e-ISSN: 2580-460X
p-ISSN: 2580-4596

Volume 3 Nomor 1 Tahun 2019

PROSIDING SIMaNIs

SEMINAR NASIONAL INTEGRASI MATEMATIKA DAN NILAI ISLAMI

Malang, 21 September 2019

Kesekretariatan:
Ruang Sidang Jurusan Matematika
Gedung BJ. Habibie Fakultas Sains dan Teknologi Lantai 3
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Jl. Gajayana No. 50 Malang 65144, email: simanis@uin-malang.ac.id

Editorial Team

Editorial Office
Mathematics Department,
Universitas Islam NegeriMaulana Malik Ibrahim Malang
JalanGajayana 50 Malang, JawaTimur, Indonesia 65144
Phone (+62) 81336397956, Faximile (+62) 341 558933
e-mail: simanis@uin-malang.ac.id

Vol 3 No 1 (2019): Prosiding SI MaNIs (Seminar NasionalIntegrasiMatematikadanNilaiIslami)

Published: 2020-02-14

DAFTAR ISI

Prosiding Seminar Nasional Integrasi Matematika dan Nilai Islami
Vol.3, No.1, September 2019, hlm. 55-60
p-ISSN: 2580-4596; e-ISSN: 2580-460X

Pembangkitan Fraktal Pohon Pythagoras Menggunakan *Iterated Function System*

Firdaus Ubaidillah, Kosala Dwidja Purnomo, Jafna Kamalia Sundusia
Program Studi Matematika, Universitas Jember
Email: firdaus_u@yahoo.com, kosala.fmipa@unej.ac.id, jafnakamaliasundusia@gmail.com

Info Artikel

Riwayat Artikel:

Diterima: 21 Oktober 2019
Direvisi: 18 November 2019
Diterbitkan: 15 Januari 2020

Kata Kunci:

Pohon Pythagoras
IFS
Dilatasi
Rotasi

ABSTRAK

Fraktal merupakan objek geometri yang tampak memiliki persamaan bentuk yang mewakili bentuk dasar objek itu sendiri jika dilihat dari skala tertentu dan merupakan bagian terkecil dari struktur suatu objek secara keseluruhan. Keberadaan geometri fraktal menunjukkan bahwa matematika bukanlah ilmu yang datar, tetapi merupakan ilmu yang indah yang dapat menghasilkan karya-karya yang memiliki nilai seni tinggi. Ada banyak sekali objek fraktal yang sering dijumpai di alam atau dalam kehidupan manusia, seperti misalnya pohon. Pohon dapat dibangun secara berulang dari segitiga siku-siku dengan persegi yang dipasang pada masing-masing sisi, yang disebut sebagai pohon Pythagoras, dimana pohon Pythagoras terinspirasi dari teorema Pythagoras. Berbagai bentuk pohon Pythagoras dapat diperoleh dengan memvariasikan sudutnya, yaitu melalui operasi dilatasi dan rotasi dalam IFS, sehingga diperoleh pohon Pythagoras dengan sudut tetap, sudut beda per iterasi, dan sudut random per iterasi.

Korespondensi:

Dr. Firdaus Ubaidillah, S.Si., M.Si., Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si., Jafna Kamalia Sundusia,
Prodi Matematika,
Universitas Jember,
Jl. Kalimantan III/25 Kampus Tegal Boto Jember 68121
Email: firdaus_u@yahoo.com

1. PENDAHULUAN

Ilmu pengetahuan dan teknologi saat ini berkembang sangat pesat terutama setelah ditemukannya komputer, yang mana komputer sangat membantu manusia dalam melakukan perhitungan matematika atau perhitungan lainnya. Salah satu bidang matematika yang berkembang cukup pesat dengan adanya komputer adalah fraktal. Kata fraktal pertama kali diperkenalkan oleh Mandelbrot dari bahasa Latin, yaitu kata sifat "*fractus*" yang berarti tidak teratur, dan dari kata kerja "*frangere*" yang artinya meretakkan atau membagi menjadi kepingan-kepingan [1]. Fraktal mempunyai dua ciri khas, yaitu *self-similarity* dan *infinite detail*. *Self-similarity* merupakan keadaan objek yang dibangun secara berulang dengan mengganti suatu gambar dengan yang sebangun, tetapi berukuran lebih kecil dari asalnya, sedangkan *infinite detail* merupakan objek fraktal yang memiliki bentuk dasar yang seakan-akan tidak habis-habis apabila diperhatikan [2].

