

**MEMBANGUN *SPACE-FILLING CURVE* (SFC) DENGAN KURVA PEANO  
MENGUNAKAN PENDEKATAN *L-SYSTEMS***

**SKRIPSI**

Oleh

**Titi Hayatina Mardhotillah  
NIM 071810101086**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS JEMBER**

**2012**

## **PERSEMBAHAN**

Skripsi ini saya persembahkan untuk:

1. Ayahanda Muhammad Toha (alm), Ibunda Siti Nuryana dan Ayahanda Muhammad Holis serta Ibunda Siti Rohmah yang telah banyak membantu dan membesarkan saya dengan kasih sayang, perhatian dan pengorbanan yang tiada henti, serta doa yang tak pernah putus;
2. Guru-guru saya sejak SD sampai perguruan tinggi yang telah memberikan ilmu dan membimbing saya dengan penuh kesabaran;
3. Almamater Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

## PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

nama : Titi Hayatina Mardhotillah

NIM : 071810101086

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa karya ilmiah yang berjudul “Membangun *Space-Filling Curve* (SFC) dengan Kurva Peano Menggunakan Pendekatan *L-Systems*” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi manapun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 22 Februari 2012

Yang menyatakan,

Titi Hayatina Mardhotillah

NIM 071810101086

## PENGESAHAN

Skripsi berjudul “Membangun *Space-Filling Curve* (SFC) dengan Kurva Peano Menggunakan Pendekatan *L-Systems*” telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Jember

Tim Penguji:

Ketua,

Sekretaris,

Drs. Moh. Hasan, M.Sc., Ph.D.  
NIP 196404041988021001

Drs. Rusli Hidayat, M.Sc.  
NIP 196610121993031001

Penguji I,

Penguji II,

Prof. Drs. I Made Tirta, M.Sc., Ph.D.  
NIP 195912201985031002

Kiswara Agung Santoso, M.Kom  
NIP 197209071998031003

Mengesahkan

Dekan,

Prof. Drs. Kusno, DEA, Ph.D.  
NIP 196101081986021001

## PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Membangun *Space-Filling Curve* (SFC) dengan Kurva Peano Menggunakan Pendekatan *L-Systems*”. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Drs. Moh. Hasan, M.Sc., Ph.D., selaku Dosen Pembimbing Utama dan Drs. Rusli Hidayat, M.Sc., selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
2. Prof. Drs. I Made Tirta, MSc.,PhD., selaku Dosen Penguji I dan Kiswara Agung Santoso, M.Kom, selaku Dosen Penguji II yang telah memberikan kritik dan saran demi kesempurnaan skripsi ini;
3. saudara Wenang, Sofyan, Ferry, Ratih, Naning, Fitroh, Riski, Shandi yang telah membantu dan memberi dukungan dalam mengerjakan skripsi ini;
4. teman-teman seperjuangan, Aullya, Rina, Anggun, yang telah menemani, membantu dan memberi dukungan dalam mengerjakan skripsi ini;
5. teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika, khususnya angkatan 2007 yang telah memberi bantuan, dukungan kepada penulis;
6. semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Penulis menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, 22 Februari 2012

Penulis

<b>2.4 Kurva Peano</b> .....	14
2.4.1 Sejarah dan Definisi Kurva Peano .....	14
2.4.2 Interpretasi Geometris Kurva Peano .....	15
<b>BAB 3. METODE PENELITIAN</b> .....	21
<b>3.1 Objek Penelitian</b> .....	21
<b>3.2 Penafsiran Grafis 2D</b> .....	22
3.2.1 Penafsiran Secara Manual .....	22
3.2.2 Penafsiran Matematis .....	23
<b>3.3 Penafsiran Grafis 3D</b> .....	23
3.3.1 Penafsiran Secara Manual .....	23
3.3.2 Penafsiran Matematis .....	24
<b>3.4 Algoritma Program</b> .....	24
<b>BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN</b> .....	26
<b>4.1 Hasil</b> .....	26
4.1.1 Penafsiran Grafis 2D .....	27
4.1.2 Penafsiran Grafis 3D .....	33
<b>4.2 Pembuatan Program</b> .....	41
4.2.1 Algoritma Program .....	41
4.2.2 Hasil Program .....	47
<b>4.3 Pembahasan</b> .....	49
<b>BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN</b> .....	51
<b>5.1 Kesimpulan</b> .....	51
<b>5.2 Saran</b> .....	51
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	52
<b>LAMPIRAN</b>	

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Hubungan antara sistem koordinat kutub dan kartesius .....	5
Gambar 2.2 Sistem koordinat kartesius 3D.....	6
Gambar 2.3 Sistem koordinat bola 3D.....	7
Gambar 2.4 Penafsiran grafis Kurva Peano .....	12
Gambar 2.5 Interpretasi gerak kura-kura dalam 3D .....	13
Gambar 2.6 Pemetaan Peano.....	15
Gambar 2.7 Generasi geometris Kurva Peano .....	16
Gambar 2.8 Interpretasi geometris Kurva Hilbert .....	17
Gambar 2.9 Interpretasi geometris Kurva Hilbert .....	18
Gambar 2.10 Pemetaan Kurva Peano dari Interval $I$ ke $Q$ .....	19
Gambar 2.11 Pembagian area pada Kurva Peano 3D .....	20
Gambar 3.1 Bentuk manual Kurva Peano .....	21
Gambar 4.1 Penafsiran Kurva Peano secara manual .....	26
Gambar 4.2 Penamaan titik Kurva Peano .....	27
Gambar 4.3 Hubungan koordinat titik-titik.....	31
Gambar 4.4 Penafsiran Kurva Peano 3D dalam gerak kura-kura.....	33
Gambar 4.5 Penamaan titik Kurva Peano 3D untuk $g_1$ .....	35
Gambar 4.6 Tampilan program Kurva Peano 2D.....	47
Gambar 4.7 Tampilan program Kurva Peano 3D.....	48

Pengembangan *L-systems* untuk membuat objek-objek lain yang berupa objek geometri selain pertumbuhan tanaman yaitu bentuk-bentuk fraktal. Dickau (1996) membangun objek-objek geometri 2D seperti Kurva Koch, Kurva Hilbert, Kurva Dragon, dan objek-objek dalam 3D seperti Kurva Hilbert. Nopianto (2006) membangun objek-objek fraktal, seperti Kurva Snowflake dalam 2D. Urnianto (2009) memodelkan motif ornamen dengan dasar poligon dalam 2D. Ginanjar (2010) membangun *Space-filling curve* (SFC) dengan Kurva Hilbert dalam 2D menggunakan kombinasi *DOL-systems*.

Konsep awal SFC muncul pada abad ke-19 oleh Peano yang merepresentasikan SFC menggunakan matematika analitis yang dikenal dengan Kurva Peano. Kemudian pada tahun 1891, Hilbert merepresentasikan sebuah variasi lain dari SFC yang dikenal sebagai Kurva Hilbert. SFC merupakan salah satu objek yang memiliki sifat *Self-similarity* dan membentuk generasi-generasi yang memenuhi ruang, sehingga SFC dapat dibangun dengan pendekatan *L-systems*.

Penelitian yang dilakukan Ginanjar, yaitu membangun SFC dengan Kurva Hilbert yang diperoleh dengan mempartisi interval  $I$  ke dalam  $2^{2n}$  subinterval yang kongruen menggunakan *L-systems*, menarik untuk dikaji bagaimana membangun SFC dengan Kurva Peano yang diperoleh dengan mempartisi interval  $I$  ke dalam  $3^{2n}$  (2D) dan  $3^{3n}$  (3D) subinterval yang kongruen.

## 1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan sebelumnya, permasalahan yang akan dibahas dalam tugas akhir ini adalah bagaimana membangun SFC (kurva yang mengisi ruang dalam  $n$ -dimensi subpersegi) dengan Kurva Peano secara terkomputerisasi menggunakan pendekatan *L-systems*.



## BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

### 2.1 Garis dan Sudut

Definisi dasar mengenai garis, sinar, dan sudut dinyatakan oleh (Kusno, 2003) sebagai berikut.

#### Definisi 2.1

Ruas (segmen) garis  $PQ$  dinotasikan  $\overline{PQ}$  adalah himpunan titik-titik dari garis yang memuat titik  $P$  dan titik  $Q$  dan semua titik diantara titik  $P$  dan titik  $Q$ .

#### Definisi 2.2

Sinar adalah himpunan titik-titik yang merupakan gabungan dari titik pangkal sinar garis dan semua titik pada sisi yang sama terhadap titik pangkal.

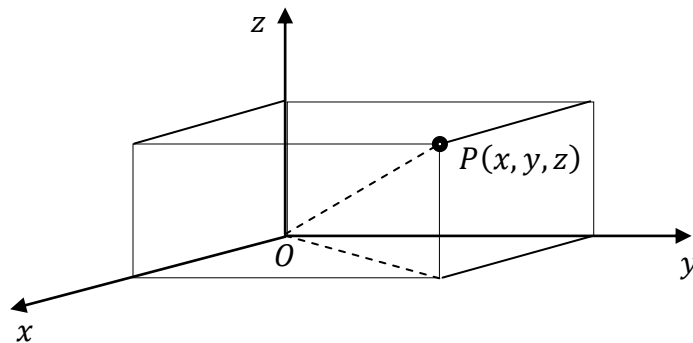
#### Definisi 2.3

Sudut adalah himpunan titik-titik dari gabungan dua sinar yang kedua titik pangkalnya berserikat, tetapi tidak terletak pada garis yang sama.

