



**BILANGAN KROMATIK *GRACEFUL* PADA
KELUARGA GRAF *UNICYCLIC***

SKRIPSI

Oleh
Nafisa Afwa Sania
NIM 170210101103

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MIPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER**

2021



**BILANGAN KROMATIK *GRACEFUL* PADA
KELUARGA GRAF *UNICYCLIC***

SKRIPSI

Dosen Pembimbing 1 : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.
Dosen Pembimbing 2 : Arif Fatahillah, S.Pd., M.Si.
Dosen Penguji 1 : Drs. Antonius Cahya Prihandoko, M.App.Sc., Ph.D.
Dosen Penguji 2 : Susi Setiawani, S.Si., M.Sc.

Oleh

Nafisa Afwa Sania
NIM 170210101103

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MIPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER**

2021

HALAMAN PERSEMBAHAN

Puji syukur kehadiran Allah SWT yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang dengan segala limpahan rahmat dan hidayah-Nya. Sholawat dan salam semoga tetap tercurahkan kepada junjungan Nabi Muhammad SAW, atas kebesaran itu kupersembahkan sebagai rasa hormat dan bahagia dalam perjalanan dan perjuangan hidupku teriring rasa terima kasihku kepada:

1. Kedua orang tua Saya Moh. Shokhib dan Nurul Badriyah yang telah membesarkanku dengan penuh kasih sayang, kesabaran, perhatian, dan doa yang selalu diberikan;
2. Seluruh keluarga besar dan kerabat yang senantiasa mendukung segala usaha yang telah dilakukan serta selalu mendoakan segala hal yang terbaik;
3. Bapak Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. dan Bapak Arif Fatahillah, S.Pd., M.Si. selaku pembimbing skripsi yang dengan sabar telah memberikan ilmu dan bimbingan selama menyelesaikan skripsi ini;
4. Bapak Drs. Antonius Cahya Prihandoko, M.App.Sc., Ph.D. dan Ibu Susi Setiawan, S.Si., M.Sc. selaku penguji skripsi yang telah memberikan masukan demi perbaikan skripsi yang lebih baik;
5. Bapak Ridho Alfarisi, S.Pd., M.Si. yang telah bersedia menjadi validator skripsi ini;
6. Para guru dan dosen yang telah memberikan ilmu dan membimbing dalam banyak hal;
7. Teman-teman pejuang graf dan para pecinta graf lain yang telah membagikan ilmu dan pengalaman berharga serta mengajarkan bahwa sebuah perbedaan bukanlah alasan untuk tidak saling membantu;
8. Teman-teman seperjuangan Sarjana Pendidikan Matematika (angkatan 2017) yang selalu memberikan dukungan dan motivasi, serta sahabat Saya yang selalu menemani dan memberikan kebahagiaan;
9. Almamater tercinta Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

HALAMAN MOTO

وَاصْبِرْ وَمَا صَبْرُكَ إِلَّا بِاللَّهِ وَلَا تَحْزَنْ أَلَيْهِمْ وَلَا تُكُ فِي ضَيْقٍ مِّمَّ يَمْكُرُونَ

"Bersabarlah, kesabaran itu semata-mata karena pertolongan Allah. Janganlah bersedih dan merasa bersempit hati terhadap tipu daya mereka"

(QS. *An-Nahl*: 127)

"Sebaik-baik manusia adalah yang paling bisa memberi manfaat kepada orang lain"

(HR. Ahmad)

"Keinginan merupakan kekuatan besar yang mampu mengalahkan rasa takut dan sifat malas untuk meraih sukses"

(Slamin)

HALAMAN PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Nafisa Afwa Sania

NIM : 170210101103

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: Bilangan Kromatik *Graceful* pada Keluarga Graf *Unicyclic* adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Februari 2021

Yang menyatakan,

Nafisa Afwa Sania

NIM 170210101103

HALAMAN PEMBIMBINGAN

SKRIPSI

**BILANGAN KROMATIK *GRACEFUL* PADA KELUARGA GRAF
*UNICYCLIC***

Oleh

Nafisa Afwa Sania
NIM 170210101103

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D
Dosen Pembimbing Anggota : Arif Fatahillah, S.Pd., M.Si.

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MIPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER**

2021

HALAMAN PENGANTAR

BILANGAN KROMATIK *GRACEFUL* PADA KELUARGA GRAF *UNICYCLIC*

SKRIPSI

Diajukan untuk dipertahankan di depan Tim Penguji sebagai salah satu persyaratan untuk menyelesaikan Program Pendidikan Sarjana Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam dengan Program Studi Pendidikan Matematika pada Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember

Oleh:
Nama : Nafisa Afwa Sania
NIM : 170210101103
Tempat dan Tanggal Lahir : Gresik, 16 Juni 1998
Jurusan / Program Studi : Pendidikan MIPA / P. Matematika

Disetujui oleh:

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.
NIP. 19680802 199303 1 004

Arif Fatahillah, S.Pd., M.Si.
NIP. 19820529 200912 1 003

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi berjudul "Bilangan Kromatik *Graceful* pada Keluarga Graf *Unicyclic*" telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal : Rabu, 3 Februari 2021

tempat : Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember

Tim Penguji :

Ketua,

Sekretaris,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

NIP. 19680802 199303 1 004

Arif Fatahillah, S.Pd., M.Si.

NIP. 19820529 200912 1 003

Penguji I,

Penguji II,

Drs. Antonius Cahya Prihandoko, M.App.Sc., Ph.D.

NIP. 19690928 199302 1 001

Susi Setiawani, S.Si., M.Sc.

NIP. 19700307 199512 2 001

Mengetahui

Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Universitas Jember

Prof. Dr. Bambang Soepeno, M.Pd.

NIP. 19600612 198702 1 001

RINGKASAN

Bilangan Kromatik *Graceful* pada Keluarga Graf *Unicyclic*; Nafisa Afwa Sania, 170210101103; 2021: 83 halaman; Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember.

Teori graf adalah cabang kajian yang mempelajari sifat-sifat graf. Sebuah graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dimana V adalah himpunan tidak kosong dari elemen G yang disebut titik (*vertex*) dan E adalah himpunan (boleh kosong) dari pasangan tidak terurut dua titik v_1, v_2 dimana $v_1, v_2 \in V(G)$ yang disebut sisi (*edge*). Graf yang digunakan dalam penelitian ini adalah graf *unicyclic*. Graf *unicyclic* adalah graf dengan *order* dan *size* sama yang mempunyai satu siklus. Sebagai contoh kasus, graf yang digunakan pada penelitian ini adalah graf *bull*, graf *net*, graf *cricket*, graf *caveman*, graf *peach*, dan graf *flowerpot*. Adapun alasan memilih graf tersebut sebagai bahan penelitian ini dikarenakan proses generalisasi. Proses generalisasi yang dimaksud pada penelitian ini adalah bilangan kromatik *graceful* dari enam graf yang telah ditemukan belum pernah diteliti/didapatkan oleh peneliti lain, sehingga menjadikan topik pewarnaan *graceful* semakin umum dan semakin luas. Karena topik pewarnaan ini telah tergeneralisasi sehingga dapat memberikan gambaran kepada peneliti lain untuk mengembangkan topik ini.

Topik yang dijadikan sebagai bahan kajian pada penelitian ini adalah salah satu topik pada teori graf, yaitu pewarnaan titik pada graf. Pewarnaan titik pada graf adalah memberikan warna pada titik yang bertetangga dengan warna yang berbeda sehingga tidak ada dua titik yang bertetangga memiliki warna yang sama. Banyaknya warna yang optimum yang bisa digunakan untuk mewarnai titik-titik pada suatu graf disebut bilangan kromatik. Selanjutnya pada penelitian ini dikembangkan pewarnaan *graceful* pada graf. Alasan memilih topik ini dikarenakan topik pewarnaan ini termasuk topik yang baru, belum banyak peneliti yang telah meneliti topik pewarnaan ini. Pewarnaan *graceful* merupakan penggabungan konsep *graceful* dengan pewarnaan titik. Pewarnaan *graceful* dilakukan dengan meminimumkan warna titik dan sisi secara *proper*. Warna sisi didapat karena akibat dari pewarnaan titik yang bertetangga dengan sisi tersebut. Pewarnaan sisi dilakukan dengan menghitung nilai absolut selisih

dari titik yang berkaitan dengan sisi tersebut. Bilangan kromatik pada pewarnaan *graceful* graf dilambangkan dengan $\chi_g(G)$. Batas bawah dari pewarnaan *graceful* pada graf G yaitu menggunakan Lemma mengenai subgraf H dari graf G yang menyatakan, jika H adalah subgraf dari graf (G) , maka $\chi_g(G) \geq \chi_g(H)$. Selanjutnya untuk menemukan batas atas dari pewarnaan *graceful* yaitu dengan menemukan fungsi setiap titik dan setiap sisi dari graf G .

Penelitian ini fokus mencari bilangan kromatik *graceful* pada keluarga graf *unicyclic*. Setelah mendapatkan bilangan kromatiknya, diperlukan pengajaran dan desiminasi berupa video pembelajaran mengenai topik pewarnaan *graceful* ke masyarakat luas yang ingin mempelajari topik pewarnaan *graceful*. *Online teaching platform* yang digunakan pada penelitian ini adalah *Sevima EdLink*. Selain dapat diakses dengan mudah dan tidak berbayar, alasan memilih *Sevima EdLink* adalah agar masyarakat dapat mengenal aplikasi ini.

Penelitian ini termasuk dalam jenis penelitian eksploratif. Alasan penelitian ini termasuk penelitian eksploratif yaitu karena penelitian bertujuan untuk menemukan hal baru dan memberikan gambaran dasar mengenai topik ini agar lebih dikenal masyarakat dan menggeneralisasikan topik ini untuk penelitian selanjutnya. Metode yang digunakan dalam penelitian ini yaitu metode deduktif aksiomatik dan pendeteksian pola dalam menentukan nilai dari bilangan kromatik *graceful* pada keluarga graf *unicyclic*.

Hasil utama dari penelitian yang dibahas terkait topik ini adalah teorema. Terdapat enam teorema baru yang ditemukan secara eksperimental dalam penelitian ini, yaitu bilangan kromatik *graceful* pada graf *bull* $B_{3,m}$ dengan $m \geq 2$ adalah 4, bilangan kromatik *graceful* pada graf *net* $N_{3,m}$, untuk $m \geq 2$ adalah 5, bilangan kromatik *graceful* pada graf *cricket* $Cr_{m,n}$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$ adalah 5, bilangan kromatik *graceful* pada graf *caveman* $C_{n,m}$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 1$ adalah 4, bilangan kromatik *graceful* pada graf *peach* C_n^m , untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 1$ adalah $m + 3$, dan bilangan kromatik *graceful* pada graf *flowerpot* $C_n S_m$, untuk $n, m \geq 3$ adalah $m + 2$.

PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Bilangan Kromatik *Graceful* pada Keluarga Graf *Unicyclic*". Skripsi ini diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Pendidikan Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Pendidikan pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
2. Ketua Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
3. Prof. Drs. Dafik, M.Sc.,Ph.D selaku Dosen Pembimbing Utama dan Arif Fatahillah, S.Pd., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
4. Drs.Antonius Cahya Prihandoko, M.App.Sc., Ph.D. selaku Dosen Penguji I dan Susi Setiawani, S.Si., M.Sc. selaku Dosen Penguji II yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun dalam penyempurnaan skripsi ini;
5. Dosen Pembimbing Akademik yang telah membimbing dan memberikan ilmu;
6. Dosen dan karyawan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
7. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dukungan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Februari 2021

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSEMBAHAN	ii
HALAMAN MOTO	iii
HALAMAN PERNYATAAN	iv
HALAMAN PEMBIMBINGAN	v
HALAMAN PENGAJUAN	vi
HALAMAN PENGESAHAN	vii
RINGKASAN	viii
PRAKATA	x
DAFTAR ISI	xi
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR TABEL	xv
DAFTAR LAMBANG	xvi
BAB 1. PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Manfaat Penelitian	4
1.5 Batasan Masalah	5
1.6 Kebaruan Penelitian	5
BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA	6
2.1 Terminologi Dasar Graf	6
2.2 Pelabelan Graf	9

2.3	Pewarnaan Graf	10
2.4	Graf Khusus.....	12
2.5	Keluarga Graf <i>Unicyclic</i>	15
2.6	Pewarnaan <i>Graceful</i>	20
2.7	<i>Online Teaching Platform</i>	22
2.8	Hasil Penelitian Terdahulu	27
BAB 3. METODE PENELITIAN		28
3.1	Jenis Penelitian	28
3.2	Metode Penelitian	28
3.3	Definisi Operasional	29
3.4	Prosedur Penelitian	30
3.5	Observasi Awal Penelitian	33
BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN.....		36
4.1	Hasil Penelitian Pewarnaan <i>Graceful</i> pada Keluarga Graf <i>Unicyclic</i>	36
4.2	Pembahasan	57
4.3	<i>Online Teaching Platform</i>	59
BAB 5. PENUTUP		63
5.1	Kesimpulan.....	63
5.2	Saran	63
DAFTAR PUSTAKA.....		64

