KARAKTERISASI UNITY SUBRING *PROPER NON TRIVIAL* PADA RING $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$

SKRIPSI

Oleh

Sonia Nurdiansa
NIM 161810101049

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2020

KARAKTERISASI UNITY SUBRING *PROPER NON TRIVIAL* PADA RING $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$

SKRIPSI

diajukan guna memenuhi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan studi pada Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Sonia Nurdiansa
NIM 161810101049

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2020

PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah yang Maha Pengasih dan Maha Penyayang serta sholawat dan salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, penulis persembahkan skripsi ini sebagai ungkapan kebahagiaan dan rasa terima kasih kepada:

1. Kedua orang tuaku Bapak Sutaji dan Ibu Welas serta kedua saudaraku Dani Wahyulianti dan Desi Tria Agustina yang telah mendukung dan memberikan doa, kasih sayang, motivasi, dan senyuman yang selalu menguatkan disetiap perjalanan hidup saya;
2. Kusbudiono, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Utama dan Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Anggota;
3. Seluruh guru dan dosen yang telah memberikan banyak ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;
4. Almamater Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember, MAN Tambakberas, SMP Negeri 1 Palang, SD Negeri Leranwetan 1, Pon. Pes. AL-Muhibbin Bahrul 'Ulum, dan Pon. Pes. Al-Jauhar.

MOTTO

"Hidup Untuk Tersenyum Dan Tersenyum Untuk Hidup"
(Penulis)

"Tidak Ada Usaha Yang Kecil, Semua Usaha Itu Besar Dan Tidak Ada Keyakinan Yang Lebih Besar Dari Usaha"
(Penulis)

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Sonia Nurdiansa

NIM : 161810101049

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul "Karakterisasi Unity Subring *Proper Non Trivial* Pada Ring $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$" adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi mana pun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggungjawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak mana pun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Januari 2020

Yang menyatakan,

Sonia Nurdiansa

NIM 161810101049

SKRIPSI

KARAKTERISASI UNITY SUBRING *PROPER NON TRIVIAL* PADA RING $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$

Oleh

Sonia Nurdiansa
NIM 161810101049

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama	:	Kusbudiono, S.Si., M.Si.
Dosen Pembimbing Anggota	:	Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul "Karakterisasi Unity Subring *Proper Non Trivial* Pada Ring $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$" karya Sonia Nurdiansa telah diuji dan disahkan pada:

hari :

tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji :

Ketua,	Anggota I,
Kusbudiono, S.Si., M.Si.	Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si.
NIP. 19770430 200501 1 001	NIP. 19861014 201404 1 001
Anggota II,	Anggota III,
Dr. Mohamad Fatekhurohman, S.Si., M.Si.	Dr. Firdaus Ubaidillah, S.Si., M.Si.
NIP. 19690606 199803 1 001	NIP. 19700606 199803 1 003

Mengesahkan

Dekan,

Drs. Achmad Sjaifullah, M.Sc., Ph.D.

NIP. 19591009 198602 1 001

RINGKASAN

Karakterisasi Unity Subring *Proper Non Trivial* Pada Ring $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$; Sonia Nurdiansa, 161810101049; 2020; 60 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Struktur aljabar adalah cabang ilmu matematika yang mempelajari tentang himpunan dan operasi. Secara garis besar struktur aljabar dibagi menjadi dua yaitu teori grup dan teori ring. Teori grup adalah sebuah himpunan tak kosong dengan suatu opersi biner yang memenuhi aksioma grup. Sedangkan teori ring adalah sebuah himpunan tak kosong dengan dua opersi biner yang memenuhi aksioma ring.

Suatu subset pada ring yang memenuhi semua aksioma ring disebut subring. Subring dibagi menjadi dua yaitu subring *proper* dan subring *improper*. Subring proper dibagi menjadi dua yaitu subring *proper trivial* dan subring *proper non trivial*. Subring proper trivial adalah subring yang hanya memiliki elemen identitas (0), sedangkan subring *proper non trivial* adalah subring dengan elemen identitas dan elemen yang lain dan tidak sama dengan ring. Subring *improper* adalah subring yang elemennya sama dengan ring. Unity adalah elemen satuan dalam ring. Sebuah ring belum tentu memiliki unity. Unity dalam suatu ring adalah tunggal. Wijaya (2010) mengatakan bahwa sebuah ring $\mathbb{Z}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian biasa adalah ring dengan unity (memiliki identitas perkalian) 1. Dari deskripsi subring, bahwasannya subring memiliki semua aksioma ring tetapi belum tentu memiliki unity. Jika subring dari ring $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$ memiliki unity yang sama dengan ringnya maka dapat dikatakan subring tersebut adalah subring improper karena mengandung unity 1 yang mana 1 adalah generator dari ring $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$. Jadi jika ada subring proper non trivial dari ring $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$ memiliki unity maka unitinya bukan 1.

Pada penelitian ini, akan dicari karakterisasi unity subring *proper non trivial* pada ring $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$. Pada penelitian ini subring dibangun oleh $\langle 2^l \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$ dengan $n = m2^l$, m adalah bilangan ganjil kurang dari 10, l adalah bilangan bulat positif. Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa untuk subring $\langle 2^l \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{1 \cdot 2^l}, +, \times)$ adalah subring *proper trivial*. Untuk subring $\langle 2^l \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{3 \cdot 2^k}, +, \times)$ penentuan unity dibagi menjadi dua, yaitu l ganjil dan l genap. Untuk l ganjil, $l = 2k + 1$ dengan k adalah suatu bilangan bulat *non* negatif, unity berada pada $2 \cdot 2^{2k+1}$. Sedangkan l genap, $l = 2k + 2$ dengan k adalah suatu bilangan bulat *non* negatif, unity berada pada 2^{2k+2}. Untuk subring $\langle 2^l \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{5 \cdot 2^l}, +, \times)$ penentuan unity dibagi menjadi empat, yaitu $l = 4k + 1, l = 4k + 2, l = 4k + 3$, dan $l = 4k + 4$ dengan k adalah suatu bilangan bulat *non* negatif. Untuk $l = 4k + 1$ unity berada pada $3 \cdot 2^{4k+1}$. Untuk $l = 4k + 2$ unity berada pada $4 \cdot 2^{4k+2}$. Untuk $l = 4k + 3$ unity berada pada $2 \cdot 2^{4k+3}$. Dan untuk $k = 4l + 4$ unity berada pada 2^{4k+4}. Untuk subring $\langle 2^l \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{7 \cdot 2^l}, +, \times)$ penentuan unity dibagi menjadi tiga, yaitu $l = 3k + 1, l = 3k + 2$, dan $l = 3k + 3$ dengan k adalah suatu bilangan bulat *non* negatif. Untuk $l = 3k + 1$ unity berada pada $4 \cdot 2^{3k+1}$. Untuk $l = 3k + 2$ unity berada pada $2 \cdot 2^{3k+2}$. Dan untuk $l = 3k + 3$ unity berada pada 2^{3k+4}. Untuk subring $\langle 2^l \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{9 \cdot 2^l}, +, \times)$ penentuan unity dibagi menjadi enam, yaitu $l = 6k + 1, l = 6k + 2, l = 6k + 3, l = 6k + 4, l = 6k + 5$, dan $l = 6k + 6$ dengan k adalah suatu bilangan bulat *non* negatif. Untuk $l = 6k + 1$ unity berada pada $5 \cdot 2^{6k+1}$. Untuk $l = 6k + 2$ unity berada pada $7 \cdot 2^{6k+2}$. Untuk $l = 6k + 3$ unity berada pada $8 \cdot 2^{6k+3}$. Untuk $l = 6k + 4$ unity berada pada $4 \cdot 2^{6k+4}$. Untuk $l = 6k + 5$ unity berada pada $2 \cdot 2^{6k+5}$. Dan untuk $l = 6k + 6$ unity berada pada 2^{6k+6}.

PRAKATA

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Karakterisasi Unity Subring *Proper Non Trivial* Pada Ring $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$". Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Penetahuan Alam Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Kusbudiono, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Utama dan Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
3. Dr. Mohamad Fatekhurohman, S.Si., M.Si. selaku Dosen Penguji I dan Dr. Firdaus Ubaidillah, S.Si., M.Si. selaku Dosen Penguji II yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun dalam penyempurnaan skripsi ini;
4. Abduh Rizky, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah memberikan arahan selama perkuliahan;
5. Dosen dan karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
6. Bapak tercinta Sutaji dan Ibu tercinta Welas, serta kedua saudaraku Dani Wahyulianti dan Desi Tria Agustina yang selalu memberikan cinta kasihnya, doa tiada henti, semangat dan motivasi untuk tetap berjuang dalam penyelesaian skripsi ini;
7. Bolo-bolo Himpunan Mahasiswa Jember Bahrul 'Ulum (HIMAJU) yang senantiasa menemani di saat suka maupun duka dan sebagai tempat pulang saat di Jember;
8. Teman-teman satu angkatan Matematika 2016 (MISDIRECTION) yang senantiasa berjuang bersaman-sama;
9. Teman-teman ON-MIPA 2019 (TIM 7 Matematika) yang telah membantu mulai dari penentuan topik hingga penyelesaian;

10. Teman-teman satu atap selama 45 hari (Kelompok KKN 93) yang telah menjadi keluarga baruku yang siap mendengarkan segala keluh kesahku dan memberi semangat dan tawa;
11. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan yang telah diberikan dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Januari 2020

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

HALAMAN JUDUL i
HALAMAN PERSEMBAHAN ii
HALAMAN MOTTO iii
HALAMAN PERNYATAAN iv
HALAMAN PEMBIMBING v
HALAMAN PENGESAHAN vi
RINGKASAN vii
PRAKATA ix
DAFTAR ISI xi
DAFTAR GAMBAR xiii
BAB 1. PENDAHULUAN 1
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 2
1.3 Batasan Masalah 2
1.4 Tujuan Penelitian 3
1.5 Manfaat 3
1.5.1 Penulis 3
1.5.2 Pembaca 3
BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA 4
2.1 Himpunan dan Operasi 4
2.2 Teori Grup 5
2.3 Teori Ring 8
BAB 3. METODE PENELITIAN 13
3.1 Metode Penelitian 13

3.2 Rancangan Penelitian 13
BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN 15
4.1 Subring $\langle 2^l \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{1\cdot 2^l}, +, \times)$ 15
4.2 Subring $\langle 2^l \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{3\cdot 2^l}, +, \times)$ 15
4.3 Subring $\langle 2^l \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{5\cdot 2^l}, +, \times)$ 18
4.4 Subring $\langle 2^l \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{7\cdot 2^k}, +, \times)$ 24
4.5 Subring $\langle 2^l \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{9\cdot 2^l}, +, \times)$ 30
BAB 5. PENUTUP 45
5.1 Kesimpulan 45
5.2 Saran 46
DAFTAR PUSTAKA 47

DAFTAR GAMBAR

Halaman

2.1 Operasi penjumlahan pada grup $(\mathbb{Z}_4, +)$ 8

2.2 Operasi biner pada $\mathbb{Z}_6$ 9

3.1 Rancangan Penelitian 14

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu pengetahuan. Matematika bukanlah sebuah ilmu yang bisa berdiri sendiri melainkan dibentuk atau sebagai induk dari beberapa cabang ilmu lainnya seperti aritmatika, geometri, aljabar, trigonometri, dan lain-lain. Matematika dapat diartikan sebagai cara berpikir atau bernalar. Matematika dapat digunakan saat menentukan apakah pilihan itu benar atau salah, atau paling tidak ada kemungkinan yang benar. Salah satu cabang ilmu matematika adalah aljabar. Aljabar berasal dari bahasa arab *Al-Jabr* yang artinya pengumpulan bagian-bagian yang rusak. Aljabar adalah salah satu cabang matematika ynag mempelajari tentang penyelesaian masalah menggunakan simbol-simbol sebagai pengganti konstanta dan variabel.

Salah satu cabang dari aljabar adalah struktur aljabar. Struktur aljabar adalah cabang ilmu matematika yang mempelajari tentang himpunan dan operasi. Operasi yang dimaksud adalah operasi biner. Operasi biner adalah sebuah aturan yang bersifat tertutup dan memiliki ketunggalan hasil. Secara garis besar struktur aljabar dibagi menjadi dua yaitu teori grup dan teori ring. Teori grup adalah sebuah himpunan tak kosong dengan sebuah operasi biner yang memenuhi aksioma grup. Aksioma grup tersebut adalah tertutup, asosiatif, memiliki elemen identitas, dan setiap elemen dalam himpunan tersebut memiliki invers. Karena himpunan tak kosong tersebut dengan operasi biner maka aksioma tertutup dan asosiatif sudah terpenuhi. Jadi himpunan tak kosong dengan operasi biner hanya memerlukan ada elemen identitas dan setiap elemen dalam himpunan tersebut memiliki invers untuk menjadi sebuah grup.

Teori ring adalah himpunan tak kosong dengan dua operasi biner. Ring adalah grup abelian dengan operasi biner kedua memenuhi aksioma tertutup, asosiaif, dan distributif kiri kanan. Suatu ring dengan operasi kedua bersifat komutatif disebut ring komutatif. Suatu ring dengan identitas operasi kedua (satuan) disebut ring dengan unity. Jika ada himpunan H subset ring R dan H memenuhi sifat-sifat aksioma ring, H juga memiliki operasi yang sama dengan ring R maka H disebut subring. Jika sebuah subring sama dengan ringnya maka subring tersebut dinamakan dengan subring tidak sejati atau $improper$. Sedangkan subring yang tidak sama dengan ringnya dinamakan subring sejati atau *proper*. Subring proper dibagi menjadi dua yaitu subring *proper trivial* (hanya memuat elemen identitas) dan subring *proper non trivial* (terdiri dari elemen identitas dan elemen yang lain).

Wijaya (2010) mengatakan bahwa sebuah ring $\mathbb{Z}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian biasa adalah ring dengan unity (memiliki identitas perkalian) 1. Dari deskripsi subring, bahwasannya subring memiliki seluruh aksioma ring tetapi belum tentu memiliki unity. Jika subring dari ring $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$ memiliki unity yang sama dengan ringnya maka dapat dikatakan subring tersebut adalah subring improper karena mengandung unity 1 yang mana 1 adalah generator dari ring $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$. Jadi jika ada subring proper non trivial dari ring $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$ memiliki unity maka unitinya bukan 1. Dari latar belakang di atas, penulis tertarik untuk mengkaji karakterisasi unity subring proper non trivial pada ring $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$.

1.2 Rumusan Masalah

Dari latar belakang di atas dapat dirumuskan masalah pada peneitian ini adalah bagaimana cara mengkarakterisasi unity subring *proper non trivial* pada ring $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah dari penelitian ini adalah ring $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$ dengan $n = m2^l$, m adalah bilangan ganjil kurang dari 10, l adalah bilangan bulat positif, dan subring yang dibangun oleh $\langle 2^l \rangle$.

1.4 Tujuan Penelitian

Dari rumusan masalah di atas tujuan dari penelitian ini untuk mendapatkan karakterisasi unity subring *proper non trivial* pada ring $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$.

1.5 Manfaat

1.5.1 Penulis

Manfaat bagi penulis adalah menambah wawasan tentang unity subring *proper non trivial* pada ring $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$.

1.5.2 Pembaca

Manfaat bagi pembaca adalah sebagai bahan tambahan perkuliahan struktur aljabar tentang unity *proper non trivial* pada ring $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Himpunan dan Operasi

Himpunan adalah kumpulan suatu objek yang mempunyai ciri dan karakteristik yang sama dan dapat terdefinisikan dengan baik (*well defined*). Objek-objek ini biasa disebut dengan anggota atau unsur atau elemen dari himpunan tersebut. Suatu himpunan biasanya dinotasikan dengan huruf kapital/besar, misalkan A, B, C dan lain-lain. Sedangkan huruf kecil menotasikan unsur-unsur atau anggota-anggota dari himpunan tersebut, misalkan $a, b, c,$ dan lain-lain. Misalkan x adalah anggota dari himpunan A maka dinotasikan dengan $x \in A$ dan misalkan y bukan anggota dari himpunan A maka dinotasikan $y \notin A$. Sedangkan himpunan yang tidak memiliki anggota disebut dengan himpunan kosong dan dinotasikan dengan $\oslash$ atau $\{\}$ (Masoed, 2013).

Masoed pada tahun 2013 mengatakan bahwa misalkan Z merupakan sebuah himpunan dan jika untuk setiap $a, b \in Z$ dan $b \neq 0$, maka terdapat $q, r \in Z$ sedemikian sehingga $a = bq + r$, dengan $0 \leq r < |b|$. Bilangan bulat q dan r ditentukan secara tunggal oleh a dan b yang diperlukan. Selanjutnya a disebut bilangan yang dibagi, b disebut pembagi, q disebut hasil bagi, dan r disebut sisa.

Prihandoko pada tahun 2016 mengatakan bahwa fungsi adalah pemetaan ϕ dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu aturan yang memetakan setiap elemen dari A dengan tepat satu elemen dari B. Secara notasi dapat dinyatakan bahwa $\phi : A \to B$ merupakan sebuah fungsi jika $\forall a \in A, \exists! b \in B, \phi(a) = b$. Sehingga untuk menunjukkan bahwa suatu aturan merupakan fungsi maka perlu dibuktikan bahwa $\forall a_1, a_2 \in A, a_1 = a_2 \Rightarrow \phi(a_1) = \phi(a_2)$. Secara umum fungsi dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1. *Suatu fungsi atau pemetaan ϕ dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu aturan yang memasangkan setiap elemen dari A dengan tepat satu elemen di B.*

Definisi 2.2. *Suatu fungsi dari himpunan A ke himpunan B dikatakan* ***satu-satu*** *jika setiap elemen di B memiliki paling banyak satu elemen dari A yang dipetakan kepadanya dan dikatakan* ***onto*** *jika setiap elemen di B memiliki paling sedikit satu elemen dari A yang dipetakan kepadanya.*

Dengan demikian teknis untuk menunjukkan kedua predikat fungsi tersebut adalah sebagai berikut.

1. Untuk menunjukkan bahwa ϕ adalah satu-satu, maka harus ditunjukkan bahwa $\phi(a_1) = \phi(a_2)$ berimplikasi $a_1 = a_2$.
2. Untuk menunjukkan bahwa ϕ adalah onto, maka harus ditunjukkan bahwa $\forall b \in B, \exists a \in A \ni \phi(a) = b$ (Prihandoko, 2016).

Prihandoko pada tahun 2016 mengatakan bahwa suatu operasi biner pada sebuah himpunan S diartikan sebagai sebuah aturan yang memasangkan setiap pasangan terurut elemen-elemen S, (a, b) dengan suatu elemen dalam S. Persoalan ini menunjukkan bahwa sebuah himpunan S tertutup di bawah operasi biner. Artinya, jika $a, b \in S$ dan $*$ merupakan suatu operasi biner pada S sedemikian sehingga $a * b = c$ maka haruslah $c \in S$. Selain itu juga suatu istilah pasangan terurut memegang peranan sangat penting, sebab elemen yang dipasangkan dengan (a, b) belum tentu sama dengan elemen yang dipasangkan dengan (b, a). Secara umum operasi biner dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.3. *Suatu operasi biner pada suatu himpunan S dimaksudkan sebagai sebuah aturan yang memasangkan setiap pasangan terurut elemen-elemen S,*(a, b) *dengan suatu elemen dalam S.*

2.2 Teori Grup

Suatu struktur aljabar merupakan suatu sistem yang memiliki dua unsur utama yang berisi sebuah himpunan serta operasi biner yang dapat didefinisikan di dalamnya.