Untuk memperjelas definisi di atas. Pada Gambar 2.1, pandang empat titik  $P, Q, R$ , dan  $S$ . Titik  $P, Q$  dan titik-titik diantaranya, dikatakan meliputi segmen garis  $PQ$ . Titik  $P$  dan titik  $Q$  masing-masing disebut titik akhir (ujung) dari segmen garis  $PQ$ . Sedangkan  $PR$  dan  $PS$  merupakan sinar garis. Titik  $P, R$  dan  $S$  merupakan titik pangkal sinar garis. Sudut  $RPQ$  ( $\angle RPQ$ ) dibangun oleh sinar  $PR$  dan sinar  $PS$  dengan titik  $P$  sebagai titik sudut, sedangkan sinar  $PR$  dan  $PS$  merupakan kaki sudut. Titik  $P$  dan  $Q$  masing-masing memiliki koordinat  $(x_1, y_1)$  dan  $(x_2, y_2)$ . Jika melalui titik  $P$  ditarik garis sejajar sumbu  $x$  dan melalui titik  $Q$  ditarik garis sejajar sumbu  $y$  maka kedua garis ini berpotongan di titik  $T$  dan  $\Delta PTQ$  adalah segitiga siku-siku sehingga diperoleh panjang ruas garis  $PT = (x_2 - x_1)$  dan panjang ruas garis  $QT = (y_2 - y_1)$ . Selanjutnya dengan

$$\begin{aligned}
 y_2 &= y_1 + d \sin \delta \\
 &= d(\sin \theta + \sin \delta)
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

Sistem koordinat kartesius 3D memiliki prinsip yang sama dengan sistem koordinat pada 2D. Jika pada 2D terdapat sumbu  $x$  dan sumbu  $y$ , pada 3D memiliki tambahan satu sumbu lagi yaitu sumbu  $z$ . Ketiga sumbu koordinat yaitu  $(x, y, z)$  saling tegak lurus.



Gambar 2.2 Sistem koordinat kartesius 3D

Pada Gambar 2.2, titik  $O$  merupakan titik pusat dari ketiga sumbu koordinat  $(x, y, z)$  sedangkan titik  $P$  didefinisikan dengan  $P(x, y, z)$ , dengan  $\overline{OP}$  merupakan jarak titik  $P$  ke pusat  $O$  (Handoko, 2004).

Bola adalah tempat kedudukan titik-titik dalam ruang yang berjarak sama terhadap titik tertentu. Titik tertentu tersebut disebut pusat bola. Ruas garis dari pusat ke titik pada bola disebut jari-jari, sedangkan semua ruas garis penghubung dua titik pada bola yang melalui pusat disebut diameter (Bastian, 2011).

Menurut Handoko (2004) posisi suatu titik dalam ruang dapat didefinisikan dalam sumbu koordinat bola dalam 3D yang memiliki prinsip dasar sama dengan koordinat polar dalam 2D yaitu memiliki sudut dan jarak. Pada Gambar 2.3, koordinat dari titik  $P$  didefinisikan dengan  $P(d, \theta, \phi)$ . Jarak titik  $P$  ke pusat  $O = d$ . Jika titik  $P$  diproyeksikan pada sumbu  $z$  yaitu ke titik  $P'$ , maka sudut antar garis  $OP$  dengan  $OP'$  adalah  $(\phi)$ . Kemudian jika titik  $P$  diproyeksikan

## 2.3 Pengertian *L-systems*

### 2.3.1 Definisi Dasar

*L-systems* ini merupakan teori aksiomatik perkembangan dan pertumbuhan tanaman. *L-systems* merupakan suatu sistem dinamik simbolik dengan sifat tambahan berupa penafsiran grafis perubahan sistem, misalnya pertumbuhan dan perkembangan tanaman, pembelahan sel dan pembentukan fraktal (Wright, 1996). Prinsip dasarnya yaitu serangkaian penulisan kembali yang dilakukan secara berulang-ulang untuk membangun suatu objek kompleks dari sebuah objek sederhana. Objek yang kompleks ini dibentuk dengan cara mengganti secara bergantian bagian-bagian dari objek sederhana menggunakan seperangkat aturan penulisan kembali atau lebih dikenal sebagai aturan produksi (Ochoa, 1998).

Beberapa komponen utama dari *L-systems* menurut Wright (1996) yaitu huruf, aksioma dan aturan produksi yang dijelaskan sebagai berikut.

#### 1. Huruf

Huruf adalah himpunan berhingga  $V$  dari simbol-simbol yang dapat diganti, misalnya dalam bentuk  $a, b, c$ .

#### 2. Aksioma

Aksioma (*inisiator*) adalah suatu *string*  $w$  dari simbol-simbol pada  $V$ . Himpunan *string* dari  $V$  dinotasikan  $V^*$ . Jika diberikan  $V = \{a, b, c\}$ , maka beberapa contoh *string* yang dapat dibentuk yaitu:  $a, b, cb, aabca, caabbbc$ . Panjang  $|w|$  dari suatu *string*  $w$  adalah jumlah simbol dalam *string*.

#### 3. Aturan Produksi

Aturan produksi (aturan penulisan kembali) adalah suatu pemetaan simbol  $a \in V$  ke *string*  $w \in V^*$ . Ditulis dengan notasi:

$$p : a \rightarrow w.$$

Jika suatu simbol  $a \in V$  tidak memiliki aturan produksi, maka dapat diasumsikan bahwa simbol tersebut dipetakan pada dirinya sendiri sehingga  $a$  menjadi konstanta *L-Systems* (Wright, 1996).

Pada  $a(> b)$ , jika  $a$  memiliki tetangga  $b$  disisi kanannya, maka  $a$  diproduksi menjaadi  $c$ , sehingga hasil produksi beberapa generasinya dalam dilihat pada Tabel 2.2.

Tabel 2.2 Generasi *Context-sensitive L-systems*

$g_0$	$aaa$
$g_1$	$bcba$
$g_2$	$bba$

Jika dilihat dari jumlah aturan produksinya untuk satu simbol, maka *L-systems* dibagi menjadi dua yaitu:

a. *Deterministic L-systems (DOL-systems)*

*Deterministic L-systems* merupakan *L-systems* yang mempunyai tepat satu aturan produksi untuk setiap simbol. Suatu *L-systems Context-free Deterministic* pada umumnya disebut *DOL-systems*. Contoh: komponen *L-systems* dengan  $V = \{a, b\}$ ,  $w = a$ ,  $p_1: a \rightarrow b$ , dan  $p_2: b \rightarrow ba$ .

b. *Stochastic L-systems*

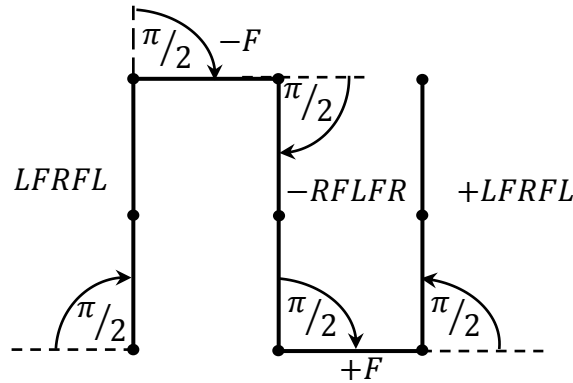
*Stochastic L-systems* merupakan *L-systems* yang mempunyai lebih dari satu aturan produksi untuk satu simbol tertentu dan memerlukan suatu kriteria tertentu untuk menentukan kapan suatu aturan produksi diterapkan. Misalkan  $V = \{a, b\}$ ,  $w = abba$ ,  $p_1: a \rightarrow b$  (untuk setiap  $a$  yang berada di awal suatu hasil produksi dari setiap generasi),  $p_2: a \rightarrow \emptyset$  (untuk setiap  $a$  yang berada di akhir suatu hasil produksi dari setiap hasil generasi), dan  $p_3: b \rightarrow a$ . Sehingga hasil produksi beberapa generasi selanjutnya dari sistem dapat dilihat pada Tabel 2.3.

Tabel 2.3 Generasi *Stochastic L-systems*

$g_0$	$abba$
$g_1$	$baa$
$g_2$	$aa$

$$LFRFL - F - RFLFR + F + LFRFL$$

dengan sudut  $\theta = \frac{\pi}{2}$  dan  $\delta = \frac{\pi}{2}$  maka penafsiran grafis dari  $g_1$  yaitu:



Gambar 2.4 Penafsiran grafis Kurva Peano

Pada Gambar 2.4, sudut awal  $\theta = \frac{\pi}{2}$  dan perubahan sudut  $\delta = \frac{\pi}{2}$ . Untuk  $L$  dan  $R$  artinya menggambar titik. Dengan simbol  $-F$  artinya berbelok ke kanan dengan menggambar garis sepanjang  $d$  satuan dengan perubahan sudut  $\frac{\pi}{2}$  dari posisi semula. Untuk simbol  $+F$  artinya berbelok ke kiri dengan menggambar garis sepanjang  $d$  satuan dengan perubahan sudut  $\frac{\pi}{2}$  dari posisi semula.

### 2.3.5 $L$ -systems Dimensi Tiga

Interpretasi gerak kura-kura dengan  $L$ -systems dalam 2D hanya membutuhkan sebuah sudut. Untuk memperluas dalam 3D, kuncinya yaitu merepresentasikan pedoman dari gerak kura-kura pada ruang dengan tiga vektor yaitu  $\vec{H}$ ,  $\vec{L}$ ,  $\vec{U}$  yang mengindikasikan gerak kepala, gerak belok ke kiri, dan gerak arah ke atas.

Menurut Sagan (1994), perputaran dari interpretasi gerak kura-kura dinyatakan dalam bentuk persamaan matriks:

$$[\vec{H}' \quad \vec{L}' \quad \vec{U}'] = [\vec{H} \quad \vec{L} \quad \vec{U}] \mathbf{R},$$

## 2.4 Kurva Peano

### 2.4.1 Sejarah dan Definisi Kurva Peano

Peano (1858-1932) adalah penemu pertama kurva 2D yang sekarang dikenal sebagai Kurva Peano. Konsep SFC muncul pada abad ke-19 dan pertama kali dikemukakan oleh Peano pada tahun 1890 yang mengemukakannya menggunakan matematika analitis murni. Selanjutnya, kurva yang dibangun oleh Peano disebut dengan kurva Peano. Pada tahun 1891, Hilbert membangun SFC menggunakan konsep geometri yang disebut dengan kurva Hilbert. Hilbert mengilustrasikan konsep geometrinya dalam dimensi dua, namun Hilbert berpendapat bahwa konsep kurva Hilbert juga dapat diaplikasikan dalam dimensi sembarang (Lawder, 2000).

