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int -\frac{dy}{dx} dx = -\int dy = -y + c = -\cot x + c$$

Jadi, terbukti bahwa $\int \csc^2 x dx = -\cot x + c$

5. $\int \tan x \cdot \sec x dx = \sec x + c$

Pembuktian:

Misal: $y = \sec x$

$$\frac{dy}{dx} = \tan x \cdot \sec x$$

Sehingga,

$$\int \tan x \cdot \sec x dx = \int \frac{dy}{dx} dx = \int dy = y + c = \sec x + c$$

Jadi, terbukti bahwa $\int \tan x \cdot \sec x dx = \sec x + c$

6. $\int \cot x \cdot \csc x dx = -\csc x + c$

Pembuktian:

Misal: $y = -\csc x$

$$\frac{dy}{dx} = \cot x \cdot \csc x$$

Sehingga,

$$\int \cot x \cdot \csc x dx = \int \frac{dy}{dx} dx = \int dy = y + c = -\csc x + c$$

Jadi, terbukti bahwa $\int \cot x \cdot \csc x dx = -\csc x + c$

Contoh:

1. Selesaikanlah $\int \sin ax dx$
2. Selesaikanlah $\int \sin(ax+b) dx$

Penyelesaian:

1. $\int \sin ax dx$

Misal: $u = ax$

$$\frac{du}{dx} = a \leftrightarrow dx = \frac{du}{a}$$

Sehingga,

$$\int \sin ax dx = \int \sin u \frac{du}{a}$$
$$= \frac{1}{a}\int \sin u du$$
$$= \frac{1}{a}(-\cos u) + c$$
$$= -\frac{1}{a}\cos u + c$$
$$= -\frac{1}{a}\cos ax + c$$

Jadi, $\int \sin ax dx = -\frac{1}{a}\cos ax + c$

2. $\int \sin(ax+b) dx$

Misal: $u = ax + b$

$$\frac{du}{dx} = a \leftrightarrow dx = \frac{du}{a}$$

Sehingga,

$$\int \sin(ax+b)dx = \int \sin u \frac{du}{a}$$
$$= \frac{1}{a}\int \sin u du$$
$$= \frac{1}{a}(-\cos u) + c$$
$$= -\frac{1}{a}\cos u + c$$
$$= -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$$

Jadi, $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$

Berdasarkan contoh dari fungsi trigonometri diatas, maka rumus-rumus tersebut dapat diperluas menjadi :

a. $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$

b. $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$

c. $\int \sec^2(ax+b)dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + c$

d. $\int \tan(ax+b)\cdot\sec(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sec(ax+b) + c$

e. $\int \csc^2(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + c$

f. $\int \cot(ax+b)\cdot\csc(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\csc(ax+b) + c$

Latihan Soal!

Selesaikan integral berikut!

1. $\int (2\sin x + 3)dx$
2. $\int \sec^2 2x - 1dx$
3. $\int \sin^2 xdx$

4. $\int (\sin x + \cos x)^2 \, dx$

5. $\int \sin 4x \cdot \cos 2x dx$

Penyelesaian:

1. $\int (2\sin x + 3) dx = 2\int \sin x dx + \int 3dx = -2\cos x + 3x + c$

2. $\int \sec^2 2x - 1 dx = \int \sec^2 2x dx - \int 1 dx = \frac{1}{2}\tan 2x - x + c$

3. $\int \sin^2 x dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x \right) dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$

4. $\int (\sin x + \cos x)^2 \, dx$ $= \int (\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x)$

$$= \int (1 + 2\sin x \cos x)$$

$$= \int (1 + \sin 2x)$$

$$= x - \frac{1}{2}\cos 2x + c$$

5. $\int \sin 4x \cdot \cos 2x dx$ $= \int \frac{1}{2} (\sin 6x + \sin 2x) dx$

$$= \frac{1}{2}\int (\sin 6x + \sin 2x) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\cos 6x - \frac{1}{2}\cos 2x \right) + c$$

$$= -\frac{1}{12}\cos 6x - \frac{1}{4}\cos 2x + c$$

1.2.2 Penerapan Integral Tak Tentu

Integral tak tentu dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan di bawah ini.

1. Untuk menentukan suatu fungsi jika turunan dari fungsinya diberikan.
2. Untuk menentukan posisi, kecepatan, dan percepatan suatu benda pada waktu tertentu.