Sistem yang terdiri dari sebuah himpunan tak kosong G dan sebuah operasi biner $*$ yang dapat didefinisikan di dalamnya dapat disebut grupoid. Jika suatu operasi biner dalam grupoid tersebut bersifat asosiatif, maka sistem tersebut dapat dikatakan menjadi sebuah semi grup. Semi grup yang memuat elemen identitas yaitu sebuah elemen e sedemikian hingga untuk setiap $a \in G$ berlaku $a * e = e * a = a$, dapat dikatakan sebagai monoid. Jika setiap elemen dalam monoid memiliki invers, yaitu untuk setiap $a \in G$, $\exists a^{-1} \in G$ sedemikian hingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$, maka sistem yang baru disebut grup (Prihandoko, 2016). Secara umum grup dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.4. *Misalkan G merupakan sebuah himpunan tak kosong serta operasi biner $*$ dinotasikan sebagai $(G, *)$ dapat didefinisikan sebagai suatu grup apabila memenuhi aksioma-aksioma berikut.*

a. *Operasi $*$ pada G bersifat tertutup. Berarti $\forall x, y \in G$, berlaku $x * y \in G$.*

b. *Operasi $*$ pada G bersifat asosiatif. Berarti $\forall x, y, z \in G$, berlaku $x * (y * z) = (x * y) * z$.*

c. *G memuat elemen identitas. $\exists e \in G$ dan $\forall x \in G$ sedemikian sehingga berlaku $x * e = e * x = x$.*

d. *Setiap elemen di G memiliki invers di G. $\forall x \in G, \exists x^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $x^{-1} * x = x * x^{-1} = e$.*

Maya pada tahun 2016 mengatakan bahwa identitas dan invers dalam suatu grup adalah tunggal. Misalkan e_1 dan e_2 masing-masing adalah elemen identitas di dalam grup $(G, *)$. Karena e_1 adalah elemen indentitas dan e_2 adalah suatu elemen di dalam $(G, *)$, diperoleh $e_1 * e_2 = e_1$. Karena e_2 adalah elemen indentitas dan e_1 adalah suatu elemen di dalam $(G, *)$, diperoleh $e_1 * e_2 = e_2$. Dengan demikian diperoleh $e_1 = e_1 * e_2 = e_2$. Jadi, terbukti bahwa elemen identitas di grup $(G, *)$ tunggal. Ambil sebarang $a \in (G, *)$. Misal b_1 dan b_2 masing-masing adalah elemen di dalam $(G, *)$ yang merupakan invers dari a. Hal ini berarti $a * b_1 = e$ dan $a * b_2 = e$. Perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
b_1 &= b_1 * e \\
&= b_1 * (a * b_2) \\
&= (b_1 * a) * b_2 \\
&= e * b_2 \\
&= b_2
\end{aligned}
$$

sehingga terbukti bahwa invers setiap elemen di dalam $(G, *)$ tunggal. Dari uraian diatas mengasilkan teorema sebagai berikut.

Teorema 2.1. *Jika $(G, *)$ grup, maka :*

a. elemen identitas di dalam $(G, *)$ tunggal;

b. invers setiap elemen di dalam $(G, *)$ tunggal.

Lolang pada tahun 2013 mengatakan bahwa jika suatu grup $(G, *)$ bersifat komutatif atau $\forall x, y \in G$ berlaku $x * y = y * x$ grup $(G, *)$ disebut grup komutatif atau abelian. Secara umum dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.5. *Misalkan $(G, *)$ merupakan sebuah grup dengan operasi biner $*$. Grup $(G, *)$ disebut grup komutatif atau abelian jika operasi biner $*$ bersifat komutatif yaitu, $\forall x, y \in G$ berlaku $x * y = y * x$.*

Lolang pada tahun 2013 mengatakan bahwa $\mathbb{Z}_n$, himpunan bilangan bulat modulo n, dengan operasi penjumlahan $(+)$ adalah grup abelian. Contoh untuk $n = 4$, grup $(\mathbb{Z}_4, +) = \{0, 1, 2, 3\}$.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Gambar 2.1 Operasi penjumlahan pada grup $(\mathbb{Z}_4, +)$

Dari Gambar 2.1 diketahui bahwa untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_4$ berlaku $a + b = b + a$.

Prihandoko pada tahun 2016 mengatakan bahwa misalkan G adalah grup. Jika ada suatu himpunan tak kosong $H \subseteq G$ dan H memiliki semua sifat grup maka H disebut subgrup. Secara umum subgrup dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.6. *Misalkan $(G, *)$ merupakan sebuah grup dengan operasi biner $*$ dan H suatu subset tak kosong dari G. H disebut subgrup dari G jika dan hanya jika $(H, *)$ membentuk sebuah grup.*

2.3 Teori Ring

Jika suatu struktur aljabar yang mengandung sebuah himpunan dan dua operasi biner maka struktur aljabar tersebut dinamakan ring dengan memenuhi aksioma-aksioma yang berlaku.

Definisi 2.7. *Sebuah ring $(R, +, \cdot)$ adalah sebuah himpunan R dengan dua operasi biner, penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\cdot)$, yang didefinisikan pada R dan untuk setiap $a, b, c \in R$ memenuhi aksioma-aksioma berikut.*

a. $a + b \in R$

b. $a + (b + c) = (a + b) + c$

c. $\exists 0 \in R, \ni \forall a \in R, 0 + a = a + 0 = a$

d. $\forall a \in R, (-a) \in R, \in a + (-a) = (-a) + a = 0$

e. $a + b = b + a$

f. $a \cdot b \in R$

g. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

h. $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$, *dan* $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$

Prihandoko pada tahun 2010 mengatakan bahwa misalkan $R, *, \times$ adalah ring. Jika ada $a \in R$ dan $a \times a = a$ maka a disebut elemen idempoten. Secara umum elemen idempoten didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.8. *Misalkan* $(R, +, \cdot)$ *adalah sebuah ring dan* $\exists a \in R$, a *dinamakan elemen idempoten jika dan hanya jika* $a \cdot a = a$.

Subiono pada tahun 2012 mengatakan bahwa Z_n, himpunan bilangan bulat modulo n, dengan operasi penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\times)$ adalah sebuah ring. Contoh ring $(\mathbb{Z}_6, +, \times) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	1	0	2	3
5	5	0	1	2	3	4

(a) Operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}_6$

×	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

(b) Operasi perkalian pada $\mathbb{Z}_6$

Gambar 2.2 Operasi biner pada $\mathbb{Z}_6$

Dari Gambar 2.2 (b) diketahui bahwa 1 dan 4 adalah elemen idempoten pada ring $(\mathbb{Z}_6, +, \times)$.

Prihandoko pada tahun 2016 mengatakan bahwa misalkan R adalah grup. Jika ada suatu himpunan tak kosong $S \subseteq R$ dan S memiliki semua sifat ring maka S disebut subring. Secara umum subring dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.9. *Misalkan $(R, +, \cdot)$ adalah sebuah ring dan S suatu subset tak kosong R. S disebut subring R jika dan hanya jika $(S, +, \cdot)$ membentuk sebuah ring.*

Setiap ring R setidaknya memuat dua subring yaitu pada R sendiri dan $\{0\}$. Jika sebuah subring sama dengan ringnya maka subring tersebut dinamakan dengan subring tidak sejati atau *improper*. Sedangkan subring yang tidak sama dengan ringnya dinamakan subring sejati atau *proper*. Subring proper dibagi menjadi dua yaitu *subring proper trivial* (hanya memuat elemen identitas) dan *subring proper non trivial* (terdiri dari elemen identitas dan elemen yang lain) (Prihandoko, 2016).

Misalkan S adalah suatu subset pada ring R, S disebut subring pada R jika S juga memenuhi semua aksioma R. Dalam kapasitasnya sebagai subset ring R, S telah mewarisi aksioma-aksioma $2, 5, 7,$ dan 8 dalam definisi ring, sehingga selanjutnya yang perlu diselidiki adalah apakah S dapat memenuhi aksioma-aksioma ring ke $1, 3, 4,$ dan 6. Selanjutnya karena sebuah subring dapat pula dianggap sebagai sebuah subgrup terhadap operasi penjumlahan, maka dapat pula ditunjukkan bahwa jika dalam S memenuhi $\forall a, b \in S$, $(a - b) \in S$ maka S akan memenuhi aksioma ring ke $1, 3$ dan 4, sehingga aksioma-aksioma yang harus dipenuhi oleh sebuah subset untuk menjadi sebuah subring hanya $\forall a, b \in S, (a - b) \in S$ dan $\forall a, b \in S$,$a.b \in S$ (Prihandoko, 2016). Mengakibatkan membentuk teorema subgrup sebagai berikut.

Teorema 2.2. *Misalkan $(R, +, \cdot)$ adalah sebuah ring dan S suatu subset tak kosong R. S disebut subring R jika memenuhi :*

a. $\forall a, b \in S, a - b \in S$

b. $\forall a, b \in S, a \cdot b \in S$

Subiono pada tahun 2016 mengatakan bahwa misalkan R adalah ring dan I adalah suatu himpunan tak kosong dari R. Subhimpunan I disebut ideal dari R apabila

I adalah subring dan $\forall x \in I, \forall r \in R$ berlaku $rx \in I$ dan $xr \in I$. Secara umum ideal didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.10. *Suatu subring N dari ring R yang bersifat $aN \subseteq N$ dan $Nb \subseteq N$, $\forall a, b \in R$, N disebut ideal.*

Setiap ring R memiliki paling tidak dua macam ideal, yaitu ideal *improper* R dan ideal *trivial* $\{0\}$. Suatu ideal N pada ring R dikatakan ideal *proper non trivial* jika $N \neq R$ dan $N \neq \{0\}$ (Prihandoko, 2016).

Misalkan suatu ring $(R, +, \times)$ dan $\langle r \rangle$ adalah kelipatan $(+)$ semua r, $\langle r \rangle = \{pr | p \in R\}$ dengan sebarang elemen $p \in R$. Jika $\forall x, y \in \langle r \rangle$ dipilih beberapa $a, b \in R$ yang memenuhi $x = ar$ dan $y = br$ yang mengakibatkan $x - y = ar - br = (a - b)r \in \langle r \rangle$ dan $xy = arbr = (arb)r \in \langle r \rangle$ menurut Teorema 2.2 maka $\langle r \rangle$ adalah subring. Untuk sebarang $q \in R$ dan sebarang $x = pr \in \langle r \rangle$ didapat $qx = q(pr) = (qp)r \in \langle r \rangle$ dan $xq = (pr)q = (rp)q = r(pq) \in \langle r \rangle$ menurut Definisi 2.10 mengakibatkan $\langle r \rangle$ adalah ideal. Subiono pada tahun 2016 mengatakan bahwa $\langle r \rangle$ adalah ideal utama (*principal ideal*). Secara umum ideal utama dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.11. *Misalkan R adalah ring komutatif. Untuk sebarang $r \in R$ dan $\langle r \rangle = \{ar | a \in R\}$ selanjutnya $\langle r \rangle$ disebut ideal utama.*

Misalkan $(\mathbb{Z}, +, \times)$ adalah ring. Contoh ideal utama dalam $(\mathbb{Z}, +, \times)$ adalah $\langle 2 \rangle = \{a \times 2 | a \in \mathbb{Z}\} = 2\mathbb{Z}$ yaitu himpunan semua bilangan genap merupakan ideal dalam $(\mathbb{Z}, +, \times)$.

Wijaya pada tahun 2010 mengatakan bahwa jika suatu ring $(R, *, \times)$ dengan operasi $\times$ bersifat komutatif atau $\forall x, y \in R, x \times y = y \times x$ maka ring $(R, *, \times)$ adalah ring komutatif. Ring komutatif $(R, *, \times)$ dengan operasi $\times$ memiliki elemen satuan maka elemen satuan tersebut adalah unity. Secara umum unity dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.12. *Misalkan* $(R, +, \cdot)$ *adalah ring. Unity adalah elemen satuan dalam ring. Andaikan* 1 *adalah unity dalam ring* $(R, +, \cdot)$*, sehingga* $\forall a \in R$ *berlaku* $a{\cdot}1 = a = 1{\cdot}a$*.*

Unity adalah elemen satuan dalam ring. Sebuah ring yang memiliki unity disebut ring dengan unity. Misalkan 1 adalah unity di ring $(R, +, .)$, untuk setiap $a \in R$ berlaku $a.1 = 1.a = a$. Oleh sebab itu unity pasti elemen idempoten, sedangkan elemen idempoten belum tentu unity. Istilah unity hanya digunakan pada satuan, sedangkan jika yang ditulis hanya identitas maka yang dimaksud adalah identitas penjumlahan. Wijaya pada tahun 2010 mengatakan bahwa unity dalam suatu ring adalah tunggal. Dengan kata lain, jika 1 adalah unity di ring $(R, +, .)$ maka tidak ada unsur lain di R (selain 1) yang juga merupakan unity. Misalkan 1 dan 1^* keduanya merupakan unity di ring $(R, +, .)$. Pandang perkalian 1.1^*. Dengan memandang 1 sebagai unity diperoleh $1.1^* = 1$. Sedangkan jika 1^* yang dipandang sebagai unitynya maka $1.1^* = 1$, akibatnya $1 = 1^*$.

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Metode Penelitian

Metode pada penelitian ini menggunakan penelitian eksploratif. Penelitian eksploratif adalah salah satu jenis penelitian yang bertujuan untuk menemukan problematik-problematik baru atau menggali hal-hal yang ingin diketahui peneliti. Dalam penelitian ini, peneliti ingin meneliti karakterisasi unity subring proper non trivial pada ring $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$.

3.2 Rancangan Penelitian

a. Menentukan n pada ring $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$, $n = m2^k$, m adalah bilangan ganjil kurang dari 10 dan l adalah bilangan bulat positif.

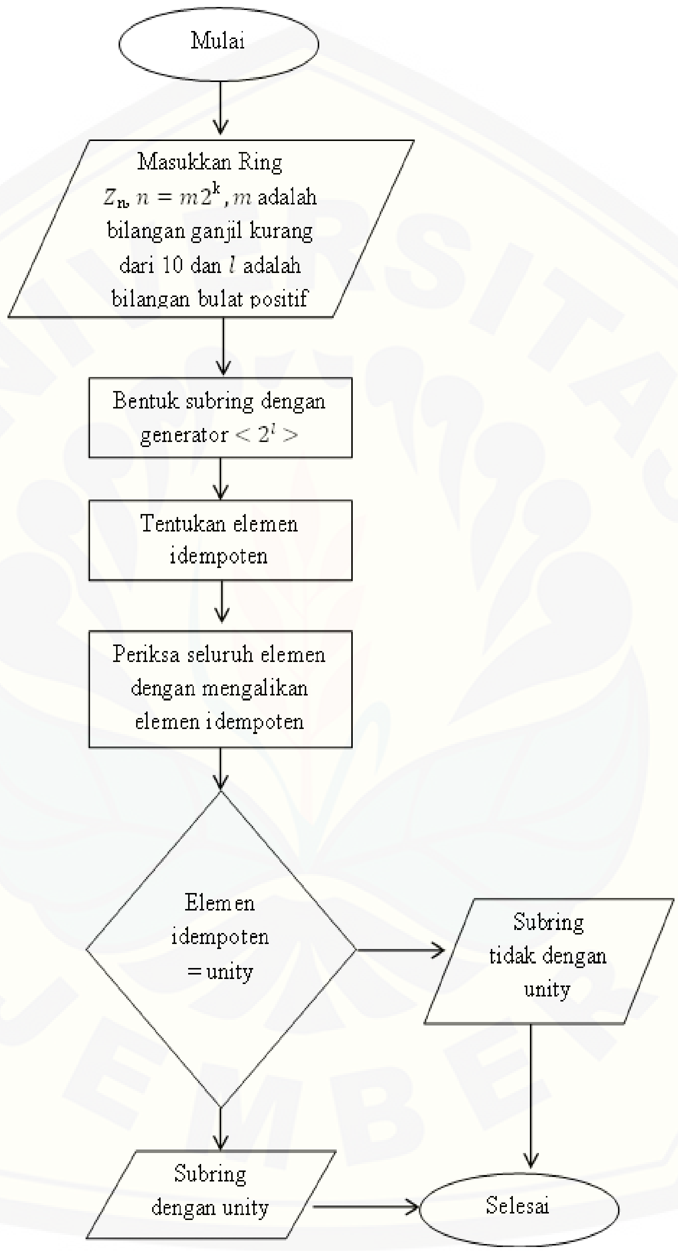
b. Membentuk subring dengan generator $\langle 2^l \rangle$.

c. Menentukan elemen idempoten dalam subring.

d. Periksa satu per satu apakah elemen idempoten tersebut adalah unity pada subring.

e. Jika elemen idempoten itu unity maka subringnya memiliki unity, jika tidak maka subringnya tidak memiliki unity.

Langkah-langkah rancangan penelitian lebih jelasnya pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Rancangan Penelitian

BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Unity adalah elemen satuan pada ring. Setiap ring belum tentu memiliki unity. Ring yang memiliki unity disebut ring dengan unity. Ring pada $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$ memiliki unity 1. Jika subring pada ring $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$ memiliki unity 1 maka subring tersebut adalah subring *improper* karena 1 adalah generator pada $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$. Dari uraian di atas penulis ingin mengetahui apakah subring *proper non trivial* pada ring $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$ memiliki unity atau tidak, jika memiliki unity maka penulis ingin mengkarakterisasi unity subring *proper non trivial* pada ring $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$.

Ring $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$ adalah ring dengan anggota bilangan bulat modulo n, $(\mathbb{Z}_n, +, \times) = \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$. Ambil $2^l \in \mathbb{Z}$ untuk l bilangan bulat positif. Menurut Definisi 2.11 $\langle 2^l \rangle$ adalah ideal utama yang dibangun oleh $\langle 2^l \rangle$. Karena $\langle 2^l \rangle$ adalah ideal utama, menurut Definisi 2.10 $\langle 2^l \rangle$ adalah subring.

4.1 Subring $\langle 2^l \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{1\cdot 2^l}, +, \times)$

Ring $(\mathbb{Z}_{1\cdot 2^l}, +, \times)$ beranggotakan $\{0, 1, 2, \cdots, 2^l - 1\}$. Subring $\langle 2^l \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{1\cdot 2^k}, +, \times)$ adalah $\{0\}$ karena 2^k mod 2^k adalah 0. Dengan demikian subring $\langle 2^l \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{1\cdot 2^k}, +, \times)$ adalah subring *proper trivial* dan tidak dibahas.

4.2 Subring $\langle 2^l \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{3\cdot 2^l}, +, \times)$

Ring $(\mathbb{Z}_{3\cdot 2^l}, +, \times)$ beranggotakan $\{0, 1, 2, \cdots, 3 \cdot 2^l - 1\}$. Subring $\langle 2^l \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{3\cdot 2^k}, +, \times)$ adalah $\{0, 2^l, 2 \cdot 2^l\}$. Untuk menentukan unity subring $\langle 2^l \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{3\cdot 2^l}, +, \times)$ dibagi menjadi dua, yaitu untuk l ganjil dan l genap.

Untuk l ganjil, $l = 2k+1$ dengan k adalah bilangan bulat *non* negatif, subring $\langle 2^{2k+1} \rangle = \{0, 2^{2k+1}, 2 \cdot 2^{2k+1}\}$ akan dicari elemen idempoten. Langkah selanjutnya akan ditunjukkan apakah 2^{2k+1} adalah elemen idempoten subring $\langle 2^{2k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{3\cdot 2^{2k+1}}, +, \times)$ dengan cara $2^{2k+1} \cdot 2^{2k+1} = 2^{2k+1}$ mod $3 \cdot 2^{2k+1}$.

Bukti :

$$
\begin{aligned}
2^{4k+2} &= 2^{2k+1} \cdot 4 \cdot 2^{2k-1} \\
&= 3 \cdot 2^{2k+1} \cdot 2^{2k-1} + 2^{2k+1} \cdot 2^{2k-1} \\
&= 3 \cdot 2^{2k+1} \cdot 2^{2k-1} + 3 \cdot 2^{2k+1} \cdot 2^{2k-3} + 2^{2k+1} \cdot 2^{2k-3} \\
&= 3 \cdot 2^{2k+1} \cdot 2^{2k-1} + 3 \cdot 2^{2k+1} \cdot 2^{2k-3} + + 3 \cdot 2^{2k+1} \cdot 2^{2k-5} + \cdots + 3 \cdot 2^{2k+1} \cdot 2^{1} + 2^{2k+1} \cdot 2^{1} \\
&= 3 \cdot 2^{2k+1}(2^{2k-1} + 2^{2k-3} + 2^{2k-5} + \cdots + 2) + 2^{2k+1} \cdot 2
\end{aligned}
$$

Karena $2^{2k+1} \cdot 2^{2k+1} \neq 2^{2k+1} \bmod 3 \cdot 2^{2k+1}$, berarti 2^{2k+1} bukanlah elemen idempoten subring $\langle 2^{2k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{3 \cdot 2^{2k+1}}, +, \times)$.

Selanjutnya akan ditunjukkan apakah $2 \cdot 2^{2k+1}$ adalah elemen idempoten subring $\langle 2^{2k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{3 \cdot 2^{2k+1}}, +, \times)$ dengan cara $2 \cdot 2^{2k+1} \cdot 2 \cdot 2^{2k+1} = 2 \cdot 2^{2k+1} \bmod 3 \cdot 2^{2k+1}$.