Dalam analisis matematika, SFC adalah kurva-kurva yang mengisi ruang 2D dalam unit persegi (atau secara umum dalam  $n$ -dimensi subpersegi). Pada tahun 1890, Peano menemukan konstruksi sebuah kurva yang merupakan pemetaan dari interval  $[0,1]$  ke subpersegi  $[0,1]^2$ , saat ini dikenal sebagai Kurva Peano. Selanjutnya pada tahun 1891, Hilbert merepresentasikan sebuah variasi lain dari SFC yang telah ditemukan oleh Peano. Kurva pada konsep 2D ini kemudian dikenal sebagai Kurva Hilbert.

Peano mendefinisikan sebuah pemetaan  $f_p$  dari  $I$  ke  $Q$  pada bentuk operator,

$kt_j = 2 - t_j$ , dimana  $(t_j = 0,1,2)$  sebagai:

$$f_p(0_3 t_1 t_2 t_3 t_4 \dots) = \begin{pmatrix} 0_3 t_1 (k^{t_2} t_3) (k^{t_2+t_4} t_5) \dots \\ 0_3 (k^{t_1} t_2) (k^{t_1+t_3} t_4) \dots \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

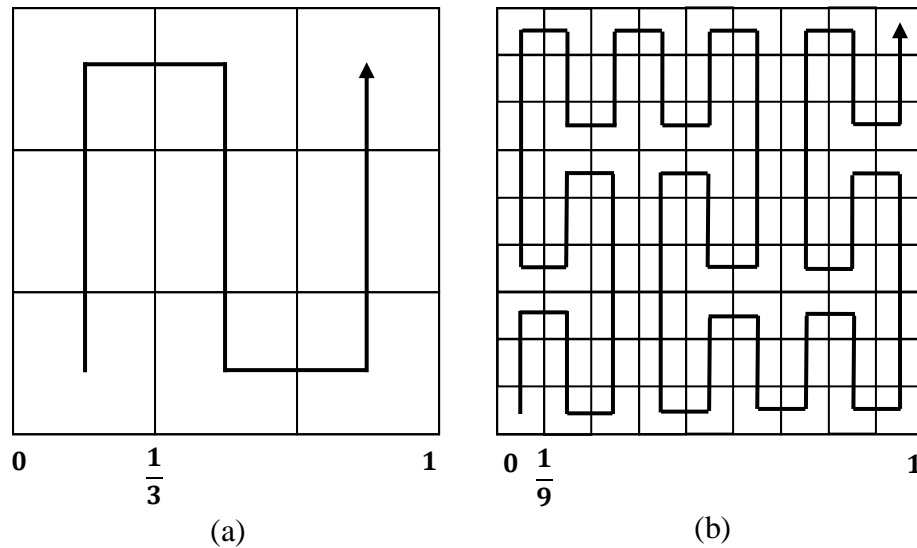
dimana  $k^v$  dengan  $v$  menunjukkan banyak generasi dari  $k$ , dan membuktikan bahwa pemetaan tersebut *surjektif* dan kontinu. Dari representasi ini, Peano membangun sebuah SFC dengan cara mempartisi  $I$  ke dalam subinterval yang kongruen dan memetakannya kedalam  $3^{2n}$  subpersegi (Sagan, 1994).

Dengan cara yang sama,

$$f_p(0_3 0 1 t_3 t_4 t_5 \dots) = \begin{pmatrix} 0_3 0 \xi'_2 \xi'_3 \xi'_4 \dots \\ 0_3 1 \eta'_2 \eta'_3 \eta'_4 \dots \end{pmatrix}$$

dan kita lihat bahwa interval  $[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}]$  dipetakan ke dalam subpersegi no.2 pada Gambar 2.6. Kemudian dilanjutkan pada pola ini dan mengetahui bahwa interval  $[\frac{j-1}{9}, \frac{j}{9}]$ , dimana  $j = 1, 2, 3, \dots, 9$  dipetakan kedalam subpersegi no. $j$ .

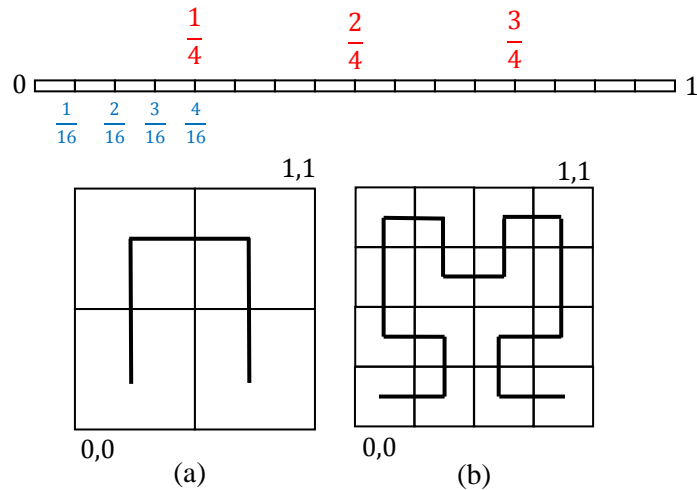
Ini menunjukkan bahwa Kurva Peano diperoleh dengan mempartisi  $I$  ke dalam  $3^{2n}$  subinterval yang kongruen kemudian memetakan ke dalam  $3^{2n}$ , dimana  $n = 1, 2, 3, \dots$  subpersegi dengan aturan yang ditunjukkan pada Gambar 2.7 untuk dua langkah pertama.



Gambar 2.7 Generasi geometris Kurva Peano (a) generasi ke-1 dan (b) generasi ke-2

Generasi SFC cukup memuaskan (interval yang berdekatan dipetakan ke dalam subpersegi yang berdekatan dengan tepi yang sama, dan setiap pemetaan *injektif*. Pendefinisian dari  $f_p: I \rightarrow Q$  adalah pemetaan yang *surjektif* dan kontinu yang merupakan representasi dari SFC (Sagan, 1994).

Gambar 2.8 menunjukkan partisi interval  $I$  dan  $Q$  ke dalam  $2^2$  sub interval yang kongruen (ditandai warna merah) dan cara yang mungkin untuk mengorientasikan sub area pada  $Q$ . Ketika melintasi  $I$ , kita mengikuti kurva pada  $Q$ . Kemudian secara rekursif dapat mempartisi sub area selanjutnya. Untuk melakukannya, dipilih sub interval pertama dari  $I : I_1 = \left[0, \frac{1}{4}\right]$  yang dipetakan ke dalam  $Q : Q_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$ . Setelah itu (Gambar 2.9), interval  $I$  dan  $Q$  dipartisi lagi menjadi 4 sub interval yang kongruen (ditandai warna biru).

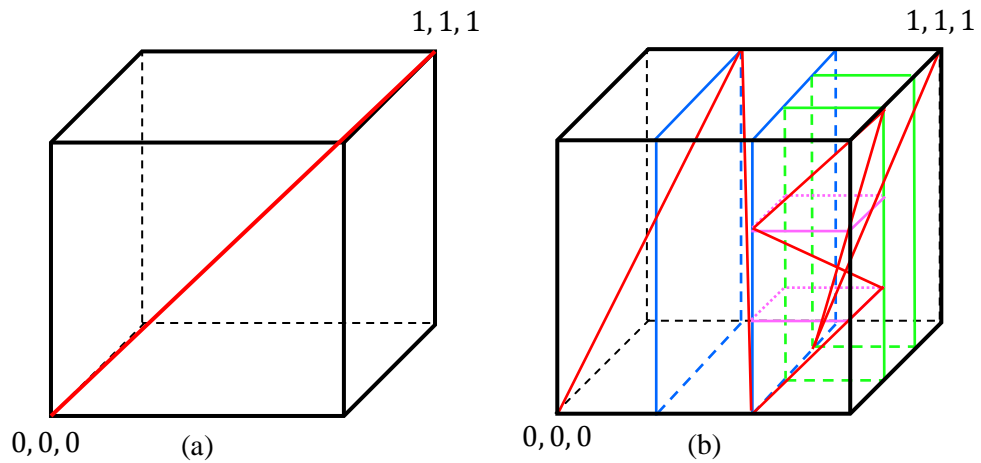


Gambar 2.9 Interpretasi geometris Kurva Hilbert (a) generasi ke-1 dan (b) generasi ke-2

Munculnya sub interval baru yang terletak di dalam interval sebelumnya, misalnya interval  $I_1 = \left[0, \frac{1}{16}\right]$  yang dipetakan ke dalam interval  $Q_1 = \left[0, \frac{1}{4}\right] \times \left[0, \frac{1}{4}\right]$ ,  $I_2 = \left[\frac{1}{16}, \frac{2}{16}\right]$  dipetakan ke dalam interval  $Q_2 = \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right] \times \left[0, \frac{1}{4}\right]$ , dan seterusnya. Fakta penting ini disebut inklusi penuh. Jadi dengan mempartisi secara rekursif, tetap diperoleh pemetaan yang kontinu (hanya berlaku pada grid lokal setempat).

Interpretasi geometris SFC Peano diperoleh beberapa lama setelah Hilbert menggambarkan SFC dengan Kurva Hilbert. Titik awal adalah unit interval  $I$  dan  $Q$ . Pada Kurva Peano, kita ingin selalu memeriksa lintasan dari  $(0,0,0)$  ke





Gambar 2.11 (a) dan (b) Pembagian area pada Kurva Peano 3D

Gambar 2.11 merupakan bentuk dari lintasan Kurva Peano pada ruang 3D. Berdasarkan ilustrasi tersebut dapat dilihat bahwa Kurva Peano melalui  $(0, 0, 0)$  menuju  $(1, 1, 1)$ . Dengan mempartisi kubus menjadi  $3^{3n}$  sub kubus yang kongruen, maka pemetaan dari interval  $I$  ke dalam  $\mathcal{W}$ , dimana  $\mathcal{W} = [0, 1]^3$  dapat dilihat pada Gambar 2.11. Sehingga dari pemetaan tersebut diperoleh kurva yang kontinu dan memenuhi ruang.

