Volume 20 Nomor 2, September 2020

ISSN 1411 - 6669
E-ISSN 2722 - 9866

MIMS

MAJALAH ILMIAH

Matematika dan Statistika

DITERBITKAN OLEH:
JURUSAN MATEMATIKA
FMIPA - UNIVERSITAS JEMBER

MAJALAH ILMIAH
Matematika dan Statistika

Alamat Redaksi:
Jurusan Matematika FMIPA – Universitas Jember
Jalan Kalimantan No 37 Kampus Tegalboto Jember 68121
Telp. : (0331) 334293
E-mail: mims.fmipa@unej.ac.id
Website: https://jurnal.unej.ac.id/index.php/MIMS/index

Diterbitkan oleh : Jurusan Matematika – FMIPA Universitas Jember.
Tahun pertama terbit : Oktober 2000
Jumlah terbit : Dua kali setahun pada bulan Maret dan September
Gambar cover depan : rancang bangun geometri, iterasi dan regresi

Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika	Volume 20 Nomor 2	Halaman: 45 – 100	September 2020	ISSN : 1411-6669 E-ISSN : 2722-9866

MAJALAH ILMIAH
Matematika dan Statistika

Volume 20 Nomor 2, September 2020

ISSN : 1411-6669
E-ISSN : 2722-9866

Daftar Isi

Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika Volume 20 Nomor 2 2020, 45 – 52
https://jurnal.unej.ac.id/index.php/MIMS/index ISSN 1441-6669

FUNGSI SIMETRI TERHADAP GARIS $x = a$ DAN SIFAT-SIFATNYA

(Symmetry Function Against the Line x = a and its Properties)

Firdaus Ubaidillah

Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember
Jalan Kalimantan 37 Jember 68121, Indonesia
Email: firdaus_u@yahoo.com

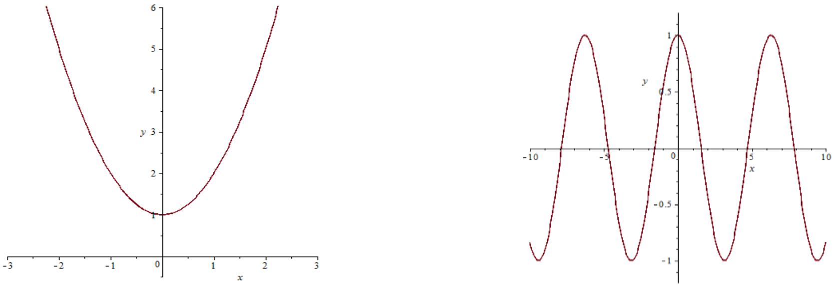
Abstract. An even function is a function with a graph that is symmetric with respect to the y-axis or the line x = 0. In this paper, we will introduce a more general function of the even function, we call it as symmetry function with respect to the line x = a, which is a function whose graph is symmetric with respect to the line x = a. This paper discusses the properties of the symmetry function with respect to the line x = a, which is derived from the pre-existing properties of the even function. Some of the results obtained above, the linear combination of the symmetry functions with respect to the line x = a is a symmetry function with respect to the line x = a and the composition of any function with a symmety function with respect to the line x = a is a symmetry function with respect to the line x = a.

Keywords: Even function, a symmetry function with respect to the line x=a, symmetric graph

MSC 2020: 26A18

1. Pendahuluan

Menurut [3], suatu fungsi $f: R \to R$ dikatakan *fungsi genap* jika berlaku $f(-x) = f(x)$ untuk setiap $x \in R$. Sebagai contoh, fungsi yang didefinisikan $f(x) = x^2 + 1$ dan $g(x) = \cos x$ keduanya merupakan fungsi genap karena berlaku $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$ dan $g(-x) = \cos(-x) = \cos x = g(x)$. Sedangkan fungsi $h(x) = \sin x$ bukan merupakan fungsi genap. Grafik fungsi genap simetri terhadap sumbu-y atau garis $x = 0$. Grafik fungsi f dan g yang diberikan pada contoh di atas dapat dilihat pada Gambar 1.



(a). Grafik fungsi $f(x) = x^2 + 1$ (b). Grafik fungsi $g(x) = \cos x$

Gambar 1. Grafik fungsi genap f dan g

Selain sifat grafik fungsi genap simetri terhadap sumbu-y, beberapa sifat yang terkait dengan fungsi genap diberikan sebagai berikut [1], [2], [3].

