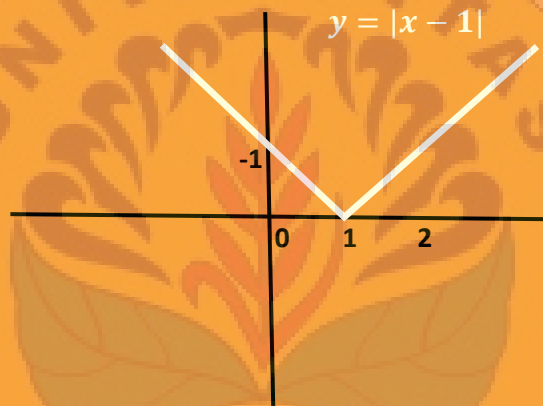


KALKULUS

FUNGSI SATU PEUBAH



Dr. Firdaus Ubaidillah, S.Si, M.Si

Ika Hesti Agustin, S.Si, M.Si



Prakata

Puji syukur kami panjatkan kepada Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayahNya sehingga penulisan buku ajar **Kalkulus Fungsi Satu Peubah** ini dapat diselesaikan dengan baik. Ucapan terima kasih kami sampaikan kepada dosen-dosen tim pengajar matakuliah Kalkulus di Fakultas MIPA Universitas Jember yang telah memberikan kontribusi dalam penulisan buku ajar ini.

Kalkulus merupakan matakuliah wajib semester pertama tidak hanya di program studi Matematika tetapi juga bagi semua mahasiswa pada program studi di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember sejak diberlakukan Kurikulum 2017, terdiri dari 4 sks (3 sks kuliah dan 1 sks praktikum).

Buku Ajar Kalkulus Fungsi Satu Peubah ini ditulis untuk digunakan pada perkuliahan Kalkulus di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember, meskipun tidak menutup kemungkinan untuk dipakai pada perkuliahan yang lain bahkan di luar fakultas. Penyusunan Buku Ajar ini bertujuan untuk mengefektifkan proses pembelajaran. Pada proses pembelajaran di kelas, biasanya dosen menjelaskan perkuliahan sambil mencatat di papan tulis. Mahasiswa umumnya menyalin catatan tersebut sambil menyimak penjelasan dosen. Proses pembelajaran lebih banyak mendengarkan ceramah dari dosen.

Fungsi dari Buku Ajar ini, untuk dosen dipakai menjelaskan materi kuliah, sedangkan untuk mahasiswa sebagai pengganti catatan kuliah. Oleh karena itu waktu pembelajaran di kelas dapat digunakan secara lebih efektif untuk caramah dan diskusi. Pada Buku Ajar ini, diberikan banyak contoh soal yang telah diberikan penyelesaiannya. Diharapkan soal-soal yang ada di tiap akhir bab dapat diselesaikan oleh mahasiswa, begitu juga bahan diskusi yang ada di tiap bab.

Penyusunan Buku Ajar ini didasarkan pada beberapa buku teks yang digunakan seperti tertulis dalam Bibliografi (Daftar Pustaka). Semoga Buku Ajar ini dapat berguna untuk meningkatkan kualitas


Digital Repository Universitas Jember

pembelajaran Kalkulus, terlebih khusus di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Jember, Desember 2018
Penulis



Daftar Isi



Prakata	iii
Daftar Isi	v
Daftar Gambar	ix
Daftar Tabel	xi
Daftar Lambang dan Simbol	xiii
1 Sistem Bilangan Real	1
1.1 Bilangan Real	2
1.2 Pertaksamaan	5
1.3 Nilai Mutlak	9
1.4 Rangkuman	12
1.5 Bahan Diskusi	13
1.6 Rujukan/Daftar Pustaka	14
1.7 Latihan Soal-soal	14
2 Fungsi	17
2.1 Fungsi dan Grafiknya	18
2.2 Operasi pada Fungsi	26
2.3 Fungsi-fungsi Khusus	27
2.3.1 Fungsi Mutlak	27
2.3.2 Fungsi Signum	30
2.3.3 Fungsi Bilangan Bulat Terbesar	32
2.4 Fungsi Komposisi	33
2.5 Fungsi Polinomial	37
2.6 Fungsi Trigonometri	38
2.7 Fungsi Eksponensial	40