Misalnya *s* menyatakan posisi benda, kecepatan benda dinyatakan dengan *v*, dan percepatan benda dinyatakan dengan *a*. Hubungan anatara *s*, *v*, dan *a* adalah sebagai berikut.

$$v=\frac{ds}{dt}\text{, sehingga } s=\int vdt \text{ dan } a=\frac{dv}{dt}\text{, sehingga } v=\int adt$$

Latihan Soal!

1. Diketahui $f'(x)=6x^2-10x+3$ dan $f(-1)=2$. Tentukan $f(x)$!

2. Sebuah benda bergerak pada garis lurus dengan percepatan *a* yang memenuhi persamaan $a=2t-1$, a dalam m/s^2 dan *t* dalam detik. Jika kecepatan awal benda $v=5m/s$ dan posisi benda saat *t*=6 adalah *s*=92 *m*, maka tentukan persamaan posisi benda tersebut saat *t* detik!

Penyelesaian:

1. $f'(x)=6x^2-10x+3$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int\left(6x^2-10x+3\right)dx \\ &= 2x^3-5x^2+3x+c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-1)=2 \rightarrow f(-1) &= 2(-1)^3-5(-1)^2+3(-1)+c \\ 2 &= 2(-1)-5-3+c \\ 2 &= -2-8+c \\ 2 &= -10+c \\ 2+10 &= c \\ c &= 12 \end{aligned}$$

$\therefore\ f(x)=2x^3-5x^2+3x+12$

2. $a=2t-1$

$$\begin{aligned} v &= \int adt \\ &= \int(2t-1)dt \\ &= t^2-t+c \end{aligned}$$

Kecepatan awal benda 5*m/s*, artinya saat *t=0* nilai *v=5*

$$
\begin{aligned}
v_{t=0} &= 5 \\
0^2 - 0 + c &= 5 \\
c &= 5
\end{aligned}
$$

Sehingga, $v = t^2 - t + 5$

$$
\begin{aligned}
s &= \int v\,dt \\
&= \int \left(t^2 - t + 5\right) dt \\
&= \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 5t + d
\end{aligned}
$$

Untuk

$$
\begin{aligned}
s_{t=6} = 92 \rightarrow s(6) &= \frac{1}{3}(6)^3 - \frac{1}{2}(6)^2 + 5(6) + d \\
92 &= 72 - 18 + 30 + d \\
92 &= 84 + d \\
d &= 8
\end{aligned}
$$

Jadi, persamaan posisi benda tersebut saat t detik dirumuskan dengan

$$s = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 5t + 8$$

1.3 Integral Tentu

Jika fungsi $y = f(x)$ kontinu pada interval $a \leq x \leq b$, maka:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

dengan $F(x)$ adalah anti turunan dari $f(x)$ dalam $a \leq x \leq b$. Bentuk integral di atas disebut integral tertentu dengan a sebagai batas bawah dan b sebagai batas atas. Definisi integral di atas dikenal sebagai *Teorema Dasar Kalkulus*.

Misalnya $f(x)$ dan $g(x)$ merupakan fungsi-fungsi kontinu dalam interval tertutup $[a,b]$, maka integral tertentu memenuhi sifat-sifat umum sebagai berikut.

1. $\int_a^a f(x) = 0$

2. $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx, k =$ konstanta

3. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

4. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^c f(x)dx$

5. $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

Latihan Soal!

1. Hituglah hasil integral berikut

   a. $\int_0^3 6x^2 dx$

   b. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (2\sin x + 6\cos x)dx$

2. Jika $\int_1^k (2x-5)dx = 18$ untuk $k > 0$ maka tentukan nilai $k + 1$!

Penyelesaian:

1. Hasil perhitungan

   a. $\int_0^3 6x^2 dx = 6\int_0^3 x^2 dx = 6 \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big]_0^3 = 6\left[\frac{1}{3} \cdot 3^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3\right] = 6 \cdot (9-0) = 54$

   b. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (2\sin x + 6\cos x)dx \quad = -2\cos x + 6\sin x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}$

$$
\begin{aligned}
&= \left[-2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 6\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] - \left[2\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 6\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] \\
&= \left(-\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\right) - (0 - 6) \\
&= 6 + 2\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

2. $\int_1^k (2x - 5)dx = 18$

$$
\begin{aligned}
x^2 - 5x\Big]_1^k &= 18 \\
\left(k^2 - 5k\right) - (1 - 5) &= 18 \\
k^2 - 5k + 4 - 18 &= 0 \\
k^2 - 5k - 14 &= 0 \\
(k - 7)(k + 2) &= 0
\end{aligned}
$$

Diperoleh $k = 7$ (memenuhi) atau $k = -2$ (tidak memenuhi) maka nilai $k + 1 = 7 + 1 = 8$.