Bukti :

$$
\begin{aligned}
2^{4k+4} &= 2^{2k+1} \cdot 2 \cdot 4^{k+1} \\
&= 3 \cdot 2^{2k+1} \cdot 2 \cdot 4^{k} + 2^{2k+1} \cdot 2 \cdot 4^{k} \\
&= 3 \cdot 2^{2k+1} \cdot 2 \cdot 4^{k} + 3 \cdot 2^{2k+1} \cdot 2 \cdot 4^{k-1} + 2^{2k+2} \cdot 4^{k-1} \\
&= 3 \cdot 2^{2k+1} \cdot 2 \cdot 4^{k} + 3 \cdot 2^{2k+1} \cdot 2 \cdot 4^{k-1} + 2^{2k+1} \cdot 2 \cdot 4^{k-2} + \cdots + 3 \cdot 2^{2k+1} \cdot 2 \cdot 4^{0} + 2^{2k+1} \cdot 2 \cdot 4^{0} \\
&= 3 \cdot 2^{2k+1}(4^{k} \cdot 2 + 4^{k-1} \cdot 2 + 4^{k-2} \cdot 2 + \cdots + 4^{0} \cdot 2) + 2^{2k+1} \cdot 2 \cdot 4^{0} \\
&= 3 \cdot 2^{2k+1}(4^{k} \cdot 2 + 4^{k-1} \cdot 2 + 4^{k-2} \cdot 2 + \cdots + 2) + 2^{2k+2}
\end{aligned}
$$

Jadi, terbukti bahwa $2 \cdot 2^{2k+1} \cdot 2 \cdot 2^{2k+1} = 2 \cdot 2^{2k+1} \bmod 3 \cdot 2^{2k+1}$ ini berarti 2^{2k+2} adalah elemen idempoten subring $\langle 2^{2k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{3 \cdot 2^{2k+1}}, +, \times)$.

Elemen idempoten subring $\langle 2^{2k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{3 \cdot 2^{2k+1}}, +, \times)$ berada di $2 \cdot 2^{2k+1}$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa 2^{2k+2} adalah unity subring $\langle 2^{2k} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{3 \cdot 2^{2k+1}}, +, \times)$. Akan ditunjukkan $2^{2k+1} \cdot 2 \cdot 2^{2k+1} = 2^{2k+1} \bmod 3 \cdot 2^{2k+1}$.

Bukti :

$$
\begin{aligned}
2^{4k+3} &= 2^{2k+1} \cdot 4^{k+1} \\
&= 3 \cdot 2^{2k+1} \cdot 4^{k} + 2^{2k+1} \cdot 4^{k} \\
&= 3 \cdot 2^{2k+1} \cdot 4^{k} + 3 \cdot 2^{2k+1} \cdot 4^{k-1} + 2^{2k+1} \cdot 4^{k-1} \\
&= 3 \cdot 2^{2k+1} \cdot 4^{k} + 3 \cdot 2^{2k+1} \cdot 4^{k-1} + 2^{2k+1} \cdot 4^{k-2} + \cdots + 3 \cdot 2^{2k+1} \cdot 4^{0} + 2^{2k+1} \cdot 4^{0} \\
&= 3 \cdot 2^{2k+1}(4^{k} + 4^{k-1} + 4^{k-2} + \cdots + 4^{0}) + 2^{2k+2} \cdot 4^{0}
\end{aligned}
$$

$= 3 \cdot 2^{2k+1}(4^k + 4^{k-1} + 4^{k-2} + \cdots + 1) + 2^{2k+1}$

Jadi, terbukti bahwa $2^{2k+1} \cdot 2 \cdot 2^{2k+1} = 2^{2k+1} \bmod 3 \cdot 2^{2k+1}$ ini berarti $2 \cdot 2^{2k+1}$ adalah unity dari subring $\langle 2^{k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{3 \cdot 2^{k+1}}, +, \times)$. Contoh untuk $k = 0$, $l = 2 \cdot 0 + 1 = 1$. Ring $(\mathbb{Z}_{3 \cdot 2^1}, +, \times) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ dan subring $\langle 2^1 \rangle = \{0, 2, 4\}$. Unity dari subring $\langle 2^1 \rangle$ adalah 4 karena $2 \cdot 4 = 8 = 2 \bmod 3 \cdot 2$ dan $4 \cdot 4 = 16 = 4 \bmod 3 \cdot 2$.

Untuk l genap, $l = 2k + 2$ dengan k adalah bilangan bulat *non* negatif, subring $\langle 2^{2k+2} \rangle = \{0, 2^{2k+2}, 2 \cdot 2^{2k+2}\}$ akan dicari elemen idempoten. Langkah selanjutnya akan ditunjukkan apakah 2^{2k+2} adalah elemen idempoten subring $\langle 2^{2k+2} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{3 \cdot 2^{2k+2}}, +, \times)$ dengan cara $2^{2k+2} \cdot 2^{2k+2} = 2^{2k+2} \bmod 3 \cdot 2^{2k+1}$.

Bukti :

$$\begin{aligned}
2^{4k+4} &= 2^{2k+2} \cdot 4^{k+1} \\
&= 3 \cdot 2^{2k+2} \cdot 4^k + 2^{2k+2} \cdot 4^k \\
&= 3 \cdot 2^{2k+2} \cdot 4^k + 3 \cdot 2^{2k+2} \cdot 4^{k-1} + 2^{2k+2} \cdot 4^{k-1} \\
&= 3 \cdot 2^{2k+2} \cdot 4^k + 3 \cdot 2^{2k+2} \cdot 4^{k-1} + 2^{2k+2} \cdot 4^{k-2} + \cdots + 3 \cdot 2^{2k+2} \cdot 4^0 + 2^{2k+2} \cdot 4^0 \\
&= 3 \cdot 2^{2k+2}(4^k + 4^{k-1} + 4^{k-2} + \cdots + 4^0) + 2^{2k+2} \cdot 4^0 \\
&= 3 \cdot 2^{2k+2}(4^k + 4^{k-1} + 4^{k-2} + \cdots + 1) + 2^{2k+2}
\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $2^{2k+2} \cdot 2^{2k+2} = 2^{2k+2} \bmod 3 \cdot 2^{2k+2}$ ini berarti 2^{2k+2} adalah elemen idempoten subring $\langle 2^{2k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{3 \cdot 2^{2k+1}}, +, \times)$.

Selanjutnya akan ditunjukkan apakah $2 \cdot 2^{2k+2}$ adalah elemen idempoten subring $\langle 2^{2k+2} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{3 \cdot 2^{2k+2}}, +, \times)$ dengan cara $2 \cdot 2^{2k+2} \cdot 2 \cdot 2^{2k+2} = 2 \cdot 2^{2k+2} \bmod 3 \cdot 2^{2k+2}$.

Bukti :

$$\begin{aligned}
2^{4k+6} &= 4 \cdot 2^{2k+2} \cdot 2^{2k+2} \\
&= 3 \cdot 2^{2k+2} \cdot 2^{2k+2} + 2^{2k+2} \cdot 2^{2k+2} \\
&= 3 \cdot 2^{2k+2} \cdot 2^{2k+2} + 3 \cdot 2^{2k+2} \cdot 2^{2k} + 2^{2k+2} \cdot 2^{2k} \\
&= 3 \cdot 2^{2k+2} \cdot 2^{2k+2} + 3 \cdot 2^{2k+2} \cdot 2^{2k} + 3 \cdot 2^{2k+2} \cdot 2^{2k-2} + \cdots + 3 \cdot 2^{2k+2} \cdot 2^0 + 2^{2k+2} \cdot 2^0 \\
&= 3 \cdot 2^{2k+2}(2^{2k+2} + 2^{2k} + 2^{2k-2} + \cdots + 1) + 2^{2k+2}
\end{aligned}$$

Karena $2 \cdot 2^{2k+2} \cdot 2 \cdot 2^{2k+2} \neq 2^{2k+2} \bmod 3 \cdot 2^{2k+2}$, berarti 2^{2k+2} bukanlah elemen idempoten subring $\left\langle 2^{2k+2}\right\rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{3\cdot 2^{2k+2}}, +, \times)$.

Elemen idempoten subring $\left\langle 2^{2k+2}\right\rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{3\cdot 2^{2k+2}}, +, \times)$ berada di 2^{2k+2}. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa 2^{2k+2} adalah unity subring $\left\langle 2^{2k+2}\right\rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{3\cdot 2^{2k+1}}, +, \times)$. Akan ditunjukkan $2 \cdot 2^{2k+2} \cdot 2^{2k+2} = 2 \cdot 2^{2k+2} \bmod 3 \cdot 2^{2k+2}$.

Bukti :

$2^{4k+5} = 2^{2k+2} \cdot 2 \cdot 4^{k+1}$

$= 3 \cdot 2^{2k+2} \cdot 2 \cdot 4^{k} + 2^{2k+2} \cdot 2 \cdot 4^{k}$

$= 3 \cdot 2^{2k+2} \cdot 2 \cdot 4^{k} + 3 \cdot 2^{2k+2} \cdot 2 \cdot 4^{k-1} + 2^{2k+2} \cdot 2 \cdot 4^{k-1}$

$= 3 \cdot 2^{2k+2} \cdot 2 \cdot 4^{k} + 3 \cdot 2^{2k+2} \cdot 2 \cdot 4^{k-1} + 2^{2k+2} \cdot 2 \cdot 4^{k-2} + \cdots + 3 \cdot 2^{2k+2} \cdot 2 \cdot 4^{0} + 2^{2k+2} \cdot 2 \cdot 4^{0}$

$= 3 \cdot 2^{2k+2}(2 \cdot 4^{k} + 2 \cdot 4^{k-1} + 2 \cdot 4^{k-2} + \cdots + 2 \cdot 4^{0}) + 2^{2k+2} \cdot 2 \cdot 4^{0}$

$= 3 \cdot 2^{2k+2}(2 \cdot 4^{k} + 2 \cdot 4^{k-1} + 2 \cdot 4^{k-2} + \cdots + 2) + 2 \cdot 2^{2k+2}$

Jadi, terbukti bahwa $2 \cdot 2^{2k+2} \cdot 2^{2k+2} = 2 \cdot 2^{2k+2} \bmod 3 \cdot 2^{2k+2}$ ini berarti 2^{2k+2} adalah unity dari subring $\left\langle 2^{k+2}\right\rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{3\cdot 2^{k+2}}, +, \times)$. Contoh untuk $k = 0$, $l = 2 \cdot 0 + 2 = 2$. Ring $(\mathbb{Z}_{3\cdot 2^2}, +, \times) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots, 10, 11\}$ dan subring $\langle 2^2\rangle = \{0, 4, 8\}$. Unity dari subring $\langle 2^2\rangle$ adalah 4 karena $4 \cdot 4 = 16 = 4 \bmod 3 \cdot 2^2$ dan $8 \cdot 4 = 32 = 8 \bmod 3 \cdot 2^2$.

4.3 Subring $\left\langle 2^{l}\right\rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{5\cdot 2^l}, +, \times)$

Ring $(\mathbb{Z}_{5\cdot 2^l}, +, \times)$ beranggotakan $\{0, 1, 2, \cdots, 5 \cdot 2^l - 1\}$. Subring $\left\langle 2^{l}\right\rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{5\cdot 2^l}, +, \times)$ adalah $\{0, 2^l, 2 \cdot 2^l, 3 \cdot 2^l, 4 \cdot 2^l\}$. Untuk menentukan unity subring $\left\langle 2^{l}\right\rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{5\cdot 2^l}, +, \times)$ dibagi menjadi empat, yaitu $l = 4k + 1, l = 4k + 2, l = 4k + 3$, dan $l = 4k + 4$ dengan k adalah bilangan bulat *non* negatif.

Untuk $l = 4k + 1$, subring $\left\langle 2^{4k+1}\right\rangle = \{0, 2^{4k+1}, 2 \cdot 2^{4k+1}, 3 \cdot 2^{4k+1}, 4 \cdot 2^{4k+1}\}$ akan dicari elemen idempoten. Langkah selanjutnya akan ditunjukkan apakah 2^{4k+1} adalah elemen idempoten subring $\left\langle 2^{4k+1}\right\rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{5\cdot 2^{4k+1}}, +, \times)$ dengan cara $2^{4k+1} \cdot 2^{4k+1} = 2^{4k+1} \bmod 5 \cdot 2^{4k+1}$.

Bukti :

$2^{8k+2} = 8 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-2}$

$= 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-2} + 3 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-2}$

$= 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 3 \cdot 2^{4k-2} + 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-3} + 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-3}$

$= 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 3 \cdot 2^{4k-2} + 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-3} + 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-6} + 3 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-6}$

$= 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 3 \cdot 2^{4k-2} + 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-3} + 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-6} + 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-7} + \cdots +$
$5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^1 + 2^{4k+1} \cdot 2^1$

$= 5 \cdot 2^{4k+1}(2^{4k-2} + 2^{4k-3} + 2^{4k-6} + 2^{4k-7} + \cdots + +2) + 2 \cdot 2^{4k+1}$

Karena $2^{4k+1} \cdot 2^{4k+1} \neq 2^{4k+1} \bmod 5 \cdot 2^{4k+1}$, berarti 2^{4k+1} bukanlah elemen idempoten subring $\langle 2^{4k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{5 \cdot 2^{4k+1}}, +, \times)$.

Selanjutnya akan ditunjukkan apakah $2 \cdot 2^{4k+1}$ adalah elemen idempoten subring $\langle 2^{4k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{5 \cdot 2^{4k+1}}, +, \times)$ dengan cara $2 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2 \cdot 2^{4k+1} = 2 \cdot 2^{4k+1} \bmod 5 \cdot 2^{4k+1}$.

Bukti :

$4 \cdot 2^{8k+2} = 8 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k}$

$= 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k} + 3 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k}$

$= 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 3 \cdot 2^{4k} + 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-1} + 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-1}$

$= 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 3 \cdot 2^{4k} + 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-1} + 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-4} + 3 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-4}$

$= 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 3 \cdot 2^{4k} + 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-1} + 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-4} + 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-5}$
$+ \cdots + 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^0 + 3 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^0$

$= 5 \cdot 2^{4k+1}(2^{4k} + 2^{4k-1} + 2^{4k-4} + 2^{4k-5} + \cdots + 1) + 3 \cdot 2^{4k+1}$

Karena $2 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2 \cdot 2^{4k+1} \neq 2 \cdot 2^{4k+1} \bmod 5 \cdot 2^{4k+1}$, berarti $2 \cdot 2^{4k+1}$ bukanlah elemen idempoten subring $\langle 2^{4k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{5 \cdot 2^{4k+1}}, +, \times)$.

Selanjutnya akan ditunjukkan apakah $3 \cdot 2^{4k+1}$ adalah elemen idempoten subring $\langle 2^{4k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{5 \cdot 2^{4k+1}}, +, \times)$ dengan cara $3 \cdot 2^{4k+1} \cdot 3 \cdot 2^{4k+1} = 3 \cdot 2^{4k+1} \bmod 5 \cdot 2^{4k+1}$.

Bukti :

$9 \cdot 2^{8k+2} = 18 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k}$

$= 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 3 \cdot 2^{4k} + 3 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k}$

$= 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 3 \cdot 2^{4k} + 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-1} + 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-1}$

$= 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 3 \cdot 2^{4k} + 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-1} + 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-4} + 3 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-4}$

$= 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 3 \cdot 2^{4k} + 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-1} + 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-4} + \cdots + 5 \cdot 2^{4k+1} + 3 \cdot 2^{4k+1}$

$= 5 \cdot 2^{4k+1}(3 \cdot 2^{4k-1} + 2^{4k-4} + 2^{4k-5} + \cdots + 2^3 + 1) + 3 \cdot 2^{4k+1}$

Jadi, terbukti bahwa $3 \cdot 2^{4k+1} \cdot 3 \cdot 2^{4k+1} = 3 \cdot 2^{4k+1} \bmod 5 \cdot 2^{4k+1}$ ini berarti $3 \cdot 2^{4k+1}$ adalah elemen idempoten subring $\langle 2^{4k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{5 \cdot 2^{4k+1}}, +, \times)$.

Selanjutnya akan ditunjukkan apakah $4 \cdot 2^{4k+1}$ adalah elemen idempoten subring $\langle 2^{4k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{5 \cdot 2^{4k+1}}, +, \times)$ dengan cara $4 \cdot 2^{4k+1} \cdot 4 \cdot 2^{4k+1} = 4 \cdot 2^{4k+1} \bmod 5 \cdot 2^{4k+1}$.

Bukti :

$16 \cdot 2^{8k+2} = 8 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k+1}$

$= 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k+1} + 3 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k+1}$

$= 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 3 \cdot 2^{4k+1} + 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k} + 2^{4k+1} \cdot 2^{4k}$

$= 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 3 \cdot 2^{4k+1} + 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k} + 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-3} + 3 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-3}$

$= 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 3 \cdot 2^{4k+1} + 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k} + 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-3} + 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-4} + \cdots +$
$5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^0 + 2^{4k+1} \cdot 2^0$

$= 5 \cdot 2^{4k+1}(2^{4k} + 2^{4k-1} + 2^{4k-4} + 2^{4k-5} + \cdots + +1) + 2^{4k+1}$

Karena $4 \cdot 2^{4k+1} \cdot 4 \cdot 2^{4k+1} \neq 2 \cdot 2^{4k+1} \bmod 5 \cdot 2^{4k+1}$, berarti $2 \cdot 2^{4k+1}$ bukanlah elemen idempoten subring $\langle 2^{4k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{5 \cdot 2^{4k+1}}, +, \times)$.

Elemen idempoten subring $\langle 2^{4k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{5 \cdot 2^{4k+1}}, +, \times)$ berada di $3 \cdot 2^{4k+1}$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $3 \cdot 2^{4k+1}$ adalah unity subring $\langle 2^{4k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{5 \cdot 2^{4k+1}}, +, \times)$. Akan ditunjukkan $2^{4k+1} \cdot 3 \cdot 2^{4k+1} = 2^{4k+1} \bmod 5 \cdot 2^{4k+1}$.

Bukti :

$3 \cdot 2^{8k+2} = 6 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k}$

$= 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k} + 2^{4k+1} \cdot 2^{4k}$

$= 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 3 \cdot 2^{4k} + 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-3} + 3 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-3}$

$= 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 3 \cdot 2^{4k} + 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-3} + 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-4} + 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-4}$

$= 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 3 \cdot 2^{4k} + 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-3} + 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-4} + 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-5} + \cdots +$
$5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^0 + 2^{4k+1} \cdot 2^0$

$= 5 \cdot 2^{4k+1}(2^{4k} + 2^{4k-3} + 2^{4k-4} + 2^{4k-5} + \cdots + +1) + 2^{4k+1}$

Jadi, terbukti bahwa $2^{4k+1} \cdot 3 \cdot 2^{4k+1} = 2^{4k+1} \bmod 5 \cdot 2^{4k+1}$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $2 \cdot 2^{4k+1} \cdot 3 \cdot 2^{4k+1} = 2 \cdot 2^{4k+1} \bmod 5 \cdot 2^{4k+1}$.

Bukti :

$$
\begin{aligned}
6 \cdot 2^{8k+2} &= 6 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k+1} \\
&= 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k+1} + 2^{4k+1} \cdot 2^{4k+1} \\
&= 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 3 \cdot 2^{4k+1} + 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-2} + 3 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-2} \\
&= 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 3 \cdot 2^{4k+1} + 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-2} + 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-3} + 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-3} \\
&= 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 3 \cdot 2^{4k+1} + 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-2} + 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-3} + 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-6} + \cdots + \\
&\quad 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{1} + 2^{4k+1} \cdot 2^{1} \\
&= 5 \cdot 2^{4k+1}(2^{4k+1} + 2^{4k-2} + 2^{4k-3} + 2^{4k-6} + \cdots + +2) + 2 \cdot 2^{4k+1}
\end{aligned}
$$

Jadi, terbukti bahwa $2^{4k+1} \cdot 3 \cdot 2^{4k+1} = 2^{4k+1} \bmod 5 \cdot 2^{4k+1}$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $4 \cdot 2^{4k+1} \cdot 3 \cdot 2^{4k+1} = 4 \cdot 2^{4k+1} \bmod 5 \cdot 2^{4k+1}$.