Fraktal didapat dengan cara mengulang suatu pola yang dimiliki sehingga menghasilkan struktur atau bentuk yang serupa dengan bentuk semula pada setiap bagiannya. Salah satu cara yang dapat digunakan untuk mengkonstruksi fraktal yaitu menggunakan *Iterated Function Systems* (IFS). IFS pertama kali dipopulerkan oleh Michael Barnsley dalam bukunya *Fractal Everywhere*. IFS adalah suatu metode yang terasosiasi dengan fungsi iterasi untuk membentuk suatu fraktal [3].

Mandelbrot membagi fraktal menjadi dua jenis, yaitu: himpunan-himpunan fraktal (*fractal sets*) dan fraktal alami (*natural fractal*). Contoh *fractal sets* antara lain: segitiga Sierpinski, *Koch Snowflake*, karpet Sierpinski, himpunan Mandelbrot dan himpunan Cantor. Sedangkan contoh dari *natural fractal* antara lain: cabang-cabang pohon, bentuk pegunungan, garis pantai, dan daun [1].

Salah satu bentuk fraktal jenis kedua adalah cabang-cabang pohon. Cabang-cabang pohon dapat disusun dengan bentuk dasar persegi, yang disebut sebagai pohon Pythagoras. Pohon Pythagoras adalah sebuah fraktal yang dibangun secara berulang dari segitiga siku-siku dengan persegi yang dipasang pada masing-masing sisi. Pohon Pythagoras terinspirasi dari teorema Pythagoras yang mengatakan bahwa kuadrat panjang sisi miring segitiga siku-siku sama dengan jumlah kuadrat sisi-sisi yang lain [4].

Dalam penelitiannya Ramandhani menyatakan bahwa pada pembangkitan dengan metode IFS, gambar yang menjadi bentuk awal mengalami sekumpulan transformasi, baik itu dengan translasi, rotasi, refleksi dan dilatasi sehingga menghasilkan gambar baru [5]. Setiap gambar-gambar baru ini akan ditransformasikan lagi dengan sekumpulan transformasi tadi sedemikian sehingga setiap transformasi pada gambar akan membentuk iterasi. Transformasi tersebut bersifat kontraktif, yaitu mengakibatkan titik-titik pada gambar menjadi semakin berdekatan dan gambar tadi pada akhirnya akan konvergen ke suatu bentuk. Purnomo menyatakan bahwa untuk membangkitkan segitiga Sierpinski menggunakan transformasi affine dalam bentuk dilatasi dan translasi pada segitiga Sierpinski dengan bentuk dasar segitiga sama sisi dan benda geometris segitiga sama sisi dan segiempat untuk mengisi bentuk dasarnya [6]. Prasasti (2018) menyatakan bahwa motif anyaman dapat dibangkitkan oleh geometri bujur sangkar dan persegi panjang dengan operasi translasi, dilatasi dan translasi, serta rotasi dan translasi dalam IFS [7].

Berdasarkan uraian di atas, penulis ingin membangun berbagai bentuk pohon Pythagoras dengan memanfaatkan metode IFS. Dengan metode IFS, pohon Pythagoras dapat dibangkitkan melalui beberapa transformasi affine. Untuk menghasilkan berbagai bentuk pohon Pythagoras tersebut penulis menggunakan beberapa transformasi affine diantaranya dilatasi dan rotasi pada gambar benda geometri seperti persegi sebagai bentuk awal.

2. KAJIAN TEORI

2.1. *Iterated Function System* (IFS)

IFS merupakan suatu fungsi iterasi yang terdiri dari sekumpulan transformasi affine yang digunakan untuk membangun suatu objek fraktal. Transformasi affine yaitu transformasi linier meliputi dilatasi, rotasi dan translasi [8].