### 3.2 Penafsiran Grafis 2D

#### 3.2.1 Penafsiran Secara Manual

Pada penafsiran Kurva Peano secara manual, langkah awal yang dilakukan yaitu menentukan komponen-komponen *L-systems* Kurva Peano yang merupakan aksioma dan aturan produksi yang selanjutnya disebut *L-systems* Kurva Peano. Komponen-komponen Kurva Peano dalam Lindenmayer (2004:17) yaitu :

$$\mathcal{V} = \{F, L, R, +, -\}$$

$$\mathcal{W} = L$$

$$p_1 : L \rightarrow LFRFL - F - RFLFR + F + LFRFL$$

$$p_2 : R \rightarrow RFLFR + F + LFRFL - F - RFLFR,$$

berdasarkan subsubbab 2.3.1 tentang beberapa komponen utama *L-systems* menurut Wright (1996) yaitu:

$\mathcal{V}$  : himpunan yang memuat simbol-simbol yang dapat diganti.

$F$  : pergerakan dengan menggambar garis sepanjang  $d$  satuan.

$L, R$  : intepretasi sebagai sebuah titik.

$p_1, p_2$  : aturan produksi dalam *L-systems*.

Generasi dari *L-systems* Kurva Peano sesuai dengan komponen-komponen *L-systems* dapat dilihat pada Tabel 3.1.

Tabel 3.1 Beberapa generasi *L-systems* Kurva Peano 2D

$g_0$	$L$
$g_1$	$LFRFL - F - RFLFR + F + LFRFL$
$g_2$	$LFRFL - F - RFLFR + F + LFRFLFRFLFR + F + LFRFL - F - RFLFRF$ $LFRFL - F - RFLFR + F + LFRFL - F - RFLFR + F + LFRFL - F - RFLFR$ $FLFRFL - F - RFLFR + F + LFRFLFRFLFR + F + LFRFL - F - RFLFR + F$ $+LFRFL - F - RFLFR + F + LFRFLFRFLFR + F + LFRFL - F - RFLFRF$ $LFRFL - F - RFLFR + F + LFRFL$

### 3.3.2 Penafsiran Matematis

Penafsiran matematis dilakukan dengan menganalisa rotasi dan posisi setiap titik dalam 3D sehingga diperoleh rumus umum untuk menentukan posisi titik berikutnya pada setiap generasi.

Langkah-langkah dalam penafsiran matematis yaitu:

1. memberi nama setiap titik yang dibentuk oleh setiap generasi;
2. menghitung dan merumuskan setiap sudut yang dibentuk dengan mendefinisikan simbol-simbol  $+$ ,  $-$ ,  $\&$ ,  $\wedge$ ,  $\setminus$ ,  $/$  dan  $|$  dari *L-systems*;
3. merumuskan setiap titik pada setiap generasi sehingga diperoleh hasil yang sesuai dengan Kurva Peano 3D.

### 3.4 Algoritma Program

Dalam membangun SFC dengan Kurva Peano ini, digunakan kombinasi *DOL-systems* yaitu aturan penulisan kembali menggunakan kombinasi titik dan garis. Dari hasil penafsiran secara manual dan analisis rotasi dan posisi setiap titik dengan *L-systems* pada 2D dan 3D diperoleh rumus umum perubahan titik dan sudut yang dapat digunakan dalam pembuatan program visualisasi Kurva Peano menggunakan *software* Matlab 7. Visualisasi Kurva Peano ditampilkan dalam bentuk 2D dan 3D.

Algoritma program *L-systems* untuk membangun Kurva Peano diuraikan sebagai berikut.

- a. Menentukan nilai generasi ( $h$ ) dan perubahan sudut ( $\delta$ ) Kurva Peano, dengan ( $h$ ) sebagai input, dimana  $h = 1, 2, \dots$
- b. Menentukan nilai-nilai awal pada Kurva Peano, yaitu:
  1. panjang segmen garis pada Kurva Peano ( $d$ , dimana  $d = \frac{1}{3^n}$  dengan nilai  $n = 1, 2, 3 \dots h$ );

## BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

### 4.1 Hasil

Prinsip dasar *L-systems* adalah serangkaian aturan penulisan kembali yang bertujuan untuk membangun sebuah objek kompleks dengan meletakkan bagian-bagian dari objek sederhana menggunakan seperangkat aturan penulisan kembali atau aturan produksi. *Self-similarity* yang dimiliki oleh SFC digunakan sebagai dasar penelitian penerapan *L-systems* dalam membangun SFC menggunakan Kurva Peano. Jenis *L-systems* yang digunakan dalam membangun SFC ini adalah kombinasi *DOL-systems*.

Dalam penelitian ini, ada beberapa tahapan yang digunakan dalam membangun SFC menggunakan Kurva Peano. Tahap pertama, membangun penafsiran secara manual pada 2D dan 3D. Untuk bidang 2D, penafsiran secara manual dapat dilakukan dengan mudah. Pada bidang 3D, penafsiran secara manual harus dilakukan dengan membuat model Kurva Peano yang dalam penelitian ini menggunakan media gabus untuk  $g_1$  dan  $g_2$  agar dapat dilakukan perumusan sudut-sudut Kurva Peano. Penafsiran secara manual ini dilakukan dengan menentukan komponen-komponen *L-systems* Kurva Peano dan mendefinisikan setiap simbol *L-systems* tersebut ke dalam interpretasi gerak kurva dalam 2D dan 3D. Tahap kedua, membangun penafsiran matematis. Penafsiran matematis ini dibagi menjadi tiga tahapan, yaitu penamaan titik, perumusan sudut, dan perumusan titik pada kurva dalam 2D dan 3D. Ketiga tahapan tersebut dilakukan untuk mendapatkan rumus-rumus umum perubahan sudut dan perubahan posisi titik, yang dapat digunakan untuk membuat program visualisasi penerapan *L-systems* dalam membangun Kurva Peano dalam 2D dan 3D. Tahap terakhir yaitu membuat algoritma program dari penafsiran secara manual dan matematisnya. Algoritma program tersebut dijadikan acuan untuk

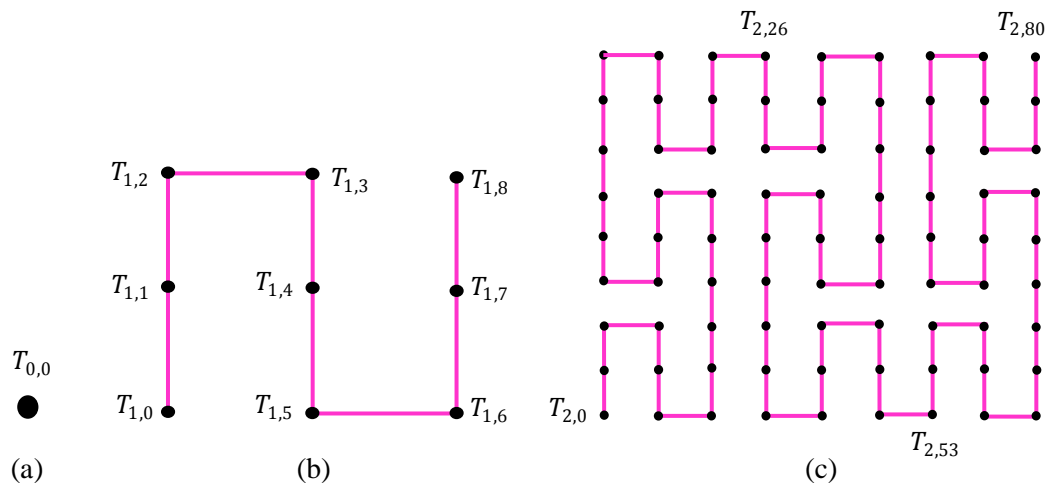
## b. Penafsiran Matematis

Penafsiran matematis diperoleh berdasarkan pada penafsiran secara manual yang dapat dilihat pada Gambar 4.1. Untuk memodelkan penafsiran matematis dilakukan tiga tahapan, yaitu penamaan titik, perumusan sudut dan perumusan titik pada Kurva Peano yang diuraikan sebagai berikut.

### 1. Penamaan Titik

Jumlah titik penyusun Kurva Peano sebanyak  $3^{2n}$ , dimana  $n = 1, 2, \dots, h$ . Simbol  $h$  adalah nilai generasi Kurva Peano yang dijadikan input program dan  $h$  merupakan bilangan bulat positif. Untuk generasi ke-1, ke-2 dan ke-3 jumlah titik penyusun Kurva Peano berturut-turut sebanyak 9 titik, 81 titik, dan 729 titik.

Penamaan setiap titik disimbolkan dengan  $T_{n,i}$  dengan  $n$  sebagai nilai generasi dan  $i$  sebagai indeks titik dalam setiap generasi. Untuk setiap titik awal dari setiap generasi diberikan nilai  $i = 0$ . Sehingga untuk  $g_1$ , setiap titiknya diberi nama  $T_{1,0}, T_{1,1}, T_{1,2}, T_{1,3}, T_{1,4}, T_{1,5}, T_{1,6}, T_{1,7}, T_{1,8}$ . Hasil penamaan setiap titik secara rinci dapat dilihat pada Gambar 4.2.