Bukti :

$$
\begin{aligned}
12 \cdot 2^{8k+2} &= 6 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k+2} \\
&= 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k+2} + 2^{4k+1} \cdot 2^{4k+2} \\
&= 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 3 \cdot 2^{4k+2} + 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-1} + 3 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-1} \\
&= 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 3 \cdot 2^{4k+2} + 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-1} + 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-2} + 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-2} \\
&= 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 3 \cdot 2^{4k+2} + 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-1} + 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-2} + 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{4k-5} + \cdots + \\
&\quad 5 \cdot 2^{4k+1} \cdot 2^{2} + 2^{4k+1} \cdot 2^{2} \\
&= 5 \cdot 2^{4k+1}(2^{4k+2} + 2^{4k-1} + 2^{4k-2} + 2^{4k-5} + \cdots + +4) + 4 \cdot 2^{4k+1}
\end{aligned}
$$

Jadi, terbukti bahwa $4^{4k+1} \cdot 3 \cdot 2^{4k+1} = 4^{4k+1} \bmod 5 \cdot 2^{4k+1}$ berarti $3 \cdot 2^{4k+1}$ adalah unity dari subring $\langle 2^{4k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{5 \cdot 2^{4k+1}}, +, \times)$. Contoh untuk $k = 0, l = 4 \cdot 0 + 1 = 1$, ring $(\mathbb{Z}_{5 \cdot 2^{1}}, +, \times) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ dan subring $\langle 2^{1} \rangle = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Unity dari subring $\langle 2^{1} \rangle$ adalah 6 karena $6 \cdot 6 = 36 = 6 \bmod 5 \cdot 2$, $2 \cdot 6 = 12 = 2 \bmod 5 \cdot 2$, $4 \cdot 6 = 24 = 4 \bmod 5 \cdot 2$ dan $8 \cdot 6 = 48 = 8 \bmod 5 \cdot 2$.

Untuk $l = 4k+2$, subring $\langle 2^{4k+2} \rangle = \{0, 2^{4k+2}, 2 \cdot 2^{4k+2}, 3 \cdot 2^{4k+2}, 4 \cdot 2^{4k+2}\}$ akan dicari elemen idempoten. Langkah-langkah pencarian idempoten melalui manipulasi aljabar seperti pencarian pada $l = 4k+1$.

$2^{4k+2} \cdot 2^{4k+2} = 5 \cdot 2^{4k+2}(2^{4k-1} + 2^{4k-2} + 2^{4k-5} + 2^{4k-6} + \cdots + 2^2) + 4 \cdot 2^{4k+2}$

$2 \cdot 2^{4k+2} \cdot 2 \cdot 2^{4k+2} = 5 \cdot 2^{4k+2}(2^{4k+1} + 2^{4k} + 2^{4k-3} + 2^{4k-4} + \cdots + 1) + 2^{4k+2}$

$3 \cdot 2^{4k+2} \cdot 3 \cdot 2^{4k+2} = 5 \cdot 2^{4k+2}(3 \cdot 2^{4k+1} + 2^{4k} + 2^{4k-3} + 2^{4k-4} + \cdots + 1) + 2^{4k+2}$

$4 \cdot 2^{4k+2} \cdot 4 \cdot 2^{4k+2} = 5 \cdot 2^{4k+2}(3 \cdot 2^{4k+2} + 3 \cdot 2^{4k-2} + 3 \cdot 2^{4k-6} + \cdots + 3 \cdot 2^2) + 4 \cdot 2^{4k+2}$

Elemen idempoten berada pada $4 \cdot 2^{4k+2}$ karena $4 \cdot 2^{4k+2} \cdot 4 \cdot 2^{4k+2} = 4 \cdot 2^{4k+2}$ mod $5 \cdot 2^{4k+2}$. Selanjutnya akan ditunjukkan apakah $4 \cdot 2^{4k+2}$ adalah unity pada subring $\langle 2^{4k+2} \rangle$. Cara menunjukkannya adalah mengalikan elemen tak nol dengan $4 \cdot 2^{4k+2}$ menghasilkan elemen tersebut mod $5 \cdot 2^{4k+2}$.

$2^{4k+2} \cdot 4 \cdot 2^{4k+2} = 5 \cdot 2^{4k+2}(2^{4k+1} + 2^{4k} + 2^{4k-3} + 2^{4k-4} + \cdots + 1) + 2^{4k+2}$

$2 \cdot 2^{4k+2} \cdot 4 \cdot 2^{4k+2} = 5 \cdot 2^{4k+2}(2^{4k+2} + 2^{4k+1} + 2^{4k-2} + 2^{4k-3} + \cdots + 2) + 2^{4k+2}$

$3 \cdot 2^{4k+2} \cdot 4 \cdot 2^{4k+2} = 5 \cdot 2^{4k+2}(2^{4k+3} + 2^{4k} + 2^{4k-1} + 2^{4k-4} + \cdots + 1) + 3 \cdot 2^{4k+2}$

Karena elemen tak nol subring $\langle 2^{4k+2} \rangle$ dikalikan dengan $4 \cdot 2^{4k+2}$ menghasilkan elemen tersebut mod $5 \cdot 2^{4k+2}$. Jadi, terbukti bahwa $4 \cdot 2^{4k+2}$ adalah unity subring $\langle 2^{4k+2} \rangle$. Contoh untuk $k = 0, l = 4 \cdot 0 + 2 = 2$. Ring $(\mathbb{Z}_{5 \cdot 2^2}, +, \times)$ = $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots, 18, 19\}$ dan subring $\langle 2^2 \rangle = \{0, 4, 8, 12, 16\}$. Unity dari subring $\langle 2^2 \rangle$ adalah 16 karena $16 \cdot 16 = 256 = 16$ mod $5 \cdot 2^2$, $4 \cdot 16 = 64 = 4$ mod $5 \cdot 2^2$, $8 \cdot 16 = 128 = 8$ mod $5 \cdot 2^2$, dan $12 \cdot 16 = 192 = 12$ mod $5 \cdot 2^2$.

Untuk $l = 4k+3$, subring $\langle 2^{4k+3} \rangle = \{0, 2^{4k+3}, 2 \cdot 2^{4k+3}, 3 \cdot 2^{4k+3}, 4 \cdot 2^{4k+3}\}$ akan dicari elemen idempoten. Langkah-langkah pencarian idempoten melalui manipulasi aljabar seperti pencarian pada $l = 4k+1$.

$2^{4k+3} \cdot 2^{4k+3} = 5 \cdot 2^{4k+3}(3 \cdot 2^{4k-1} + 3 \cdot 2^{4k-5} + 3 \cdot 2^{4k-9} + \cdots + 3 \cdot 2^3) + 8 \cdot 2^{4k+2}$

$2 \cdot 2^{4k+3} \cdot 2 \cdot 2^{4k+3} = 5 \cdot 2^{4k+3}(3 \cdot 2^{4k+1} + 3 \cdot 2^{4k-3} + 3 \cdot 2^{4k-7} + \cdots + 3 \cdot 2^1) + 2 \cdot 2^{4k+2}$

$3 \cdot 2^{4k+3} \cdot 3 \cdot 2^{4k+3} = 5 \cdot 2^{4k+3}(3 \cdot 2^{4k+3} + 2^{4k+2} + 2^{4k-1} + 2^{4k-2} + \cdots + 2^2) + 2 \cdot 2^{4k+2}$

$4 \cdot 2^{4k+3} \cdot 4 \cdot 2^{4k+3} = 5 \cdot 2^{4k+3}(3 \cdot 2^{4k+3} + 3 \cdot 2^{4k-1} + 3 \cdot 2^{4k-5} + 3 \cdot 2^{4k-9} + \cdots + 3 \cdot 2^3) + 8 \cdot 2^{4k+2}$

Elemen idempoten berada pada $2 \cdot 2^{4k+3}$ karena $2 \cdot 2^{4k+3} \cdot 2 \cdot 2^{4k+3} = 2 \cdot 2^{4k+3}$ mod $5 \cdot 2^{4k+3}$. Selanjutnya akan ditunjukkan apakah $2 \cdot 2^{4k+3}$ adalah unity pada subring

$\langle 2^{4k+3} \rangle$. Cara menunjukkannya adalah mengalikan elemen tak nol dengan $2 \cdot 2^{4k+3}$ menghasilkan elemen tersebut mod $5 \cdot 2^{4k+3}$.

$2^{4k+3} \cdot 2 \cdot 2^{4k+3} = 5 \cdot 2^{4k+3}(3 \cdot 2^{4k} + 3 \cdot 2^{4k-4} + 3 \cdot 2^{4k-8} + 3 \cdot 2^{4k-12} + \cdots + 3) + 2^{4k+2}$

$3 \cdot 2^{4k+3} \cdot 2 \cdot 2^{4k+3} = 5 \cdot 2^{4k+3}(2^{4k+3} + 2^{4k} + 2^{4k-1} + 2^{4k-4} + \cdots + 1) + 3 \cdot 2^{4k+3}$

$4 \cdot 2^{4k+3} \cdot 2 \cdot 2^{4k+3} = 5 \cdot 2^{4k+3}(3 \cdot 2^{4k+2} + 3 \cdot 2^{4k-2} + 3 \cdot 2^{4k-6} + 3 \cdot 2^{4k-10} + \cdots + 4) + 4 \cdot 2^{4k+2}$

Karena elemen tak nol subring subring $\langle 2^{4k+3} \rangle$ dikalikan dengan $2 \cdot 2^{4k+3}$ mengahsilkan elemen tersebut mod $5 \cdot 2^{4k+3}$. Jadi, terbukti bahwa $2 \cdot 2^{4k+3}$ adalah unity subring $\langle 2^{4k+3} \rangle$. Contoh untuk $k = 0, l = 4 \cdot 0 + 3 = 3$. Ring $(\mathbb{Z}_{5 \cdot 2^3}, +, \times) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots, 38, 39\}$ dan subring $\langle 2^3 \rangle = \{0, 8, 16, 24, 32\}$. Unity dari subring $\langle 2^3 \rangle$ adalah 16 karena $16 \cdot 16 = 256 = 16$ mod $5 \cdot 2^3$, $8 \cdot 16 = 128 = 8$ mod $5 \cdot 2^3$, $24 \cdot 16 = 384 = 24$ mod $5 \cdot 2^3$ dan $32 \cdot 16 = 512 = 32$ mod $5 \cdot 2^3$.

Untuk $l = 4k + 4$ subring $\langle 2^{4k+4} \rangle = \{0, 2^{4k+4}, 2 \cdot 2^{4k+4}, 3 \cdot 2^{4k+4}, 4 \cdot 2^{4k+4}\}$ akan dicari elemen idempoten. Langkah-langkah pencarian idempoten melalui manipulasi aljabar seperti pencarian pada $l = 4k + 1$.

$2^{4k+4} \cdot 2^{4k+4} = 5 \cdot 2^{4k+4}(3 \cdot 2^{4k} + 3 \cdot 2^{4k-4} + 3 \cdot 2^{4k-8} + \cdots + 3) + 2^{4k+4}$

$2 \cdot 2^{4k+4} \cdot 2 \cdot 2^{4k+4} = 5 \cdot 2^{4k+4}(3 \cdot 2^{4k+2} + 3 \cdot 2^{4k-2} + 3 \cdot 2^{4k-6} + \cdots + 3 \cdot 2^2) + 4 \cdot 2^{4k+4}$

$3 \cdot 2^{4k+4} \cdot 3 \cdot 2^{4k+4} = 5 \cdot 2^{4k+4}(3 \cdot 2^{4k+3} + 2^{4k+2} + 2^{4k-1} + 2^{4k-2} + \cdots + 2^2) + 4 \cdot 2^{4k+4}$

$4 \cdot 2^{4k+4} \cdot 4 \cdot 2^{4k+4} = 5 \cdot 2^{4k+4}(3 \cdot 2^{4k+4} + 3 \cdot 2^{4k} + 3 \cdot 2^{4k-4} + \cdots + 3 \cdot 2^0) + 2^{4k+4}$

Elemen idempoten berada pada 2^{4k+4} karena $2^{4k+4} \cdot 2^{4k+4} = 2^{4k+4}$ mod $5 \cdot 2^{4k+4}$. Selanjutnya akan ditunjukkan apakah 2^{4k+4} adalah unity pada subring $\langle 2^{4k+4} \rangle$. Cara menunjukannya adalah mengalikan elemen tak nol dengan 2^{4k+4} menghasilkan elemen tersebut mod $5 \cdot 2^{4k+4}$.

$2 \cdot 2^{4k+4} \cdot 2^{4k+4} = 5 \cdot 2^{4k+4}(3 \cdot 2^{4k+1} + 3 \cdot 2^{4k-3} + 3 \cdot 2^{4k-7} + \cdots + 3 \cdot 2^1) + 2 \cdot 2^{4k+4}$

$3 \cdot 2^{4k+4} \cdot 2^{4k+4} = 5 \cdot 2^{4k+4}(2^{4k+3} + 2^{4k} + 2^{4k-1} + 2^{4k-4} + \cdots + 1) + 3 \cdot 2^{4k+4}$

$4 \cdot 2^{4k+4} \cdot 2^{4k+4} = 5 \cdot 2^{4k+4}(3 \cdot 2^{4k+2} + 3 \cdot 2^{4k-2} + 3 \cdot 2^{4k-6} + \cdots + 3 \cdot 2^2) + 4 \cdot 2^{4k+4}$

Karena elemen tak nol subring $\langle 2^{4k+4} \rangle$ dikalikan dengan 2^{4k+4} menghasilkan elemen tersebut mod $5 \cdot 2^{4k+4}$. Jadi, terbukti bahwa 2^{4k+4} adalah unity dari subring $\langle 2^{4k+4} \rangle$.

Contoh untuk $k = 0, l = 4 \cdot 0 + 4 = 4$. Ring $(\mathbb{Z}_{5 \cdot 2^4}, +, \times) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots, 78, 79\}$ dan subring $\langle 2^3 \rangle = \{0, 16, 32, 48, 64\}$. Unity dari subring $\langle 2^3 \rangle$ adalah 16 karena $16 \cdot 16 = 256 = 16 \text{ mod } 5 \cdot 2^4$, $32 \cdot 16 = 512 = 32 \text{ mod } 5 \cdot 2^4$, $48 \cdot 16 = 768 = 48 \text{ mod } 5 \cdot 2^3$ dan $64 \cdot 16 = 1024 = 64 \text{ mod } 5 \cdot 2^4$.

4.4 Subring $\langle 2^l \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{7 \cdot 2^k}, +, \times)$

Ring $(\mathbb{Z}_{7 \cdot 2^l}, +, \times)$ beranggotakan $\{0, 1, 2, \cdots, 7 \cdot 2^l - 1\}$. Subring $\langle 2^l \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{7 \cdot 2^l}, +, \times)$ adalah $\{0, 2^l, 2 \cdot 2^l, 3 \cdot 2^l, 4 \cdot 2^l, 5 \cdot 2^l, 6 \cdot 2^l\}$. Untuk menentukan unity subring $\langle 2^l \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{7 \cdot 2^l}, +, \times)$ dibagi menjadi tiga, yaitu $l = 3k + 1, l = 3k + 2$, dan $l = 3k + 3$ dengan k adalah bilangan bulat *non* negatif.

Untuk $l = 3k + 1$, subring $\langle 2^{3k+1} \rangle = \{0, 2^{3k+1}, 2 \cdot 2^{3k+1}, 3 \cdot 2^{3k+1}, 4 \cdot 2^{3k+1}, 5 \cdot 2^{3k+1}, 6 \cdot 2^{3k+1}\}$ akan dicari elemen idempoten. Langkah selanjutnya akan ditunjukkan apakah 2^{3k+1} adalah elemen idempoten subring $\langle 2^{3k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{7 \cdot 2^{3k+1}}, +, \times)$ dengan cara $2^{3k+1} \cdot 2^{3k+1} = 2^{3k+1} \text{ mod } 7 \cdot 2^{3k+1}$.

Bukti :

$$
\begin{aligned}
2^{6k+2} &= 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-2} + 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-2} \\
&= 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-2} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-5} + 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-5} \\
&= 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-2} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-5} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-8} + 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-8} \\
&= 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-2} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-5} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-8} + \cdots + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^1 + 2^{3k+1} \cdot 2^1 \\
&= 7 \cdot 2^{3k+1}(2^{3k-1} + 2^{3k-4} + 2^{3k-7} + \cdots + 2^1) + 2 \cdot 2^{3k+1}
\end{aligned}
$$

Karena $2^{3k+1} \cdot 2^{3k+1} \neq 2^{3k+1} \text{ mod } 7 \cdot 2^{3k+1}$, berarti 2^{3k+1} bukanlah elemen idempoten subring $\langle 2^{3k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{7 \cdot 2^{3k+1}}, +, \times)$.

Selanjutnya akan ditunjukkan apakah $2 \cdot 2^{3k+1}$ adalah elemen idempoten subring $\langle 2^{3k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{7 \cdot 2^{3k+1}}, +, \times)$ dengan cara $2 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2 \cdot 2^{3k+1} = 2 \cdot 2^{3k+1} \text{ mod } 7 \cdot 2^{3k+1}$.

Bukti :

$$
\begin{aligned}
4 \cdot 2^{6k+2} &= 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k} + 2^{3k+1} \cdot 2^{3k} \\
&= 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-3} + 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-3}
\end{aligned}
$$

$= 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-3} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-6} + 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-6}$

$= 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-3} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-6} + \cdots + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{0} + 2^{3k+1} \cdot 2^{0}$

$= 7 \cdot 2^{3k+1}(2^{3k} + 2^{3k-3} + 2^{3k-6} + \cdots + 1) + 2^{3k+1}$

Karena $2 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2 \cdot 2^{3k+1} \neq 2 \cdot 2^{3k+1} \bmod 7 \cdot 2^{3k+1}$, berarti $2 \cdot 2^{3k+1}$ bukanlah elemen idempoten subring $\langle 2^{3k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{7.2^{3k+1}}, +, \times)$.

Selanjutnya akan ditunjukkan apakah $3 \cdot 2^{3k+1}$ adalah elemen idempoten subring $\langle 2^{3k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{7.2^{3k+1}}, +, \times)$ dengan cara $3 \cdot 2^{3k+1} \cdot 3 \cdot 2^{3k+1} = 3 \cdot 2^{3k+1}$ mod $7 \cdot 2^{3k+1}$.

Bukti :

$9 \cdot 2^{6k+2} = 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k+1} + 2^{3k+1} \cdot 2^{3k+1}$

$= 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k+1} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-2} + 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-2}$

$= 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k+1} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-2} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-5} + 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-5}$

$= 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k+1} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-2} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-5} + \cdots + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{1} + 2^{3k+1} \cdot 2^{1}$

$= 7 \cdot 2^{3k+1}(2^{3k+1} + 2^{3k-2} + 2^{3k-5} + \cdots + 2) + 2 \cdot 2^{3k+1}$

Karena $3 \cdot 2^{3k+1} \cdot 3 \cdot 2^{3k+1} \neq 3 \cdot 2^{3k+1} \bmod 7 \cdot 2^{3k+1}$, berarti $3 \cdot 2^{3k+1}$ bukanlah elemen idempoten subring $\langle 2^{3k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{7.2^{3k+1}}, +, \times)$.

Selanjutnya akan ditunjukkan apakah $4 \cdot 2^{3k+1}$ adalah elemen idempoten subring $\langle 2^{3k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{7.2^{3k+1}}, +, \times)$ dengan cara $4 \cdot 2^{3k+1} \cdot 4 \cdot 2^{3k+1} = 4 \cdot 2^{3k+1}$ mod $7 \cdot 2^{3k+1}$.

Bukti :

$2^{6k+6} = 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k+2} + 2^{3k+1} \cdot 2^{3k+2}$

$= 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k+2} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-1} + 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-1}$

$= 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k+2} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-1} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-4} + 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-4}$

$= 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k+2} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-1} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-4} + \cdots + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{2} + 2^{3k+1} \cdot 2^{2}$

$= 7 \cdot 2^{3k+1}(2^{3k+2} + 2^{3k-1} + 2^{3k-4} + \cdots + 2^{2}) + 4 \cdot 2^{3k+1}$

Jadi, terbukti bahwa $4 \cdot 2^{3k+1} \cdot 4 \cdot 2^{3k+1} = 4 \cdot 2^{3k+1}$ mod $7 \cdot 2^{3k+1}$ ini berarti $4 \cdot 2^{3k+1}$ adalah elemen idempoten subring $\langle 2^{3k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{7.2^{3k+1}}, +, \times)$.