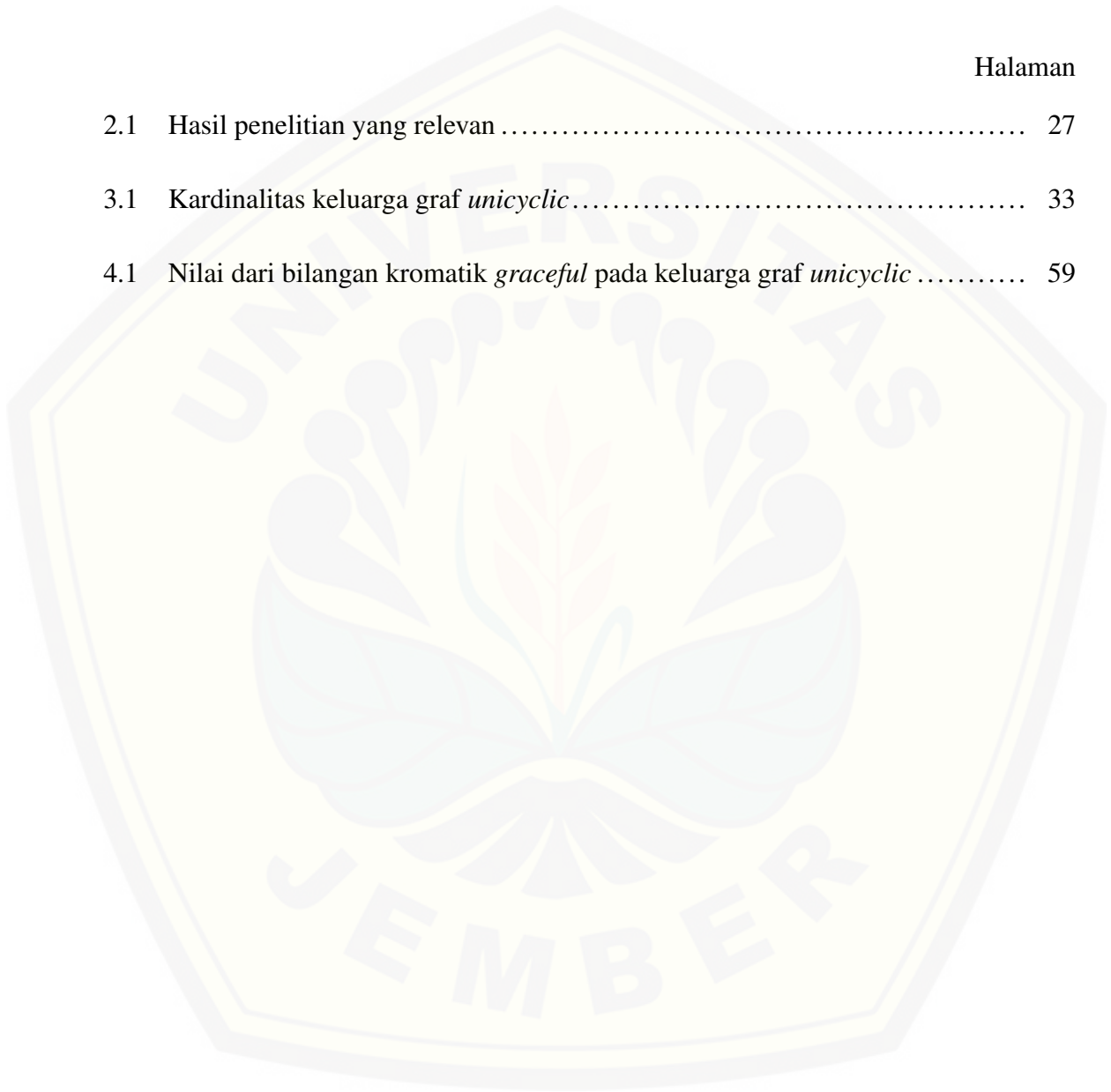
DAFTAR GAMBAR

	Halaman
2.1 Contoh Graf G	8
2.2 Pelabelan <i>Graceful</i>	10
2.3 Pewarnaan Titik.....	11
2.4 Pewarnaan Sisi.....	12
2.5 Pewarnaan Daerah.....	12
2.6 Graf Lintasan (P_7).....	13
2.7 Graf Lingkaran (C_4).....	14
2.8 Graf Lengkap (K_4).....	14
2.9 Graf Bintang (S_4).....	15
2.10 Contoh Graf <i>Unicyclic</i>	15
2.11 Graf <i>Bull</i>	16
2.12 Graf <i>Net</i>	17
2.13 Graf <i>Cricket</i>	17
2.14 Graf <i>Caveman</i>	18
2.15 Graf <i>Peach</i>	19
2.16 Graf <i>Flowerpot</i>	19
2.17 <i>State of the Art</i> dari <i>Graceful</i>	20
2.18 <i>State of the Art</i> dari Pewarnaan <i>Graceful</i>	21
2.19 Pewarnaan <i>Graceful</i>	22
2.20 Halaman Utama <i>Sevima Edlink</i>	26
2.21 Halaman Awal <i>Sevima Edlink</i>	26
3.1 Prosedur Penelitian.....	32
3.2 Observasi awal terhadap graf <i>bull</i> $B_{3,5}$, $\chi_g(B_{3,5}) = 4$	34

3.3	Observasi awal terhadap graf <i>bull</i> $B_{3,6}$, $\chi_g(B_{3,6}) = 4$	35
4.1	Graf <i>Bull</i> , $\chi_g(B_{3,m}) = 4$	39
4.2	Graf <i>Net</i> , $\chi_g(N_{3,m}) = 5$	43
4.3	Graf <i>Cricket</i> , $\chi_g(Cr_{n,m}) = 5$	47
4.4	Graf <i>Caveman</i> , $\chi_g(C_{(n,m)}) = 4$	49
4.5	Graf <i>Peach</i> , $\chi_g(C_n^m) = m + 3$	53
4.6	Graf <i>Flowerpot</i> , $\chi_g(C_n S_m) = m + 2$	57
4.7	Kode QR Kelas Pewarnaan <i>Graceful</i>	60
4.8	Tampilan video pada YouTube	62
4.9	Tampilan video pada <i>Sevima EdLink</i>	62

DAFTAR TABEL

	Halaman
2.1 Hasil penelitian yang relevan	27
3.1 Kardinalitas keluarga graf <i>unicyclic</i>	33
4.1 Nilai dari bilangan kromatik <i>graceful</i> pada keluarga graf <i>unicyclic</i>	59



DAFTAR LAMBANG

G	=	Graf G
H	=	Subgraf dari graf G
\in	=	Menyatakan elemen
$V(G)$	=	Himpunan titik pada graf G
$E(G)$	=	Himpunan sisi pada graf G
$ V(G) $	=	Banyaknya titik pada graf G
$ E(G) $	=	Banyaknya sisi pada graf G
$\chi(G)$	=	Bilangan kromatik pada graf G
$\chi(H)$	=	Bilangan kromatik subgraf dari graf G
$\chi_g(G)$	=	Bilangan kromatik <i>graceful</i> pada graf G
uv	=	Sisi yang dihubungkan oleh titik u dan titik v
P_n	=	Graf lintasan dengan n titik
C_n	=	Graf lingkaran dengan n titik
S_n	=	Graf bintang dengan n titik
K_n	=	Graf lengkap dengan n titik
$B_{3,m}$	=	Graf <i>bull</i> dengan m titik
$N_{3,m}$	=	Graf <i>net</i> dengan m titik
$Cr_{n,m}$	=	Graf <i>cricket</i> dengan n, m titik
$C_{(n,m)}$	=	Graf <i>caveman</i> dengan n, m titik
C_n^m	=	Graf <i>peach</i> dengan n, m titik
$C_n S_m$	=	Graf <i>flowerpot</i> dengan n, m titik

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler yang menemukan konsep sirkuit Eulerian pada tahun 1736 untuk menyelesaikan permasalahan di Königsberg, di mana seseorang akan melewati setiap jembatan yang berada di atas sungai Pregel tepat satu kali dan harus kembali di jembatan atau titik awal pemberangkatan. Selanjutnya graf mulai dikembangkan para peneliti untuk menyelesaikan permasalahan di kehidupan sehari-hari.

Salah satu pembahasan dalam teori graf adalah pewarnaan graf. Teorema pewarnaan graf seiring berjalannya waktu mengalami beberapa perkembangan. Graf pertama yang dijadikan obyek penelitian adalah graf planar. Graf planar adalah graf yang dapat digambarkan pada bidang datar dengan sisi-sisi yang tidak berpotongan kecuali sisi yang berpotongan pada sebuah titik. Teorema pertama perwarnaan graf menyatakan bahwa bilangan kromatik graf planar kurang dari sama dengan 6. Teorema kedua menyatakan bahwa bilangan kromatik graf planar kurang dari sama dengan 5. Teorema ketiga atau teorema terakhir ditemukan pada tahun 1852 yang menyatakan bahwa pewarnaan pada sembarang graf planar hanya membutuhkan 4 warna saja yang dikenal dengan istilah *four colour theorem* (teorema 4 warna).

Four colour theorem merupakan salah satu teorema pewarnaan graf yang menyatakan bahwa pada setiap bidang yang terpisah dalam berbagai wilayah seperti negara-negara dalam peta wilayahnya dapat diwarnai dengan maksimum 4 warna sesuai dengan syarat pewarnaan graf. Menurut Adiputra Sejati (2009), *four colour theorem* dapat digunakan dalam mewarnai sebarang peta dalam kasus dataran peta sederhana yang tidak memperhatikan hal-hal kecil didalamnya (sungai, danau, dll),

tidak dapat digunakan dalam membuat peta, serta dapat digunakan dalam pewarnaan sebarang graf planar.

Topik pewarnaan suatu graf ada banyak macamnya, diantaranya topik pewarnaan ketakteraturan lokal, pewarnaan antiajaib, pewarnaan *graceful*. Topik yang digunakan dalam penelitian ini adalah pewarnaan *graceful*. Alasan memilih topik ini dikarenakan topik pewarnaan ini termasuk topik yang baru, belum banyak peneliti yang telah meneliti topik pewarnaan ini. Pewarnaan *graceful* merupakan pengembangan dari topik pelabelan *graceful*. Pewarnaan *graceful* pertama kali dikenal pada tahun 2015 oleh Chartrand dan Zhang. Pewarnaan *graceful* merupakan pewarnaan setiap titik dan sisi menggunakan bilangan asli di mana warna yang digunakan boleh berulang baik pada himpunan titik maupun sisinya dengan syarat setiap titik ataupun sisi yang bertetangga pada graf tersebut memiliki warna yang berbeda. Pemberian warna pada setiap sisinya merupakan selisih dari dua titik yang bertetangga. Jumlah bilangan kromatik pada pewarnaan *graceful* dari graf G merupakan jumlah warna yang optimal pada titiknya dan dilambangkan dengan $\chi_g(G)$.

Penelitian ini mengkaji bilangan kromatik keluarga graf *unicyclic*. Adapun alasan memilih graf tersebut sebagai bahan penelitian ini dikarenakan proses generalisasi. Proses generalisasi yang dimaksud pada penelitian ini adalah bilangan kromatik *graceful* dari enam graf yang telah ditemukan belum pernah diteliti/didapatkan oleh peneliti lain, sehingga menjadikan topik pewarnaan *graceful* semakin umum dan semakin luas. Karena topik pewarnaan ini telah tergeneralisasi sehingga dapat memberikan gambaran kepada peneliti lain untuk mengembangkan topik ini. Suatu graf disebut *unicyclic* jika *order* dan *size* pada graf tersebut adalah sama dan memiliki satu siklus. Graf *unicyclic* yang diambil yaitu graf *bull*, graf *net*, graf *cricket*, graf *caveman*, graf *peach*, dan graf *flowerpot*. Penelitian ini telah dilakukan oleh English dan Zhang (2017) yang menemukan bilangan kromatik *graceful* pada graf pohon. Selanjutnya Alfarisi, dkk (2019) menemukan bilangan

kromatik *graceful* pada keluarga graf *unicyclic* (graf *tadpole*, graf *pan*, dan graf *sun*). Selanjutnya Mincu, dkk (2019) juga telah menemukan bilangan kromatik *graceful* pada beberapa kelas graf khusus.