Gambar 4.2 Penamaan titik Kurva Peano generasi  $g_0$  (a),  $g_1$  (b) dan  $g_2$  (c)

$$\begin{array}{ccccc}
A_{2,5} = 0^o & A_{2,14} = 0^o & A_{2,23} = 0^o & A_{2,32} = 0^o & A_{2,41} = 0^o \\
A_{2,6} = \frac{\pi}{2} & A_{2,15} = -\frac{\pi}{2} & A_{2,24} = \frac{\pi}{2} & A_{2,33} = -\frac{\pi}{2} & A_{2,42} = \frac{\pi}{2} \\
A_{2,7} = \frac{\pi}{2} & A_{2,16} = -\frac{\pi}{2} & A_{2,25} = \frac{\pi}{2} & A_{2,34} = -\frac{\pi}{2} & A_{2,43} = \frac{\pi}{2} \\
A_{2,8} = 0^o & A_{2,17} = 0^o & A_{2,26} = 0^o & A_{2,35} = 0^o & A_{2,44} = 0^o \\
A_{2,9} = 0^o & A_{2,18} = 0^o & A_{2,27} = -\frac{\pi}{2} & A_{2,36} = 0^o & A_{2,45} = 0^o
\end{array}$$

Dari hasil pendefinisian sudut-sudut pada generasi ke-1 dan ke-2, diperoleh rumus umum perubahan sudut ke- $n$ , dengan  $n \geq 2$  (untuk  $n = 2, 3, \dots, h$  dan  $i = 1, 2, 3, \dots, 9^{(n-1)}$ ) yang dirumuskan:

$$\begin{array}{l}
A_{n,i} = A_{n-1,i} \\
A_{n,9^{(n-1)}+i} = -(A_{n-1,i}) \quad A_{n,9^{(n-1)}} = -(A_{n-1,i}) \\
A_{n,2 \cdot 9^{(n-1)}+i} = A_{n-1,i} \quad A_{n,2 \cdot 9^{(n-1)}} = (A_{n-1,i}) \\
A_{n,3 \cdot 9^{(n-1)}+i} = -(A_{n-1,i}) \quad A_{n,3 \cdot 9^{(n-1)}} = -(A_{n-1,i}) \\
A_{n,4 \cdot 9^{(n-1)}+i} = A_{n-1,i} \quad A_{n,4 \cdot 9^{(n-1)}} = (A_{n-1,i}) \\
A_{n,5 \cdot 9^{(n-1)}+i} = -(A_{n-1,i}) \quad A_{n,5 \cdot 9^{(n-1)}} = -(A_{n-1,i}) \\
A_{n,6 \cdot 9^{(n-1)}+i} = A_{n-1,i} \quad A_{n,6 \cdot 9^{(n-1)}} = (A_{n-1,i}) \\
A_{n,7 \cdot 9^{(n-1)}+i} = -(A_{n-1,i}) \quad A_{n,7 \cdot 9^{(n-1)}} = -(A_{n-1,i}) \\
A_{n,8 \cdot 9^{(n-1)}+i} = A_{n-1,i} \quad A_{n,8 \cdot 9^{(n-1)}} = (A_{n-1,i}).
\end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} A_{n,i} = A_{n-1,i} \\ A_{n,9^{(n-1)}+i} = -(A_{n-1,i}) \\ A_{n,2 \cdot 9^{(n-1)}+i} = A_{n-1,i} \\ A_{n,3 \cdot 9^{(n-1)}+i} = -(A_{n-1,i}) \\ A_{n,4 \cdot 9^{(n-1)}+i} = A_{n-1,i} \\ A_{n,5 \cdot 9^{(n-1)}+i} = -(A_{n-1,i}) \\ A_{n,6 \cdot 9^{(n-1)}+i} = A_{n-1,i} \\ A_{n,7 \cdot 9^{(n-1)}+i} = -(A_{n-1,i}) \\ A_{n,8 \cdot 9^{(n-1)}+i} = A_{n-1,i} \end{array}} \right\} (4.1)$$

Pada saat  $A_{2,28}$  dan  $A_{2,55}$  terjadi perbedaan nilai sehingga rumus umum dari dua sudut tersebut (untuk  $i = 1, 2, 3, \dots, 9^n$ ) yaitu:

$$\left. \begin{array}{l}
A_{n,3 \cdot 9^{(n-1)}+i} = -(A_{n-1,i}) - \frac{\pi}{2} \\
A_{n,6 \cdot 9^{(n-1)}+i} = (A_{n-1,i}) + \frac{\pi}{2} \cdot
\end{array} \right\} (4.2)$$

jarum jam membentuk sudut  $\phi$ . Jika  $|OP| = |PQ| = d$  dan  $\delta = (\theta - \phi)$ , maka hubungan koordinat titik-titiknya yaitu:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1 + d \cos \delta = d \cos \delta + d \cos \delta \\ y_2 &= y_1 + d \sin \delta = d \sin \delta + d \sin \delta. \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

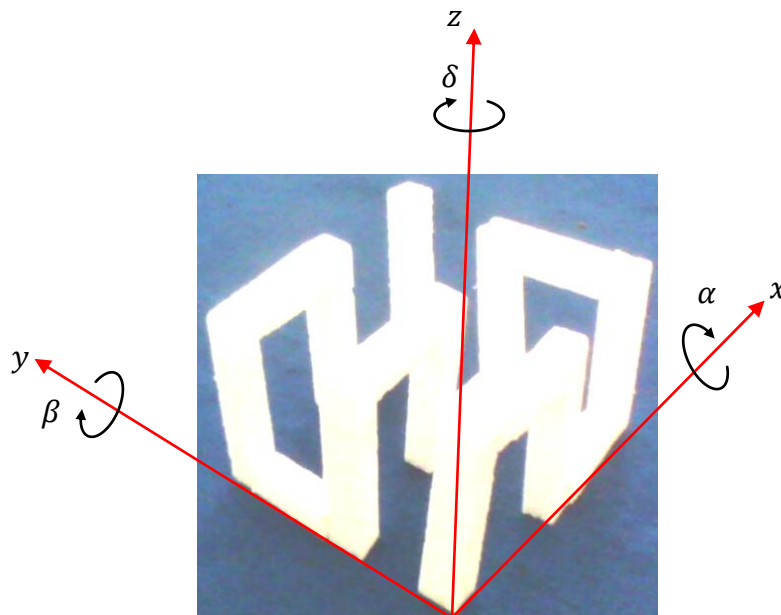
Rumus (4.5) digunakan dalam merumuskan titik-titik pada Kurva Peano, dengan menentukan nilai  $d$  terlebih dahulu. Pada subbab 2.4.2 tentang interpretasi geometri Kurva Peano, Sagan menjelaskan bahwa kita dapat memperoleh Kurva Peano jika mempartisi  $I$  ke dalam  $3^{2n}$  subinterval yang kongruen dan memetakan ke dalam  $3^{2n}$ , dimana  $n = 1, 2, 3, \dots$  subpersegi.  $Q = [0,1]^2$  dipartisi menjadi  $3^2$  subpersegi yang kongruen untuk mendapatkan Kurva Peano generasi ke-1. Tahap selanjutnya, setiap subpersegi tersebut akan dipartisi lagi menjadi  $3^2$  subpersegi kecil yang kongruen untuk Kurva Peano generasi ke-2, demikian seterusnya.

Oleh karena itu, untuk memenuhi definisi Kurva Peano tersebut, digunakan nilai  $d = \frac{1}{3^n}$  dengan  $n = 1, 2, 3, \dots, h$  dan posisi titik awal beserta titik-titik lainnya yang akan diuraikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} x_{0,0} &= \frac{1}{3} & y_{0,0} &= \frac{1}{3} \\ x_{1,0} &= \frac{x_{0,0}}{3} & y_{1,0} &= \frac{y_{0,0}}{3} \\ x_{1,1} &= x_{1,0} + \frac{1}{3} \cos A_{1,1} & y_{1,1} &= y_{1,0} + \frac{1}{3} \sin A_{1,1} \\ x_{1,2} &= x_{1,1} + \frac{1}{3} \cos A_{1,2} & y_{1,2} &= y_{1,1} + \frac{1}{3} \sin A_{1,2} \\ & \vdots & & \vdots \\ x_{1,8} &= x_{1,7} + \frac{1}{3} \cos A_{1,8} & y_{1,8} &= y_{1,7} + \frac{1}{3} \sin A_{1,8} \end{aligned}$$

$$p_1 : L \rightarrow LFRFL - F - RFLFR + F + LFRFL - \&F \&RFLFR + F + LFRFL - \\ F - RFLFR + \wedge F \wedge LFRFL - F - RFLFR + F + LFRFL.$$

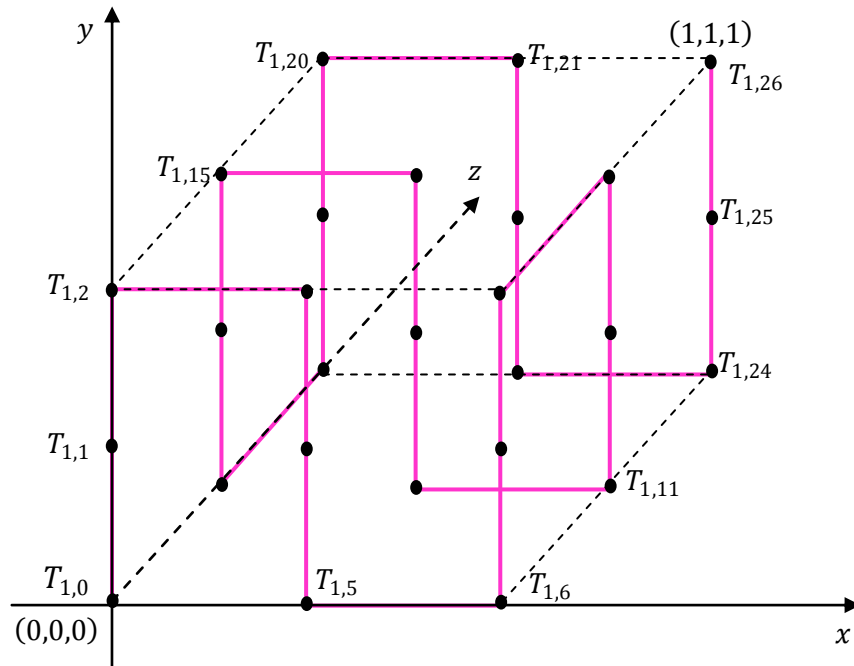
Komponen-komponen *L-systems* tersebut akan digunakan dalam penafsiran secara manual dengan mendefinisikan simbol-simbol pada *L-systems* Kurva Peano ke dalam interpretasi gerak kura-kura 3D yang telah diuraikan pada subsubbab 2.3.4. Penafsiran secara manual untuk Kurva Peano 3D dapat dilihat pada Gambar 4.4.



Gambar 4.4 Penafsiran Kurva Peano 3D dalam gerak kura-kura

Simbol + dan - pada *L-systems* Kurva Peano merupakan interpretasi gerak belok ke kiri dan belok ke kanan menggunakan matriks rotasi  $\mathbf{R}(\alpha)$ , simbol  $\wedge$  dan  $\&$  pada *L-systems* Kurva Peano merupakan interpretasi gerak belok ke kiri dan belok ke kanan menggunakan matriks rotasi  $\mathbf{R}(\beta)$ , dan simbol  $\backslash$  dan  $/$  pada *L-systems* Kurva Peano merupakan interpretasi gerak belok ke kiri dan belok ke kanan menggunakan matriks rotasi  $\mathbf{R}(\delta)$  yang didefinisikan sebagai nilai perubahan sudut.