1.4 Teknik-Teknik Pengintegralan

Sering kita jumpai fungsi-fungsi yang akan diintegralkan tidak sesuai dengan rumus dasar integral dan tidak sedikit fungsi tersebut diberikan dalam bentuk yang sangat rumit. Pada subbab ini kita akan membahas dua teknik pengintegralan untuk menyelesaikan integral dengan fungsi seperti itu, yaitu *integral subtitusi* dan *integral parsial*.

1.4.1 Bentuk Subtitusi-1

Tidak semua bentuk pengintegralan bisa dikerjakan dengan menggunakan rumus $\int ax^n dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + c$.Banyak bentuk-bentuk yang kelihatannya rumit, sehingga tidak bisa diselesaikan dengan rumus di atas. Karena itu dibutuhkan suatu cara lain untuk menyelesaikannya.Pada bagian ini akan dibahas teknik integrasi yang disebut metode substitusi. Konsep dasar dari metode ini adalah dengan mengubah integral yang kompleks menjadi bentuk yang lebih sederhana. Bentuk umum integral substitusi adalah sebagai berikut.

$$\int\left[f(u)\frac{du}{dx}\right]dx = \int f(u)du$$

Latihan Soal!

1. $\int (5x-2)^3\,dx$
2. $\int (x^2-1)(x+3)^5\,dx$

Penyelesaian:

1. $\int (5x-2)^3\,dx$

   Misal: $u = 5x-2$

   $$du = 5dx \rightarrow dx = \frac{1}{5}du$$

   Sehingga

   $$\int (5x-2)^3\,dx = \int u^3\frac{1}{5}du = \frac{1}{5}\int u^3 du = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}u^4\right) + c = \frac{1}{20}(5x-2)^4 + c$$

   Jadi, $\int (5x-2)^3\,dx = \frac{1}{20}(5x-2)^4 + c$

2. $\int (x^2-1)(x+3)^5\,dx$

   Misal: $u = x+3 \rightarrow x = u-3$

   $dx = du$

   Sehingga

   $$\begin{aligned}\int (x^2-1)(x+3)^5\,dx &= \int \left((u-3)^2-1\right)u^5 dx\\ &= \int (u^2-6u+8)u^5 dx\\ &= \int (u^7-6u^6+8u^5)dx\\ &= \frac{1}{8}u^8 - \frac{6}{7}u^7 + \frac{8}{6}u^6 + c\\ &= \frac{1}{8}(x+3)^8 - \frac{6}{7}(x+3)^7 + \frac{4}{3}(x+3)^6 + c\end{aligned}$$

   Jadi, $\int (x^2-1)(x+3)^5\,dx = \frac{1}{8}(x+3)^8 - \frac{6}{7}(x+3)^7 + \frac{4}{3}(x+3)^6 + c$

1.4.2 Integral yang Memuat Bentuk $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$

Untuk menyelesaikan pengintegralan yang memuat bentuk-bentuk $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, dan $\sqrt{x^2-a^2}$, kita menggunakan teknik integral substitusi trigonometri.

Tabel 2 Tabel Subtitusi Lanjutan

Bentuk	Substitusi	Hasil
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\sin\theta$	$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos\theta$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=a\tan\theta$	$\sqrt{a^2+x^2}=a\sec\theta$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec\theta$	$\sqrt{x^2-a^2}=a\tan\theta$

Pembuktian:

1. Bentuk $\sqrt{a^2-x^2}$

   Misal:

   (i) $x=a\sin\theta, -\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$

   $$\frac{dx}{d\theta}=a\cos\theta \leftrightarrow dx=a\cos\theta d\theta$$

   (ii) $$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-(a\sin\theta)^2}$$
   $$=\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}$$
   $$=\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}$$
   $$=\sqrt{a^2\cos^2\theta}$$
   $$=a\cos\theta$$

   Jadi, $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos\theta$

2. Bentuk $\sqrt{a^2+x^2}$

   Misal:

   (i) $x=a\tan\theta, -\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$

   $$\frac{dx}{d\theta}=a\sec^2\theta \leftrightarrow dx=a\sec^2\theta d\theta$$

   (ii) $$\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+(a\tan\theta)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 \theta}$$
$$= \sqrt{a^2 \left(1 + \tan^2 \theta\right)}$$
$$= \sqrt{a^2 \sec^2 \theta}$$
$$= a \sec \theta$$

Jadi, $\sqrt{a^2 + x^2} = a \sec \theta$

3. Bentuk $\sqrt{x^2 - a^2}$

   Misal:

   (i) $x = a \sec \theta, -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

   $$\frac{dx}{d\theta} = a \tan \theta \cdot \sec \theta \leftrightarrow dx = a \tan \theta \cdot \sec \theta d\theta$$

   (ii) $\sqrt{x^2 - a^2}$ $= \sqrt{\left(a \sec \theta\right)^2 - a^2}$

   $$= \sqrt{a^2 t \sec^2 \theta - a^2}$$
   $$= \sqrt{a^2 \left(\sec^2 \theta - 1\right)}$$
   $$= \sqrt{a^2 \tan^2 \theta}$$
   $$= a \tan \theta$$

   Jadi, $\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan \theta$

Latihan Soal!

1. $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} dx$

Penyelesaian:

1. Misal: $x = 2 \sin \theta \rightarrow \sin \theta = \frac{x}{2}$

   $dx = 2 \cos \theta \, d\theta$

   Batas integral

Tabel 3 Batas Integral

x	0	2
θ	0	$\frac{\pi}{2}$

Sehingga

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos\theta}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos\theta}{2\cos\theta}\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 d\theta$$

$$= \theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

1.5 Integral Parsial

Apabila kamu menemukan bentuk integral yang tidak bisa diselesaikan dengan integral subtitusi, mungkin permasalahan tersebut dapat diselesaikan dengan subtitusi ganda yang lebih dikenal sebagai *integral parsial*. Perhatikan uraian berikut.

Misalnya, $y = u \cdot v$, dengan $y, u,$ dan v fungsi dari x, maka.

$$\frac{dy}{dx} = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx}(v \cdot du + u \cdot dv)$$

$$dy = v \cdot du + u \cdot dv$$

$$\int dy = \int vdu + \int udv$$

$$y = \int vdu + \int udv$$

$$uv = \int vdu + \int udv$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Jadi, dari uraian di atas dapat kita ambil kesimpulan bahwa rumus integral parsial adalah sebagai berikut

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Latihan Soal!

1. $\int x^2 \cos x dx$

Penyelesaian:

1. $\int x^2 \cos x dx$

Misal: $u = x^2 \rightarrow du = 2x dx$

$v = \sin x \rightarrow dv = \cos x dx$

Sehigga

$\int u dv = uv - \int v du$

$$\rightarrow \int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - \int (\sin x)(2x) dx$$
$$= x^2 \sin x - 2\int (\sin x)(x) dx$$
$$= x^2 \sin x - 2(-x\cos x + \sin x) + c$$
$$= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c$$

1.6 Beberapa Penggunaan Integral Tertentu

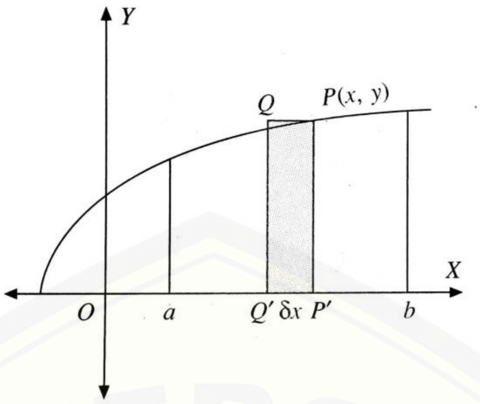
1.6.1 Luas Daerah antara Kurva dan Sumbu X

Misalkan S adalah daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, sumbu X, garis $x = a$, dan garis $x = b$ dengan $f(x) \geq 0$ pada (a,b) maka luas daerah S dapat ditentukan dengan rumus:

$$L = \int_a^b f(x) dx$$

Pembuktian:

Misalkan salah satu potongan persegi panjang tersebut diberi nama *PP'Q'Q* dengan koordinat titik $P(x, y)$. Lebar persegi panjang *P'Q'* dinamakan δx, serta luas *PP'Q'Q* dinamakan δL. Luas persegi panjang adalah $p \times l$, maka $\delta L = y\ \delta x$



Gambar 1 Luas Daerah antara Kurva dan Sumbu X

(Sumber: KTSP 2006)