Penelitian ini fokus mencari bilangan kromatik *graceful* pada keluarga graf *unicyclic*. Setelah mendapatkan bilangan kromatiknya, diperlukan pengajaran dan desiminasi mengenai topik pewarnaan *graceful* ke masyarakat luas yang ingin mempelajari topik pewarnaan *graceful*. Lembaga pendidikan formal saat ini diharuskan melaksanakan pembelajaran secara daring. Dosen dan mahasiswa harus siap dengan pembelajaran yang dilakukan secara daring. Banyak peluang-peluang pemanfaatan teknologi informasi yang perlu dikembangkan oleh dosen secara inovatif dan tentunya akan sangat bermanfaat dalam dunia pembelajaran dan era digital. Berbagai *online teaching platform* bisa diakses dengan mudah dan tidak berbayar. *Online teaching platform* yang tersedia pada masa pandemi ini di antaranya adalah *Edmodo*, *EdLink*, *Moodle*, *Google Classroom*, *Schoology*, dll. Adanya fasilitas atau fitur ini sangat membantu dosen dan mahasiswa dalam melaksanakan pembelajaran secara daring.

Online teaching platform yang digunakan pada penelitian ini adalah *Sevima EdLink* atau lebih dikenal dengan *EdLink*. Selain dapat diakses dengan mudah dan tidak berbayar, *Sevima EdLink* memiliki banyak kelebihan, di antaranya terdapat fitur berbagi konten/materi, penilaian dan *feedback*, pemberian tugas, pembuatan kuis yang interaktif, pesan pribadi, ruang diskusi, jadwal, video konferensi, notifikasi pelaksanaan pembelajaran, presensi melalui *smartphone*, serta fitur kelas yang dapat menampung mata pelajaran sesuai dengan kelas masing-masing dan juga bisa menampung banyak kelas sesuai dengan kebutuhan yang diinginkan oleh guru.

Penelitian ini menghasilkan teorema mengenai bilangan kromatik *graceful* pada keluarga graf *unicyclic*. Karakteristik graf *unicyclic* yang digunakan pada penelitian ini terletak pada subgrafnya yaitu menggunakan graf lingkaran. Setelah

mendapatkan teorema, selanjutnya adalah membuktikan kebenaran teorema yang telah ditemukan menggunakan batas atas dan batas bawah. Pencarian bilangan kromatik digunakan untuk mengetahui berapa warna titik yang optimum pada suatu graf. Setelah membuktikan bilangan kromatik *graceful* dari masing-masing graf, selanjutnya mendesiminasi topik pewarnaan *graceful* melalui *online teaching platform Sevima EdLink* sebagai media pembelajarannya. Aplikasi *Sevima EdLink* salah satu kelebihanannya yaitu memiliki fitur unggah gambar dan video dengan mudah sehingga akan membantu dalam kegiatan desiminasi gambar graf yang diteliti.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini yaitu berapa bilangan kromatik *graceful* pada keluarga graf *unicyclic*?

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah untuk menemukan bilangan kromatik *graceful* pada keluarga graf *unicyclic*.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini dalam pengembangan keilmuan teori graf yaitu sebagai berikut:

- a. meningkatkan pengetahuan dan wawasan baru dalam bidang teori graf, khususnya mengenai topik pewarnaan *graceful*;
- b. konsep pewarnaan *graceful* pada penelitian ini dapat diterapkan pada graf lainnya;
- c. hasil penelitian dapat digunakan sebagai landasan kajian dalam mengembangkan ilmu dan aplikasi yang berkaitan dengan pewarnaan *graceful* dan keluarga graf *unicyclic*;

- d. meningkatkan pengetahuan dan wawasan baru dalam bidang *online teaching platform*, khususnya *Sevima EdLink*.

1.5 Batasan Masalah

Untuk menghindari meluasnya permasalahan, maka graf yang digunakan pada penelitian ini adalah keluarga graf *unicyclic*, yaitu graf *bull* $B_{3,m}$, graf *net* $N_{3,m}$, graf *cricket* $Cr_{n,m}$, graf *caveman* $C_{(n,m)}$, graf *peach* C_n^m , dan graf *flowerpot* $C_n S_m$;

1.6 Kebaruan Penelitian

Kebaruan penelitian ini adalah pengembangan topik mengenai bilangan kromatik *graceful*. Pada penelitian ini hanya dibatasi pada beberapa graf dari keluarga graf *unicyclic*, yaitu graf *bull* $B_{3,m}$, graf *net* $N_{3,m}$, graf *cricket* $Cr_{n,m}$, graf *caveman* $C_{(n,m)}$, graf *peach* C_n^m , dan graf *flowerpot* $C_n S_m$.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Terminologi Dasar Graf

Teori graf pertama kali muncul pada tahun 1736 ketika Leonard Euler mencoba menyelesaikan masalah Jembatan Konigsberg yaitu jembatan di sebuah kota tua di Rusia Timur yang sekarang dikenal dengan sebutan Kalinigrad. Tujuh jembatan dibangun di atas sungai Pregel agar memungkinkan penghuni Konigsberg dapat berjalan dari satu kota ke kota yang lain. Pada saat itu orang-orang ingin membuat sebuah rute agar orang-orang dapat menyebrangi ketujuh jembatan satu kali saja, namun hal tersebut tidak membuahkan hasil. Leonard Euler berhasil menemukan penyelesaiannya dengan menggunakan graf dimana keempat kota itu sebagai titik (*vertex*) dan ketujuh jembatan sebagai sisi (*edge*) yang menghubungkan pasangan titik yang sesuai.

Teori graf adalah cabang kajian yang mempelajari sifat-sifat graf. Sebuah graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dimana V adalah himpunan tidak kosong dari elemen G yang disebut titik (*vertex*) dan E adalah himpunan (boleh kosong) dari pasangan tidak terurut dua titik v_1, v_2 dimana $v_1, v_2 \in V(G)$, yang disebut sisi (*edge*). Seringkali dituliskan $V(G)$ adalah himpunan titik dari graf G dan $E(G)$ adalah himpunan sisi dari graf G (Hartsfield dan Ringel, 1994).

Graf merupakan himpunan titik berhingga dimana titik dinyatakan dengan simpul dan sisi dinyatakan dengan garis. Secara matematis, graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) ditulis dengan notasi $G = (V, E)$. Suatu graf G terdiri dari himpunan titik yang dapat dilambangkan dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ yang berhingga dan tidak kosong dan himpunan sisi yang dapat dilambangkan dengan $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ yang berhingga dan boleh kosong serta setiap sisi

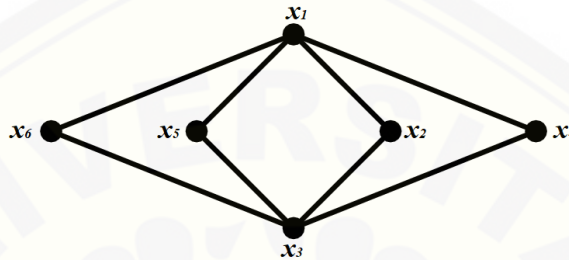
menghubungkan dua titik. Jadi sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi, tetapi harus memiliki titik minimal satu. Munir (2010) menyatakan bahwa graf G adalah pasangan himpunan titik (V) dan himpunan sisi (E) dimana V merupakan himpunan titik tak kosong dan E merupakan himpunan sisi yang didapat dari pasangan tak terurut dua titik v_1, v_2 dimana $v_1, v_2 \in V(G)$. Himpunan titik dari graf G dapat ditulis $V(G)$ dan himpunan sisi pada graf G dapat ditulis $E(G)$ (Slamin, 2009).

Himpunan dari titik dan sisi dari suatu graf $G = (V, E)$ didefinisikan dengan $V(G)$ dan $E(G)$. Banyaknya titik di G dinotasikan dengan $|V(G)|$ sedangkan banyaknya sisi pada graf G disebut *size* dari G , dinotasikan dengan $|E(G)|$. Graf yang tidak mempunyai sisi dinamakan graf kosong (*null graph*). Jadi, sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi titiknya harus ada minimal satu. Graf yang hanya memiliki satu buah titik tanpa sebuah sisi dinamakan graf *trivial* (Munir, 2010).

Berdasarkan definisi di atas, dapat disimpulkan bahwa syarat wajib sebuah graf adalah adanya titik, sedangkan sisi boleh himpunan kosong atau tidak mempunyai sisi. Graf kosong dinotasikan dengan N_n dimana n merupakan banyaknya titik sampai n . *Vertex* (V) dapat dilabeli dengan bilangan bulat positif atau huruf atau gabungan dari keduanya begitu juga pada *edge* (E). Sisi (*edge*) adalah sebuah garis atau sisi yang menghubungkan dua titik. Purwanto, dkk (2006) menyatakan bahwa banyaknya titik pada graf G disebut kardinalitas titik dinotasikan dengan $|V|$ sedangkan banyaknya sisi pada graf G disebut kardinalitas sisi dinotasikan dengan $|E|$. Dua buah titik pada graf G dikatakan bertetangga (*adjacent*) bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi. Dengan kata lain, u bertetangga dengan v jika u, v adalah sebuah sisi pada graf G .

Misalkan u dan v adalah titik-titik di graf G dan uv atau vu merupakan sisi di G . u dan v merupakan titik yang saling bertetangga. Sisi uv dikatakan terkait (*incident*) pada titik u dan titik v . Banyaknya titik pada G disebut *order* G dan banyaknya sisi di G disebut *size* G . Derajat dari titik v adalah banyaknya titik di G yang bertetangga

dengan v . Derajat titik dinotasikan dengan $d(v)$. Titik dengan derajat 0 disebut titik terisolasi dan titik dengan derajat 1 disebut titik akhir. Derajat titik terbesar pada suatu graf G disebut derajat maksimum yang dituliskan dengan $\Delta(G)$. Derajat minimum dari G dituliskan dengan $\delta(G)$ (Chartrand dan Zhang, 2009).



Gambar 2.1 Contoh Graf G

Pada gambar 2.1, graf tersebut memiliki himpunan titik $V(G) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, himpunan sisi $E(G) = \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_1, x_1x_5, x_5x_3, x_3x_6, x_6x_1\}$, *order* atau banyaknya titik pada graf G adalah $|V(G)| = 6$, sedangkan banyaknya sisi pada graf G (*size*) adalah $|E(G)| = 8$, titik x_1 dan x_2 bertetangga (*adjacent*) dan terkait (*incident*) dengan sisi x_1x_2 , derajat masing titik adalah $d(x_1) = 4$, $d(x_2) = 2$, $d(x_3) = 4$, $d(x_4) = 2$, $d(x_5) = 2$, $d(x_6) = 2$, derajat minimum pada graf G adalah $\delta(G) = 2$, sedangkan derajat maksimum pada graf G adalah $\Delta(G) = 4$.

Menurut Hartsfield dan Ringel (1994) apabila ada jalan/sisi pada graf sudah dilewati dan sisi tersebut tidak dilewati kembali maka jalan tersebut dinamakan *trail*. Kemudian apabila titik pada *trail* tersebut tidak ada yang dilewati kembali maka disebut lintasan (*path*). Apabila suatu jalan memiliki titik awal dan titik akhir yang sama maka disebut sirkuit. Suatu lintasan yang sekaligus merupakan sirkuit maka disebut *cycle*. Panjang *cycle* terpendek disebut *girth*. Menurut Gross dan Yellen (2006) jarak dari titik v ke titik terjauh dari v disebut eksentrisitas. Jarak terjauh antara dua titik di $V(G)$ atau suatu nilai maksimum dari eksentrisitas disebut diameter. Diameter graf G dinotasikan dengan $diam(G)$. Eksentrisitas minimum di antara titik-titik di G disebut jari-jari (*radius*) yang dinotasikan dengan $rad(G)$.

Suatu graf dikatakan graf terhubung (*connected graph*), jika dan hanya jika untuk setiap pasang titik v_i dan v_j di dalam himpunan V terdapat path dari v_i ke v_j . Jika tidak, maka graf G dikatakan graf tidak terhubung (*disconnected graph*). Graf yang hanya terdiri atas satu titik saja (tanpa sisi) tetap dikatakan terhubung, karena titik tunggalnya terhubung dengan dirinya sendiri (Chartrand, 2012).

Graf sederhana adalah graf yang tidak memuat loop dan sisi rangkap (*multiple edge*). *Loop* adalah sisi yang menghubungkan suatu titik dengan dirinya sendiri. Sisi rangkap adalah sisi yang menghubungkan dua titik dengan banyak lebih dari satu. Graf tak berarah (*undirected graph*) adalah graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah dan urutan pasangan titik-titik yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan (Harary, 1969).

Melihat graf tidak hanya dari bentuknya saja, sebab ada graf yang bentuknya berbeda namun sebenarnya sama, graf seperti ini disebut sebagai isomorfis. Dua graf G_1 dan G_2 dengan p titik dikatakan isomorfis jika setiap titik graf G_1 dan G_2 dapat dilabeli angka 1 sampai p . Titik dengan label u dan v bertetangga di G_1 maka u dan v juga bertetangga di G_2 dan sebaliknya. Jika dua graf saling isomorfis maka keduanya harus memiliki barisan derajat titik yang sama (Hartsfield dan Ringel, 1994).