Definisi 2.2.1 Transformasi Linier

Misalkan V dan W adalah dua ruang vektor dan $f: V \to W$ adalah sebuah transformasi dari V ke W. Fungsi f dikatakan sebagai transformasi linier (pemetaan linier) apabila memenuhi dua sifat berikut [9],

a. (sifat kehomogenan) untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$ dan $\vec{v} \in V$ berlaku $f(\alpha\vec{v}) = \alpha f(\vec{v})$

b. (sifat aditif) untuk setiap $\vec{u}, \vec{v} \in V$ berlaku $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u})$+$f(\vec{v})$

Definisi 2.2.2 Translasi

Translasi merupakan transformasi yang memetakan titik (x, y) ke (x', y') yaitu bergeser sejauh p satuan searah sumbu x dan q satuan searah sumbu y, sehingga didapatkan persamaan [10]:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & + & p \\ y & + & q \end{bmatrix} \tag{1}$$

Definisi 2.2.3 Dilatasi

Dilatasi adalah transformasi yang mengubah ukuran bangun, tetapi tidak mengubah bentuk [9].

a. Dilatasi dengan pusat $O(0,0)$ faktor skala k ditulis $[O, k]$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{2}$$

b. Dilatasi dengan pusat $A(a, b)$ faktor skala k ditulis $[A(a, b), k]$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & - & a \\ y & - & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \tag{3}$$

Definisi 2.2.4 Rotasi

Rotasi adalah suatu perpindahan benda pada gerakan melingkar. Pada dimensi dua, benda akan berputar pada pusat rotasi. Jika $T: R^2 \to R^2$ adalah suatu transformasi yang memetakan titik (x, y) ke titik (x', y') dan misalkan θ adalah sebuah sudut tetap maka persamaan rotasi melalui pusat $P(a, b)$ dengan arah rotasi berlawanan arah jarum jam adalah [10],

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & - & a \\ y & - & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \tag{4}$$

Dan persamaan rotasi dengan arah rotasi searah jarum jam adalah,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & - & a \\ y & - & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \tag{5}$$

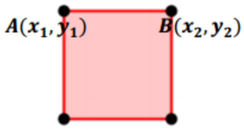
3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Bentuk Pohon Pythagoras dengan Operasi Dilatasi dan Rotasi dalam IFS

Pohon Pythagoras dibangkitkan dengan objek geometri persegi sebagai bentuk awal (Gambar 1). Objek geometri yang sudah ditentukan sebagai bentuk awal kemudian dilakukan transformasi affine dengan operasi dilatasi menggunakan Persamaan (3). Dilatasi ditentukan oleh titik pusat dan faktor skala dilatasi. Maka langkah awal untuk mencari skala dilatasi yaitu:

a. Menentukan jarak antara dua titik

Jarak antara dua titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ dinyatakan sebagai berikut.

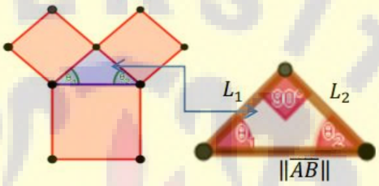


Gambar 1. Persegi

$$\|\overline{AB}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

dengan $\|\overline{AB}\|$ = jarak antara dua titik
(x_1, y_1) = koordinat titik pertama A
(x_2, y_2) = koordinat titik kedua B

b. Perbandingan trigonometri dalam segitiga siku-siku



Gambar 2. Segitiga Siku-Siku

Setelah didapat hasil $\|\overline{AB}\|$, maka L_1 danL_2 seperti pada Gambar 2 dapat dicari menggunakan rumus perbandingan trigonometri dalam segitiga siku-siku, yaitu:

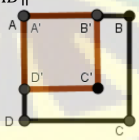
$L_1 = \|\overline{AB}\|. \sin \theta_2$
$L_2 = \|\overline{AB}\|. \sin \theta_1$
dengan jumlah ketiga sudut segitiga adalah 180°, maka $\theta_2 + \theta_1 = 90°$

c. Faktor skala dalam dilatasi

Faktor skala (k) adalah perbandingan antara panjang sisi tiap bayangan dan panjang sisi yang berkaitan pada benda.

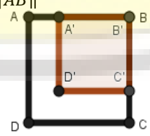
$$k = \frac{Panjang\ bayangan}{Panjang\ benda}$$

jika berpusat di $A(x, y)$ maka menggunakan $k_1 = \frac{L_1}{\|\overline{AB}\|}$, seperti pada Gambar 3:



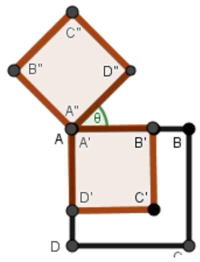
Gambar 3. Persegi yang Didilatasi dengan Pusat $A(x, y)$

jika berpusat di $B(x, y)$ maka menggunakan $k_2 = \frac{L_2}{\|\overline{AB}\|}$, seperti pada Gambar 4:



Gambar 4. Persegi yang didilatasi dengan Pusat $B(x, y)$

Setelah didapat hasil dilatasi dari objek geometri yang awal kemudian dilakukan rotasi dengan menentukan arah perputaran berlawanan arah jarum jam menggunakan Persamaan (4) dan searah jarum jam menggunakan Persamaan (5), kemudian menentukan titik pusat rotasi dan besar sudut rotasi seperti Gambar 5.