Jumlah luas persegi panjang dari $x = a$ sampai dengan $x = b$ dapat dinyatakan dengan: Luas total $= \sum_{i=1}^{n} y_i \, \delta x_i$

dengan *n* adalah banyak persegi panjang. Perhitungan luas total akan akurat jika δx yang dipilih sangat kecil hingga mendekati nol, yaitu dalam sebuah limit. Jadi,

$$\text{Luas total} = \lim_{\delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} y_i \, \delta x_i$$

Bentuk di atas dapat dituliskan sebagai bentuk integral:

$$L = \int_a^b y \, dx$$

$$L = \int_a^b f(x) dx$$

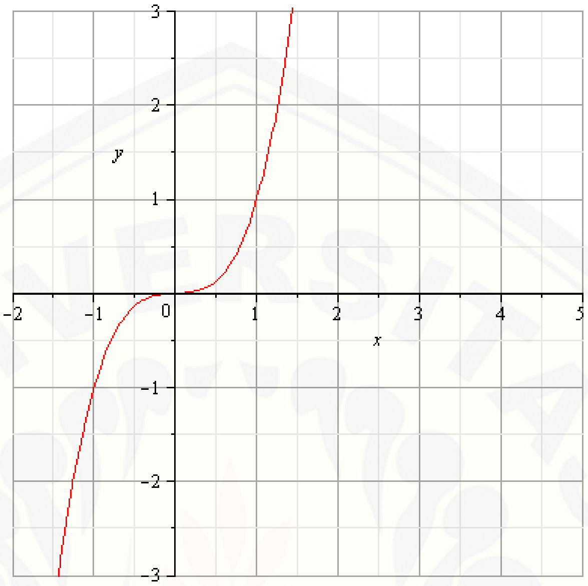
Apabila $f(x) \leq 0$ atau kurvanya di bawah sumbu X, maka

$$L = -\int_a^b f(x) dx$$

Latihan Soal!

1. Tentukan luas daerah antara kurva $y = x^3$, sumbu X, $x = -1$ dan $x = 1$!

Penyelesaian:



Gambar 2 Kurva $y = x^3$

$$L = -\int_{-1}^{0} x^3 dx + \int_{0}^{1} x^3 dx = -\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{1} = -\left(0 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - 0\right) = \frac{1}{2} \text{ satuan}$$

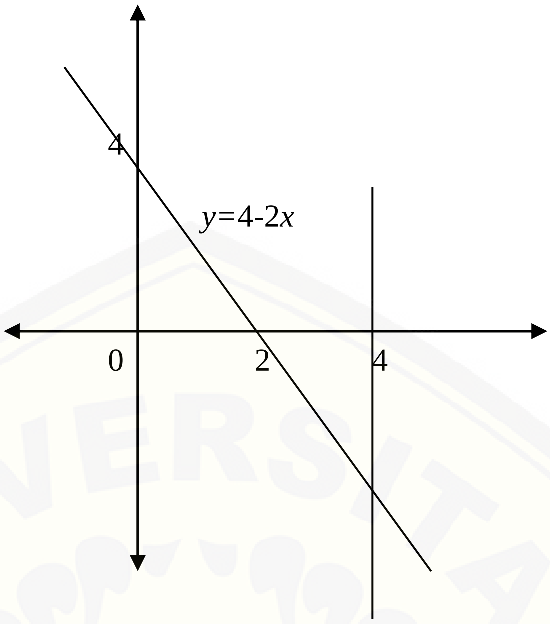
luas.

Jadi, luas daerah tersebut adalah $\frac{1}{2}$ satuan luas.

2. Hitunglah luas daerah di bawah sumbu X yang dibatasi oleh kurva $y = 4 - 2x$, sumbu X, dan garis $x = 4$.

Penyelesaian:

Perhatikan Gambar di bawah ini, daerah yang diarsir di bawah sumbu X merupakan luas daerah yang dicari, yaitu