2.8	Fungsi Invers	42
2.9	Fungsi Logaritma	43
2.10	Rangkuman	47
2.11	Bahan Diskusi	48
2.12	Rujukan/Daftar Pustaka	48
2.13	Latihan Soal-soal	49
3	Limit Fungsi	51
3.1	Definisi dan Teorema	52
3.2	Limit Sepihak	57
3.3	Limit Di Tak Hingga	59
3.4	Limit Tak Hingga	62
3.5	Rangkuman	69
3.6	Bahan Diskusi	70
3.7	Rujukan/Daftar Pustaka	71
3.8	Latihan Soal-soal	71
4	Kekontinuan Fungsi	75
4.1	Fungsi Kontinu	76
4.2	Kontinu Kanan dan Kontinu Kiri	79
4.3	Rangkuman	82
4.4	Bahan Diskusi	82
4.5	Rujukan/Daftar Pustaka	83
4.6	Latihan Soal-soal	83
5	Turunan	85
5.1	Garis Singgung	86
5.2	Turunan Fungsi	87
5.3	Aturan Pencarian Turunan	92
5.4	Turunan Fungsi Trigonometri	94
5.5	Turunan Fungsi Eksponensial	96
5.6	Aturan Rantai	97
5.7	Turunan Tingkat Tinggi	98
5.8	Turunan Fungsi Implisit	100
5.9	Turunan Fungsi Logaritma	102
5.10	Rangkuman	103
5.11	Bahan Diskusi	104
5.12	Rujukan/Daftar Pustaka	104
5.13	Latihan Soal-soal	104

6	Penggunaan Turunan	109
6.1	Laju yang Berkaitan	110
6.2	Maksimum dan Minimum	111
6.3	Masalah-masalah Maksimum dan Minimum	112
6.4	Teorema Nilai Rata-rata	116
6.5	Menggambar Grafik Canggih	118
6.6	Rangkuman	127
6.7	Bahan Diskusi	128
6.8	Rujukan/Daftar Pustaka	129
6.9	Latihan Soal-soal	129
7	Integral	131
7.1	Anti Turunan	132
7.2	Integral Tentu	134
7.3	Metode Substitusi	142
7.4	Integral Parsial	145
7.5	Rangkuman	147
7.6	Bahan Diskusi	148
7.7	Rujukan/Daftar Pustaka	149
7.8	Latihan Soal-soal	149
	DAFTAR PUSTAKA	151