2.2 Pelabelan Graf

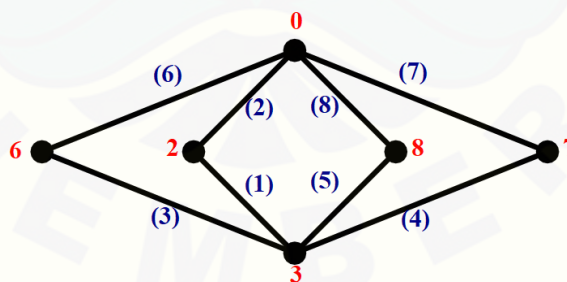
Pelabelan graf pertama kali dikenalkan oleh Sedl'ac'ek tahun 1963 sebagai perumusan ide bujur sangkar ajaib. Seiring berkembangnya zaman pelabelanpun semakin berkembang. Sebelum mengetahui macam-macam pelabelan graf lebih baik mengetahui definisi dari pelabelan graf. Misalkan $G = (V(G), E(G))$ adalah graf berhingga dengan $|V(G)| = vG$ dan $|E(G)| = eG$. Pelabelan graf G didefinisikan sebagai suatu fungsi yang memetakan elemen-elemen G ke suatu subhimpunan bilangan bulat positif (Inayah, 2013). Pelabelan Graf menggunakan bilangan bulat positif. Fungsi yang memetakan merupakan fungsi injektif, sehingga tidak ada elemen

titik maupun sisi yang memiliki label sama. Terdapat tiga macam pelabelan yaitu:

- Pelabelan titik (*vertex labelling*) adalah pelabelan dengan domain himpunan titik.
- Pelabelan sisi (*edge labelling*) adalah pelabelan dengan domain himpunan sisi.
- Pelabelan total (*total labelling*) adalah pelabelan dengan domain gabungan himpunan titik dan sisi (Wallis, 2001).

Suatu pelabelan f dari suatu graf $G = (V, E)$ adalah pemetaan satu-satu dari himpunan titik di G ke suatu himpunan bilangan bulat positif. Untuk setiap sisi $e = uv \in E(G)$, bobot yang diinduksi oleh f pada e ditulis $f(e)$, adalah $|f(u) - f(v)|$. Misalkan G adalah suatu graf berorde n dan ukuran m . Jika $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, m\}$ adalah suatu pelabelan dari G , sedemikian sehingga himpunan bobot yang diinduksi oleh f adalah $\{1, 2, \dots, m\}$, maka f dikatakan pelabelan *graceful* dari G , dan G dinamakan graf *graceful*.

Pelabelan *graceful* pada graf G adalah pemetaan injektif $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, q\}$ sedemikian hingga, jika sisi (xy) dilabeli dengan $|f(x) - f(y)|$ maka label setiap sisi akan berbeda (Gayathri dan Vanitha, 2011). Dengan demikian, pelabelan *graceful* merupakan salah satu bentuk pelabelan pada titik sedangkan label sisinya menjadi akibat dari adanya label titik.



Gambar 2.2 Pelabelan *Graceful*

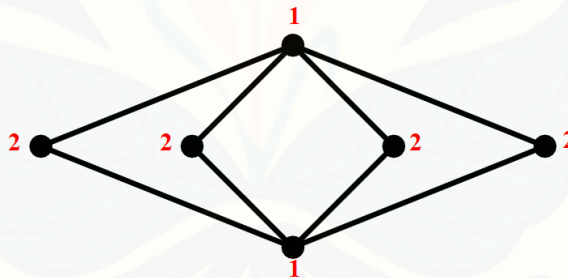
2.3 Pewarnaan Graf

Pewarnaan graf adalah kasus khusus dari pelabelan graf. Pelabelan disini maksudnya adalah memberikan warna pada titik-titik pada batas tertentu.

Pewarnaan graf adalah proses mewarnai himpunan titik dan himpunan sisi pada graf menggunakan warna seminimal mungkin dengan syarat-syarat tertentu sesuai dengan topik yang dibahas. Syarat-syarat tersebut dapat berupa setiap titik dan sisi yang bertetangga tidak boleh sama atau setiap titik dan setiap sisi masing-masing tidak boleh memiliki warna yang sama. Menurut Kubale (2004) pewarnaan graf terdiri dari beberapa macam, di antaranya sebagai berikut:

a. Pewarnaan Titik (*Vertex Colouring*)

Pewarnaan titik adalah pemberian warna pada himpunan titik sedemikian hingga setiap dua titik yang bertetangga tidak mempunyai warna yang sama. Jumlah warna minimum yang digunakan dalam pewarnaan titik disebut sebagai bilangan kromatik dari graf G yang dinotasikan dengan $\chi(G)$. Jadi bilangan kromatik adalah bilangan k terkecil sehingga graf G dapat diwarnai dengan k warna, dimana k adalah bilangan bulat positif.

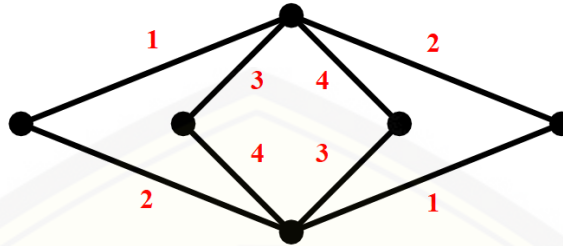


Gambar 2.3 Pewarnaan Titik

b. Pewarnaan Sisi (*Edge Colouring*)

Pewarnaan sisi adalah pemberian warna pada himpunan sisi sedemikian hingga setiap dua sisi yang bertetangga mempunyai warna yang berbeda. Suatu pewarnaan sisi- k untuk graf G adalah suatu penggunaan sebagian atau semua k warna untuk mewarnai semua sisi di G sehingga setiap pasang sisi yang mempunyai titik persekutuan diberi warna yang berbeda. Jumlah warna yang diperlukan dalam pewarnaan sisi lebih besar atau sama dengan derajat maksimal

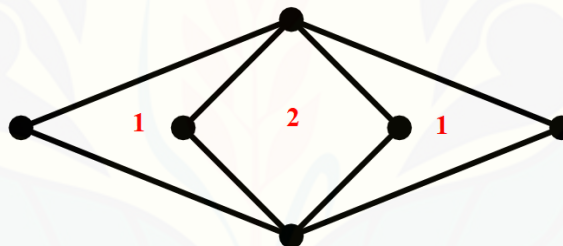
titik dari graf tersebut.



Gambar 2.4 Pewarnaan Sisi

c. Pewarnaan Daerah (*Region Colouring*)

Pewarnaan daerah adalah pemberian warna pada himpunan daerah pada graf sedemikian hingga tidak ada daerah yang bertetangga memiliki warna yang sama.



Gambar 2.5 Pewarnaan Daerah

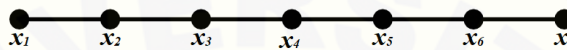
2.4 Graf Khusus

Graf khusus adalah graf yang memiliki keunikan atau ciri-ciri tertentu yang membedakan dengan graf lainnya (tidak isomorfis dengan graf lain). Graf khusus dapat di *expand* sampai orde- n tetapi bentuknya masih simetris. Graf khusus yang populer dinamakan *well-known special graph*. Sedangkan graf khusus yang belum populer dinamakan *well-defined special graph*. Graf khusus bermacam-macam, di antaranya:

a. Graf Lintasan (*path graph*)

Graf lintasan dinotasikan dengan P_n adalah graf yang terdiri dari satu

lintasan. Jumlah sisi pada graf lintasan dengan n titik adalah $n - 1$ sisi, dengan $n \geq 2$ (Damayanti, 2011). Menurut Gross dan Yellen (2006) graf lintasan adalah graf sederhana dengan $|Vp| = |Ep| + 1$ dapat digambarkan dengan semua titik dan sisi yang berada pada sebuah garis lurus. Derajat titik untuk graf lintasan dengan dua titik adalah 1 dan untuk yang lain berderajat titik 2. Contoh dari graf lintasan dapat dilihat pada Gambar 2.6.



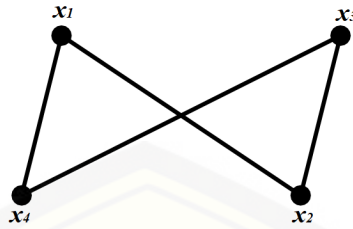
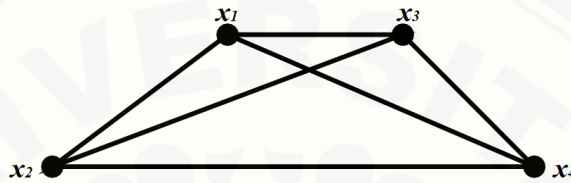
Gambar 2.6 Graf Lintasan (P_7)

b. Graf Lingkaran (*cycle graph*)

Graf lingkaran dinotasikan dengan C_n adalah sebuah titik dengan *loop* pada dirinya sendiri atau graf sederhana C dengan $|Vc| = |Ec|$ yang dapat digambarkan dengan semua titik dan sisi yang berada pada lingkaran tunggal (Gross dan Yellen, 2006). Menurut Munir (2010), Graf siklus atau graf lingkaran adalah graf reguler yang berderajat dua, artinya pada graf lingkaran untuk setiap titiknya mempunyai derajat dua, sehingga dalam graf lingkaran jumlah titik dan jumlah sisinya sama. Graf lingkaran C_n hanya dapat dibentuk dengan $n \geq 3$. Graf lingkaran merupakan graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua dan terhubung pada setiap titik yang lain. Suatu graf yang tidak memiliki lingkaran (*acyclic*) memiliki subgraf yang isomorfik dengan graf lingkaran. Sedangkan suatu graf G yang terhubung dan hanya memiliki sebuah graf lingkaran disebut dengan graf *unicyclic*. Contoh dari graf lingkaran tunggal dapat dilihat pada Gambar 2.7.

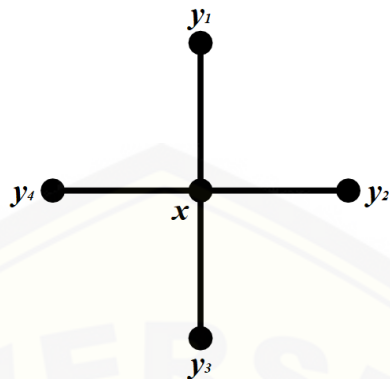
c. Graf Lengkap (*complete graph*)

Graf lengkap dinotasikan dengan K_n adalah graf sederhana yang setiap pasang titiknya terhubung langsung (bertetangga) dengan sebuah sisi (Gross dan Yellen, 2006). Contoh dari graf lengkap dapat dilihat pada Gambar 2.8.

Gambar 2.7 Graf Lingkaran (C_4)Gambar 2.8 Graf Lengkap (K_4)

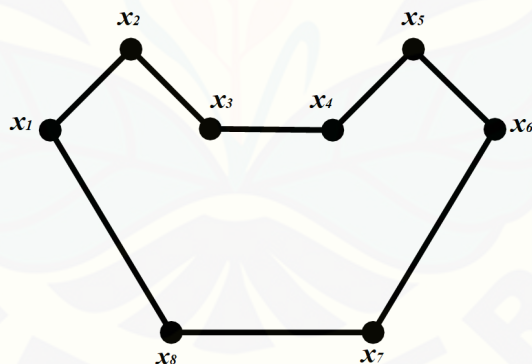
d. Graf Bintang (*star graph*)

Graf bintang dinotasikan dengan S_n adalah graf pohon yang terdiri dari satu titik pusat yang berderajat n dan n titik yang berderajat 1. Jadi graf bintang terdiri dari $n + 1$ titik dan n sisi dengan $n \geq 2$ (Slamin, 2009). Contoh dari graf bintang dapat dilihat pada Gambar 2.9.

Gambar 2.9 Graf Bintang (S_4)

2.5 Keluarga Graf *Unicyclic*

Graf *unicyclic* merupakan graf dengan *order* dan *size* sama yang mempunyai satu siklus. Graf ini dinotasikan dengan C_l , dimana l merupakan panjang dari graf *unicyclic* (Rongbo, 2010).