Selanjutnya akan ditunjukkan apakah $5 \cdot 2^{3k+1}$ adalah elemen idempoten subring $\langle 2^{3k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{7 \cdot 2^{3k+1}}, +, \times)$ dengan cara $5 \cdot 2^{3k+1} \cdot 5 \cdot 2^{3k+1} = 5 \cdot 2^{3k+1}$ mod $7 \cdot 2^{3k+1}$.

Bukti :

$$\begin{aligned}
25 \cdot 2^{6k+2} &= 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 3 \cdot 2^{3k+1} + 4 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k+1} \\
&= 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 3 \cdot 2^{3k+1} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k} + 2^{3k+1} \cdot 2^{3k} \\
&= 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 3 \cdot 2^{3k+1} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-3} + 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-3} \\
&= 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 3 \cdot 2^{3k+1} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-3} + \cdots + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{0} + 2^{3k+1} \cdot 2^{0} \\
&= 7 \cdot 2^{3k+1}(3 \cdot 2^{3k+1} + 2^{3k} + 2^{3k-3} + \cdots + 1) + 2^{3k+1}
\end{aligned}$$

Karena $5 \cdot 2^{3k+1} \cdot 5 \cdot 2^{3k+1} \neq 7 \cdot 2^{3k+1}$ mod $7 \cdot 2^{3k+1}$, berarti $5 \cdot 2^{3k+1}$ bukanlah elemen idempoten subring $\langle 2^{3k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{7 \cdot 2^{3k+1}}, +, \times)$.

Selanjutnya akan ditunjukkan apakah $6 \cdot 2^{3k+1}$ adalah elemen idempoten subring $\langle 2^{3k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{7 \cdot 2^{3k+1}}, +, \times)$ dengan cara $6 \cdot 2^{3k+1} \cdot 6 \cdot 2^{3k+1} = 6 \cdot 2^{3k+1}$ mod $7 \cdot 2^{3k+1}$.

Bukti :

$$\begin{aligned}
36 \cdot 2^{6k+2} &= 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 5 \cdot 2^{3k+1} + 2^{3k+1} \cdot 2^{3k+1} \\
&= 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 5 \cdot 2^{3k+1} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-2} + 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-2} \\
&= 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 5 \cdot 2^{3k+1} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-2} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-5} + 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-5} \\
&= 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 5 \cdot 2^{3k+1} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-2} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-5} + \cdots + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{1} + 2^{3k+1} \cdot 2^{1} \\
&= 7 \cdot 2^{3k+1}(5 \cdot 2^{3k+1} + 2^{3k-2} + 2^{3k-5} + \cdots + 2) + 2 \cdot 2^{3k+1}
\end{aligned}$$

Karena $6 \cdot 2^{3k+1} \cdot 6 \cdot 2^{3k+1} \neq 6 \cdot 2^{3k+1}$ mod $7 \cdot 2^{3k+1}$, berarti $6 \cdot 2^{3k+1}$ bukanlah elemen idempoten subring $\langle 2^{3k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{7 \cdot 2^{3k+1}}, +, \times)$.

Elemen idempoten subring $\langle 2^{3k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{7 \cdot 2^{3k+1}}, +, \times)$ berada di $4 \cdot 2^{3k+1}$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $4 \cdot 2^{3k+1}$ adalah unity subring $\langle 2^{3k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{7 \cdot 2^{3k+1}}, +, \times)$. Akan ditunjukkan $2^{3k+1} \cdot 4 \cdot 2^{3k+1} = 2^{3k+1}$ mod $7 \cdot 2^{3k+1}$.

Bukti :

$$4 \cdot 2^{6k+2} = 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k} + 2^{3k+1} \cdot 2^{3k}$$

$$= 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-3} + 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-3}$$
$$= 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-3} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-6} + 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-6}$$
$$= 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-3} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-6} + \cdots + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{0} + 2^{3k+1} \cdot 2^{0}$$
$$= 7 \cdot 2^{3k+1}(2^{3k} + 2^{3k-3} + 2^{3k-6} + \cdots + 1) + 2^{3k+1}$$

Jadi, terbukti bahwa $2^{3k+1} \cdot 4 \cdot 2^{3k+1} = 2^{3k+1} \bmod 7 \cdot 2^{3k+1}$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $2 \cdot 2^{3k+1} \cdot 4 \cdot 2^{3k+1} = 2 \cdot 2^{3k+1} \bmod 7 \cdot 2^{3k+1}$

Bukti :

$$8 \cdot 2^{6k+2} = 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k+1} + 2^{3k+1} \cdot 2^{3k+1}$$
$$= 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k+1} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-2} + 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-2}$$
$$= 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k+1} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-2} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-5} + 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-5}$$
$$= 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k+1} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-2} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-5} + \cdots + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{1} + 2^{3k+1} \cdot 2^{1}$$
$$= 7 \cdot 2^{3k+1}(2^{3k+1} + 2^{3k-2} + 2^{3k-5} + \cdots + 2) + 2 \cdot 2^{3k+1}$$

Jadi, terbukti bahwa $2 \cdot 2^{3k+1} \cdot 4 \cdot 2^{3k+1} = 2 \cdot 2^{3k+1} \bmod 7 \cdot 2^{3k+1}$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $3 \cdot 2^{3k+1} \cdot 4 \cdot 2^{3k+1} = 3 \cdot 2^{3k+1} \bmod 7 \cdot 2^{3k+1}$

Bukti :

$$12 \cdot 2^{6k+2} = 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k+1} + 5 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k+1}$$
$$= 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k+1} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k} + 3 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k}$$
$$= 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k+1} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-2} + 5 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-2}$$
$$= 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k+1} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-2} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-3} + 3 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-3}$$
$$= 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k+1} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-2} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-3} + \cdots + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{0} + 3 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{0}$$
$$= 7 \cdot 2^{3k+1}(2^{3k+1} + 2^{3k} + 2^{3k-2} + 2^{3k-3} + \cdots + 1) + 3 \cdot 2^{3k+1}$$

Jadi, terbukti bahwa $3 \cdot 2^{3k+1} \cdot 4 \cdot 2^{3k+1} = 3 \cdot 2^{3k+1} \bmod 7 \cdot 2^{3k+1}$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $5 \cdot 2^{3k+1} \cdot 4 \cdot 2^{3k+1} = 5 \cdot 2^{3k+1} \bmod 7 \cdot 2^{3k+1}$

Bukti :

$$20 \cdot 2^{6k+2} = 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k+2} + 3 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k+2}$$
$$= 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k+2} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k} + 5 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k}$$

$$= 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k+2} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k} + 5 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-1} + 3 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-1}$$
$$= 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k+2} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k} + 5 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-1} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-3} + 5 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-3}$$
$$= 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k+2} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k} + 5 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-1} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-3} + \cdots + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{0} + 5 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{0}$$
$$= 7 \cdot 2^{3k+1}(2^{3k+2} + 2^{3k} + 2^{3k-1} + 2^{3k-3} + \cdots + 1) + 5 \cdot 2^{3k+1}$$

Jadi, terbukti bahwa $5 \cdot 2^{3k+1} \cdot 4 \cdot 2^{3k+1} = 5 \cdot 2^{3k+1}$ mod $7 \cdot 2^{3k+1}$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $6 \cdot 2^{3k+1} \cdot 4 \cdot 2^{3k+1} = 6 \cdot 2^{3k+1}$ mod $7 \cdot 2^{3k+1}$

Bukti :

$$24 \cdot 2^{6k+2} = 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k+2} + 5 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k+2}$$
$$= 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k+2} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k+1} + 3 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k+1}$$
$$= 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k+2} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k+1} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-1} + 5 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-1}$$
$$= 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k+2} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k+1} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-1} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-2} + 3 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-2}$$
$$= 7 \cdot 2^{3k+2} \cdot 2^{3k+1} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k+1} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-1} + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{3k-2} + \cdots + 7 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{1} + 3 \cdot 2^{3k+1} \cdot 2^{1}$$
$$= 7 \cdot 2^{3k+1}(2^{3k+2} + 2^{3k+1} + 2^{3k-1} + 2^{3k-2} + \cdots + 2) + 6 \cdot 2^{3k+1}$$

Jadi, terbukti bahwa $6 \cdot 2^{3k+1} \cdot 4 \cdot 2^{3k+1} = 6 \cdot 2^{3k+1}$ mod $7 \cdot 2^{3k+1}$ berarti $4 \cdot 2^{3k+1}$ adalah unity dari subring $\langle 2^{3k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{7 \cdot 2^{3k+1}}, +, \times)$. Contoh untuk $k = 0, l = 3 \cdot 0 + 1 = 1$. Ring $(\mathbb{Z}_{7 \cdot 2^1}, +, \times) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots, 12, 13\}$ dan subring $\langle 2^1 \rangle = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$. Unity dari subring $\langle 2^1 \rangle$ adalah 8 karena $8 \cdot 8 = 64 = 8$ mod $7 \cdot 2^1$, $2 \cdot 8 = 16 = 2$ mod $7 \cdot 2^1$, $4 \cdot 8 = 32 = 4$ mod $7 \cdot 2^1$, $6 \cdot 8 = 48 = 6$ mod $7 \cdot 2^1$, $10 \cdot 8 = 80 = 10$ mod $7 \cdot 2^1$, dan $12 \cdot 8 = 96 = 12$ mod $7 \cdot 2^1$.

Untuk $l = 3k + 2$, subring $\langle 2^{3k+2} \rangle = \{0, 2^{3k+2}, 2 \cdot 2^{3k+2}, 3 \cdot 2^{3k+2}, 4 \cdot 2^{3k+2}, 5 \cdot 2^{3k+2}, 6 \cdot 2^{3k+2}\}$ akan dicari elemen idempoten. Langkah-langkah pencarian idempoten melalui manipulasi aljabar seperti pencarian pada $l = 3k + 1$.

$$2^{3k+2} \cdot 2^{3k+2} = 7 \cdot 2^{3k+2}(2^{3k-1} + 2^{3k-4} + 2^{3k-7} + \cdots + 2^{1}) + 4 \cdot 2^{3k+2}$$
$$2 \cdot 2^{3k+2} \cdot 2 \cdot 2^{3k+2} = 7 \cdot 2^{3k+2}(2^{3k+1} + 2^{3k-2} + 2^{3k-5} + \cdots + 2^{1}) + 2 \cdot 2^{3k+1}$$

$3 \cdot 2^{3k+2} \cdot 3 \cdot 2^{3k+2} = 7 \cdot 2^{3k+2}(2^{3k+2} + 2^{3k-1} + 2^{3k-4} + \cdots + 4) + 4 \cdot 2^{3k+1}$
$4 \cdot 2^{3k+2} \cdot 4 \cdot 2^{3k+2} = 7 \cdot 2^{3k+2}(2^{3k+3} + 2^{3k} + 2^{3k-3} + \cdots + 1) + 2^{3k+2}$
$5 \cdot 2^{3k+2} \cdot 5 \cdot 2^{3k+2} = 7 \cdot 2^{3k+2}(3 \cdot 2^{3k+2} + 2^{3k+1} + 2^{3k-2} + \cdots + 2) + 2 \cdot 2^{3k+1}$
$6 \cdot 2^{3k+2} \cdot 6 \cdot 2^{3k+2} = 7 \cdot 2^{3k+2}(5 \cdot 2^{3k+2} + 2^{3k-1} + 2^{3k-4} + \cdots + 4) + 4 \cdot 2^{3k+2}$

Elemen idempoten berada pada $2 \cdot 2^{3k+2}$ karena $2 \cdot 2^{3k+2} \cdot 2 \cdot 2^{3k+2} = 2 \cdot 2^{3k+2} \bmod 7 \cdot 2^{3k+2}$. Selanjutnya akan ditunjukkan apakah $2 \cdot 2^{3k+2}$ adalah unity pada subring $\langle 2^{3k+2} \rangle$. Cara menunjukkannya adalah mengalikan elemen tak nol dengan $2 \cdot 2^{3k+2}$ menghasilkan elemen tersebut mod $7 \cdot 2^{3k+2}$.
$2^{3k+2} \cdot 2 \cdot 2^{3k+2} = 7 \cdot 2^{3k+2}(2^{3k} + 2^{3k-3} + 2^{3k-6} + \cdots + 1) + 2^{3k+2}$
$3 \cdot 2^{3k+2} \cdot 2 \cdot 2^{3k+2} = 7 \cdot 2^{3k+2}(2^{3k+1} + 2^{3k} + 2^{3k-2} + 2^{3k-3} + \cdots + 1) + 3 \cdot 2^{3k+2}$
$4 \cdot 2^{3k+2} \cdot 2 \cdot 2^{3k+2} = 7 \cdot 2^{3k+2}(2^{3k+2} + 2^{3k-1} + 2^{3k-4} + \cdots + 4) + 4 \cdot 2^{3k+2}$
$5 \cdot 2^{3k+2} \cdot 2 \cdot 2^{3k+2} = 7 \cdot 2^{3k+2}(2^{3k+2} + 2^{3k} + 2^{3k-1} + 2^{3k-3} + \cdots + 1) + 5 \cdot 2^{3k+2}$
$6 \cdot 2^{3k+2} \cdot 2 \cdot 2^{3k+2} = 7 \cdot 2^{3k+2}(2^{3k+2} + 2^{3k+1} + 2^{3k-1} + 2^{3k-2} + \cdots + 2) + 6 \cdot 2^{3k+2}$

Karena elemen tak nol subring $\langle 2^{3k+2} \rangle$ dikalikan dengan $2 \cdot 2^{3k+2}$ menghasilkan elemen tersebut mod $7 \cdot 2^{3k+2}$. Jadi, terbukti bahwa $2 \cdot 2^{3k+2}$ adalah unity dari subring $\langle 2^{3k+1} \rangle$. Contoh untuk $k = 0, l = 3 \cdot 0 + 2 = 2$. Ring $(\mathbb{Z}_{7 \cdot 2^1}, +, \times) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots, 26, 27\}$ dan subring $\langle 2^2 \rangle = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24\}$. Unity dari subring $\langle 2^2 \rangle$ adalah 8 karena $8 \cdot 8 = 64 = 8 \bmod 7 \cdot 2^2$, $4 \cdot 8 = 32 = 4 \bmod 7 \cdot 2^1$, $12 \cdot 8 = 96 = 12 \bmod 7 \cdot 2^2$, $16 \cdot 8 = 128 = 16 \bmod 7 \cdot 2^2$, $20 \cdot 8 = 160 = 20 \bmod 7 \cdot 2^2$, dan $24 \cdot 8 = 192 = 24 \bmod 7 \cdot 2^2$.

Untuk $l = 3k + 3$, subring $\langle 2^{3k+3} \rangle = \{0, 2^{3k+3}, 2 \cdot 2^{3k+3}, 3 \cdot 2^{3k+3}, 4 \cdot 2^{3k+3}, 5 \cdot 2^{3k+3}, 6 \cdot 2^{3k+3}\}$ akan dicari elemen idempoten. Langkah-langkah pencarian idempoten melalui manipulasi aljabar seperti pencarian pada $l = 3k + 1$.
$2^{3k+3} \cdot 2^{3k+3} = 7 \cdot 2^{3k+3}(2^{3k} + 2^{3k-3} + 2^{3k-6} + \cdots + 1) + 2^{3k+3}$
$2 \cdot 2^{3k+3} \cdot 2 \cdot 2^{3k+3} = 7 \cdot 2^{3k+3}(2^{3k+2} + 2^{3k-1} + 2^{3k-4} + \cdots + 2^2) + 4 \cdot 2^{3k+1}$
$3 \cdot 2^{3k+3} \cdot 3 \cdot 2^{3k+3} = 7 \cdot 2^{3k+3}(2^{3k+3} + 2^{3k-1} + 2^{3k-4} + \cdots + 4) + 4 \cdot 2^{3k+1}$
$4 \cdot 2^{3k+3} \cdot 4 \cdot 2^{3k+3} = 7 \cdot 2^{3k+3}(2^{3k+4} + 2^{3k+1} + 2^{3k-2} + \cdots + 2) + 2 \cdot 2^{3k+3}$

$5 \cdot 2^{3k+3} \cdot 5 \cdot 2^{3k+3} = 7 \cdot 2^{3k+3}(3 \cdot 2^{3k+3} + 2^{3k+2} + 2^{3k-1} + \cdots + 4) + 4 \cdot 2^{3k+1}$

$6 \cdot 2^{3k+3} \cdot 6 \cdot 2^{3k+3} = 7 \cdot 2^{3k+3}(5 \cdot 2^{3k+3} + 2^{3k} + 2^{3k-3} + \cdots + 1) + 2^{3k+3}$

Elemen idempoten berada pada 2^{3k+3} karena $2^{3k+3} \cdot 2^{3k+3} = 2^{3k+3}$ mod $7 \cdot 2^{3k+3}$. Selanjutnya akan ditunjukkan apakah 2^{3k+3} adalah unity pada subring $\langle 2^{3k+3} \rangle$. Cara menunjukkannya adalah mengalikan elemen tak nol dengan 2^{3k+3} menghasilkan elemen tersebut mod $7 \cdot 2^{3k+3}$.

$2 \cdot 2^{3k+3} \cdot 2^{3k+3} = 7 \cdot 2^{3k+3}(2^{3k+1} + 2^{3k-2} + 2^{3k-5} + \cdots + 2) + 2 \cdot 2^{3k+3}$

$3 \cdot 2^{3k+3} \cdot 2^{3k+3} = 7 \cdot 2^{3k+3}(2^{3k+1} + 2^{3k} + 2^{3k-2} + 2^{3k-3} + \cdots + 1) + 3 \cdot 2^{3k+3}$

$4 \cdot 2^{3k+3} \cdot 2^{3k+3} = 7 \cdot 2^{3k+3}(2^{3k+2} + 2^{3k-1} + 2^{3k-4} + \cdots + 4) + 4 \cdot 2^{3k+3}$

$5 \cdot 2^{3k+3} \cdot 2^{3k+3} = 7 \cdot 2^{3k+3}(2^{3k+2} + 2^{3k} + 2^{3k-1} + 2^{3k-3} + \cdots + 1) + 5 \cdot 2^{3k+3}$

$6 \cdot 2^{3k+3} \cdot 2^{3k+3} = 7 \cdot 2^{3k+3}(2^{3k+2} + 2^{3k+1} + 2^{3k-1} + 2^{3k-2} + \cdots + 2) + 6 \cdot 2^{3k+3}$

Karena elemen tak nol subring $\langle 2^{3k+3} \rangle$ dikalikan dengan 2^{3k+3} menghasilkan elemen tersebut mod $7 \cdot 2^{3k+3}$. Jadi, terbukti bahwa 2^{3k+3} adalah unity dari subring $\langle 2^{3k+3} \rangle$. Contoh untuk $k = 0, l = 0 \cdot +3 = 3$. Ring $(\mathbb{Z}_{7 \cdot 2^3}, +, \times)$ = $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots, 54, 55\}$ dan subring $\langle 2^3 \rangle = \{0, 8, 16, 24, 32, 40, 48\}$. Unity dari subring $\langle 2^3 \rangle$ adalah 8 karena $8 \cdot 8 = 64 = 8$ mod $7 \cdot 2^3$, $16 \cdot 8 = 128 = 16$ mod $7 \cdot 2^3$, $24 \cdot 8 = 192 = 24$ mod $7 \cdot 2^3$, $32 \cdot 8 = 256 = 32$ mod $7 \cdot 2^3$, $40 \cdot 8 = 320 = 40$ mod $7 \cdot 2^3$, dan $48 \cdot 8 = 384 = 48$ mod $7 \cdot 2^3$.

4.5 Subring $\langle 2^l \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{9 \cdot 2^l}, +, \times)$

Ring $(\mathbb{Z}_{9 \cdot 2^l}, +, \times)$ beranggotakan $\{0, 1, 2, \cdots, 9 \cdot 2^l - 1\}$. Subring $\langle 2^l \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{9 \cdot 2^l}, +, \times)$ adalah $\{0, 2^l, 2 \cdot 2^l, 3 \cdot 2^l, 4 \cdot 2^l, 5 \cdot 2^l, 6 \cdot 2^l, 7 \cdot 2^l, 8 \cdot 2^l\}$. Untuk menentukan unity subring $\langle 2^l \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{7 \cdot 2^l}, +, \times)$ dibagi menjadi enam, $l = 6k + 1, l = 6k + 2, l = 6k + 3, l = 6k + 4, l = 6k + 5$, dan $l6k + 6$ dengan k adalah bilangan bulat *non* negatif.