Gambar 5. Persegi yang Didilatasi dan Dirotasi

Setelah didapat hasil rotasi dari hasil dilatasi objek geometri awal maka dilakukan operasi dilatasi dan rotasi secara berulang-ulang sampai iterasi ke-t dengan titik pusat dilatasi dan rotasi yang berbeda pada objek geometri sebelumnya hingga membentuk pohon Pythagoras. Berikut langkah-langkah untuk menentukan titik pusat dilatasi dan rotasi dalam membangun objek fraktal pohon Pythagoras:

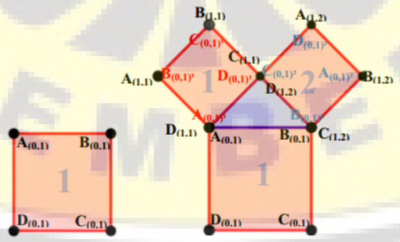
1. Ditetapkan bahwa satu persegi selalu menghasilkan 2 persegi baru (kiri dan kanan) yang merupakan hasil dilatasi dan rotasi. Dua persegi baru diperoleh dengan aturan:
   a. Satu persegi baru di arah kiri, diperoleh dari skala dilatasi yang dipakai yaitu $k_1 = \frac{L_1}{\|AB\|}$ dengan sudut rotasi θ_1 yang arah perputarannya berlawanan arah jarum jam, dimana titik pusat dilatasi dan titik pusat rotasi berada pada $A_{(t,r)}$.
   b. Satu persegi baru di arah kanan, diperoleh dari skala dilatasi yang dipakai yaitu $k_2 = \frac{L_2}{\|AB\|}$ dengan sudut rotasi θ_2 yang arah perputarannya searah jarum jam, dimana titik pusat dilatasi dan titik pusat rotasi berada pada $B_{(t,r)}$.
2. Hasil dari persegi yang dirotasi dengan arah perputaran berlawanan arah jarum jam disimbolkan dengan pangkat satu $(^1)$, sedangkan hasil dari persegi yang dirotasi dengan arah perputaran searah jarum jam disimbolkan dengan pangkat dua $(^2)$.
3. Ketika telah menghasilkan persegi yang baru, maka urutan titik-titik dari persegi dirubah dengan menggunakan aturan seperti dalam Tabel 1 berikut:

Tabel 1. Aturan Mengubah Penamaan Titik Hasil Rotasi

Titik-Titik Hasil Rotasi dengan Arah Rotasi Berlawanan Arah Jarum Jam	**Titik-Titik Hasil Rotasi dengan Arah Rotasi Searah Jarum Jam**
$\boldsymbol{A_{(t+1,2r-1)} = B_{(t.r)^1}}$	$A_{(t+1,2r)} = D_{(t.r)^2}$
$\boldsymbol{B_{(t+1,2r-1)} = C_{(t.r)^1}}$	$B_{(t+1,2r)} = A_{(t.r)^2}$
$\boldsymbol{C_{(t+1,2r-1)} = D_{(t.r)^1}}$	$C_{(t+1,2r)} = B_{(t.r)^2}$
$\boldsymbol{D_{(t+1,2r-1)} = A_{(t.r)^1}}$	$D_{(t+1,2r)} = C_{(t.r)^2}$

dengan t menunjukkan urutan iterasi dan r menunjukkan urutan persegi.

4. Kembali ke langkah satu, seperti Gambar 6.



Iterasi 0 Iterasi 1

Gambar 6. Visualisasi Pembentukan Pohon Pythagoras dari Iterasi 0 ke 1

3.2. Simulasi Program

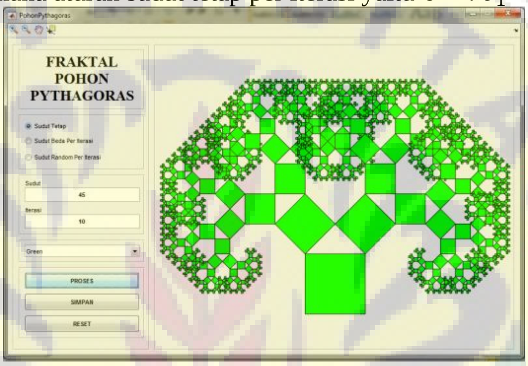
Software yang digunakan pada penelitian ini adalah MATLAB R2015b. Ada 3 pemilihan sudut yang digunakan yaitu sudut tetap, sudut beda per iterasi, sudut random per iterasi.