Gambar 4.5 Penamaan titik Kurva Peano 3D untuk  $g_1$

## 2. Perumusan Sudut

Perumusan sudut pada Kurva Peano 3D diperoleh dengan cara mendefinisikan setiap simbol  $+$ ,  $-$ ,  $\&$ ,  $\wedge$  /  $/$ , dan  $\setminus$  yang telah dijelaskan pada subsubbab 4.1.2.a. Jika dalam 2D digunakan hanya satu sudut untuk perubahan pada setiap posisi titik yaitu  $A_{n,i}$ , maka dalam 3D digunakan dua sudut yaitu sudut  $A_{n,i}$  dan  $B_{n,i}$ . Berdasarkan penelitian yang dilakukan pada skripsi ini, diperoleh nilai-nilai sudut  $A$  dan  $B$  untuk generasi pertama ( $g_1$ ) sebagai berikut.

$$\begin{array}{cccc}
 A_{1,1} = 0^\circ & A_{1,14} = 0^\circ & B_{1,1} = 0^\circ & B_{1,14} = 0^\circ \\
 A_{1,2} = 0^\circ & A_{1,15} = \frac{\pi}{2} & B_{1,2} = 0^\circ & B_{1,15} = 0^\circ \\
 A_{1,3} = -\frac{\pi}{2} & A_{1,16} = \frac{\pi}{2} & B_{1,3} = 0^\circ & B_{1,16} = 0^\circ \\
 A_{1,4} = -\frac{\pi}{2} & A_{1,17} = 0^\circ & B_{1,4} = 0^\circ & B_{1,17} = 0^\circ
 \end{array}$$

Rumus umum perubahan sudut  $A_{n,i}$  dengan  $n \geq 2$  (untuk  $i = 1, 2, \dots, 9^{(n-1)}$ ) dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 A_{n,3^n * 9^{(n-1)} + i} &= -(A_{n-1,i}) - \frac{\pi}{2} \\
 A_{n,2 * 3^n * 9^{(n-1)} + i} &= (A_{n-1,i}) + \frac{\pi}{2} \\
 A_{n,3 * 3^n * 9^{(n-1)} + i} &= (A_{n-1,i}) + \frac{\pi}{2} \\
 A_{n,4 * 3^n * 9^{(n-1)} + i} &= -(A_{n-1,i}) - \frac{\pi}{2} \\
 A_{n,5 * 3^n * 9^{(n-1)} + i} &= (A_{n-1,i}) + \frac{\pi}{2} \\
 A_{n,6 * 3^n * 9^{(n-1)} + i} &= (A_{n-1,i}) + \frac{\pi}{2} \\
 A_{n,7 * 3^n * 9^{(n-1)} + i} &= -(A_{n-1,i}) - \frac{\pi}{2} \\
 A_{n,8 * 3^n * 9^{(n-1)} + i} &= (A_{n-1,i}) + \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Perputaran sudut pada  $A_{n,i}$  (sudut pada generasi ke- $n$  setelah perulangan) diperoleh dengan cara menjumlahkan  $A_{n,i}'$  (sudut untuk Kurva Peano generasi ke- $n$ ) dan  $A_{n,i-1}$  (sudut pada titik  $(i-1)$ ) sehingga diperoleh hubungan:

$$A_{n,i} = A_{n,i}' + A_{n,i-1} \tag{4.8}$$

Sedangkan rumus umum perubahan sudut  $B_{n,i}$  dengan  $n = 2, 3, \dots, h$  dan  $i = 1, 2, \dots, 9^n$  dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 B_{n,3^n * 9^{(n-1)} + i} &= -(B_{n-1,i}) - \frac{\pi}{2} \\
 B_{n,6 * 3^n * 9^{(n-1)} + i} &= (B_{n-1,i}) + \frac{\pi}{2}
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Perputaran sudut pada  $B_{n,i}$  (sudut pada generasi ke- $n$  setelah perulangan) diperoleh dengan cara menjumlahkan  $B_{n,i}'$  (sudut untuk Kurva

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= x_{1,1} + \frac{1}{3} \cos A_{1,2} \sin B_{1,2} & y_{1,2} &= y_{1,1} + \frac{1}{3} \cos B_{1,2} \\
&\vdots & &\vdots \\
x_{1,26} &= x_{1,25} + \frac{1}{3} \cos A_{1,26} \sin B_{1,26} & y_{1,26} &= y_{1,25} + \frac{1}{3} \cos B_{1,26} \\
z_{0,0} &= \frac{1}{3} \\
z_{1,0} &= \frac{z_{0,0}}{3} \\
z_{1,1} &= z_{1,0} + \frac{1}{3} \sin A_{1,1} \sin B_{1,1} \\
z_{1,2} &= z_{1,1} + \frac{1}{3} \sin A_{1,2} \sin B_{1,2} \\
&\vdots \\
z_{1,26} &= z_{1,25} + \frac{1}{3} \sin A_{1,26} \sin B_{1,26} \\
x_{2,0} &= \frac{x_{1,0}}{3} & y_{2,0} &= \frac{y_{1,0}}{3} \\
x_{2,1} &= x_{2,0} + \frac{1}{9} \cos A_{2,1} \sin B_{2,1} & y_{2,1} &= y_{2,0} + \frac{1}{9} \cos A_{2,1} \\
x_{2,2} &= x_{2,1} + \frac{1}{9} \cos A_{2,2} \sin B_{2,2} & y_{2,2} &= y_{2,1} + \frac{1}{9} \cos A_{2,2} \\
&\vdots & &\vdots \\
x_{2,728} &= x_{2,727} + \frac{1}{9} \cos A_{2,728} \sin B_{2,728} & y_{2,728} &= y_{2,727} + \frac{1}{9} \cos A_{2,728} \\
z_{2,0} &= \frac{z_{0,0}}{3} \\
z_{2,1} &= z_{2,0} + \frac{1}{9} \sin A_{2,1} \sin B_{2,1} \\
z_{2,2} &= z_{2,1} + \frac{1}{9} \sin A_{2,2} \sin B_{2,2} \\
&\vdots \\
z_{2,728} &= z_{2,727} + \frac{1}{9} \sin A_{2,728} \sin B_{2,728}
\end{aligned}$$

2. titik-titik awal yaitu:

$$x_{0,0} = \frac{1}{3}; y_{0,0} = \frac{1}{3}; x_{n,0} = \frac{x_{n-1,0}}{3}; y_{n,0} = \frac{y_{n-1,0}}{3}; \text{ dan } T_{n,0} = (x_{n,0}, y_{n,0}).$$

$$x(1,1) = 1/3^{(n+1)};$$

$$y(1,1) = 1/3^{(n+1)};$$

b. 3D:

1. sudut-sudut awal yaitu:

Sudut-sudut A:

$$A_{1,1} = 0^\circ, A_{1,2} = 0^\circ, A_{1,3} = -\frac{\pi}{2}, A_{1,4} = -\frac{\pi}{2}, A_{1,5} = 0^\circ, A_{1,6} = \frac{\pi}{2},$$

$$A_{1,7} = \frac{\pi}{2}, A_{1,8} = 0^\circ, A_{1,9} = -\frac{\pi}{2}, A_{1,10} = -\frac{\pi}{2}, A_{1,11} = 0^\circ, A_{1,12} = \frac{\pi}{2},$$

$$A_{1,13} = \frac{\pi}{2}, A_{1,14} = 0^\circ, A_{1,15} = -\frac{\pi}{2}, A_{1,16} = -\frac{\pi}{2}, A_{1,17} = 0^\circ, A_{1,18} = \frac{\pi}{2},$$

$$A_{1,19} = \frac{\pi}{2}, A_{1,20} = 0^\circ, A_{1,21} = -\frac{\pi}{2}, A_{1,22} = -\frac{\pi}{2}, A_{1,23} = 0^\circ, A_{1,24} = \frac{\pi}{2},$$

$$A_{1,25} = \frac{\pi}{2}, \text{ dan } A_{1,26} = 0^\circ.$$

$$S = [0 \ 0 \ -\pi/2 \ -\pi/2 \ 0 \ \pi/2 \ \pi/2 \ 0 \ \pi/2 \ \pi/2 \ 0 \ \dots$$

$$-\pi/2 \ -\pi/2 \ 0 \ \pi/2 \ \pi/2 \ 0 \ \pi/2 \ \pi/2 \ 0 \ -\pi/2 \ \dots$$

$$-\pi/2 \ 0 \ \pi/2 \ \pi/2 \ 0];$$

Sudut-sudut B:

$$B_{1,1} = 0^\circ, B_{1,2} = 0^\circ, B_{1,3} = 0^\circ, B_{1,4} = 0^\circ, B_{1,5} = 0^\circ, B_{1,6} = 0^\circ,$$

$$B_{1,7} = 0^\circ, B_{1,8} = 0^\circ, B_{1,9} = -\frac{\pi}{2}, B_{1,10} = \frac{\pi}{2}, B_{1,11} = 0^\circ, B_{1,12} = 0^\circ,$$

$$B_{1,13} = 0^\circ, B_{1,14} = 0^\circ, B_{1,15} = 0^\circ, B_{1,16} = 0^\circ, B_{1,17} = 0^\circ, B_{1,18} =$$

$$-\frac{\pi}{2}, B_{1,19} = \frac{\pi}{2}, B_{1,20} = 0^\circ, B_{1,21} = 0^\circ, B_{1,22} = 0^\circ, B_{1,23} = 0^\circ,$$

$$B_{1,24} = 0^\circ, B_{1,25} = 0^\circ \text{ dan } B_{1,26} = 0^\circ.$$

$$T = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -\pi/2 \ \pi/2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots$$

$$-\pi/2 \ \pi/2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0];$$

2. titik-titik awal yaitu:

$$x_{0,0} = \frac{1}{3}; y_{0,0} = \frac{1}{3}; z_{0,0} = \frac{1}{3}; x_{n,0} = \frac{x_{n-1,0}}{3}; y_{n,0} = \frac{y_{n-1,0}}{3}; z_{n,0} = \frac{z_{n-1,0}}{3};$$

$$\text{ dan } T_{n,0} = (x_{n,0}, y_{n,0}, z_{n,0}).$$

$$x(1,1) = 1/3^{(n+1)};$$

Sudut-sudut  $B$ :

$$B_{1,1} = 0^\circ, B_{1,2} = 0^\circ, B_{1,3} = 0^\circ, B_{1,4} = 0^\circ, B_{1,5} = 0^\circ, B_{1,6} = 0^\circ, \\ B_{1,7} = 0^\circ, B_{1,8} = 0^\circ, B_{1,9} = -\frac{\pi}{2}, B_{1,10} = \frac{\pi}{2}, B_{1,11} = 0^\circ, B_{1,12} = 0^\circ, \\ B_{1,13} = 0^\circ, B_{1,14} = 0^\circ, B_{1,15} = 0^\circ, B_{1,16} = 0^\circ, B_{1,17} = 0^\circ, B_{1,18} = \\ -\frac{\pi}{2}, B_{1,19} = \frac{\pi}{2}, B_{1,20} = 0^\circ, B_{1,21} = 0^\circ, B_{1,22} = 0^\circ, B_{1,23} = 0^\circ, \\ B_{1,24} = 0^\circ, B_{1,25} = 0^\circ, B_{1,26} = 0^\circ, \text{ dan } n = 1.$$

$$T = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -\pi/2 \ \pi/2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \\ -\pi/2 \ \pi/2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0];$$

2. iterasi  $i$  dari 1 sampai  $27^n$  dan kerjakan persamaan (4.7), (4.9) dan (4.12).

$$C(1, 1 * (3^n) * 9^{(n-1)+1}) = C(1, 1 * (3^n) * 9^{(n-1)+1}) - \pi/2; \\ C(1, 2 * (3^n) * 9^{(n-1)+1}) = C(1, 2 * (3^n) * 9^{(n-1)+1}) + \pi/2; \\ C(1, 3 * (3^n) * 9^{(n-1)+1}) = C(1, 3 * (3^n) * 9^{(n-1)+1}) + \pi/2; \\ C(1, 4 * (3^n) * 9^{(n-1)+1}) = C(1, 4 * (3^n) * 9^{(n-1)+1}) - \pi/2; \\ C(1, 5 * (3^n) * 9^{(n-1)+1}) = C(1, 5 * (3^n) * 9^{(n-1)+1}) + \pi/2; \\ C(1, 6 * (3^n) * 9^{(n-1)+1}) = C(1, 6 * (3^n) * 9^{(n-1)+1}) + \pi/2; \\ C(1, 7 * (3^n) * 9^{(n-1)+1}) = C(1, 7 * (3^n) * 9^{(n-1)+1}) - \pi/2; \\ C(1, 8 * (3^n) * 9^{(n-1)+1}) = C(1, 8 * (3^n) * 9^{(n-1)+1}) + \pi/2;$$

$$D(1, 3 * (3^n) * 9^{(n-1)+1}) = D(1, 3 * (3^n) * 9^{(n-1)+1}) + \pi/2; \\ D(1, 6 * (3^n) * 9^{(n-1)+1}) = D(1, 6 * (3^n) * 9^{(n-1)+1}) + \pi/2;$$

$$x(1, 1) = 1/3^{(n+1)}; \\ y(1, 1) = 1/3^{(n+1)}; \\ z(1, 1) = 1/3^{(n+1)}; \\ x(1, i) = x(1, i-1) + \cos(A(1, i)) * \sin(B(1, i)) / 3^n; \\ y(1, i) = y(1, i-1) + \cos(B(1, i)) / 3^n; \\ z(1, i) = z(1, i-1) + \sin(A(1, i)) * \sin(B(1, i)) / 3^n;$$

3. kerjakan  $P_{n,i} =$  barisan  $T_{n,i}$  dengan  $n$  dari 1 sampai  $h$  dan  $i$  dari 0 sampai  $(9^n - 1)$ , kemudian plot  $P_{n,i}$ .

$$A(1, i) = A(1, i-1) + A(1, i); \\ B(1, i) = B(1, i-1) + B(1, i);$$

2. iterasi  $n$  dari 2 sampai  $h$  dan iterasi  $i$  dari 1 sampai  $9^n$ , kerjakan persamaan (4.7) dan (4.9).

$$C(1, 1 * (3^n) * 9^{(n-1)+1}) = C(1, 1 * (3^n) * 9^{(n-1)+1}) - \pi/2;$$

$$C(1, 2 * (3^n) * 9^{(n-1)+1}) = C(1, 2 * (3^n) * 9^{(n-1)+1}) + \pi/2;$$

$$C(1, 3 * (3^n) * 9^{(n-1)+1}) = C(1, 3 * (3^n) * 9^{(n-1)+1}) + \pi/2;$$

$$C(1, 4 * (3^n) * 9^{(n-1)+1}) = C(1, 4 * (3^n) * 9^{(n-1)+1}) - \pi/2;$$

$$C(1, 5 * (3^n) * 9^{(n-1)+1}) = C(1, 5 * (3^n) * 9^{(n-1)+1}) + \pi/2;$$

$$C(1, 6 * (3^n) * 9^{(n-1)+1}) = C(1, 6 * (3^n) * 9^{(n-1)+1}) + \pi/2;$$

$$C(1, 7 * (3^n) * 9^{(n-1)+1}) = C(1, 7 * (3^n) * 9^{(n-1)+1}) - \pi/2;$$

$$C(1, 8 * (3^n) * 9^{(n-1)+1}) = C(1, 8 * (3^n) * 9^{(n-1)+1}) + \pi/2;$$

$$D(1, 3 * (3^n) * 9^{(n-1)+1}) = D(1, 3 * (3^n) * 9^{(n-1)+1}) + \pi/2;$$

$$D(1, 6 * (3^n) * 9^{(n-1)+1}) = D(1, 6 * (3^n) * 9^{(n-1)+1}) + \pi/2;$$

3. iterasi  $n$  dari 2 sampai  $h$  dan iterasi  $i$  dari 1 sampai  $9^n$ , kerjakan persamaan (4.8), (4.10) dan (4.12).

$$A(1, i) = A(1, i-1) + A(1, i);$$

$$B(1, i) = B(1, i-1) + B(1, i);$$

$$x(1, 1) = 1/3^{(n+1)};$$

$$y(1, 1) = 1/3^{(n+1)};$$

$$z(1, 1) = 1/3^{(n+1)};$$

$$x(1, i) = x(1, i-1) + \cos(A(1, i)) * \sin(B(1, i)) / 3^n;$$

$$y(1, i) = y(1, i-1) + \cos(B(1, i)) / 3^n;$$

$$z(1, i) = z(1, i-1) + \sin(A(1, i)) * \sin(B(1, i)) / 3^n;$$

4. kerjakan  $P_{n,i}$  = barisan  $T_{n,i}$  dengan  $n$  dari 1 sampai  $h$  dan  $i$  dari 0 sampai  $(9^n - 1)$ , kemudian plot  $P_{n,i}$ .

$$A = [\pi/2 \ C];$$

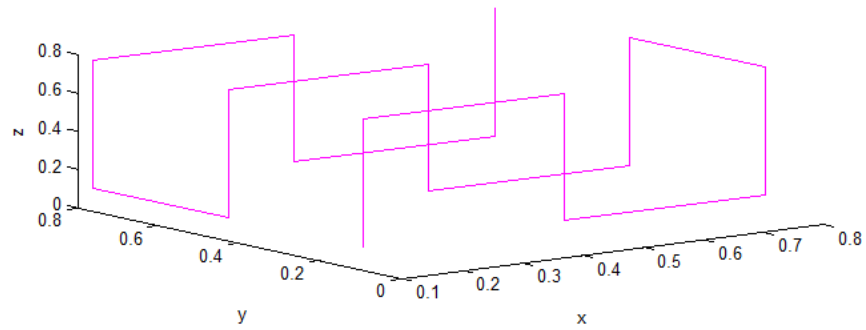
$$B = [\pi/2 \ D];$$

$$\text{plot3}(x, y, z, '-m');$$

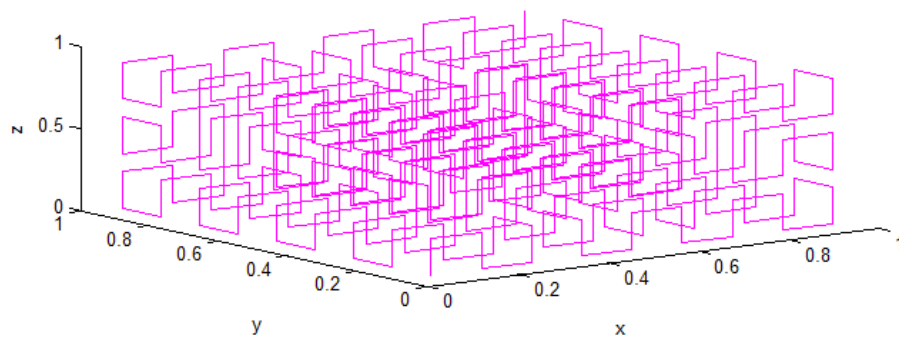
Program visualisasi *L-systems* dalam membangun Kurva Peano 2D dan 3D secara lengkap dapat dilihat pada Lampiran.

b. Kurva Peano 3D

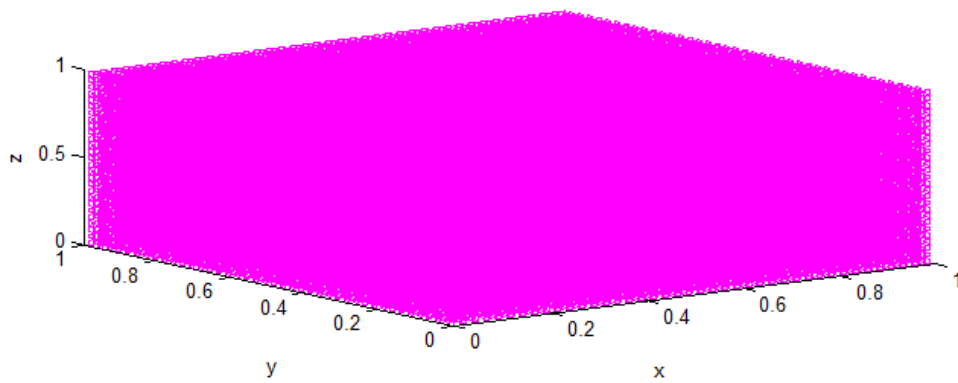
Hasil tampilan program dalam beberapa generasi untuk Kurva Peano 3D pada Gambar 4.7.