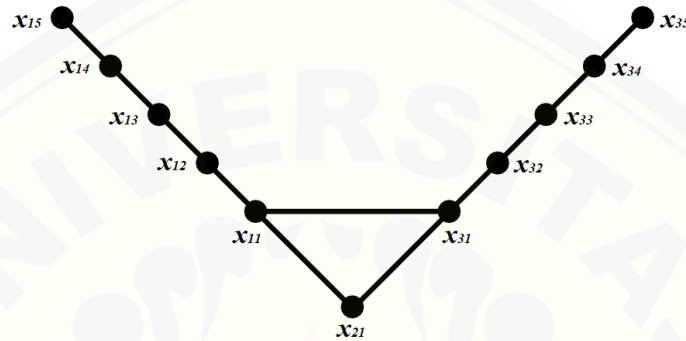
Gambar 2.10 Contoh Graf *Unicyclic*

Beberapa contoh dari keluarga graf *unicyclic*, yaitu graf *bull*, graf *net*, graf *cricket*, graf *caveman*, graf *peach*, graf *flowerpot*. Berikut penjelasan dari masing-masing keluarga graf *unicyclic* tersebut (Harary, 1994).

a. Graf *Bull*

Graf *bull* merupakan graf yang dihasilkan dari gabungan antara graf

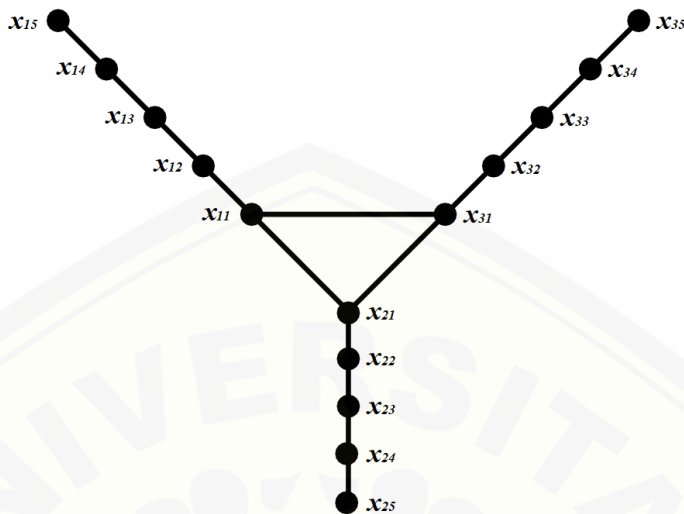
lingkaran dengan 3 titik C_3 dan graf lintasan yang terhubung oleh sisi yang memanjang pada kedua titik yang ada pada graf lingkaran. Graf ini dinotasikan dengan $B_{3,m}$, dimana m merupakan banyaknya titik pada lintasan. Contoh graf *bull* dapat dilihat pada Gambar 2.11.



Gambar 2.11 Graf *Bull*

b. Graf *Net*

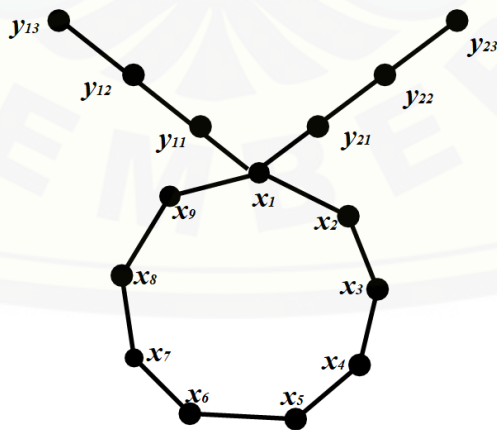
Graf *net* merupakan graf yang dihasilkan dari gabungan antara graf lingkaran dengan 3 titik C_3 dan graf lintasan yang terhubung memanjang pada setiap sisi dari graf lingkaran. Graf ini dinotasikan dengan $N_{3,m}$, dimana m merupakan banyaknya titik pada lintasan. Contoh graf *net* dapat dilihat pada Gambar 2.12.



Gambar 2.12 Graf Net

c. Graf Cricket

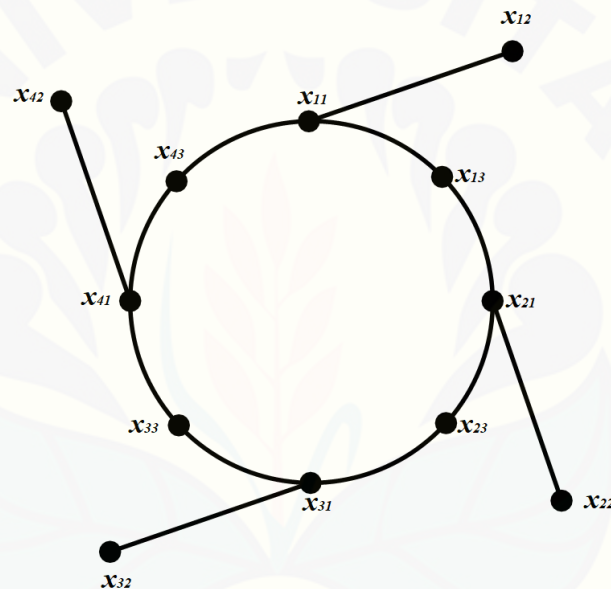
Graf *cricket* merupakan gabungan dari graf lingkaran C_n dengan dua buah graf lintasan yang dihubungkan dengan dua sisi pada satu titik x_1 yang terdapat pada graf lingkaran yaitu satu sisi di ruas kiri titik y_{1j} dan satu sisi di ruas kanan titik y_{2j} sebanyak m . Graf ini dinotasikan dengan $Cr_{n,m}$, dimana n merupakan banyaknya titik pada lingkaran dan m merupakan banyaknya titik pada graf lintasan. Contoh graf *cricket* dapat dilihat pada Gambar 2.13.



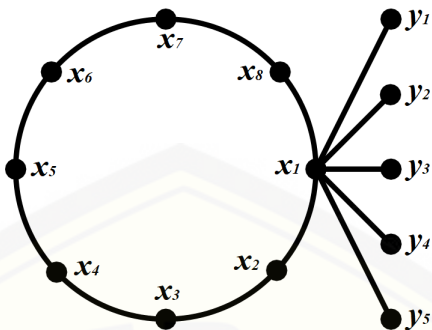
Gambar 2.13 Graf Cricket

d. Graf *Caveman*

Graf *caveman* merupakan graf yang terbentuk dengan memodifikasi *clique* dengan memindahkan satu sisi dari setiap *clique* dan menggunakan itu untuk menghubungkan ke *clique* yang bertetangga sehingga membentuk satu *loop* (Kuotra,2015). Graf ini dinotasikan dengan $C_{(n,m)}$, dimana n merupakan banyaknya salinan *clique* dan m merupakan banyaknya titik pada *clique*. Contoh graf *caveman* dapat dilihat pada Gambar 2.14.

Gambar 2.14 Graf *Caveman*e. Graf *Peach*

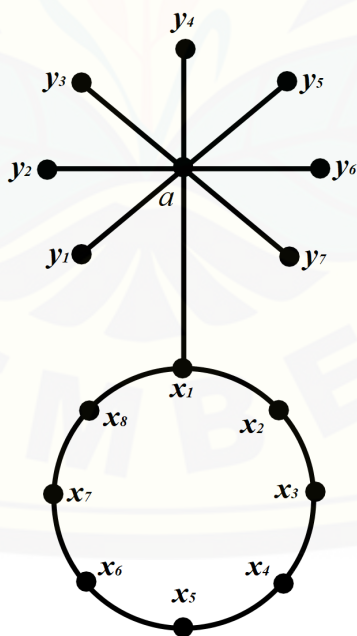
Graf *peach* merupakan graf lingkaran C_n yang memiliki *pendant* sebanyak m pada satu titik yaitu di titik x_1 yang terdapat pada graf lingkaran. Graf ini dinotasikan dengan C_n^m , dimana m merupakan banyaknya *pendant* yang terhubung pada satu titik di lingkaran. Contoh graf *peach* dapat dilihat pada Gambar 2.15.



Gambar 2.15 Graf Peach

f. Graf Flowerpot

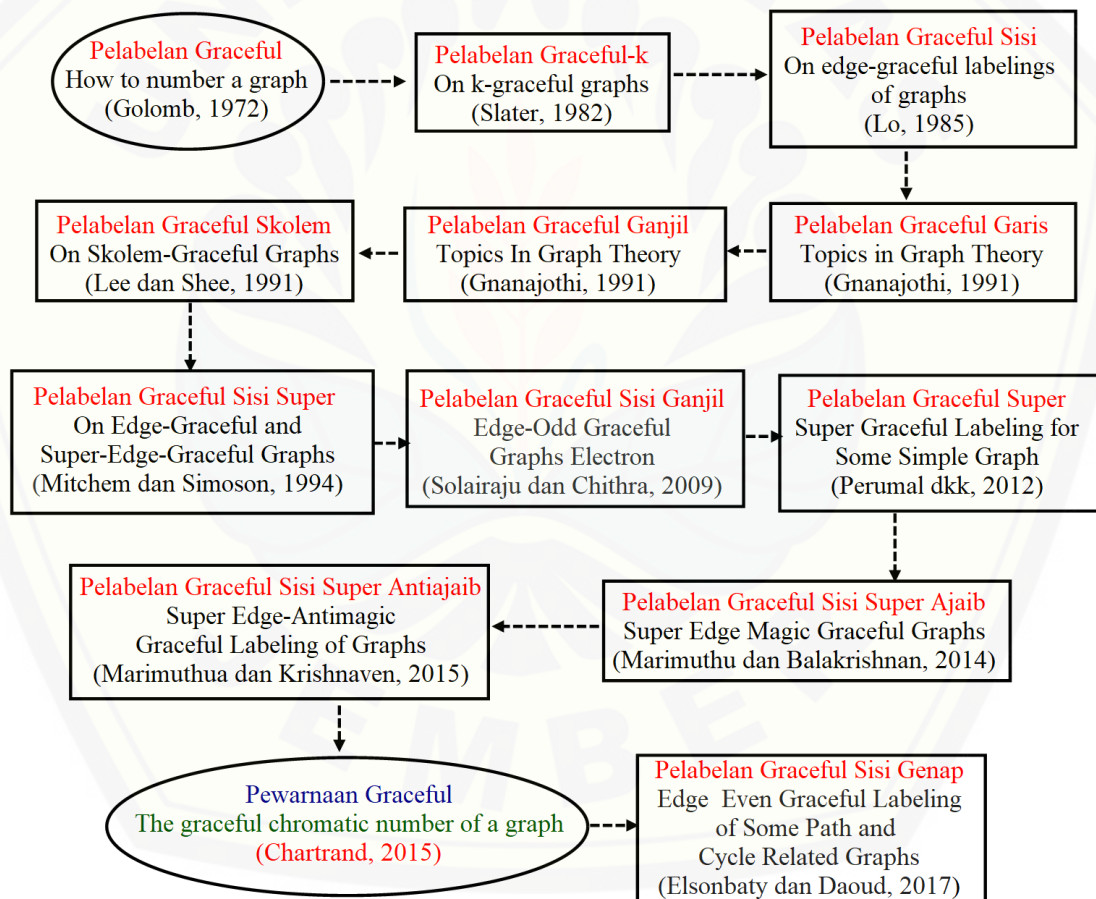
Graf flowerpot $C_n S_m$ merupakan gabungan graf bintang dan graf lingkaran yang dihubungkan oleh sisi yang menghubungkan titik pusat graf bintang S_m , dengan satu titik pada graf lingkaran C_n . Graf ini dinotasikan dengan $C_n S_m$, dimana m merupakan banyaknya titik pada graf bintang. Contoh graf flowerpot dapat dilihat pada Gambar 2.16.



Gambar 2.16 Graf Flowerpot

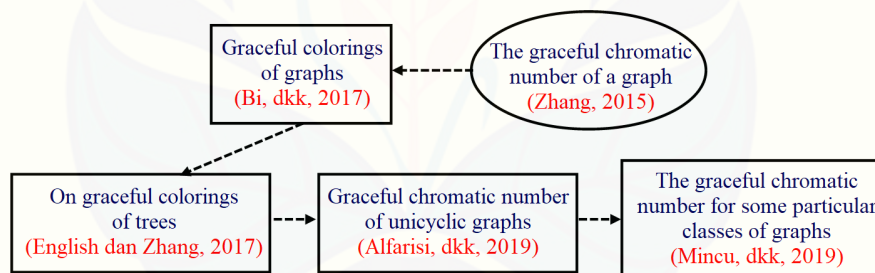
2.6 Pewarnaan *Graceful*

Graf G size m , pelabelan *graceful* G adalah fungsi injektif $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, \dots, m\}$ yang menghasilkan fungsi bijektif $f_0 : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$ yang didefinisikan dengan $f_0(uv) = |f(u) - f(v)|$. Graf dikatakan *graceful* jika memiliki label yang *graceful*. Selama bertahun-tahun, sejumlah variasi pelabelan *graceful* telah diperkenalkan, beberapa di antaranya telah dijelaskan dalam hal pewarnaan. Perkembangan konsep pewarnaan *graceful* bermula dari pelabelan *graceful*. Perkembangan konsep pewarnaan *graceful* dapat dilihat pada Gambar 2.17.