3.2.2. Pohon Pythagoras dengan Sudut Tetap

Pada tampilan GUI terdapat beberapa bagian, antara lain edit teks “sudut”, edit teks “iterasi”, *push button* “PROSES”, *push button* “SIMPAN”, *push button* “RESET”, *radio button* “Sudut Tetap”, *radio button* “Sudut Beda Per Iterasi”, *radio button* “Sudut Random Per Iterasi” seperti Gambar 7.

Gambar 7. Tampilan Program GUI

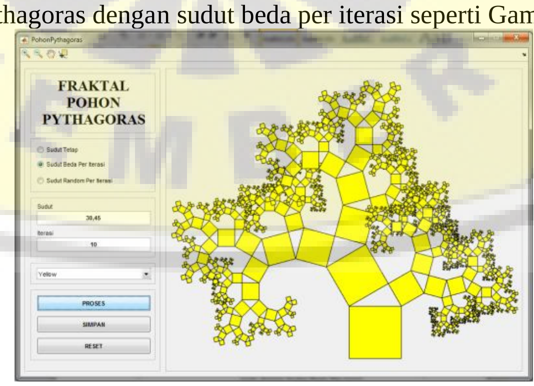
Langkah pertama simulasi program adalah menginputkan besar sudut yang akan digunakan, misal 45°, dan menginputkan jumlah iterasi yang akan digunakan, misal 10 iterasi. Kemudian, memilih salah satu *radio button* yang tersedia, jika ingin mengetahui hasil visualisasi pohon Pythagoras dengan sudut tetap per iterasi maka dipilih *radio button* “Sudut Tetap”. Setelah memilih salah satu *radio button* langkah selanjutnya yaitu tekan *push button* “PROSES”, maka akan ditampilkan hasil visualisasi pohon Pythagoras dengan sudut tetap seperti Gambar 8 berikut, dimana aturan sudut tetap per iterasi yaitu $0° < \theta_1 < 90°$ dan $\theta_2 = 90° - \theta_1$.



Gambar 8. Iterasi ke-10 dan Sudut $\theta = 45°$ pada Aturan Sudut Tetap

3.2.2. Pohon Pythagoras dengan Sudut Beda Per Iterasi

Tampilan GUI MATLAB R2015b untuk sudut beda per iterasi sama dengan tampilan GUI MATLAB R2015b untuk sudut tetap per iterasi. Demikian pula fungsi dari fasilitas pada GUI MATLAB R2015b yang sama, sehingga sudah diketahui fungsi dari setiap fasilitas pada penjelasan sub-bab sebelumnya. Perbedaannya hanya saat pemilihan *radio button*, untuk sudut beda per iterasi, *radio button* yang digunakan adalah *radio button* “Sudut Beda Per Iterasi”. Aturan sudut beda per iterasi yaitu $0° < \theta_1 < 90°$ dan $\theta_2 = 90° - \theta_1$, dimana besar sudut periterasinya sesuai dengan inputan yang diulang secara terus menerus sampai iterasi ke t. Adapun contoh hasil visualisasi pohon Pythagoras dengan sudut beda per iterasi seperti Gambar 9 berikut.

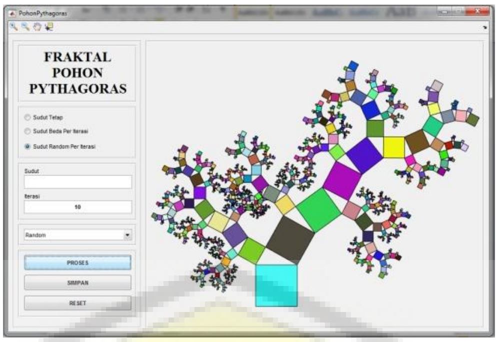


Gambar 9. Iterasi ke-10 dan Sudut $\theta = 30°, 45°$ pada Aturan Sudut Beda Per Iterasi