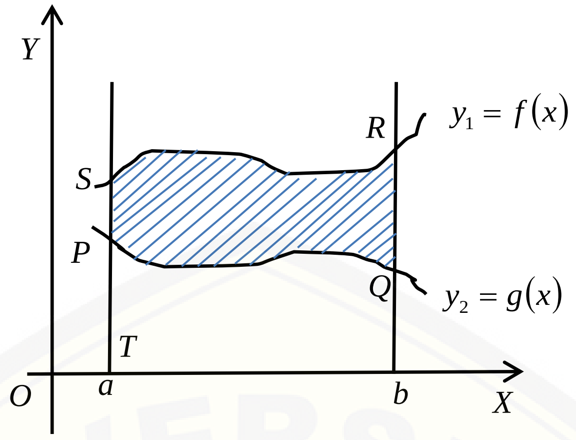
Gambar 3 Kurva $y = 4 - 2x$ dan $x = 4$

$$L = -\int_2^4 (4 - 2x)dx$$
$$= \int_2^4 (-4 + 2x)dx$$
$$= \left[-4x + x^2\right]_2^4$$
$$= \left(-4.4 + 4^2\right) - \left(-4.2 + 2^2\right)$$
$$= (-16 + 16) - (-8 + 4)$$
$$= 4$$

Jadi, luasnya adalah 4 satuan luas.

1.6.2 Luas Daerah antara Dua Kurva

Misalkan S adalah daerah yang dibatasi oleh kurva $y_1 = f(x)$, $y_2 = g(x)$, garis $x = a$, dan garis $x = b$ seperti gambar di bawah ini, maka luas daerah



Gambar 4 Luas Daerah antara Dua Kurva

$$S = L_{TURS} - L_{TUQP}$$
$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$
$$= \int_a^b \{f(x) - g(x)\}dx$$

Luas daerah S dapat ditentukan dengan cara sebagai berikut.

Jadi, luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y_1 = f(x)$, $y_2 = g(x)$, dari $x = a$ sampai $x = b$ ditentukan dengan rumus:

$$L = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}dx$$

dengan $f(x) \geq g(x)$ dalam interval $a \leq x \leq b$.

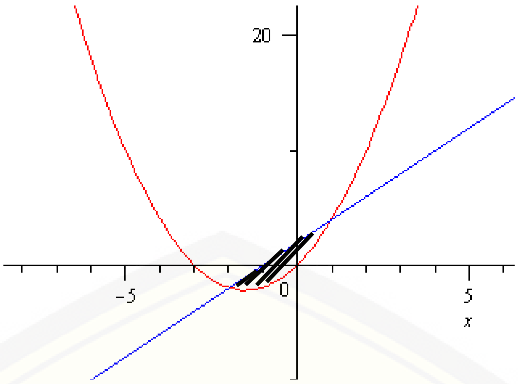
Latihan Soal!

1. Tentukan luas daerah antara kurva $y = x^2 + 3x$ dan $y = 2x + 2$!

   Penyelesaian:

   Titik potong kedua kurva yaitu

   $x^2 + 3x = 2x + 2 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = -2\,atau\; x = 1$



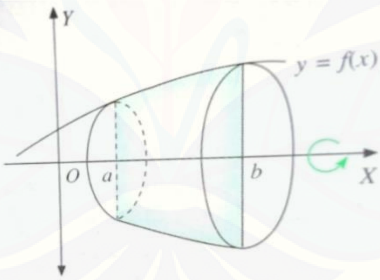
Gambar 5 Kurva $y = x^2 + 3x$ dan $y = 2x + 2$

$$L = \int_{-2}^{1} \left[(2x+2) - (x^2+3x)\right] dx = \int_{-2}^{1} \left(2 - x - x^2\right) dx = 4\frac{1}{2} \text{ satuan luas.}$$

Jadi, luas daerah tersebut adalah $4\frac{1}{2}$ satuan luas.

1.6.3 Volume Benda Putar

1.6.3.1 Volume Benda Putar Yang Dibatasi Oleh Satu Kurva Mengelilingi Sumbu X



Gambar 6 Kurva Mengelilingi Sumbu X

(Sumber: KTSP 2006)

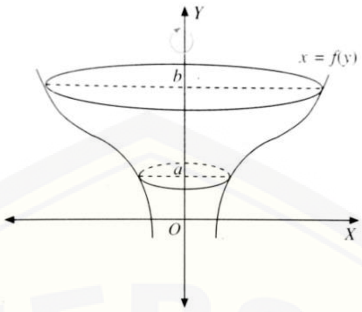
Volume benda putar dari daerah yang diputar sejauh 360^0 mengelilingi sumbu X

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

atau

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

1.6.3.2 Volume Benda Putar Yang Dibatasi Oleh Satu Kurva Mengelilingi Sumbu Y



Gambar 7 Kurva Mengelilingi Sumbu Y

(Sumber: KTSP 2006)