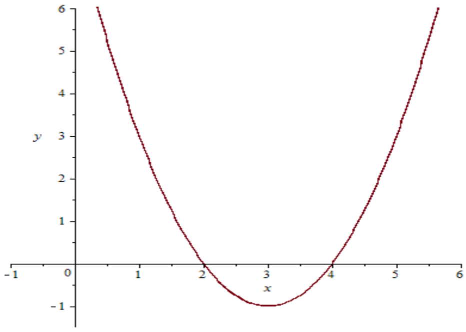
1. Untuk sebarang fungsi $f: R \to R$, fungsi h yang didefinisikan pada R dengan
$$h(x) = f(x) + f(-x), \qquad \text{untuk setiap } x \in R,$$
merupakan fungsi genap.

2. Untuk sebarang fungsi $f: R \to R$ dan g fungsi genap, maka fungsi komposisi $f \circ g$ merupakan fungsi genap.

3. Kombinasi linear fungsi-fungsi genap merupakan fungsi genap, yakni jika $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ bilangan-bilangan real dan $f_1, f_2, \dots, f_n$ fungsi-fungsi genap, maka
$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_n f_n$$
merupakan fungsi genap.

4. Diberikan $b \in R, b > 0$. Jika f fungsi genap yang terintegral pada selang $[-b, b]$, maka
$$\int_{-b}^{b} f(x)dx = 2\int_{0}^{b} f(x)dx\,.$$

Selanjutnya, pandang fungsi $k(x) = x^2 - 6x + 8$ dan grafiknya yang diberikan pada Gambar 2. Jika diperhatikan, bahwa fungsi k bukanlah fungsi genap karena $k(-x) = (-x)^2 - 6(-x) + 8 = x^2 + 6x + 8 \neq k(x)$. Begitu pula grafik fungsi k tidak simetri terhadap sumbu-y. Namun jika diperhatikan lebih seksama, bahwa grafik fungsi k sesungguhnya simetri, dalam hal ini simetri terhadap garis $x = 3$.



Gambar 2. Grafik fungsi $k(x) = x^2 - 6x + 8$

Berdasarkan dari penjelasan di atas, permasalahan yang ada adalah bagaimana mendefinisikan atau menjelaskan bahwa suatu fungsi yang grafiknya simetri terhadap garis $x = a$ merupakan perumuman dari fungsi genap. Setelah dapat mendefinisikan dengan baik pengertian fungsi simetri terhadap garis $x = a$, selanjutnya akan dikaji sifat-sifat fungsi simetri terhadap garis $x = a$.

2. Metodologi

Dalam mengenalkan istilah baru fungsi simetri terhadap garis $x = a$ diperoleh setelah berhasil memperumum pengertian fungsi genap. Fungsi genap adalah fungsi yang grafiknya simetri terhadap sumbu-y atau garis $x = 0$. Fungsi simetri terhadap garis $x = a$ ini hasil memperumum $x = 0$ pada pengertian fungsi genap diganti dengan $x = a$.

Selanjutnya, untuk menggali sifat-sifat fungsi simetri terhadap garis $x = a$ diperoleh dari menurunkan sifat-sifat fungsi genap yang sudah ada sebelumnya. Sifat-sifat fungsi simetri terhadap garis $x = a$ dituangkan dalam bentuk teorema-teorema disertai buktinya.

3. Hasil dan Pembahasan

Untuk mengawali hasil dan pembahasan ini, terlebih dahulu diberikan pengertian fungsi simetri terhadap garis $x = a$.

Definisi 1. Diberikan $a \in R$ dan fungsi $f: R \to R$. Fungsi f disebut *simetri terhadap garis* $x = a$ jika berlaku

$$f(a - x) = f(a + x), \qquad \text{untuk setiap } x \in R. \tag{1}$$

Dari pengertian pada Definisi 1 ini, maka setiap fungsi genap merupakan fungsi simetri terhadap garis $x = 0$, yakni jika f fungsi genap maka berlaku $f(0 - x) = f(-x) = f(x) = f(0 + x)$. Hal ini menunjukkan bahwa fungsi genap merupakan kasus khusus dari fungsi simetri terhadap garis $x = a$ dengan $a = 0$.