3.2.3. Pohon Pythagoras dengan Sudut Random Per Iterasi

Tampilan GUI MATLAB R2015b untuk sudut random per iterasi sama dengan tampilan GUI MATLAB R2015b untuk sudut tetap per iterasi. Demikian pula fungsi dari fasilitas pada GUI MATLAB R2015b yang sama, sehingga sudah diketahui fungsi dari setiap fasilitas pada penjelasan sub-bab sebelumnya. Perbedaannya hanya saat pemilihan *radio button*, untuk sudut random per iterasi, *radio button* yang digunakan adalah *radio button* “Sudut Random Per Iterasi”. Aturan sudut random per iterasi yaitu $20° \leq \theta_1 \leq$

$70°$ dan $\theta_2 = 90° - \theta_1$, dimana besar sudutnya dilakukan secara acak oleh sistem dari iterasi ke satu sampai iterasi ke t. Adapun contoh hasil visualisasi pohon Pythagoras dengan sudut random per iterasi seperti Gambar 10 berikut



Gambar 10. Iterasi ke-10 pada Aturan Sudut Random Per Iterasi

4. KESIMPULAN

Dari uraian yang telah dibahas di bab sebelumnya dapat disimpulkan bahwa pohon Pythagoras dapat divariasikan melalui sudutnya sehingga dihasilkan pohon Pythagoras dengan sudut tetap, sudut beda per iterasi, dan sudut random per iterasi, dimana dapat dibentuk dengan operasi dilatasi dan rotasi dalam IFS pada objek geometri seperti persegi yaitu dengan cara:

1. menentukan posisi awal dari persegi dengan meletakkan pada koordinat Kartesius, didapatkan posisi awal empat titik yang membentuk persegi,
2. melakukan transformasi affine yang berupa dilatasi dan rotasi dengan arah perputaran berlawanan arah jarum jam dan searah jarum jam,
3. mengubah penamaan titik-titik hasil rotasi, yang disesuaikan dengan penamaan pada titik-titik bentuk yang awal,
4. mengulangi langkah di atas sampai iterasi tertentu.

UCAPAN TERIMA KASIH

Kami berterima kasih atas dukungan dari KeRis Gerbang Mata (Kelompok Riset, Geometri Rancang Bangun dan Matematika Analisis) dan LP2M-Universitas Jember melalui pendanaan Hibah KeRis tahun 2019.

REFERENSI

[1] Mandelbrot, B. 1983. *The Fractal Geometry of Nature*. New York: W.H.Freeman and Company.

[2] Santoso, P. I. 1994. *Grafika Komputer dan Antarmuka Grafis Teknik Penyusunan Program Aplikasi Berbasis Grafis yang Profesional*. Yogyakarta: Andi Offset.

[3] Riyadi, B. 2007. Analisis dan Perancangan Perangkat Lunak Generator Gambar dan Musik Fraktal dengan *Iterated Function System*. *Skripsi*. Jakarta: Universitas Bina Nusantara.

[4] Rahayu, I. 2012. Hitung Ukuran Sudut Poligon Dengan Bantuan Pembagian Bidang dan Duplikasi Poligon Sebangun Serta Aproksimasi Luasan Poligon Dengan Bantuan Kesebangunan Segitiga. *Tesis*. Jember: Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.

[5] Ramandhani, M.R. 2012. Penggunaan Sistem Fungsi Iterasi untuk Membangkitkan Fraktal Beserta Aplikasinya. *Makalah Struktur Diskrit* 5(1):13-18.

[6] Purnomo, K. D., Armana, R. F., and Kusno. 2016. Kajian Pembentukan Segitiga Sierpinski dengan Transformasi Affine Berbasis Beberapa Benda Geometris. *Prosiding Seminar Nasional Matematika*. Jember: Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.

[7] Prasasti, I. 2018. Pemanfaatan Metode *Iterated Function System* dalam Pengembangan Motif Anyaman. *Skripsi*. Jember: Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.

[8] Budhi, W. S. 1995. *Aljabar Linier*. Jakarta: Gramedia Pustaka Utama.

[9] Anton, H dan Rorres, C. 2010. *Elementary Linear Algebra 10th Edition*. Jakarta: Erlangga.

[10] Kusno. 2003. *Geometri Rancang Bangun Studi Surfas Putar Transformasi Titik dan Proyeksi*. Jember: Fakultas MIPA Universitas Jember.