Gambar 2.17 State of the Art dari *Graceful*

Konsep *graceful* yang pertama dikembangkan adalah pelabelan *graceful* pada tahun 1972, kemudian pada tahun 2015 konsep *graceful* dikembangkan lagi menjadi pewarnaan *graceful*. Perkembangan ini dapat dilihat pada penerapan konsep *gracefulness*, dimana konsep *graceful* adalah label/warna sisi merupakan hasil induksi dari label/warna titik yang berkaitan. Label/warna sisi pada topik *graceful* merupakan nilai absolut dari label/warna titik yang berkaitan. Sehingga konsep *graceful* pada pelabelan *graceful* sama dengan konsep *graceful* pada pewarnaan *graceful*. Hanya saja perbedaannya terletak pada dua topik pada teori graf, yaitu pelabelan dan pewarnaan. Pada pelabelan *graceful*, setiap titik pada graf G memiliki label yang berbeda, begitu juga pada setiap sisi. Sedangkan pada pewarnaan *graceful* hanya disyaratkan memenuhi konsep pewarnaan suatu graf, tidak disyaratkan pada setiap titik atau setiap sisinya memiliki label (warna) yang berbeda. Beberapa peneliti telah melakukan penelitian mengenai pewarnaan *graceful* yang dapat dilihat pada Gambar 2.18.

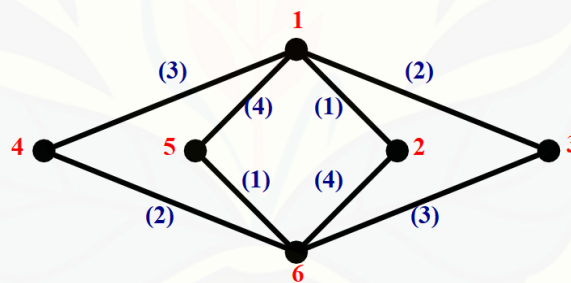


Gambar 2.18 *State of the Art* dari Pewarnaan *Graceful*

Pewarnaan *graceful* titik pada graf G adalah suatu cara mewarnai pada titik G sehingga titik yang bertetangga diberi warna yang berbeda. Jumlah minimum warna yang dibutuhkan untuk pewarnaan titik G adalah bilangan kromatiknya, $\chi(G)$. Demikian pula, pewarnaan sisi pada graf G adalah suatu cara mewarnai sisi G sehingga *graceful* sisi yang bertetangga diberi warna yang berbeda. Jumlah minimum warna yang dibutuhkan untuk pewarnaan *graceful* sisi G adalah indeks kromatiknya, $\chi'(G)$ (Byers, 2018).

Pewarnaan k -*graceful* dari graf terhubung yang tidak berarah G adalah pewarnaan titik yang menggunakan k warna yang menginduksi pewarnaan sisi, di mana warna untuk sisi (u, v) adalah nilai absolut dari selisih antara warna pada titik yang bertetangga dengan sisi tersebut (Mincu, dkk, 2019).

Pewarnaan titik didefinisikan $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, $k \geq 2$ dari graf G disebut pewarnaan *graceful* jika pewarnaan sisi yang diinduksi $c' : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k - 1\}$ didefinisikan oleh $c'(uv) = |c(u) - c(v)|$ untuk setiap sisi uv dari G juga *proper*. Bilangan bulat minimum k pada graf tersebut adalah bilangan kromatik *graceful* $\chi_g(G)$ (English dan Zhang, 2017). Menurut Alfarisi dkk (2019) pewarnaan k -*graceful* adalah pewarnaan titik dimana $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, dengan $k \geq 2$ yang menginduksi pewarnaan sisi dimana $f_0 : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k - 1\}$ didefinisikan $f_0(uv) = |f(u) - f(v)|$.



Gambar 2.19 Pewarnaan *Graceful*

Lemma 1 Jika H adalah subgraf dari graf (G) , maka $\chi_g(G) \geq \chi_g(H)$.

Proposisi 1 Jika G merupakan graf terhubung *nontrivial* dengan *order* lebih dari sama dengan 3, maka $\chi_g(C_n) = 4$, untuk $n \neq 5$ dan $\chi_g(C_n) = 5$, untuk $n = 5$ (Bi, dkk, 2017).

2.7 Online Teaching Platform

Menurut surat edaran Kemendikbud No 1 tahun 2020 tentang Pencegahan Penyebaran *Corona Virus Disease* (Covid-19) di perguruan tinggi, kementerian

pendidikan dan kebudayaan point ke-5 yang menyatakan “Menyelenggarakan pembelajaran jarak jauh sesuai dengan kondisi PT masing-masing, dan menyarankan mahasiswa untuk melakukan pembelajaran dari rumah dengan pembelajaran daring baik *synchronous* maupun *asynchronous*, melalui *platform: Google Classroom / Edmodo / Schoology / Classdojo (for kids)*, sedangkan untuk merekam materi bentuk video melalui: *Camtasia / Screencast-O-Matic / Seesaw / Xrecorder*, dan untuk latihan dapat melalui *Quizlet (flashcard dan diagram), Quizizz (homework) atau Kahoot*” (Kemendikbud, 2020).

Gambaran pembelajaran secara daring dibagi menjadi dua yaitu *Synchronous* dan *Asynchronous*. *Synchronous training* merupakan gambaran dari kelas nyata, namun bersifat maya (virtual) dan semua peserta didik terhubung melalui internet. *Synchronous training* sering juga disebut sebagai *virtual classroom*. Kedua, *Asynchronous* berarti tidak pada waktu bersamaan. Peserta didik dapat mengambil waktu pembelajaran berbeda dengan pendidik memberikan materi.

Online teaching platform adalah bagian dari sistem manajemen pembelajaran atau *Learning Management System (LMS)* yang menyediakan pengguna dapat mengakses kelas pembelajaran berbasis *hypermedia* (bisa berupa video, gambar, teks, audio, dan file lainnya). LMS adalah suatu teknologi yang menyediakan kebutuhan pendidik untuk memberikan pembelajaran seperti membuat suatu sumber belajar, memantau aktivitas peserta didik, dan menilai kinerja peserta didik sesuai dengan tujuan pengajaran (Daud dan Ghani, 2017). *Online teaching platform* memiliki tiga tipe yaitu Tipe *Indirect Learning and Teaching*, Tipe *Direct Learning and Teaching*, dan Tipe *Mix*. Tipe *Indirect Learning and Teaching* merupakan sistem pembelajaran berupa pemanfaatan *channel media sosial* berupa *YouTube, Instagram, WhatsApp*, dan lain-lain. Tipe *Direct Learning and Teaching* merupakan sistem pembelajaran berupa pemanfaatan *Cloud Meeting*, seperti *Zoom, Google Meet, Skype, BBB*, dan lain-lain. Tipe *Mix* merupakan kombinasi dari sistem pembelajaran *Indirect Learning*

and Teaching dan *Direct Learning and Teaching*. *Online teaching platform* yang digunakan pada penelitian ini adalah *Sevima Edlink*.

Berbagai *teaching platform* teknologi informasi yang berpeluang untuk dimanfaatkan dalam mendukung kegiatan pembelajaran daring dan sekaligus berpeluang pula memaksa para dosen agar melek teknologi informasi. Beberapa di antaranya sebagai berikut:

- a. *E-learning* adalah teknologi informasi dan komunikasi untuk mengaktifkan siswa untuk belajar kapanpun dan di manapun Dahiya dalam (Hartanto, 2016).
- b. *Edmodo* adalah pembelajaran berbasis jejaring sosial yang aman dan gratis dalam memudahkan guru untuk membuat dan mengelola kelas virtual sehingga siswa dapat terhubung dengan teman sekelas dan guru kapan saja dan dimana saja (Balasubramanian, 2014).
- c. *Google Classroom* digunakan untuk memaksimalkan proses penyampaian materi kepada peserta didik tetapi dilakukan secara *online* sehingga materi bisa tersampaikan secara keseluruhan. *Google Classroom* atau ruang kelas *Google* adalah layanan berbasis internet yang disediakan oleh *Google* sebagai sebuah sistem *e-learning*. Servis ini didesain untuk membantu pengajar membuat dan membagikan tugas kepada pelajar secara *paperless* (Hakim, 2016).
- d. *Sevima Edlink* adalah aplikasi yang dapat diakses pada media teknologi komputer dan *android* yang terintegrasi dengan *feeder* kampus yaitu siak, sehingga dapat membantu dosen dan mahasiswa dalam perkuliahan daring (*online*) (Marlina, 2020).

Aplikasi *Sevima Edlink* memiliki beberapa kelebihan yaitu terdapat fitur berbagi konten/materi, fitur penilaian dan *feedback*, fitur khusus pemberian tugas, fitur membuat *quiz*, fitur pesan pribadi, fitur diskusi, serta fitur kelas yang dapat menampung mata pelajaran sesuai dengan kelas masing-masing dan juga bisa menampung banyak kelas sesuai dengan kebutuhan yang diinginkan oleh guru serta

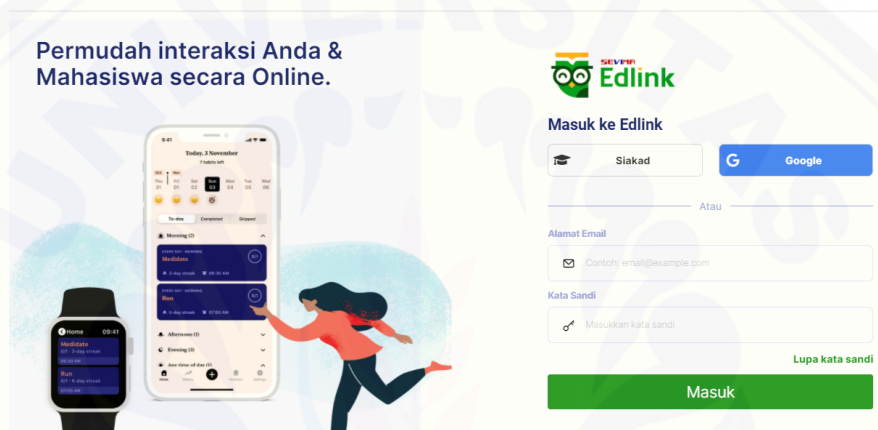
membuat proses belajar mengajar menjadi lebih efektif. Adapun kekurangan dari aplikasi *Sevima Edlink* yaitu tidak terdapat fitur audio/suara dan peserta didik tidak bisa melampirkan file berupa gambar di dalam kolom komentar saat sedang berdiskusi *online*, kemudian sebelum login ke dalam aplikasi peserta didik harus daftar terlebih dahulu menggunakan *e-mail*, selain itu *Sevima Edlink* sangat tergantung pada internet dan harus menggunakan data seluler *online time* dan tidak bisa *offline* sehingga apabila sedang berada dalam diskusi *online* kemudian jaringan sedang lambat maka proses pembelajaran online akan tertinggal, jadi di butuhkan jaringan internet yang memadai dan kouta internet yang cukup (Wibowo dan Rahmayanti, 2020).

Adapun fitur-fitur dalam aplikasi *Sevima Edlink* yaitu sebagai berikut:

- a. Fitur Kelas, dapat membuat forum kelas terlebih dahulu sebelum memulai pembelajaran secara *online*.
- b. Fitur Materi/Bahan Ajar, dapat memasukkan materi/bahan ajar di dalamnya, seperti bahan ajar berupa video, gambar, *link* atau dokumen.
- c. Fitur Forum Diskusi, peserta didik dapat berdiskusi dengan guru maupun dengan peserta didik lainnya mengenai materi pembelajaran yang akan dibahas. Dalam forum diskusi *online* dilakukan di dalam fitur komentar.
- d. Fitur Tugas, dapat memasukkan file dalam bentuk dokumen berupa tugas atau ulangan harian, bentuk video, maupun bentuk gambar untuk dikerjakan oleh peserta didik dengan adanya ketentuan batas waktu untuk mengumpulkan.
- e. Fitur Penilaian dan *Feedback*, terdapat kolom yang dikhususkan untuk memberikan nilai dan *feedback* langsung ke peserta didik yang telah mengumpulkan hasil tugas atau ulangan harian.
- f. Fitur *Quiz*, fitur ini dapat digunakan untuk membuat *quiz* dengan memasukkan beberapa pertanyaan-pertanyaan di dalamnya, kemudian di dalam fitur *quiz* tersebut juga dapat melampirkan gambar dan dapat membuat pilihan deskripsi jawaban berupa pilihan ganda serta terdapat batas waktu dalam mengerjakannya.