Jika diperhatikan fungsi k yang diberikan pada seksi sebelumnya, yakni $k(x) = x^2 - 6x + 8$, yang bukan merupakan fungsi genap (grafiknya tidak simetri terhadap sumbu-y atau garis $x = 0$) namun grafik fungsi k simetri terhadap garis $x = 3$. Ini menunjukkan bahwa fungsi k merupakan fungsi simetri terhadap garis $x = 3$. Secara matematis memperlihatkan bahwa berlaku

$$\begin{aligned} k(3-x) &= (3-x)^2 - 6(3-x) + 8 \\ &= (9 - 6x + x^2) - (18 - 6x) + 8 \\ &= (9 + 6x + x^2) - (18 + 6x) + 8 \\ &= (3+x)^2 - 6(3+x) + 8 \\ &= k(3+x) \end{aligned}$$

Contoh lain adalah $f(x) = \sin x$, ini merupakan fungsi simetri terhadap garis $x = \frac{\pi}{2}$ karena $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$. Jika diperhatikan pula bahwa $f(x) = \sin x$ merupakan fungsi simetri terhadap garis $x = \frac{5\pi}{2}$ atau fungsi simetri terhadap garis $x = -\frac{\pi}{2}$, dan sebagainya.

Kembali lagi ke fungsi k sebelumnya. Diperhatikan, jika grafik fungsi k digeser 3 satuan ke kiri, maka diperoleh grafik baru yang simetri terhadap sumbu-y atau garis $x = 0$. Dengan demikian, diperoleh hubungan antara fungsi simetri terhadap garis $x = a$ dengan fungsi genap yang dituangkan dalam lema berikut.

Lema 2. Jika f fungsi simetri terhadap garis $x = a$, maka fungsi $g: R \to R$ yang didefinisikan

$$g(x) = f(x+a), \text{ untuk setiap } x \in R,$$

merupakan fungsi genap.

Bukti. Diberikan f fungsi simetri terhadap garis $x = a$. Definisikan fungsi $g: R \to R$ dengan

$$g(x) = f(x+a), \qquad \text{untuk setiap } x \in R.$$

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $g(-x) = g(x)$ untuk setiap $x \in R$.

Karena f fungsi simetri terhadap garis $x = a$, maka berlaku persamaan (1), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} g(-x) &= f(-x+a) \\ &= f(x+a) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

Jadi terbukti g fungsi genap. ■

Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika Volume 20 Nomor 2 2020, 45 – 52
https://jurnal.unej.ac.id/index.php/MIMS/index ISSN 1441-6669

Beberapa sifat lain fungsi simetri terhadap garis $x = a$ dituangkan dalam beberapa teorema berikut.

Teorema 3. Untuk sebarang fungsi $f: R \to R$ dan g fungsi simetri terhadap garis $x = a$, maka fungsi komposisi $f \circ g$ merupakan fungsi simetri terhadap garis $x = a$.

Bukti. Diberikan fungsi $f: R \to R$ dan fungsi $g: R \to R$ simetri terhadap garis $x = a$. Akan dibuktikan bahwa berlaku $(f \circ g)(a - x) = (f \circ g)(a + x)$ untuk setiap $x \epsilon R$. Untuk sebarang $x \epsilon R$ dan karena g fungsi simetri terhadap garis $x = a$, diperoleh

$$(f \circ g)(a - x) = f\big(g(a - x)\big) = f\big(g(a + x)\big) = (f \circ g)(a + x).$$

Jadi terbukti bahwa $f \circ g$ merupakan fungsi simetri terhadap garis $x = a$. ■

Teorema 4. Diberikan $a \in R$ dan $f: R \to R$ fungsi sebarang. Fungsi h yang didefinisikan pada R dengan

$$h(x) = f(a - x) + f(x - a), \qquad \text{untuk setiap } x \in R,$$

merupakan fungsi simetri terhadap garis $x = a$.

Bukti. Diberikan fungsi f pada R. Definisikan fungsi h pada R dengan

$$h(x) = f(a - x) + f(x - a), \qquad \text{untuk setiap } x \in R,$$

Akan dibuktikan berlaku $h(a - x) = h(a + x)$ untuk setiap $x \in R$.