(a)



(b)



(c)

Gambar 4.7 Tampilan program Kurva Peano 3D (a)  $g_1$ , (b)  $g_2$ , dan (c)  $g_4$ .

hingga generasi yang diinginkan. Hal ini berulang sampai tak hingga, maka  $I$  dan  $\mathcal{W}$  dipartisi menjadi  $27^n$  subinterval yang kongruen.

Menggunakan *L-systems* dalam membangun Kurva Peano merupakan suatu proses yang menarik. Dengan mengetahui komponen *L-systems* dalam 2D dan 3D, kemudian mengiterasikan komponen tersebut serta menerjemahkan ke dalam penafsiran secara manual, dapat diperkirakan bentuk objek yang dibangun. Dalam membangun Kurva Peano, dibutuhkan dua tahap perhitungan, yaitu perumusan sudut dan perumusan titik. Proses perhitungan dan penafsiran matematis dapat dilakukan dengan berlandaskan pada penafsiran secara manualnya.



## DAFTAR PUSTAKA

- Amir, F. 2009. *Penerapan Sensitive L-systems Pada Pemodelan Batang Tanaman*. Tidak Diterbitkan. Skripsi. Jember: Fakultas MIPA Universitas Jember.
- Bastian, A. 2011. *Desain Kap Lampu Duduk Melalui Penggabungan Benda-benda Geometri Ruang*. Tidak Diterbitkan. Skripsi. Jember: Fakultas MIPA Universitas Jember.
- Dickau, R. M. 1996. *Two Dimensional L-systems*. [on line].  
<http://mathforum.org/advanced/robertd/lsys2d.html>. [21 Agustus 2011].
- Ginancar, W. 2010. *Penerapan L-systems Dalam Membangun Kurva Hilbert Dimensi Dua*. Tidak Diterbitkan. Skripsi. Jember: Fakultas MIPA Universitas Jember.
- Handoko, E. Y. 2004. *Pendidikan dan Pelatihan (Diklat) Teknis Pengukuran dan Pemetaan Kota*. Surabaya: Fakultas Teknik Sipil dan Perencanaan ITS Surabaya.
- Kusno. 2002. *Geometri Rancang Bangun Studi Aljabar Vektor Garis, Lingkaran dan Ellips*. Jember: Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember.
- Lawder, J. K. 2000. *Calculation of Mapping Between One and n-dimensional Values Using Hilbert Space-filling Curve*. [on line].  
[http://www.dcs.bbk.ac.uk/Tristarp/pubs/JL1\\_00.pdf](http://www.dcs.bbk.ac.uk/Tristarp/pubs/JL1_00.pdf). [15 Agustus 2011].
- Nopiyanto, I. 2006. *Membangun Objek-Objek Fraktal dengan L-Systems*. Tidak Diterbitkan. Skripsi. Jember: Fakultas MIPA Universitas Jember.
- Ochoa, A. 1998. *An Introduction to Lindenmayer Systems*. [on line].  
[http://nsdl.longcapa.org/res/msu/botonl/b\\_online/e28\\_3/lsys.html](http://nsdl.longcapa.org/res/msu/botonl/b_online/e28_3/lsys.html). [27 Juli 2011].

## Lampiran A

### Program Visualisasi Penerapan *L-Systems* Dalam Membangun Kurva Peano 2D

```
h=str2num(get(edit1,'String'));

if h<=0
    errordlg('Error !!!, jumlah iterasi harus > 0',' Error');
    break;
end

A=[0 0 -pi/2 -pi/2 0 pi/2 pi/2 0];
if h==1
    n=1;
    D=[pi/2 A];
    x=zeros(1,9^n);
    y=zeros(1,9^n);
    x(1,1)=1/3^(n+1);
    y(1,1)=1/3^(n+1);
    for i=2:9^n
        D(1,i)=D(1,i-1)+D(1,i);
        x(1,i)=x(1,i-1)+cos(D(1,i))/3;
        y(1,i)=y(1,i-1)+sin(D(1,i))/3;
    end
else
    for n=2:h

        C=[A 0 -A 0 A -pi/2 -A 0 A 0 -A pi/2 A 0 -A 0 A];
        C(1,3*9^(n-1)+1)=C(1,3*9^(n-1)+1)-pi/2;
        C(1,6*9^(n-1)+1)=C(1,6*9^(n-1)+1)+pi/2;
        D=[pi/2 C];
        x=zeros(1,9^n);
        y=zeros(1,9^n);
```

## Lampiran B

### Program Visualisasi Penerapan *L-Systems* Dalam Membangun Kurva Peano 3D

```
h=str2num(get(edit1,'String'));

if h<=0
    errordlg('Error !!!, jumlah iterasi harus > 0',' Error');
    break;
end

S=[0 0 -pi/2 -pi/2 0 pi/2 pi/2 0 pi/2 pi/2 0 -pi/2 -pi/2 0 ...
   pi/2 pi/2 0 pi/2 pi/2 0 -pi/2 -pi/2 0 pi/2 pi/2 0];
T=[0 0 0 0 0 0 0 0 -pi/2 pi/2 0 0 0 0 0 0 0 -pi/2 pi/2 0 0 ...
   0 0 0 0 0];
if h==1
    n=1;
    A=[pi/2 S];
    B=[pi/2 T];
    x=zeros(1,27^n);
    y=zeros(1,27^n);
    z=zeros(1,27^n);
    x(1,1)=1/3^(n+1);
    y(1,1)=1/3^(n+1);
    z(1,1)=1/3^(n+1);
    for i=2:27^n
        A(1,i)=A(1,i-1)+A(1,i);
        B(1,i)=B(1,i-1)+B(1,i);
        x(1,i)=x(1,i-1)+cos(A(1,i))*sin(B(1,i))/3^n;
        y(1,i)=y(1,i-1)+cos(B(1,i))/3^n;
        z(1,i)=z(1,i-1)+sin(A(1,i))*sin(B(1,i))/3^n;
    end
else
```

```
    y(1,i)=y(1,i-1)+cos(B(1,i))/3^n;  
    z(1,i)=z(1,i-1)+sin(A(1,i))*sin(B(1,i))/3^n;  
end  
S=C;  
T=D;  
    end  
end  
subplot('Position',[0.25 0.13 0.7 0.4]),plot3(x,y,z,'-m');  
xlabel('x');  
ylabel('y');  
zlabel('z');
```

```

'string',[],'backgroundcolor',[0 0 0],'fontname', ...
'times new roman','fontsize',20,'fontweight','bold', ...
'foregroundcolor',[0.8 0.5 0]);
%=====
labell=uicontrol('parent',win1,'units','points', ...
'position',[595 0 6 386],'style','Text',...
'string',[],'backgroundcolor',[0 0 0],'fontname', ...
'times new roman','fontsize',20,'fontweight','bold', ...
'foregroundcolor',[0.8 0.5 0]);
%=====
labell=uicontrol('parent',win1,'units','points', ...
'position',[104 320 491 65],'style','Text','string', ...
['VISUALISASI KURVA PEANO'],'backgroundcolor', ...
[.5 .5 .5],'fontname','times new roman', 'fontsize', ...
20,'fontweight', 'bold',... 'foregroundcolor',[1 .4 .6]);

labell=uicontrol('parent',win1,'units','points', ...
'position',[104 310 491 50],'style','Text','string', ...
['Menggunakan L-Systems'],'backgroundcolor',[.5 .5 .5],
'fontname','times new roman','fontsize',17, ...
'fontweight', 'bold','foregroundcolor',[1 .4 .6]);

labell=uicontrol('parent',win1,'units','points', ...
'position',[104 305 491 30],'style','Text','string', ...
['FMIPA MATEMATIKA'],'backgroundcolor',[.5 .5 .5], ...
'fontname','times new roman','fontsize',17, ...
'fontweight', 'bold','foregroundcolor',[1 .4 .6]);
labell=uicontrol('parent',win1,'units','points', ...
'position',[104 290 491 25],'style','Text','string', ...
['Universitas Jember'],'backgroundcolor',[.5 .5 .5], ...
'fontname','times new roman','fontsize',17, ...
'fontweight', 'bold','foregroundcolor',[1 .4 .6]);

```

```

edit1=uicontrol('parent',win1,'units','points', ...
'position',[15 200 40 20],'backgroundcolor',[1 1 1], ...
'style','Edit', 'string','1', 'fontname', 'arial', ...
'HorizontalAlignment','left','fontweight','bold', ...
'fontsize',13);
%=====
menu1=uimenu('parent',win1, 'Label','');
menu2=uimenu('parent',win1,'Label','Keluar', ...
'Callback','close');
%=====
grafik1=axes('parent',win1,'units','points', ...
'position', [11 262 80 150], 'fontsize',5,'color', ...
[1 1 1]);
grafik2=axes('parent',win1,'units','points', ...
'position',[130 10 440 250],'fontsize',8,'color', ...
[1 1 1]);
%=====
pros=uicontrol('parent',win1,'units','points', ...
'position',[13 160 35 30],'style','Pushbutton', ...
'callback','dimensi2','string','2D','fontname', ...
'times new roman','fontsize',14);

pros=uicontrol('parent',win1,'units','points', ...
'position',[57 160 35 30],'style','Pushbutton', ...
'callback','dimensi3','string','3D','fontname', ...
'times new roman','fontsize',14);

set(win1,'CurrentAxes',grafik1);
peano=imread('unej.JPG');
imshow(peano);

```