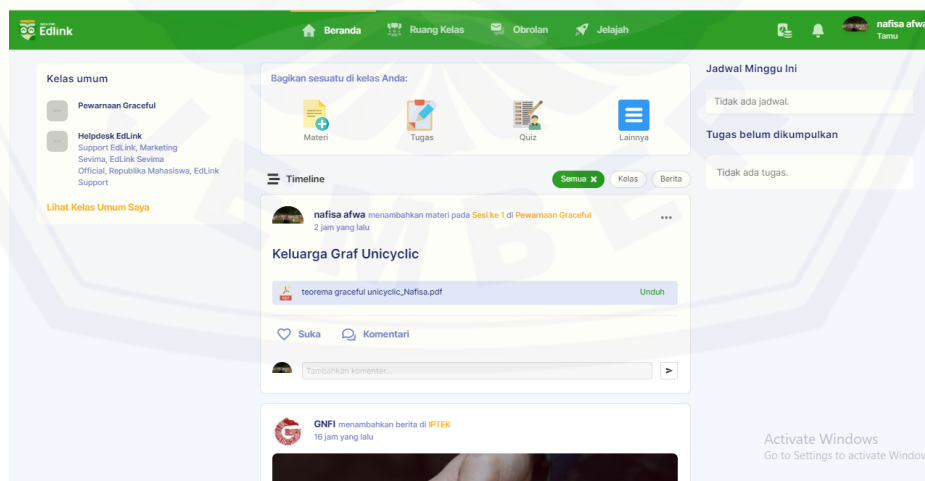
- g. Fitur berbagi, guru dapat berbagi jenis data/file apapun seperti gambar, video, dokumen, teks dan *link* serta dapat diakses dengan mudah oleh peserta didik.
- h. Fitur pesan pribadi, guru maupun peserta didik dapat saling mengirimkan pesan pribadi yang berada pada forum kelas yang sama.
- i. Info, Acara dan Survei, guru dapat membuat pengumuman info

Halaman utama aplikasi Sevima Edlink adalah sebagai berikut:



Gambar 2.20 Halaman Utama *Sevima Edlink*

Beranda atau halaman awal setelah login sebagai berikut:



Gambar 2.21 Halaman Awal *Sevima Edlink*

2.8 Hasil Penelitian Terdahulu

Pada bagian ini disajikan beberapa hasil penelitian mengenai pewarnaan *graceful* yang bisa dijadikan sebagai referensi. Beberapa hasil penelitian dapat dilihat pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1 Hasil penelitian yang relevan

Graf	Hasil $\chi_g(G)$	Keterangan
Graf Lintasan	$\chi_g(P_n) = 4$, jika $n \geq 5$	Bi dkk, 2017
Graf Roda	$\chi_g(W_n) = n$, jika $n \geq 6$	Bi dkk, 2017
Graf Bipartit Lengkap	$\chi_g(G) = n$, jika $n \geq 3$	Bi dkk, 2017
Graf Lingkaran	$\chi_g(C_n) = \begin{cases} 4, & \text{jika } n \neq 5 \\ 5, & \text{jika } n = 5 \end{cases}$	Bi dkk, 2017
Graf Tadpole	$\chi_g(T_{n,m}) = \begin{cases} 5, & \text{jika } n = 5 \\ 4, & \text{jika } n \geq 5 \end{cases}$	Alfarisi dkk, 2019
Graf Pan	$\chi_g(Pg_n) = \begin{cases} 5, & \text{jika } n = 5 \\ 4, & \text{jika } n \geq 5 \end{cases}$	Alfarisi dkk, 2019
Graf Matahari	$\chi_g(M_n) = \begin{cases} 6, & \text{jika } n = 5 \\ 5, & \text{jika } n \geq 5 \end{cases}$	Alfarisi dkk, 2019
Graf Diamond	$\chi_g(D) = 4$	Mincu dkk, 2019
Graf Spindle	$\chi_g(G) = 7$	Mincu dkk, 2019
Graf Goldner-Harary	$\chi_g(G) = 11$	Mincu dkk, 2019
Graf Fritsch	$\chi_g(G) = 9$	Mincu dkk, 2019
Graf Persahabatan	$\chi_g(F_t) = n = 2t + 1$	Mincu dkk, 2019
Graf Kipas	$\chi_g(F_{1,n}) = n + 1$	Mincu dkk, 2019
Graf Wagner	$\chi_g(M_8) = 8$	Mincu dkk, 2019
Graf Petersen	$\chi_g(GP_{5,2}) = 10$	Mincu dkk, 2019
Graf Prism	$\chi_g(Y_3) = n$	Mincu dkk, 2019
Graf Rumah	$\chi_g(G) = 6$	Mincu dkk, 2019
Graf Octahedron	$\chi_g(G) = 7$	Mincu dkk, 2019
Graf Jellyfish	$\chi_g(J_{n,m}) = n + 3$	Mincu dkk, 2019
Graf Payung	$\chi_g(U_{n,m}) = n + 2$	Mincu dkk, 2019

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini termasuk jenis penelitian eksploratif yaitu penelitian yang bertujuan untuk menemukan hal baru yang ingin diketahui oleh peneliti kemudian menjadikan topik baru tersebut agar lebih dikenal oleh masyarakat luas, memberikan gambaran dasar mengenai topik bahasan, menggeneralisasikan gagasan dan mengembangkan teori yang bersifat dapat dirubah kemudian hasil penelitian yang diperoleh dapat digunakan sebagai dasar penelitian selanjutnya. Data yang digunakan pada penelitian ini adalah keluarga graf *unicyclic*, yaitu graf *bull*, graf *net*, graf *cricket*, graf *caveman*, graf *peach*, dan graf *flowerpot*.

3.2 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini ada dua, yaitu metode deduktif aksiomatik dan metode pendeteksian pola (*pattern recognition*).

- a. Metode deduktif aksiomatik menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menetapkan pengertian dasar pewarnaan *graceful* serta menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada. Teorema tersebut selanjutnya diturunkan untuk memperoleh pewarnaan titik dan sisi pada graf yang diteliti kemudian diterapkan dalam pewarnaan *graceful* pada keluarga graf *unicyclic*.

- b. Metode pendeteksian pola (*Pattern Recognition*) digunakan untuk mencari pola dengan mendapatkan pewarnaan *graceful* sedemikian hingga didapatkan bilangan kromatik *graceful* $\chi(G)$ seminimum mungkin pada keluarga graf *unicyclic*.

3.3 Definisi Operasional

Definisi operasional variabel digunakan untuk memberikan gambaran secara sistematis dalam penelitian dan menghindari terjadinya perbedaan pengertian makna.

Definisi variabel yang dimaksud adalah sebagai berikut:

- a. Pewarnaan *Graceful*

Pewarnaan *graceful* merupakan pewarnaan setiap titik dan sisi menggunakan bilangan bulat positif dimana warna yang digunakan boleh berulang baik pada himpunan titik maupun sisinya dengan syarat setiap titik ataupun sisi yang bertetangga pada graf tersebut berbeda. Misal G adalah graf dengan k warna. Pewarnaan *graceful* pada titik didefinisikan sebagai $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |V(G)|\}$, dimana $|V(G)| \geq 2$ sedangkan pada sisi didefinisikan sebagai $c' : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |V(G)| - 1\}$, dimana $\forall uv \in E(G)$, $c'(uv) = |c(u) - c(v)|$, dengan $E(G) \leq |V(G)| - 1$. Bilangan kromatik adalah minimal warna yang ada pada titik graf yang berupa bilangan bulat positif terbesar, dinotasikan dengan $\chi_g(G)$.

b. Keluarga Graf *Unicyclic*

Graf *unicyclic* merupakan graf dengan *order* dan *size* sama yang mempunyai satu siklus. Keluarga graf *unicyclic* yang digunakan pada penelitian ini adalah graf *bull* $B_{3,m}$ untuk $m \geq 2$, graf *net* $N_{3,m}$ untuk $m \geq 2$, graf *cricket* $Cr_{n,m}$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, graf *caveman* $C_{(n,m)}$ untuk $n, m \geq 3$, graf *peach* C_n^m untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 1$, dan graf *flowerpot* $C_n S_m$ untuk $n, m \geq 3$.

c. *Online Teaching Platform*

Online teaching platform yang digunakan dalam penelitian ini adalah *Sevima EdLink*. *Sevima EdLink* merupakan salah satu *online teaching platform* yang bisa diakses melalui laptop/PC maupun android. Aplikasi ini dapat diakses dengan mudah oleh guru/dosen dan siswa/mahasiswa dengan berbagai fitur. *Online teaching platform* dalam penelitian ini digunakan sebagai media untuk membagikan video pembelajaran mengenai topik pewarnaan *graceful*.

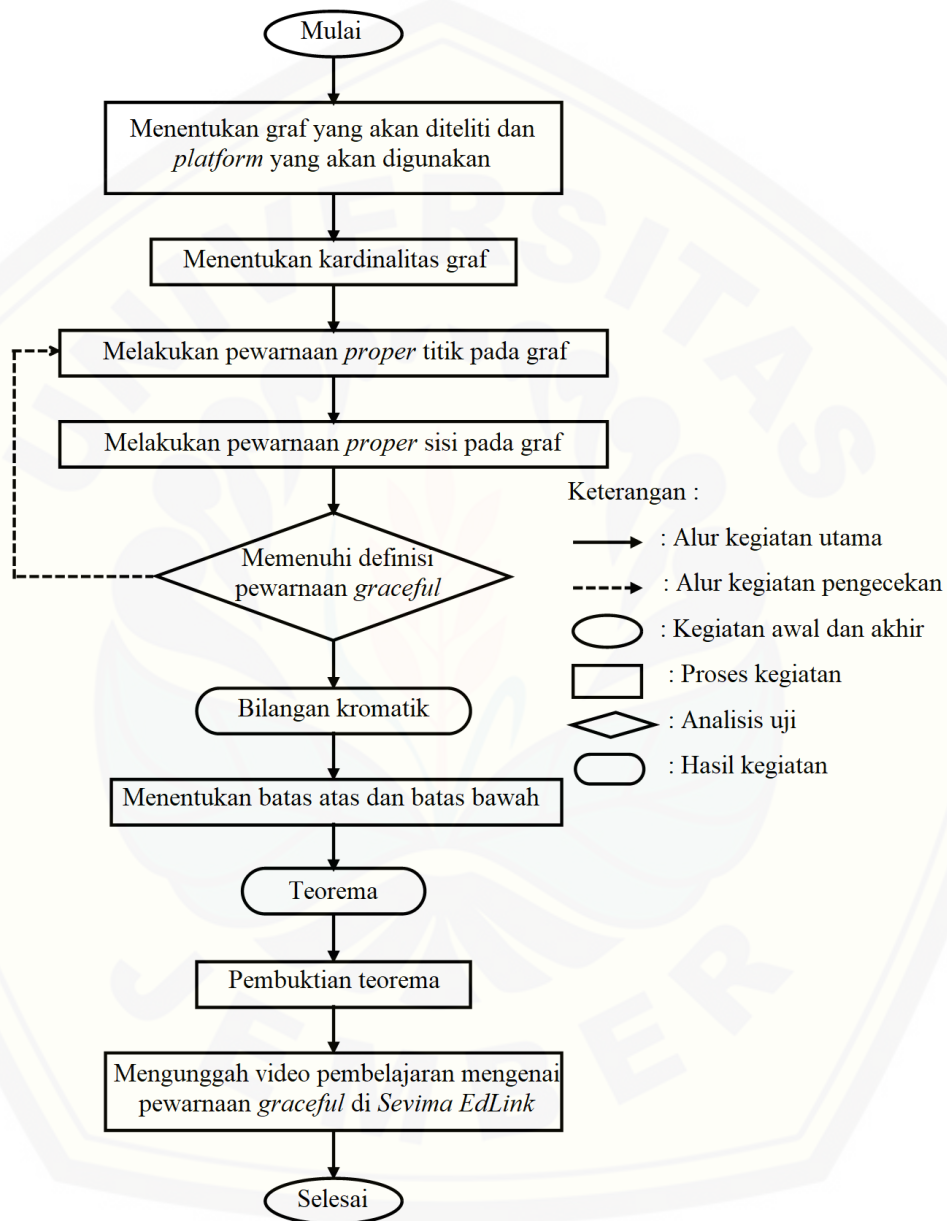
3.4 Prosedur Penelitian

Prosedur penelitian ini digunakan untuk memberikan gambaran secara sistematis mengenai penelitian yang telah dilakukan sesuai tujuan yang telah ditetapkan. Prosedur penelitian yang telah dilakukan dalam menentukan pewarnaan *graceful* pada keluarga graf *unicyclic* adalah sebagai berikut.