Untuk $l = 6k + 1$, subring $\langle 2^{6k+1} \rangle = \{0, 2^{6k+1}, 2 \cdot 2^{6k+1}, 3 \cdot 2^{6k+1}, 4 \cdot 2^{6k+1}, 5 \cdot 2^{6k+1}, 6 \cdot 2^{6k+1}, 7 \cdot 2^{6k+1}, 8 \cdot 2^{6k+1}\}$ akan dicari elemen idempoten. Langkah selanjutnya akan ditunjukkan apakah 2^{6k+1} adalah elemen idempoten subring $\langle 2^{6k+1} \rangle$ pada ring

$(\mathbb{Z}_{9.2^{6k+1}}, +, \times)$ dengan cara $2^{6k+1} \cdot 2^{6k+1} = 2^{6k+1} \bmod 9 \cdot 2^{6k+1}$.

Bukti :

$$\begin{aligned}
2^{12k+2} &= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-3} + 7 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-3} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-3} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-4} + 5 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-4} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-3} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-4} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-5} + 2^{6k+6} \cdot 2^{6k-5} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-3} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-4} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-5} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-9} + 7 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-9} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-3} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-4} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-5} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-9} + \\
&\quad 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-10} + 5 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-10} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-3} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-4} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-5} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-9} + \\
&\quad 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-10} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-11} + 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-11} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-3} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-4} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-5} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-9} + \\
&\quad 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-10} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-11} + \cdots + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{1} + 2^{6k+1} \cdot 2^{1} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1}(2^{6k-3} + 2^{6k-4} + 2^{6k-5} + 2^{6k-9} + 2^{6k-10} + 2^{6k-11} + \cdots + 1) + 2 \cdot 2^{6k+1}
\end{aligned}$$

Karena $2^{6k+1} \cdot 2^{6k+1} \neq 2^{6k+1} \bmod 9 \cdot 2^{6k+1}$, berarti 2^{6k+1} bukan elemen idempoten subring $\langle 2^{6k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{9.2^{6k+1}}, +, \times)$.

Selanjutnya akan ditunjukkan apakah $2 \cdot 2^{6k+1}$ adalah elemen idempoten subring $\langle 2^{6k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{9.2^{6k+1}}, +, \times)$ dengan cara $2 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2 \cdot 2^{6k+1} = 2 \cdot 2^{6k+1} \bmod 9 \cdot 2^{6k+1}$.

Bukti :

$$\begin{aligned}
4 \cdot 2^{12k+2} &= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-1} + 7 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-1} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-2} + 5 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-2} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-2} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-3} + 2^{6k+5} \cdot 2^{6k-3} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-2} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-3} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-7} + \\
&\quad 7 \cdot 2^{6k+5} \cdot 2^{6k-7} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-2} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-3} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-7} + \\
&\quad 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-8} + 5 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-8} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-2} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-3} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-7} + \\
&\quad 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-8} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-9} + 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-9}
\end{aligned}$$

$$= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-2} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-3} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-7} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-8} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-9} + \cdots + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{3} + 2^{6k+1} \cdot 2^{3}$$

$$= 9 \cdot 2^{6k+1}(2^{6k-1} + 2^{6k-2} + 2^{6k-3} + 2^{6k-7} + 2^{6k-8} + 2^{6k-9} + \cdots + 8) + 8 \cdot 2^{6k+1}$$

Karena $2 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2 \cdot 2^{6k+1} \neq 2 \cdot 2^{6k+1} \mod 9 \cdot 2^{6k+1}$, berarti $2 \cdot 2^{6k+1}$ bukan elemen idempoten subring $\langle 2^{6k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{9.2^{6k+1}}, +, \times)$.

Selanjutnya akan ditunjukkan apakah $3 \cdot 2^{6k+1}$ adalah elemen idempoten subring $\langle 2^{6k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{9.2^{6k+1}}, +, \times)$ dengan cara $3 \cdot 2^{6k+1} \cdot 3 \cdot 2^{6k+1} = 3 \cdot 2^{6k+1} \mod 9 \cdot 2^{6k+1}$.

Bukti :

$9 \cdot 2^{12k+2} = 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+1} + 0$

Karena $3 \cdot 2^{6k+1} \cdot 3 \cdot 2^{6k+1}$ adalah kelipatan $9 \cdot 2^{6k+1}$ mengakibatkan $3 \cdot 2^{6k+1} \cdot 3 \cdot 2^{6k+1} = 0 \mod 9 \cdot 2^{6k+1}$ maka, $3 \cdot 2^{6k+1}$ bukan elemen idempoten subring $\langle 2^{6k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{9.2^{6k+1}}, +, \times)$.

Selanjutnya akan ditunjukkan apakah $3 \cdot 2^{6k+1}$ adalah elemen idempoten subring $\langle 2^{6k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{9.2^{6k+1}}, +, \times)$ dengan cara $4 \cdot 2^{6k+1} \cdot 4 \cdot 2^{6k+1} = 4 \cdot 2^{6k+1} \mod 9 \cdot 2^{6k+1}$.

Bukti :

$$\begin{aligned}
16 \cdot 2^{12k+2} &= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+1} + 7 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+1} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k} + 5 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-1} + 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-1} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-5} + \\
&\quad 7 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-5} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-5} + \\
&\quad 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-6} + 5 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-6} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-5} + \\
&\quad 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-6} + \cdots + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{0} + 5 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{0} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1}(2^{6k+1} + 2^{6k} + 2^{6k-1} + 2^{6k-5} + 2^{6k-6} + \cdots + 1) + 5 \cdot 2^{6k+1}
\end{aligned}$$

Karena $4 \cdot 2^{6k+1} \cdot 4 \cdot 2^{6k+1} \neq 4 \cdot 2^{6k+1} \mod 9 \cdot 2^{6k+1}$, berarti $4 \cdot 2^{6k+1}$ bukanlah elemen idempoten subring $\langle 2^{6k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{9.2^{6k+1}}, +, \times)$.

Selanjutnya akan ditunjukkan apakah $5 \cdot 2^{6k+1}$ adalah elemen idempoten subring $\langle 2^{6k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{9.2^{6k+1}}, +, \times)$ dengan cara $5 \cdot 2^{6k+1} \cdot 5 \cdot 2^{6k+1} = 5 \cdot 2^{6k+1}$ mod $9 \cdot 2^{6k+1}$.

Bukti :

$$\begin{aligned}
25 \cdot 2^{12k+2} &= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+2} + 7 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+1} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+2} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k} + 5 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+2} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-1} + 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-1} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+2} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-5} + \\
&\quad 7 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-5} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+2} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-5} + \\
&\quad 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-6} + 5 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-6} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+2} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-5} + \\
&\quad 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-6} + \cdots + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{0} + 5 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{0} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1}(2^{6k+2} + 2^{6k} + 2^{6k-1} + 2^{6k-5} + 2^{6k-6} + \cdots + 1) + 5 \cdot 2^{6k+1}
\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $5 \cdot 2^{6k+1} \cdot 5 \cdot 2^{6k+1} = 5 \cdot 2^{6k+1}$ mod $9 \cdot 2^{6k+1}$ ini berarti $5 \cdot 2^{6k+1}$ adalah elemen idempoten subring $\langle 2^{6k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{9.2^{6k+1}}, +, \times)$.

Selanjutnya akan ditunjukkan apakah $6 \cdot 2^{6k+1}$ adalah elemen idempoten subring $\langle 2^{6k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{9.2^{6k+1}}, +, \times)$ dengan cara $6 \cdot 2^{6k+1} \cdot 6 \cdot 2^{6k+1} = 6 \cdot 2^{6k+1}$ mod $9 \cdot 2^{6k+1}$.

Bukti :

$$36 \cdot 2^{12k+2} = 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+3} + 0$$

Karena $6 \cdot 2^{6k+1} \cdot 6 \cdot 2^{6k+1}$ adalah kelipatan $9 \cdot 2^{6k+1}$ mengakibatkan $6 \cdot 2^{6k+1} \cdot 6 \cdot 2^{6k+1} = 0$ mod $9 \cdot 2^{6k+1}$ maka, $6 \cdot 2^{6k+1}$ bukanlah elemen idempoten subring $\langle 2^{6k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{9.2^{6k+1}}, +, \times)$.

Selanjutnya akan ditunjukkan apakah $7 \cdot 2^{6k+1}$ adalah elemen idempoten subring $\langle 2^{6k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{9.2^{6k+1}}, +, \times)$ dengan cara $7 \cdot 2^{6k+1} \cdot 7 \cdot 2^{6k+1} = 7 \cdot 2^{6k+1}$ mod $9 \cdot 2^{6k+1}$.

Bukti :

$$\begin{aligned}
49 \cdot 2^{12k+2} &= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 5 \cdot 2^{6k+1} + 4 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+1} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 5 \cdot 2^{6k+1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-1} + 7 \cdot 2^{6k+2} \cdot 2^{6k-1}
\end{aligned}$$

$$= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 5 \cdot 2^{6k+1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-2} + 5 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-2}$$
$$= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 5 \cdot 2^{6k+1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-2} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-3} + 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-3}$$
$$= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 5 \cdot 2^{6k+1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-2} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-3} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-7} + 7 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-7}$$
$$= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 5 \cdot 2^{6k+1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-2} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-3} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-7} + \cdots + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^3 + 2^{6k+2} \cdot 2^3$$
$$= 9 \cdot 2^{6k+1}(5 \cdot 2^{6k+1} + 2^{6k-1} + 2^{6k-2} + 2^{6k-3} + 2^{6k-7} + \cdots + 8) + 8 \cdot 2^{6k+1}$$

Karena $7 \cdot 2^{6k+1} \cdot 7 \cdot 2^{6k+1} \neq 7 \cdot 2^{6k+1} \bmod 9 \cdot 2^{6k+1}$, berarti $7 \cdot 2^{6k+1}$ bukanlah elemen idempoten subring $\langle 2^{6k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{9 \cdot 2^{6k+1}}, +, \times)$.

Selanjutnya akan ditunjukkan apakah $8 \cdot 2^{6k+1}$ adalah elemen idempoten subring $\langle 2^{6k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{9 \cdot 2^{6k+1}}, +, \times)$ dengan cara $8 \cdot 2^{6k+1} \cdot 8 \cdot 2^{6k+1} = 8 \cdot 2^{6k+1} \bmod 9 \cdot 2^{6k+1}$.

Bukti :

$$64 \cdot 2^{12k+2} = 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 7 \cdot 2^{6k+1} + 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+1}$$
$$= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 7 \cdot 2^{6k+1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-3} + 7 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-3}$$
$$= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 7 \cdot 2^{6k+1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-3} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-4} + 5 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-4}$$
$$= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 7 \cdot 2^{6k+1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-3} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-4} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-5} + 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-5}$$
$$= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 7 \cdot 2^{6k+1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-3} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-4} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-5} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-9} + 7 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-9}$$
$$= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 7 \cdot 2^{6k+1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-3} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-4} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-5} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-9} + \cdots + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^1 + 2^{6k+1} \cdot 2^1$$
$$= 9 \cdot 2^{6k+1}(7 \cdot 2^{6k+1} + 2^{6k-3} + 2^{6k-4} + 2^{6k-5} + 2^{6k-9} + \cdots + 2) + 2 \cdot 2^{6k+1}$$

Karena $8 \cdot 2^{6k+1} \cdot 8 \cdot 2^{6k+1} \neq 8 \cdot 2^{6k+1} \bmod 9 \cdot 2^{6k+1}$, berarti $8 \cdot 2^{6k+1}$ bukanlah elemen idempoten subring $\langle 2^{6k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{9 \cdot 2^{6k+1}}, +, \times)$.

Elemen idempoten subring $\langle 2^{6k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{9 \cdot 2^{6k+1}}, +, \times)$ berada di $5 \cdot 2^{6k+1}$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $5 \cdot 2^{6k+1}$ adalah unity subring $\langle 2^{6k+1} \rangle$ pada ring

$(\mathbb{Z}_{9.2^{6k+1}}, +, \times)$. Akan ditunjukkan $2^{6k+1} \cdot 5 \cdot 2^{6k+1} = 2 \cdot 2^{6k+1} \bmod 9 \cdot 2^{6k+1}$.

Bukti :

$$\begin{aligned}
5 \cdot 2^{12k+2} &= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k} + 2^{6k+1} \cdot 2^{6k} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-4} + 7 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-4} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-4} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-5} + 5 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-5} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-4} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-5} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-6} + 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-6} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-4} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-5} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-6} + \\
&\quad 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-10} + 7 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-10} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-4} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-5} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-6} + \\
&\quad 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-10} + \cdots + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{0} + 2^{6k+1} \cdot 2^{0} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1}(2^{6k} + 2^{6k-4} + 2^{6k-5} + 2^{6k-6} + 2^{6k-10} + \cdots + 1) + 2^{6k+1}
\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $2^{6k+1} \cdot 5 \cdot 2^{6k+1} = 2^{6k+1} \bmod 9 \cdot 2^{6k+1}$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $2 \cdot 2^{6k+1} \cdot 5 \cdot 2^{6k+1} = 2 \cdot 2^{6k+1} \bmod 9 \cdot 2^{6k+1}$

Bukti :

$$\begin{aligned}
10 \cdot 2^{12k+2} &= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+1} + 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+1} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-3} + 7 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-3} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-3} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-4} + 5 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-4} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-3} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-4} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-5} + \\
&\quad 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-5} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-3} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-4} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-5} + \\
&\quad 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-9} + 7 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-9} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-3} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-4} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-5} + \\
&\quad 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-9} + \cdots + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{1} + 2^{6k+1} \cdot 2^{1} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1}(2^{6k+1} + 2^{6k-3} + 2^{6k-4} + 2^{6k-5} + 2^{6k-9} + \cdots + 2) + 2 \cdot 2^{6k+1}
\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $2 \cdot 2^{6k+1} \cdot 5 \cdot 2^{6k+1} = 2 \cdot 2^{6k+1} \bmod 9 \cdot 2^{6k+1}$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $3 \cdot 2^{6k+1} \cdot 5 \cdot 2^{6k+1} = 3 \cdot 2^{6k+1} \bmod 9 \cdot 2^{6k+1}$

Bukti :

$$
\begin{aligned}
15 \cdot 2^{12k+2} &= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+1} + 6 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+1} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k} + 3 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-2} + 3 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-2} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-2} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-4} + \\
&\quad 3 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-4} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-2} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-4} + \\
&\quad 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-6} + 3 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-6} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-2} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-4} + \\
&\quad 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-6} + \cdots + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{0} + 3 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{0} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1}(2^{6k+1} + 2^{6k} + 2^{6k-2} + 2^{6k-4} + 2^{6k-6} + \cdots + 1) + 3 \cdot 2^{6k+1}
\end{aligned}
$$

Jadi, terbukti bahwa $3 \cdot 2^{6k+1} \cdot 5 \cdot 2^{6k+1} = 3 \cdot 2^{6k+1} \bmod 9 \cdot 2^{6k+1}$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $4 \cdot 2^{6k+1} \cdot 5 \cdot 2^{6k+1} = 4 \cdot 2^{6k+1} \bmod 9 \cdot 2^{6k+1}$

Bukti :

$$
\begin{aligned}
20 \cdot 2^{12k+2} &= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+2} + 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+2} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+2} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-2} + 7 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-2} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+2} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-2} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-3} + 5 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-3} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+2} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-2} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-3} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-4} + \\
&\quad 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-4} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+2} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-2} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-3} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-4} + \\
&\quad 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-8} + 7 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-8} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+2} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-2} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-3} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-4} + \\
&\quad 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-8} + \cdots + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{2} + 2^{6k+1} \cdot 2^{2} \\
&= 9 \cdot 2^{6k+1}(2^{6k+2} + 2^{6k-2} + 2^{6k-3} + 2^{6k-4} + 2^{6k-8} + \cdots + 4) + 4 \cdot 2^{6k+1}
\end{aligned}
$$

Jadi, terbukti bahwa $4 \cdot 2^{6k+1} \cdot 5 \cdot 2^{6k+1} = 4 \cdot 2^{6k+1} \bmod 9 \cdot 2^{6k+1}$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $6 \cdot 2^{6k+1} \cdot 5 \cdot 2^{6k+1} = 6 \cdot 2^{6k+1} \bmod 9 \cdot 2^{6k+1}$

Bukti :

$$30 \cdot 2^{12k+2} = 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 3 \cdot 2^{6k+1} + 3 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+1}$$

$$= 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 3\cdot 2^{6k+1} + 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 2^{6k-1} + 3\cdot 2^{6k+1}\cdot 2^{6k-1}$$
$$= 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 3\cdot 2^{6k+1} + 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 2^{6k-1} + 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 2^{6k-3} + 3\cdot 2^{6k+1}\cdot 2^{6k-3}$$
$$= 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 3\cdot 2^{6k+1} + 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 2^{6k-1} + 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 2^{6k-3} + 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 2^{6k-5} + 3\cdot 2^{6k+1}\cdot 2^{6k-5}$$
$$= 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 3\cdot 2^{6k+1} + 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 2^{6k-1} + 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 2^{6k-3} + 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 2^{6k-5} + 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 2^{6k-7} + 3\cdot 2^{6k+1}\cdot 2^{6k-7}$$
$$= 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 3\cdot 2^{6k+1} + 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 2^{6k-1} + 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 2^{6k-3} + 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 2^{6k-5} + 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 2^{6k-7} + \cdots + 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 2^{1} + 3\cdot 2^{6k+1}\cdot 2^{1}$$
$$= 9\cdot 2^{6k+1}(3\cdot 2^{6k+1} + 2^{6k-1} + 2^{6k-3} + 2^{6k-5} + 2^{6k-7} + \cdots + 2) + 6\cdot 2^{6k+1}$$

Jadi, terbukti bahwa $6\cdot 2^{6k+1}\cdot 5\cdot 2^{6k+1} = 6\cdot 2^{6k+1} \bmod 9\cdot 2^{6k+1}$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $7\cdot 2^{6k+1}\cdot 5\cdot 2^{6k+1} = 7\cdot 2^{6k+1} \bmod 9\cdot 2^{6k+1}$

Bukti :

$$35\cdot 2^{12k+2} = 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 3\cdot 2^{6k+1} + 8\cdot 2^{6k+1}\cdot 2^{6k+1}$$
$$= 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 3\cdot 2^{6k+1} + 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 2^{6k} + 7\cdot 2^{6k+1}\cdot 2^{6k}$$
$$= 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 3\cdot 2^{6k+1} + 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 2^{6k} + 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 2^{6k-1} + 5\cdot 2^{6k+1}\cdot 2^{6k-1}$$
$$= 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 3\cdot 2^{6k+1} + 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 2^{6k} + 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 2^{6k-1} + 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 2^{6k-2} + 2^{6k+1}\cdot 2^{6k-2}$$
$$= 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 3\cdot 2^{6k+1} + 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 2^{6k} + 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 2^{6k-1} + 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 2^{6k-2} + 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 2^{6k-6} + 7\cdot 2^{6k+1}\cdot 2^{6k-6}$$
$$= 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 3\cdot 2^{6k+1} + 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 2^{6k} + 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 2^{6k-1} + 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 2^{6k-2} + 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 2^{6k-6} + \cdots + 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 2^{0} + 7\cdot 2^{6k+2}\cdot 2^{0}$$
$$= 9\cdot 2^{6k+1}(3\cdot 2^{6k+1} + 2^{6k} + 2^{6k-1} + 2^{6k-2} + 2^{6k-6} + \cdots + 1) + 7\cdot 2^{6k+1}$$

Jadi, terbukti bahwa $7\cdot 2^{6k+1}\cdot 5\cdot 2^{6k+1} = 7\cdot 2^{6k+1} \bmod 9\cdot 2^{6k+1}$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $8\cdot 2^{6k+1}\cdot 5\cdot 2^{6k+1} = 8\cdot 2^{6k+1} \bmod 9\cdot 2^{6k+1}$

Bukti :

$$40\cdot 2^{12k+2} = 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 2^{6k+3} + 2^{6k+1}\cdot 2^{6k+3}$$
$$= 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 2^{6k+3} + 9\cdot 2^{6k+1}\cdot 2^{6k-1} + 7\cdot 2^{6k+1}\cdot 2^{6k-1}$$

$$= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+3} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-2} + 5 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-2}$$
$$= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+3} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-2} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-3} + 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-3}$$
$$= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+3} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-2} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-3} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-7} + 7 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-7}$$
$$= 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k+3} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-1} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-2} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-3} + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{6k-7} + \cdots + 9 \cdot 2^{6k+1} \cdot 2^{3} + 2^{6k+1} \cdot 2^{3}$$
$$= 9 \cdot 2^{6k+1}(2^{6k+3} + 2^{6k-1} + 2^{6k-2} + 2^{6k-3} + 2^{6k-7} + \cdots + 8) + 8 \cdot 2^{6k+1}$$

Jadi, terbukti bahwa $8 \cdot 2^{6k+1} \cdot 5 \cdot 2^{6k+1} = 8 \cdot 2^{6k+1}$ mod $9 \cdot 2^{6k+1}$ berarti $5 \cdot 2^{6k+1}$ adalah unity dari subring $\langle 2^{6k+1} \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{9.2^{6k+1}}, +, \times)$. Contoh untuk $k = 0, l = 6 \cdot 0 + 1 = 1$. Ring $(\mathbb{Z}_{9.2^1}, +, \times) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots, 16, 17\}$ dan subring $\langle 2^1 \rangle = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$. Unity dari subring $\langle 2^1 \rangle$ adalah 10 karena $10 \cdot 10 = 100 = 10$ mod $9 \cdot 2^1$, $2 \cdot 10 = 20 = 2$ mod $9 \cdot 2^1$, $4 \cdot 10 = 40 = 4$ mod $9 \cdot 2^1$, $6 \cdot 10 = 60 = 6$ mod $9 \cdot 2^1$, $8 \cdot 10 = 80 = 8$ mod $9 \cdot 2^1$, $12 \cdot 10120 = 12$ mod $9 \cdot 2^1$, $14 \cdot 10 = 140 = 14$ mod $9 \cdot 2^1$, dan $16 \cdot 10 = 160 = 16$ mod $9 \cdot 2^1$.