Ambil sebarang $x \epsilon R$, diperoleh

$$h(a - x) = f(a - a + x) + f(a - x - a) = f(x) + f(-x). \tag{2}$$

Di sisi lain, diperoleh

$$h(a + x) = f(a - a - x) + f(a + x - a) = f(-x) + f(x). \tag{3}$$

Dari persamaan (2) dan (3), diperoleh $h(a - x) = h(a + x)$.

Jadi terbukti h fungsi simetri terhadap garis $x = a$. ■

Teorema 5. Jika α sebarang bilangan real dan f dan g keduanya fungsi simetri terhadap garis $x = a$, maka

(i) αf

(ii) $f + g$

(iii) fg

merupakan fungsi simetri terhadap garis $x = a$.

Bukti. Akan ditunjukkan masing-masing berlaku $(\alpha f)(a - x) = (\alpha f)(a + x)$, $(f +$

$g)(a-x) = (f+g)(a+x)$, dan $(fg)(a-x) = (fg)(a+x)$.

(i) $(\alpha f)(a-x) = \alpha[f(a-x)] = \alpha[f(a+x)] = (\alpha f)(a+x)$.

(ii) $(f+g)(a-x) = f(a-x) + g(a-x) = f(a+x) + g(a+x)$
$$= (f+g)(a+x)$$

(iii) $(fg)(a-x) = f(a-x)g(a-x) = f(a+x)g(a+x) = (fg)(a+x)$.

Terbukti ketiganya. ■

Teorema 6. Diberikan $a, b \in R, b > 0$ dan fungsi $f: R \to R$ yang terintegral pada selang $[a-b, a+b]$. Jika f fungsi simetri terhadap garis $x = a$, maka

$$\int_{a-b}^{a+b} f(x)dx = 2\int_{a}^{a+b} f(x)dx$$

Bukti. Misalkan $x = u + a$, maka $dx = du$. Oleh karena itu, diperoleh

$$\int_{a-b}^{a+b} f(x)dx = \int_{-b}^{b} f(u+a)du$$

Karena f fungsi simetri terhadap garis $x = a$, berdasarkan Lema 2, terdapat fungsi genap g sedemikian sehingga berlaku $g(x) = f(x+a)$ untuk setiap $x \in R$. Karena itu diperoleh

$$\int_{-b}^{b} f(u+a)du = \int_{-b}^{b} g(u)du\,.$$

Berdasarkan sifat fungsi genap dan mengembalikan $g(u) = f(u+a)$, maka diperoleh

$$\int_{-b}^{b} g(u)du = 2\int_{0}^{b} g(u)du = 2\int_{0}^{b} f(u+a)du\,.$$

Dengan mengembalikan $u + a = x$, diperoleh

$$\int_{0}^{b} f(u+a)du = \int_{a}^{a+b} f(x)dx.$$

Jadi diperoleh hasil

$$\int_{a-b}^{a+b} f(x)dx = 2\int_{a}^{a+b} f(x)dx\,.$$ ■

4. Kesimpulan

Dari hasil dan pembahasan, diperoleh beberapa kesimpulan

1. Grafik fungsi simetri terhadap garis $x = a$ simetris terhadap garis $x = a$.
2. Untuk sebarang fungsi $f: R \to R$ dan g fungsi simetri terhadap garis $x = a$, maka fungsi komposisi $f \circ g$ merupakan fungsi simetri terhadap garis $x = a$.
3. Perkalian skalar dengan fungsi simetri terhadap garis $x = a$, penjumlahan dua fungsi simetri terhadap garis $x = a$, dan perkalian dua fungsi simetri terhadap garis $x = a$ juga merupakan fungsi simetri terhadap garis $x = a$.
4. Jika $a, b \in R, b > 0$ dan f fungsi terintegral pada selang $[a - b, a + b]$ dan fungsi simetri terhadap garis $x = a$ maka

$$\int_{a-b}^{a+b} f(x)dx = 2\int_{a}^{a+b} f(x)dx.$$

Daftar Pustaka

[1] Bittinger, M.L, David J. Ellenbogen, dan Scott A. Surgent, (2012), *Calculus and Its Applications*, Edisi ke 10, Boston: Pearson Education, Inc.

[2] Herman, E. dan Strang G., (2018), *Calculus Volume 1*, Houston: Open Stax.

[3] Stewart, J., (2008), *Calculus Early Transcendentals*, 6th edition, Belmont: Thomson Learning, Inc.