- Menentukan keluarga graf yang diteliti dan *platform* yang digunakan;
- Menentukan kardinalitas dari graf yang diteliti;
- Melakukan pewarnaan *proper* titik pada graf;
- Melakukan pewarnaan *proper* sisi pada graf;

- e. Mengecek pewarnaan yang telah dilakukan apakah sudah memenuhi definisi pewarnaan *graceful* atau belum, apabila belum memenuhi maka melakukan pewarnaan proper pada titik dan sisi kembalikan, apabila sudah memenuhi maka lanjut ke langkah selanjutnya;
- f. Menemukan bilangan kromatik;
- g. Menentukan batas atas dan batas bawah;
- h. Menentukan teorema hasil pewarnaan *graceful* pada graf yang diteliti;
- i. Membuktikan teorema yang telah didapatkan;
- j. Mengulangi langkah b sampai i untuk mewarnai graf yang berbeda;
- k. Membuat video pembelajaran mengenai pewarnaan *graceful*.
- l. Mengunggah video pembelajaran ke *YouTube*.
- m. Mengunggah *link* video pembelajaran di *Sevima EdLink*.

Secara lebih jelas, prosedur penelitian digambarkan dalam Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Prosedur Penelitian

3.5 Observasi Awal Penelitian

Observasi awal dilakukan dengan menentukan kardinalitas pada keluarga graf *unicyclic* yang disajikan pada tabel 3.1.

Tabel 3.1: Kardinalitas keluarga graf *unicyclic*

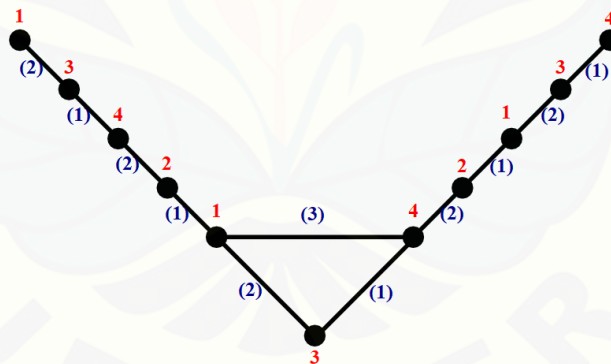
Graf	Kardinalitas
Graf <i>bull</i> ($B_{3,m}$)	$V(B_{3,m}) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ $E(B_{3,m}) = \{x_i, x_{i,i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_1, x_n\} \cup \{x_i, x_{i,1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{i,j}, x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m-1\}$ $ V(B_{3,m}) = n + nm - m$ $ E(B_{3,m}) = n + nm - m$
Graf <i>net</i> ($N_{3,m}$)	$V(N_{3,m}) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ $E(N_{3,m}) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_1 x_n\} \cup \{x_i, x_{i,j}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_{i,j}, x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ $ V(N_{3,m}) = n + nm$ $ E(N_{3,m}) = n + nm$
Graf <i>cricket</i> ($Cr_{n,m}$)	$V(Cr_{n,m}) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{1j}; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_{2j}; 1 \leq j \leq m\}$ $E(Cr_{n,m}) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_1 x_n\} \cup \{y_{1j} y_{1j+1}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{y_{2j} y_{2j+1}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_1 y_{11}\} \cup \{x_1 y_{11}\} \cup \{x_1 y_{21}\} \cup \{x_n y_{21}\}$ $ V(Cr_{n,m}) = n + 2m$ $ E(Cr_{n,m}) = n + 2m$
Graf <i>caveman</i> ($C_{(n,m)}$)	$V(C_{(n,m)}) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq m; m = (n/2)\}$ $E(C_{(n,m)}) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_1 x_n\} \cup \{x_{2i-1} y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ $ V(C_{(n,m)}) = n + m$ $ E(C_{(n,m)}) = n + m$
Graf <i>peach</i> (C_n^m)	$V(C_n^m) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq m\}$ $E(C_n^m) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_1 x_n\} \cup \{x_1 y_j; 1 \leq j \leq m\}$ $ V(C_n^m) = n + m$ $ E(C_n^m) = n + m$
Graf <i>flowerpot</i> ($C_n S_m$)	$V(C_n S_m) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{a\}$ $E(C_n S_m) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{a, y_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_1, a\}; 1 \leq j \leq m\}$ $ V(C_n S_m) = n + m + 1$ $ E(C_n S_m) = n + m + 1$

Sebelum penelitian dilakukan untuk graf lain, telah dilakukan observasi awal pada graf

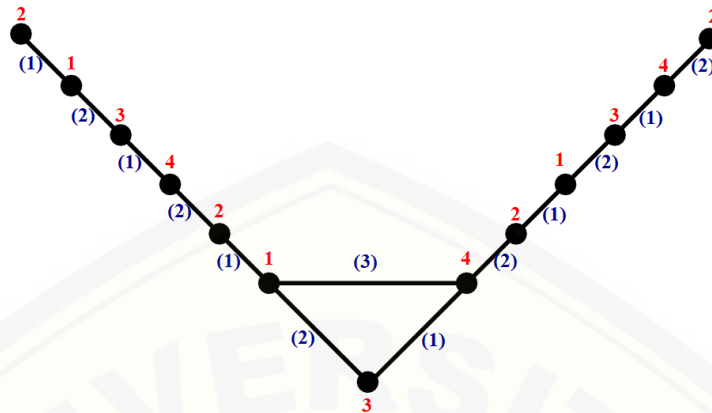
bull. Hal ini dilakukan untuk menduga pewarnaan *graceful* dan pola pewarnaannya. Setelah melakukan observasi awal, ditemukan pewarnaan *graceful* pada salah satu keluarga graf *unicyclic* yaitu graf *bull* $B_{3,m}$. Langkah-langkah pada observasi awal sebagai berikut:

1. Menetapkan graf *bull* sebagai graf yang dijadikan observasi awal penelitian untuk dicari bilangan kromatiknya;
2. Memulai dengan $m = 2$, melakukan pewarnaan setiap titik $B_{3,2}$;
3. Menerapkan konsep pewarnaan *graceful* pada setiap titik dan sisi dari setiap graf *bull*;
4. Memvalidkan pewarnaan *graceful* pada setiap titik dan sisi yang telah memenuhi konsep pewarnaan *graceful* (yang dapat dicek pada anggota himpunan setiap titik dan sisinya secara berurutan dan menunjukkan anggota himpunannya merupakan optimum);
5. Menetapkan bilangan kromatik pada graf *bull*;
6. Menciptakan teorema hasil penelitian pada graf *bull*;
7. Menghitung kembali langkah 1 sampai dengan 4 untuk $m = 3, 4, 5$ dan seterusnya.

Penelitian awal ditunjukkan pada gambar di bawah ini.



Gambar 3.2 Observasi awal terhadap graf *bull* $B_{3,5}$, $\chi_g(B_{3,5}) = 4$



Gambar 3.3 Observasi awal terhadap graf bull $B_{3,6}$, $\chi_g(B_{3,6}) = 4$

Berdasarkan langkah-langkah pewarnaan *graceful* yang telah dilakukan pada observasi awal, ditemukan bilangan kromatik pada graf bull $B_{3,m}$ untuk $m \geq 2$ yaitu 4. Sehingga observasi dapat dilanjutkan untuk menentukan bilangan kromatik *graceful* pada keluarga graf *unicyclic* yang lain dengan mengikuti langkah-langkah sesuai observasi awal.

BAB 5. PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa terdapat enam teorema baru pewarnaan *graceful* pada keluarga graf *unicyclic*. Bilangan kromatik pewarnaan *graceful* pada keluarga graf *unicyclic* yang didapatkan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bilangan kromatik *graceful* pada graf *bull* $B_{3,m}$ dengan $m \geq 2$ adalah 4.
2. Bilangan kromatik *graceful* pada graf *net* $N_{3,m}$, untuk $m \geq 2$ adalah 5.
3. Bilangan kromatik *graceful* pada graf *cricket* $Cr_{n,m}$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$ adalah 5.
4. Bilangan kromatik *graceful* pada graf *caveman* $C_{(n,m)}$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 1$ adalah 4.
5. Bilangan kromatik *graceful* pada graf *peach* C_n^m , untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 1$ adalah $3 + m$.
6. Bilangan kromatik *graceful* pada graf *flowerpot* $C_n S_m$, untuk $n, m \geq 3$ adalah $2 + m$.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian terdapat beberapa graf yang masih belum ditemukan nilai dari bilangan kromatik *graceful*-nya dan sulit untuk menemukan generalisasi rumusnya sehingga peneliti memiliki beberapa masalah terbuka sebagai berikut:

Masalah terbuka 5.2.1. *Bagaimana bilangan kromatik graceful untuk keluarga graf yang lain, seperti keluarga graf pohon, keluarga graf grid, dll.*

Masalah terbuka 5.2.2. *Bagaimana bilangan kromatik graceful untuk operasi graf, seperti operasi comb, operasi cartesian, dll.*

DAFTAR PUSTAKA

- Alfarisi, R., Dafik, Prihandini, R. M., Adawiyah, R., Albirri, E. R., dan Agustin, I. H. (2019). Graceful Chromatic Number of Unicyclic Graphs. *Journal of Physics: Conference Series*.
- Balasubramanian, K. (2014). Student Preference Towards The Use Of Edmodo As A Learning Platform To Create Responsible Learning Environment. *Prosiding, Asia Euro Conference. Selangor: School of Hospitality, Tourism and Culinary Arts, Taylor's*.
- Bi, Z., Byers, A., English, S., Laforge, E., dan Zhang, P. (2017). Graceful colorings of graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*.
- Chartrand, G. dan Zhang, P. (2009). Chromatic Graph Theory. USA: CRC Press.
- Chartrand, G. dan Zhang, P. (2012). Introductory Graph Theory. United Stated of America: Dover Publication, inc.
- Daud, W. A. A. W., dan Ghani, M. T. A. (2017). The Accetance of Schoology Among Early Childood Education Student at Mara Poly-Tech College (KPTM). *Journal of Global Business and Social Entrepreneurship (GBSE)*. 3(6):133-142.
- English, S., dan Zhang, P. (2017). On graceful colorings of trees. *Mathematica Bohemica*.
- Gross, J., Yellen, J. (2006). Graph Theory and Its Applications. *Chapman Hall/Corc*.
- Hakim. (2016). Efektifitas Penggunaan E-Learning Moodle, Google Classroom Dan Edmodo. I-Statement.
- Harary. (1994). WolframMathWorld. Wolfram Research.
- Harary, F. (1969). Graph Theory. Philippines: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

- Hartanto, W. (2016). Penggunaan ELearning Sebagai Media Pembelajaran. *Jurnal UNEJ*.
- Hartsfield, N. dan Ringel, G. (1994). *Pearls In Graph Theory*. Australia: Academic Press.
- Inayah, N., Simanjuntak, R., dan Salman. (2013). Super (a, d)-H-antimagic total labelings for shackles of a connected graph H. *Australasian Journal of Combinatorics*. Vol. 57: 127-138.
- Kemendikbud. (2020). Surat Edaran Nomor 1 Tahun 2020 tentang Pencegahan Penyebaran Corona Virus Disease (Covid019) Di Perguruan Tinggi, Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.
- Kubale, M. (2004). *Graph Coloring*. AMS Bookstore.
- Koutra, D. (2015). *Exploring and Making Sense of Large Graphs*. Pittsburgh. Computer Science Department. Carnegie Mellon University.
- Marlina, E. (2020). Pengembangan Model Pembelajaran Blended Learning berbantuan Aplikasi Sevima Edlink. *Jurnal Padagogik*. 3(2).
- Mincu, R., Obreja, C., dan Popa, A. (2019). The Graceful Chromatic Number for Some Particular Classes of Graphs. *Proceedings - 21st International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing, SYNASC 2019*.
- Munir, R. (2010). *Matematika Diskrit*. Edisi Ketiga. Bandung: Informatika Bandung.
- Munir, R. (2012). *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika.
- Purwanto, H., Indriani, G., dan Dayanti, E. (2006). *Matematika Diskrit*. Jakarta: PT. Ercontara Rajawali.
- Rongbo, Z. Y. Zhang, B. Liu, dan C. Liu. (2010). *Information Computing and Applications*. China: Springer.
- Saputra, A. (2014). Bilangan Kromatik Lokasi untuk Graf Kembang Api $F_{n,2}$ dan $F_{n,3}$ dengan

$n \geq 2$. *Jurnal Matematika UNAND*. 3(4): 49-53.

Sejati, A. (2009). Aplikasi 4-Colour Theorem dalam Teorema Pewarnaan Graf untuk Mewarnai Sembarang Peta. Bandung: Informatika.

Slamin. (2009). Desain Jaringan Pendekatan Teori Graf. Jember: Universitas Jember.

Vanitha, V., Gayathri, B. (2011). Directed Edge - Graceful Labeling of Cycle and Star Related Graphs. *International Journal of Mathematics and Soft Computing*.

Wallis, W. D. (2001). Magic Graphs. Boston: Birkhuser.

Wibowo dan Rahmayanti. (2020). Penggunaan Sevima Edlink Sebagai Media Pembelajaran Online Untuk Mengajar dan Belajar Bahasa Indonesia. *Jurnal Pendidikan Bahasa dan Sastra Indonesia*. Vol 2(2): 163–174.