Untuk $l = 6k + 2$, subring $\langle 2^{6k+2} \rangle = \{0, 2^{6k+2}, 2 \cdot 2^{6k+2}, 3 \cdot 2^{6k+2}, 4 \cdot 2^{6k+2}, 5 \cdot 2^{6k+2}, 6 \cdot 2^{6k+2}, 7 \cdot 2^{6k+2}, 8 \cdot 2^{6k+2}\}$ akan dicari elemen idempoten. Langkah-langkah pencarian idempoten melalui manipulasi aljabar seperti pencarian pada $l = 6k + 1$.

$2^{6k+2} \cdot 2^{6k+2} = 9 \cdot 2^{6k+2}(2^{6k-2} + 2^{6k-3} + 2^{6k-4} + 2^{6k-8} + 2^{6k-9} + 2^{6k-10} + \cdots + 2) + 4 \cdot 2^{6k+2}$

$2 \cdot 2^{6k+2} \cdot 2 \cdot 2^{6k+2} = 9 \cdot 2^{6k+2}(2^{6k} + 2^{6k-1} + 2^{6k-2} + 2^{6k-6} + 2^{6k-7} + 2^{6k-8} + \cdots + 1) + 7 \cdot 2^{6k+2}$

$3 \cdot 2^{6k+2} \cdot 3 \cdot 2^{6k+2} = 9 \cdot 2^{6k+2} \cdot 2^{6k+2} + 0$

$4 \cdot 2^{6k+2} \cdot 4 \cdot 2^{6k+2} = 9 \cdot 2^{6k+2}(2^{6k+2} + 2^{6k+1} + 2^{6k} + 2^{6k-4} + 2^{6k-5} + 2^{6k-6} + \cdots + 1) + 2^{6k+2}$

$5 \cdot 2^{6k+2} \cdot 5 \cdot 2^{6k+2} = 9 \cdot 2^{6k+2}(2^{6k+3} + 2^{6k+1} + 2^{6k} + 2^{6k-4} + 2^{6k-5} + 2^{6k-6} + \cdots + 1) + 2^{6k+2}$

$6 \cdot 2^{6k+2} \cdot 6 \cdot 2^{6k+2} = 9 \cdot 2^{6k+2} \cdot 2^{6k+4} + 0$

$7 \cdot 2^{6k+2} \cdot 7 \cdot 2^{6k+2} = 9 \cdot 2^{6k+2}(5 \cdot 2^{6k+2} + 2^{6k} + 2^{6k-1} + 2^{6k-2} + 2^{6k-6} + \cdots + 1) + 7 \cdot 2^{6k+2}$

$8 \cdot 2^{6k+2} \cdot 8 \cdot 2^{6k+2} = 9 \cdot 2^{6k+2}(7 \cdot 2^{6k+2} + 2^{6k-2} + 2^{6k-3} + 2^{6k-4} + 2^{6k-8} + \cdots + 4) + 4 \cdot 2^{6k+2}$

Elemen idempoten subring $\langle 2^{6k+2} \rangle$ berada pada $7 \cdot 2^{6k+2}$ karena $7 \cdot 2^{6k+2} \cdot 7 \cdot 2^{6k+2} =$

$7 \cdot 2^{6k+2} \bmod 9 \cdot 2^{6k+2}$. Selanjutnya akan ditunjukkan apakah $7 \cdot 2^{6k+2}$ adalah unity subring $\left\langle 2^{6k+2} \right\rangle$. Cara menunjukkannya adalah mengalikan elemen tak nol dengan $7 \cdot 2^{6k+2}$ menghasilkan elemen tersebut mod $7 \cdot 2^{6k+2}$.

$2^{6k+2} \cdot 7 \cdot 2^{6k+2} = 9 \cdot 2^{6k+2}(2^{6k+1} + 2^{6k} + 2^{6k-4} + 2^{6k-5} + 2^{6k-6} + \cdots + 1) + 2^{6k+2}$

$2 \cdot 2^{6k+2} \cdot 7 \cdot 2^{6k+2} = 9 \cdot 2^{6k+2}(2^{6k+2} + 2^{6k+1} + 2^{6k-3} + 2^{6k-4} + 2^{6k-5} + \cdots + 2) + 2 \cdot 2^{6k+2}$

$3 \cdot 2^{6k+2} \cdot 7 \cdot 2^{6k+2} = 9 \cdot 2^{6k+2}(2^{6k+3} + 2^{6k} + 2^{6k-2} + 2^{6k-4} + 2^{6k-6} + \cdots + 1) + 3 \cdot 2^{6k+2}$

$4 \cdot 2^{6k+2} \cdot 7 \cdot 2^{6k+2} = 9 \cdot 2^{6k+2}(3 \cdot 2^{6k+2} + 2^{6k-2} + 2^{6k-3} + 2^{6k-4} + 2^{6k-8} + \cdots + 4) + 4 \cdot 2^{6k+2}$

$5 \cdot 2^{6k+2} \cdot 7 \cdot 2^{6k+2} = 9 \cdot 2^{6k+2}(3 \cdot 2^{6k+2} + 2^{6k+1} + 2^{6k} + 2^{6k-1} + 2^{6k-5} + 2^{6k-6} + \cdots + 1) + 5 \cdot 2^{6k+2}$

$6 \cdot 2^{6k+2} \cdot 7 \cdot 2^{6k+2} = 9 \cdot 2^{6k+2}(4 \cdot 2^{6k+2} + 2^{6k+1} + 2^{6k-1} + 2^{6k-3} + 2^{6k-5} + \cdots + 2) + 6 \cdot 2^{6k+2}$

$8 \cdot 2^{6k+2} \cdot 7 \cdot 2^{6k+2} = 9 \cdot 2^{6k+2}(3 \cdot 2^{6k+3} + 2^{6k-1} + 2^{6k-2} + 2^{6k-3} + 2^{6k-7} + \cdots + 8) + 8 \cdot 2^{6k+2}$

Karena elemen tak nol subring $\left\langle 2^{6k+2} \right\rangle$ dikalikan dengan $7 \cdot 2^{6k+2}$ menghasilkan elemen tersebut mod $9 \cdot 2^{6k+2}$. Jadi, terbukti bahwa $7 \cdot 2^{6k+2}$ adalah unity dari subring $\left\langle 2^{6k+2} \right\rangle$. Contoh untuk $k = 0, l = 6 \cdot 0 + 2 = 2$. Ring $(\mathbb{Z}_{9 \cdot 2^2}, +, \times) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots, 34, 35\}$ dan subring $\langle 2^2 \rangle = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32\}$. Unity dari subring $\langle 2^2 \rangle$ adalah 28 karena $28 \cdot 28 = 784 = 28 \bmod 9 \cdot 2^2$, $4 \cdot 28 = 112 = 4 \bmod 9 \cdot 2^2$, $8 \cdot 28 = 224 = 8 \bmod 9 \cdot 2^2$, $12 \cdot 28 = 336 = 12 \bmod 9 \cdot 2^2$, $16 \cdot 28 = 448 = 16 \bmod 9 \cdot 2^2$, $20 \cdot 28 = 560 = 20 \bmod 9 \cdot 2^2$, $24 \cdot 28 = 672 = 24 \bmod 9 \cdot 2^2$, dan $32 \cdot 28 = 896 = 32 \bmod 9 \cdot 2^2$.

Untuk $l = 6k + 3$, subring $\left\langle 2^{6k+3} \right\rangle = \{0, 2^{6k+3}, 2 \cdot 2^{6k+3}, 3 \cdot 2^{6k+3}, 4 \cdot 2^{6k+3}, 5 \cdot 2^{6k+3}, 6 \cdot 2^{6k+3}, 7 \cdot 2^{6k+3}, 8 \cdot 2^{6k+3}\}$ akan dicari elemen idempoten. Langkah-langkah pencarian idempoten melalui manipulasi aljabar seperti pencarian pada $l = 6k + 1$.

$2^{6k+3} \cdot 2^{6k+3} = 9 \cdot 2^{6k+3}(2^{6k-1} + 2^{6k-2} + 2^{6k-3} + 2^{6k-7} + 2^{6k-8} + 2^{6k-9} + \cdots + 8) + 8 \cdot 2^{6k+3}$

$2 \cdot 2^{6k+3} \cdot 2 \cdot 2^{6k+3} = 9 \cdot 2^{6k+3}(2^{6k+1} + 2^{6k} + 2^{6k-1} + 2^{6k-5} + 2^{6k-6} + 2^{6k-7} + \cdots + 1) + 5 \cdot 2^{6k+3}$

$3 \cdot 2^{6k+3} \cdot 3 \cdot 2^{6k+3} = 9 \cdot 2^{6k+3} \cdot 2^{6k+3} + 0$

$$4 \cdot 2^{6k+3} \cdot 4 \cdot 2^{6k+3} = 9 \cdot 2^{6k+3}(2^{6k+3} + 2^{6k+2} + 2^{6k+1} + 2^{6k-3} + 2^{6k-4} + 2^{6k-5} + \cdots + 2) + 2 \cdot 2^{6k+3}$$

$$5 \cdot 2^{6k+3} \cdot 5 \cdot 2^{6k+3} = 9 \cdot 2^{6k+3}(2^{6k+4} + 2^{6k+2} + 2^{6k+1} + 2^{6k-3} + 2^{6k-4} + 2^{6k-5} + \cdots + 2) + 2 \cdot 2^{6k+3}$$

$6 \cdot 2^{6k+3} \cdot 6 \cdot 2^{6k+3} = 9 \cdot 2^{6k+3} \cdot 2^{6k+5} + 0$

$7 \cdot 2^{6k+3} \cdot 7 \cdot 2^{6k+3} = 9 \cdot 2^{6k+3}(5 \cdot 2^{6k+3} + 2^{6k+1} + 2^{6k} + 2^{6k-1} + 2^{6k-5} + 2^{6k-6} + \cdots + 1) + 5 \cdot 2^{6k+3}$

$8 \cdot 2^{6k+3} \cdot 8 \cdot 2^{6k+3} = 9 \cdot 2^{6k+3}(7 \cdot 2^{6k+3} + 2^{6k-1} + 2^{6k-2} + 2^{6k-3} + 2^{6k-7} + \cdots + 8) + 8 \cdot 2^{6k+3}$

Elemen idempoten subring $\langle 2^{6k+3} \rangle$ berada pada $8 \cdot 2^{6k+3}$ karena $8 \cdot 2^{6k+3} \cdot 8 \cdot 2^{6k+3} = 8 \cdot 2^{6k+3}$ mod $9 \cdot 2^{6k+3}$. Selanjutnya akan ditunjukkan apakah $8 \cdot 2^{6k+3}$ adalah unity subring $\langle 2^{6k+3} \rangle$. Cara menunjukkannya adalah mengalikan elemen tak nol dengan $8 \cdot 2^{6k+3}$ menghasilkan elemen tersebut mod $9 \cdot 2^{6k+3}$

$2^{6k+3} \cdot 8 \cdot 2^{6k+3} = 9 \cdot 2^{6k+3}(2^{6k+2} + 2^{6k+1} + 2^{6k} + 2^{6k-4} + 2^{6k-5} + 2^{6k-6} + \cdots + 1) + 2^{6k+3}$

$2 \cdot 2^{6k+3} \cdot 8 \cdot 2^{6k+3} = 9 \cdot 2^{6k+3}(2^{6k+3} + 2^{6k+2} + 2^{6k+1} + 2^{6k-3} + 2^{6k-4} + 2^{6k-5} + \cdots + 2)$
$\quad + 2 \cdot 2^{6k+3}$

$3 \cdot 2^{6k+3} \cdot 8 \cdot 2^{6k+3} = 9 \cdot 2^{6k+3}(2^{6k+3} + 2^{6k+2} + 2^{6k} + 2^{6k-2} + 2^{6k-4} + 2^{6k-6} + \cdots + 1) + 3 \cdot 2^{6k+3}$

$4 \cdot 2^{6k+3} \cdot 8 \cdot 2^{6k+3} = 9 \cdot 2^{6k+3}(3 \cdot 2^{6k+3} + 2^{6k+3} + 2^{6k-2} + 2^{6k-3} + 2^{6k-4} + \cdots + 4) + 4 \cdot 2^{6k+3}$

$5 \cdot 2^{6k+3} \cdot 8 \cdot 2^{6k+3} = 9 \cdot 2^{6k+3}(2^{6k+5} + 2^{6k+1} + 2^{6k} + 2^{6k-1} + 2^{6k-5} + 2^{6k-6} + \cdots + 1) + 5 \cdot 2^{6k+3}$

$6 \cdot 2^{6k+3} \cdot 8 \cdot 2^{6k+3} = 9 \cdot 2^{6k+3}(5 \cdot 2^{6k+3} + 2^{6k+1} + 2^{6k-1} + 2^{6k-3} + 2^{6k-5} + \cdots + 2) + 6 \cdot 2^{6k+3}$

$7 \cdot 2^{6k+3} \cdot 8 \cdot 2^{6k+3} = 9 \cdot 2^{6k+3}(3 \cdot 2^{6k+4} + 2^{6k} + 2^{6k-1} + 2^{6k-2} + 2^{6k-6} + \cdots + 1) + 7 \cdot 2^{6k+3}$

Karena elemen tak nol subring $\langle 2^{6k+3} \rangle$ dikalikan dengan $8 \cdot 2^{6k+3}$ menghasilkan elemen tersebut mod $9 \cdot 2^{6k+3}$. Jadi, terbukti bahwa $8 \cdot 2^{6k+3}$ adalah unity dari subring $\langle 2^{6k+3} \rangle$. Contoh untuk $k = 0, l = 6 \cdot 0 + 3 = 3$, ring $(\mathbb{Z}_{9 \cdot 2^3}, +, \times) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots, 70, 71\}$ dan subring $\langle 2^3 \rangle = \{0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64\}$. Unity dari subring $\langle 2^3 \rangle$ adalah 64 karena $64 \cdot 64 = 4096 = 64$ mod $9 \cdot 2^3$, $8 \cdot 64 = 512 = 8$ mod $9 \cdot 2^3$, $16 \cdot 64 = 1024 = 16$ mod $9 \cdot 2^3$, $24 \cdot 64 = 1536 = 64$ mod $9 \cdot 2^3$, $32 \cdot 6 = 20484 = 32$ mod $9 \cdot 2^3$, $40 \cdot 64 = 2560 = 40$ mod $9 \cdot 2^3$, $48 \cdot 64 = 3072 = 48$ mod $9 \cdot 2^3$, dan $56 \cdot 64 = 3584 = 56$ mod $9 \cdot 2^3$.

Untuk $l = 6k + 4$, subring $\langle 2^{6k+4} \rangle = \{0, 2^{6k+4}, 2 \cdot 2^{6k+4}, 3 \cdot 2^{6k+4}, 4 \cdot 2^{6k+4}, 5 \cdot 2^{6k+4}, 6 \cdot 2^{6k+4}, 7 \cdot 2^{6k+4}, 8 \cdot 2^{6k+4}\}$ akan dicari elemen idempoten. Langkah-langkah pencarian idempoten melalui manipulasi aljabar seperti pencarian pada $l = 6k + 1$.

$2^{6k+4} \cdot 2^{6k+4} = 9 \cdot 2^{6k+4}(2^{6k} + 2^{6k-1} + 2^{6k-2} + 2^{6k-6} + 2^{6k-7} + 2^{6k-8} + \cdots + 1) + 7 \cdot 2^{6k+4}$

$2\cdot 2^{6k+4}\cdot 2\cdot 2^{6k+4} = 9\cdot 2^{6k+4}(2^{6k+2}+2^{6k+1}+2^{6k}+2^{6k-4}+2^{6k-5}+2^{6k-6}+\cdots+1)+2^{6k+4}$

$3\cdot 2^{6k+4}\cdot 3\cdot 2^{6k+4} = 9\cdot 2^{6k+4}\cdot 2^{6k+4}+0$

$4\cdot 2^{6k+4}\cdot 4\cdot 2^{6k+4} = 9\cdot 2^{6k+4}(2^{6k+4}+2^{6k+3}+2^{6k+2}+2^{6k-2}+2^{6k-3}+2^{6k-4}+\cdots+4)$
$+4\cdot 2^{6k+4}$

$5\cdot 2^{6k+4}\cdot 5\cdot 2^{6k+4} = 9\cdot 2^{6k+4}(2^{6k+5}+2^{6k+3}+2^{6k+2}+2^{6k-2}+2^{6k-3}+2^{6k-4}+\cdots+4)$
$+4\cdot 2^{6k+4}$

$6\cdot 2^{6k+4}\cdot 6\cdot 2^{6k+4} = 9\cdot 2^{6k+4}\cdot 2^{6k+6}+0$

$7\cdot 2^{6k+4}\cdot 7\cdot 2^{6k+4} = 9\cdot 2^{6k+4}(5\cdot 2^{6k+4}+2^{6k+2}+2^{6k+1}+2^{6k}+2^{6k-4}+2^{6k-5}+2^{6k-6}+\cdots+1)$
$+2^{6k+4}$

$8\cdot 2^{6k+4}\cdot 8\cdot 2^{6k+4} = 9\cdot 2^{6k+4}(7\cdot 2^{6k+4}+2^{6k}+2^{6k-1}+2^{6k-2}+2^{6k-6}+\cdots+1)+1\cdot 2^{6k+4}$

Elemen idempoten subring $\langle 2^{6k+4}\rangle$ berada pada $4\cdot 2^{6k+4}$ karena $4\cdot 2^{6k+4}\cdot 4\cdot 2^{6k+4} = 4\cdot 2^{6k+4} \bmod 9\cdot 2^{6k+4}$. Selanjutnya akan ditunjukkan apakah $4\cdot 2^{6k+4}$ adalah unity subring $\langle 2^{6k+4}\rangle$.