Apabila daerah yang dibatasi oleh kurva $x = f(y)$, $x = a$, dan garis $x = b$ yang diputar mengelilingi sumbu Y sebesar 360^0. Dengan cara yang sama seperti pada waktu menentukan volume benda putar sebuah bidang yang diputar mengelilingi sumbu X, dapat dirumuskan untuk δV, yaitu:

$$\delta V = \sum_{i=1}^{n} \pi x^2{}_i \, \delta y_i$$

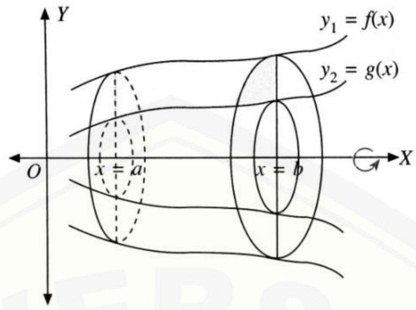
dengan *n* adalah banyak persegi panjang. Perhitungan luas total akan akurat jika δx yang dipilih sangat kecil hingga mendekati nol, yaitu dalam sebuah limit. Jadi,

$$\text{Luas total } = \lim_{\delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi x^2{}_i \, \delta y_i$$

Bentuk di atas dapat dituliskan sebagai bentuk integral:

$$V = \pi \int_c^d (g(y))^2 \, dy \quad \text{atau} \quad V = \pi \int_c^d x^2 \, dy$$

1.6.3.3 Volume Benda Putar Yang Dibatasi Oleh Dua Kurva Mengelilingi Sumbu X

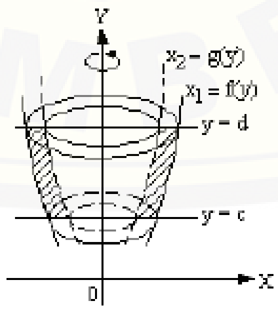


Gambar 8 Dua Kurva Mengelilingi Sumbu X
(Sumber: KTSP 2006)

Misalkan f dan g merupakan fungsi yang kontinu dan non negative sedemikian sehingga $f(x) \geq g(x)$ untuk $[a,b]$. L adalah daerah yang dibatasi $y_1 = f(x)$, $y_2 = g(x)$, dari $x = a$ sampai $x = b$. Volume benda putar dari daerah antara dua kurva yang diputar sejauh 360^0 mengelilingi sumbu X maka dapat dinyatakan dengan bentuk sebagai berikut.

$$V = \pi \int_a^b \{ f^2(x) - g^2(x) \} dx \text{ atau } V = \pi \int_a^b ({y_1}^2 - {y_2}^2) dx$$

1.6.3.4 Volume Benda Putar Yang Dibatasi Oleh Dua Kurva Mengelilingi Sumbu Y



Gambar 9 Dua Kurva Mengelilingi Sumbu Y
(Sumber: Google)

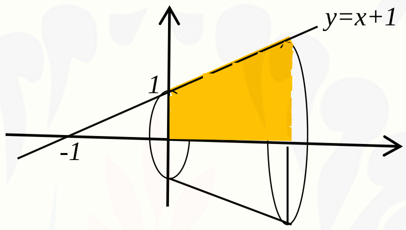
Volume benda putar dari daerah antara dua kurva yang diputar sejauh 360^0 mengelilingi sumbu Y

$$V = \pi \int_c^d \{f^2(y) - g^2(y)\} dy \text{ atau } V = \pi \int_c^d (x_1^{\,2} - x_2^{\,2}) dy$$

Latihan Soal!

1. Hitunglah volume benda putar yang terjadi, jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x + 1, x = 0, x = 2,$ dan diputar mengelilingi sumbu X sejauh 360^0.

Penyelesaian:



$$V = \pi \int_0^2 f^2(x) dx$$
$$= \pi \int_0^2 (x+1)^2 dx$$
$$= \pi \int_0^2 (x^2 + 2x + 1) dx$$
$$= \pi \left[\frac{1}{3} x^3 + x^2 + x \right]_0^2$$
$$= \pi \left[\left(\frac{1}{3}(2)^3 + (2)^2 + 2 \right) - \right] \left(\frac{1}{3}(0)^3 + (0)^2 + 0 \right)$$
$$= \pi \left(\frac{26}{3} \right)$$
$$= \frac{26}{3} \pi \textit{ satuan volume}$$

2. Tentukan volume benda putar, jika daerah yang dibatasi oleh grafik $f(x) = 4 - x^2$, sumbu X, dan sumbu Y diputar 360^0 apabila diputar terhadap sumbu X.

   Penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^2 \left(4 - x^2\right)^2 dx \\
&= \pi\int_0^2 \left(16 - 8x^2 + x^4\right) dx \\
&= \pi\left[16x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right]_0^2 \\
&= \pi\left(\left(16(2) - \frac{8}{3}(2)^3 + \frac{1}{5}(2)^5\right) - 0\right) \\
&= \pi\left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5}\right) \\
&= \frac{256}{15}\pi
\end{aligned}
$$

Jadi, volume benda putar tersebut adalah $\frac{256}{15}\pi$ satuan volume.

1.7 Aplikasi Integral dalam Kehidupan Sehari-hari

Definisi Integral adalah kebalikan dari diferensial. Apabila kita mendiferensiasi kita mulai dengan suatu pernyataan dan melanjutkannya untuk mencari turunannya. Apabila kita mengintergrasikan,kita mulai dengan turunannya dan kemudian mencari peryataan asal integral ini. Lambang integral adalah

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Integral dalam kehidupan sehari-hari sangatlah luas cangkupannya seperti digunakan di bidang teknologi,fisika,ekonomi,matematika,teknik dan bidang-bidang lain. Adapun uraiannya sebagai berikut:

1. Bidang Teknologi

   Integral sering digunakan untuk memecahkan persoalan yang berhubungan dengan volume, panjang kurva, memperkirakan populasi, keluaran kardiak, usaha, gaya dan surplus konsumen.

2. Bidang Ekonomi

   Penerapan integral dalam bidang ekonomi yaitu:

- Untuk menentukan persamaan-persamaan dalam perilaku ekonomi.
- Untuk mencari fungsi konsumsi dari fungsi konsumsi marginal.

3. Bidang Matematika

   Penerapan integral dalam bidang matematika yaitu:

   - Untuk menentukan luas suatu bidang.
   - Untuk menentukan volume benda putar dan menentukan panjang busur.

4. Bidang Fisika

   Penerapan integral dalam bidang fisika yaitu:

   - Untuk menganalisis rangkaian listrik arus AC.
   - Untuk menganalisis medan magnet pada kumparan.
   - Untuk menganalisis gaya-gaya pada struktur pelengkung.

5. Bidang Teknik

   Penerapan integral dalam bidang teknik yaitu:

   - Untuk mengetahui volume benda putar
   - Untuk mengetahui luas daerah pada kurva.

Contoh integral dalam kehidupan sehari-hari, dapat kita ketahui dari kecepatan sebuah motor pada waktu tertentu, dan posisi perpindahan benda itu pada setiap waktu. Untuk menemukan hubungan ini kita memerlukan proses integral (antidiferensial), contoh lain yaitu setiap gedung Petronas di Kuala Lumpur atau gedung-gedung bertingkat di Jakarta. Semakin tinggi bangunan semakin kuat angin yang menghantamnya. Karenanya bagian atas bangunan harus dirancang berbeda dengan bagian bawah. Untuk menentukan rancangan yang tepat, dipakailah integral.

1.8 Referensi

Courant, R., Robbins, H., & Stewart, I. (1996). What is mathematics?: an elementary approach to ideas and methods. In *American Mathematical Monthly*. https://doi.org/10.1038/150673a0

Crane, K., & Wardetzky, M. (2017). A Glimpse into Discrete Differential Geometry. *Notices of the American Mathematical Society*. https://doi.org/10.1090/noti1578

Mutakin, T. Z. (2013). Analisis kesulitan belajar kalkulus I mahasiswa teknik

informatika. *Jurnal Formatif*, *3*(1), 49–60.
Purcell, E. J., Rigdon, S. E., & Varberg, D. (2003). *Calculus* (8th ed.). Prentice-Hall, Inc.
Purcell, E. J., Varberg, D., & Rigdon, S. E. (2004). *Kalkulus* (H. W. Hardani & Santika (Eds.); Delapan). Erlangga.
Thomas, G., Weir, M., & Hass, J. (2009). Thomas' Calculus. In *Math.Utoledo.Edu*. https://doi.org/10.1073/pnas.0703993104

(Courant et al., 1996) (Mutakin, 2013; Purcell et al., 2004; Thomas et al., 2009)(Crane & Wardetzky, 2017; Purcell et al., 2003)