$2^{6k+4}\cdot 4\cdot 2^{6k+4} = 9\cdot 2^{6k+4}(2^{6k+2}+2^{6k+1}+2^{6k}+2^{6k-4}+2^{6k-5}+2^{6k-6}+\cdots+1)+2^{6k+4}$

$2\cdot 2^{6k+4}\cdot 4\cdot 2^{6k+4} = 9\cdot 2^{6k+4}(2^{6k+3}+2^{6k+2}+2^{6k+1}+2^{6k-3}+2^{6k-4}+2^{6k-5}+\cdots+2)$
$+2\cdot 2^{6k+4}$

$3\cdot 2^{6k+4}\cdot 4\cdot 2^{6k+4} = 9\cdot 2^{6k+4}(2^{6k+4}+2^{6k+2}+2^{6k}+2^{6k-2}+2^{6k-4}+2^{6k-6}+\cdots+1)+3\cdot 2^{6k+4}$

$5\cdot 2^{6k+4}\cdot 4\cdot 2^{6k+4} = 9\cdot 2^{6k+4}(2^{6k+5}+2^{6k+1}+2^{6k}+2^{6k-1}+2^{6k-5}+2^{6k-6}+\cdots+1)+5\cdot 2^{6k+4}$

$6\cdot 2^{6k+4}\cdot 4\cdot 2^{6k+4} = 9\cdot 2^{6k+4}(2^{6k+5}+2^{6k+3}+2^{6k+1}+2^{6k-1}+2^{6k-3}+\cdots+2)+6\cdot 2^{6k+4}$

$7\cdot 2^{6k+4}\cdot 4\cdot 2^{6k+4} = 9\cdot 2^{6k+4}(3\cdot 2^{6k+4}+2^{6k}+2^{6k-1}+2^{6k-2}+2^{6k-6}+\cdots+1)+7\cdot 2^{6k+4}$

$8\cdot 2^{6k+4}\cdot 4\cdot 2^{6k+4} = 9\cdot 2^{6k+4}(3\cdot 2^{6k+4}+2^{6k+3}+2^{6k-1}+2^{6k-2}+2^{6k-3}+\cdots+8)+8\cdot 2^{6k+4}$

Karena elemen tak nol subring $\langle 2^{6k+4}\rangle$ dikalikan dengan $4\cdot 2^{6k+4}$ menghasilkan elemen tersebut mod $9\cdot 2^{6k+4}$. Jadi, terbukti bahwa $4\cdot 2^{6k+4}$ adalah unity dari subring $\langle 2^{6k+4}\rangle$. Contoh untuk $k=0, l=6\cdot 0+4=4$. Ring $(\mathbb{Z}_{9\cdot 2^4},+,\times) = \{0,1,2,3,4,5,\cdots,142,143\}$ dan subring $\langle 2^4\rangle = \{0,16,32,48,64,80,96,112,128\}$. Unity dari subring $\langle 2^4\rangle$ adalah 64 karena $64\cdot 64 = 4096 = 64 \bmod 9\cdot 2^4$, $16\cdot 64 = 1024 = 16 \bmod 9\cdot 2^4$, $32\cdot 64 = 2048 = 32 \bmod 9\cdot 2^4$, $48\cdot 64 = 3072 = 48 \bmod 9\cdot 2^4$, $80\cdot 64 = 5120 = 80$

mod $9 \cdot 2^4$, $96 \cdot 64 = 6144 = 96$ mod $9 \cdot 2^4$, $112 \cdot 64 = 7164 = 112$ mod $9 \cdot 2^4$, dan $128 \cdot 64 = 8192 = 128$ mod $9 \cdot 2^4$.

Untuk $l = 6k+5$ subring $\langle 2^{6k+5} \rangle = \{0, 2^{6k+5}, 2 \cdot 2^{6k+5}, 3 \cdot 2^{6k+5}, 4 \cdot 2^{6k+5}, 5 \cdot 2^{6k+5}, 6 \cdot 2^{6k+5}, 7 \cdot 2^{6k+5}, 8 \cdot 2^{6k+5}\}$ akan dicari elemen idempoten. Langkah-langkah pencarian idempoten melalui manipulasi aljabar seperti pencarian pada $l = 6k+1$.

$2^{6k+5} \cdot 2^{6k+5} = 9 \cdot 2^{6k+5}(2^{6k+1} + 2^{6k} + 2^{6k-1} + 2^{6k-5} + 2^{6k-6} + \cdots + 1) + 7 \cdot 2^{6k+5}$

$2 \cdot 2^{6k+5} \cdot 2 \cdot 2^{6k+5} = 9 \cdot 2^{6k+5}(2^{6k+3} + 2^{6k+2} + 2^{6k+1} + 2^{6k-3} + 2^{6k-4} + 2^{6k-5} + \cdots + 2)$
$\quad +2 \cdot 2^{6k+5}$

$3 \cdot 2^{6k+5} \cdot 3 \cdot 2^{6k+5} = 9 \cdot 2^{6k+5} \cdot 2^{6k+5} + 0$

$4 \cdot 2^{6k+5} \cdot 4 \cdot 2^{6k+5} = 9 \cdot 2^{6k+5}(2^{6k+5} + 2^{6k+4} + 2^{6k+3} + 2^{6k-1} + 2^{6k-2} + 2^{6k-3} + \cdots + 8)$
$\quad +8 \cdot 2^{6k+5}$

$5 \cdot 2^{6k+5} \cdot 5 \cdot 2^{6k+5} = 9 \cdot 2^{6k+5}(2^{6k+6} + 2^{6k+4} + 2^{6k+3} + 2^{6k-1} + 2^{6k-2} + 2^{6k-3} + \cdots + 8)$
$\quad +8 \cdot 2^{6k+5}$

$6 \cdot 2^{6k+5} \cdot 6 \cdot 2^{6k+5} = 9 \cdot 2^{6k+5} \cdot 2^{6k+7} + 0$

$7 \cdot 2^{6k+5} \cdot 7 \cdot 2^{6k+5} = 9 \cdot 2^{6k+5}(5 \cdot 2^{6k+5} + 2^{6k+3} + 2^{6k+2} + 2^{6k+1} + 2^{6k-3} + 2^{6k-4} + 2^{6k-5} +$
$\quad \cdots + 2) + 2 \cdot 2^{6k+5}$

$8 \cdot 2^{6k+5} \cdot 8 \cdot 2^{6k+5} = 9 \cdot 2^{6k+5}(7 \cdot 2^{6k+5} + 2^{6k+1} + 2^{6k} + 2^{6k-1} + 2^{6k-5} + 2^{6k-6} + \cdots + 1) + 5 \cdot 2^{6k+5}$

Elemen idempoten subring $\langle 2^{6k+5} \rangle$ berada pada $2 \cdot 2^{6k+5}$ karena $2 \cdot 2^{6k+5} \cdot 2 \cdot 2^{6k+5} = 2 \cdot 2^{6k+5}$ mod $9 \cdot 2^{6k+5}$. Selanjutnya akan ditunjukkan apakah $2 \cdot 2^{6k+5}$ adalah unity subring $\langle 2^{6k+5} \rangle$.

$2^{6k+5} \cdot 2 \cdot 2^{6k+5} = 9 \cdot 2^{6k+5}(2^{6k+2} + 2^{6k+1} + 2^{6k} + 2^{6k-4} + 2^{6k-5} + 2^{6k-6} + \cdots + 1) + 2^{6k+5}$

$3 \cdot 2^{6k+5} \cdot 2 \cdot 2^{6k+5} = 9 \cdot 2^{6k+5}(2^{6k+4} + 2^{6k+2} + 2^{6k} + 2^{6k-2} + 2^{6k-4} + 2^{6k-6} + \cdots + 1) + 3 \cdot 2^{6k+5}$

$4 \cdot 2^{6k+5} \cdot 2 \cdot 2^{6k+5} = 9 \cdot 2^{6k+5}(2^{6k+4} + 2^{6k+3} + 2^{6k+2} + 2^{6k-2} + 2^{6k-3} + 2^{6k-4} + \cdots + 4)$
$\quad +4 \cdot 2^{6k+5}$

$5 \cdot 2^{6k+5} \cdot 2 \cdot 2^{6k+5} = 9 \cdot 2^{6k+5}(2^{6k+5} + 2^{6k+1} + 2^{6k} + 2^{6k-1} + 2^{6k-5} + 2^{6k-6} + \cdots + 1) + 5 \cdot 2^{6k+5}$

$6 \cdot 2^{6k+5} \cdot 2 \cdot 2^{6k+5} = 9 \cdot 2^{6k+5}(2^{6k+5} + 2^{6k+3} + 2^{6k+1} + 2^{6k-1} + 2^{6k-3} + \cdots + 2) + 6 \cdot 2^{6k+5}$

$7 \cdot 2^{6k+5} \cdot 2 \cdot 2^{6k+5} = 9 \cdot 2^{6k+5}(2^{6k+5} + 2^{6k+4} + 2^{6k} + 2^{6k-1} + 2^{6k-2} + 2^{6k-6} + \cdots + 1) + 7 \cdot 2^{6k+5}$

$$8 \cdot 2^{6k+5} \cdot 2 \cdot 2^{6k+5} = 9 \cdot 2^{6k+5}(2^{6k+5} + 2^{6k+4} + 2^{6k+3} + 2^{6k-1} + 2^{6k-2} + 2^{6k-3} + \cdots + 8)$$
$$+8 \cdot 2^{6k+5}$$

Karena elemen tak nol subring $\langle 2^{6k+5} \rangle$ dikalikan dengan $2 \cdot 2^{6k+5}$ menghasilkan elemen tersebut mod $9 \cdot 2^{6k+5}$. Jadi, terbukti bahwa $2 \cdot 2^{6k+5}$ adalah unity dari subring $\langle 2^{6k+5} \rangle$. Contoh untuk $k = 0$, $l = 6 \cdot 0 + 5 = 5$. Ring $(\mathbb{Z}_{9 \cdot 2^5}, +, \times) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots, 286, 287\}$ dan subring $\langle 2^5 \rangle = \{0, 32, 64, 96, 128, 160, 192, 224, 256\}$. Unity dari subring $\langle 2^5 \rangle$ adalah 64 karena $64 \cdot 64 = 4096 = 64$ mod $9 \cdot 2^5$, $32 \cdot 64 = 2048 = 32$ mod $9 \cdot 2^5$, $96 \cdot 64 = 6144 = 96$ mod $9 \cdot 2^5$, $128 \cdot 64 = 8192 = 128$ mod $9 \cdot 2^5$, $160 \cdot 64 = 10240 = 160$ mod $9 \cdot 2^5$, $192 \cdot 64 = 12288 = 192$ mod $9 \cdot 2^5$, $224 \cdot 64 = 14336 = 224$ mod $9 \cdot 2^5$, dan $256 \cdot 64 = 16384 = 256$ mod $9 \cdot 2^5$.

Untuk $l = 6k + 6$ subring $\langle 2^{6k+6} \rangle = \{0, 2^{6k+6}, 2 \cdot 2^{6k+6}, 3 \cdot 2^{6k+6}, 4 \cdot 2^{6k+6}, 5 \cdot 2^{6k+6}, 6 \cdot 2^{6k+6}, 7 \cdot 2^{6k+6}, 8 \cdot 2^{6k+6}\}$ akan dicari elemen idempoten. Langkah-langkah pencarian idempoten melalui manipulasi aljabar seperti pencarian pada $l = 6k + 1$.

$$2^{6k+6} \cdot 2^{6k+6} = 9 \cdot 2^{6k+6}(2^{6k+2} + 2^{6k+1} + 2^{6k} + 2^{6k-4} + 2^{6k-5} + 2^{6k-6} + \cdots + 1) + 2^{6k+6}$$
$$2 \cdot 2^{6k+6} \cdot 2 \cdot 2^{6k+6} = 9 \cdot 2^{6k+6}(2^{6k+4} + 2^{6k+3} + 2^{6k+2} + 2^{6k-2} + 2^{6k-3} + 2^{6k-4} + \cdots + 4)$$
$$+4 \cdot 2^{6k+6}$$
$$3 \cdot 2^{6k+6} \cdot 3 \cdot 2^{6k+6} = 9 \cdot 2^{6k+6} \cdot 2^{6k+6} + 0$$
$$4 \cdot 2^{6k+6} \cdot 4 \cdot 2^{6k+6} = 9 \cdot 2^{6k+6}(2^{6k+6} + 2^{6k+5} + 2^{6k+4} + 2^{6k} + 2^{6k-1} + 2^{6k-2} + 2^{6k-6} + \cdots + 1)$$
$$+7 \cdot 2^{6k+6}$$
$$5 \cdot 2^{6k+6} \cdot 5 \cdot 2^{6k+6} = 9 \cdot 2^{6k+6}(2^{6k+7} + 2^{6k+5} + 2^{6k+4} + 2^{6k} + 2^{6k-1} + 2^{6k-2} + 2^{6k-6} + \cdots + 1)$$
$$+7 \cdot 2^{6k+6}$$
$$6 \cdot 2^{6k+6} \cdot 6 \cdot 2^{6k+6} = 9 \cdot 2^{6k+6} \cdot 2^{6k+8} + 0$$
$$7 \cdot 2^{6k+6} \cdot 7 \cdot 2^{6k+6} = 9 \cdot 2^{6k+6}(5 \cdot 2^{6k+6} + 2^{6k+4} + 2^{6k+3} + 2^{6k+2} + 2^{6k-2} + 2^{6k-3} + 2^{6k-4} +$$
$$\cdots + 4) + 4 \cdot 2^{6k+6}$$
$$8 \cdot 2^{6k+6} \cdot 8 \cdot 2^{6k+6} = 9 \cdot 2^{6k+6}(7 \cdot 2^{6k+6} + 2^{6k+2} + 2^{6k+1} + 2^{6k} + 2^{6k-4} + 2^{6k-5} + 2^{6k-6} +$$
$$\cdots + 1) + 2^{6k+6}$$

Elemen idempoten subring $\langle 2^{6k+6} \rangle$ berada pada 2^{6k+6} karena $2^{6k+5} \cdot 2^{6k+5} = 2^{6k+5}$ mod

$9 \cdot 2^{6k+6}$. Selanjutnya akan ditunjukkan apakah 2^{6k+6} adalah unity subring $\langle 2^{6k+6} \rangle$.

$2 \cdot 2^{6k+6} \cdot 2^{6k+6} = 9 \cdot 2^{6k+6}(2^{6k+3}+2^{6k+2}+2^{6k+1}+2^{6k-3}+2^{6k-4}+2^{6k-5}+\cdots+2)+2 \cdot 2^{6k+6}$

$3 \cdot 2^{6k+6} \cdot 2^{6k+6} = 9 \cdot 2^{6k+6}(2^{6k+4}+2^{6k+2}+2^{6k}+2^{6k-2}+2^{6k-4}+2^{6k-6}+\cdots+1)+3 \cdot 2^{6k+6}$

$4 \cdot 2^{6k+6} \cdot 2^{6k+6} = 9 \cdot 2^{6k+6}(2^{6k+4}+2^{6k+3}+2^{6k+2}+2^{6k-2}+2^{6k-3}+2^{6k-4}+\cdots+4)+4 \cdot 2^{6k+6}$

$5 \cdot 2^{6k+6} \cdot 2^{6k+6} = 9 \cdot 2^{6k+6}(2^{6k+5}+2^{6k+1}+2^{6k}+2^{6k-1}+2^{6k-5}+2^{6k-6}+\cdots+1)+5 \cdot 2^{6k+6}$

$6 \cdot 2^{6k+6} \cdot 2^{6k+6} = 9 \cdot 2^{6k+6}(2^{6k+5}+2^{6k+3}+2^{6k+1}+2^{6k-1}+2^{6k-3}+\cdots+2)+6 \cdot 2^{6k+6}$

$7 \cdot 2^{6k+6} \cdot 2^{6k+6} = 9 \cdot 2^{6k+6}(2^{6k+5}+2^{6k+4}+2^{6k}+2^{6k-1}+2^{6k-2}+2^{6k-6}+\cdots+1)+7 \cdot 2^{6k+6}$

$8 \cdot 2^{6k+6} \cdot 2^{6k+6} = 9 \cdot 2^{6k+6}(2^{6k+5}+2^{6k+4}+2^{6k+3}+2^{6k-1}+2^{6k-2}+2^{6k-3}+\cdots+8)+8 \cdot 2^{6k+6}$

Karena elemen tak nol subring $\langle 2^{6k+6} \rangle$ dikalikan dengan 2^{6k+6} menghasilkan elemen tersebut mod $9 \cdot 2^{6k+6}$. Jadi, terbukti bahwa 2^{6k+6} adalah unity dari subring $\langle 2^{6k+6} \rangle$. Contoh untuk $k = 0, l = 6 \cdot 0 + 6 = 6$. Ring $(\mathbb{Z}_{9 \cdot 2^6}, +, \times) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots, 574, 575\}$ dan subring $\langle 2^6 \rangle = \{0, 64, 128, 192, 256, 320, 384, 448, 512\}$. Unity dari subring $\langle 2^6 \rangle$ adalah 64 karena $64 \cdot 64 = 4096 = 64$ mod $9 \cdot 2^6$, $128 \cdot 64 = 8192 = 128$ mod $9 \cdot 2^6$, $192 \cdot 64 = 12288 = 192$ mod $9 \cdot 2^6$, $256 \cdot 64 = 16384 = 256$ mod $9 \cdot 2^6$, $320 \cdot 64 = 20480 = 320$ mod $9 \cdot 2^6$, $384 \cdot 64 = 24576 = 384$ mod $9 \cdot 2^6$, $448 \cdot 64 = 28672 = 448$ mod $9 \cdot 2^6$, dan $512 \cdot 64 = 32768 = 512$ mod $9 \cdot 2^6$.

BAB 5. PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa untuk subring $\langle 2^l \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{1\cdot 2^l}, +, \times)$ adalah subring *proper trivial*. Untuk subring $\langle 2^l \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{3\cdot 2^k}, +, \times)$ penentuan unity dibagi menjadi dua, yaitu l ganjil dan l genap. Untuk l ganjil, $l = 2k + 1$ dengan k adalah suatu bilangan bulat *non* negatif, unity berada pada $2 \cdot 2^{2k+1}$. Sedangkan l genap, $l = 2k + 2$ dengan k adalah suatu bilangan bulat *non* negatif, unity berada pada 2^{2k+2}.

Untuk subring $\langle 2^l \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{5\cdot 2^l}, +, \times)$ penentuan unity dibagi menjadi empat, yaitu $l = 4k + 1, l = 4k + 2, l = 4k + 3$, dan $l = 4k + 4$ dengan k adalah suatu bilangan bulat *non* negatif. Untuk $l = 4k + 1$ unity berada pada $3 \cdot 2^{4k+1}$. Untuk $l = 4k + 2$ unity berada pada $4 \cdot 2^{4k+2}$. Untuk $l = 4k + 3$ unity berada pada $2 \cdot 2^{4k+3}$. Dan untuk $k = 4l + 4$ unity berada pada 2^{4k+4}.

Untuk subring $\langle 2^l \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{7\cdot 2^l}, +, \times)$ penentuan unity dibagi menjadi tiga, yaitu $l = 3k + 1, l = 3k + 2$, dan $l = 3k + 3$ dengan k adalah suatu bilangan bulat *non* negatif. Untuk $l = 3k + 1$ unity berada pada $4 \cdot 2^{3k+1}$. Untuk $l = 3k + 2$ unity berada pada $2 \cdot 2^{3k+2}$. Dan untuk $l = 3k + 3$ unity berada pada 2^{3k+4}.

Untuk subring $\langle 2^l \rangle$ pada ring $(\mathbb{Z}_{9\cdot 2^l}, +, \times)$ penentuan unity dibagi menjadi enam, yaitu $l = 6k + 1, l = 6k + 2, l = 6k + 3, l = 6k + 4, l = 6k + 5$, dan $l = 6k + 6$ dengan k adalah suatu bilangan bulat *non* negatif. Untuk $l = 6k + 1$ unity berada pada $5 \cdot 2^{6k+1}$. Untuk $l = 6k + 2$ unity berada pada $7 \cdot 2^{6k+2}$. Untuk $l = 6k + 3$ unity berada pada $8 \cdot 2^{6k+3}$. Untuk $l = 6k + 4$ unity berada pada $4 \cdot 2^{6k+4}$. Untuk $l = 6k + 5$ unity berada pada $2 \cdot 2^{6k+5}$. Dan untuk $l = 6k + 6$ unity berada pada 2^{6k+6}.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil dari penelitian mengenai karakterisasi unity subring *proper non trivial* pada ring $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$, maka penulis memberikan saran kepada pembaca untuk mengembangkan penelitian mengenai karakterisasi unity subring *proper non trivial* pada ring $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$ denagn n yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

Lolang, Enos. 2013. *Struktur Aljabar*. Makale: UKI Toraja Press.

Masoed, Fadli. 2013. *Struktur Aljabar*. Jakarta Barat: Akademia Permata.

Maya, Rippi. 2016. *Struktur Aljabar : Grup*. Bandung: STKIP Siliwangi.

Prihadoko, Antonius C. 2016. *Teori Grup dan Teori Ring*. Jember: Universitas Jember.

Subiono. 2012. *Aljabar : Sebagai Pondasi pada Matematika*. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Wijaya, Kristiana. 2010. *Struktur Aljabar Ring*. Jember: Jember University Press.