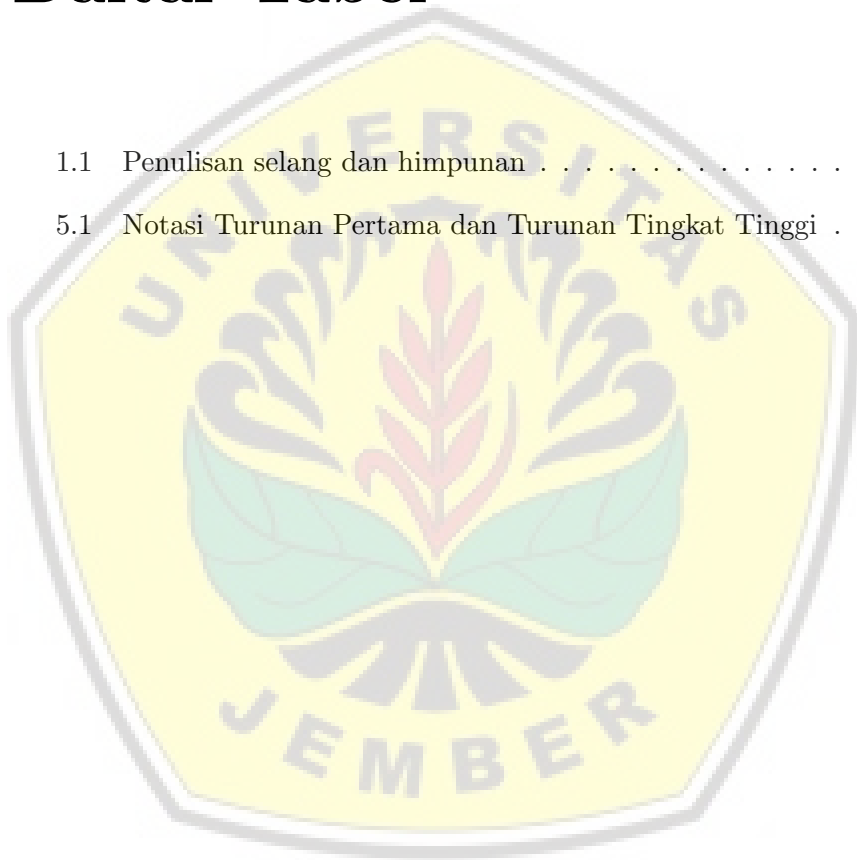
Daftar Gambar

1.1	Segitiga siku-siku dengan panjang sisi-sisi tegak lurus 1	3
2.1	Contoh (a) fungsi, (b) dan (c) bukan fungsi	18
2.2	Grafik fungsi $f(x) = x^2 + 2x + 3$	20
2.3	Grafik fungsi g	21
2.4	Grafik fungsi untuk soal Contoh 2.3	21
2.5	Grafik (a) fungsi genap dan (b) fungsi ganjil	23
2.6	Grafik $y = x^2$	25
2.7	Grafik (a) $y = (x + 1)^2$, dan (b) $y = 2(x + 1)^2$	25
2.8	Grafik fungsi $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$	26
2.9	Grafik fungsi $f(x) = x $	28
2.10	Grafik fungsi $h(x) = x - 2 $	28
2.11	Grafik fungsi $g(x) = x + 1 - 2x - 1 $	29
2.12	Grafik fungsi $sign(x)$	30
2.13	Grafik fungsi $g(x) = sign(x^2 - 1)$	31
2.14	Grafik fungsi $k(x) = sign(x + 1) + x $	32
2.15	Grafik fungsi $f(x) = [[x]]$	32
2.16	Grafik fungsi $h(x) = [[1 - x]]$ pada selang $[-2, 2]$	33
2.17	Grafik fungsi g	35
2.18	Grafik fungsi $f \circ g$	36
2.19	Grafik fungsi f	36
2.20	Grafik fungsi $g \circ f$	37
2.21	Grafik (a) fungsi linear $y = 2x - 1$, (b) fungsi kuadratik $y = x^2 - x + 1$, dan (c) fungsi kubik $y = 2x^3 - x + 3$	38
2.22	Segitiga siku-siku ABC	39
2.23	Grafik fungsi $f(x) = \sin x$	39
2.24	Grafik fungsi $f(x) = \cos x$	40
2.25	Grafik fungsi $f(x) = \tan x$	40
2.26	Grafik fungsi (a). $f(x) = 2^x$ dan (b). $f(x) = (1/2)^x$	41

2.27	Grafik fungsi $f(x) = 1 - 2^x$	41
2.28	Grafik fungsi (a) $f(x) = x^2 - 3$ dan (b) $f^{-1} = \sqrt{x + 3}$.	43
2.29	Grafik fungsi $f(x) = \log_2 x$	45
2.30	Grafik fungsi $f(x) = \ln x$	47
2.31	Grafik fungsi $f(x) = \ln(x - 2) - 1$	47
3.1	Grafik fungsi $f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$	60
3.2	Grafik fungsi $f(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$	62
3.3	Grafik fungsi $h(x) = \frac{x}{(x-2)}$	63
4.1	Grafik fungsi (a). $g(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, $x \neq 2$, $g(2) = 1$, dan (b). $f(x) = x + 2$,	76
5.1	Garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik P	86
5.2	Grafik (a) $f(x) = x^3 - 2x$ dan (b) $f'(x) = 3x^2 - 2$	89
6.1	Ilustrasi untuk Contoh 6.1	110
6.2	Ilustrasi untuk Teorema 6.3	112
6.3	Grafik $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$ pada selang $I = [-1, 4]$	114
6.4	Ilustrasi permasalahan untuk Contoh 6.7	115
6.5	Grafik fungsi $f(x) = x^3$	116
6.6	Ilustrasi Teorema Nilai Rata-rata	118
6.7	Grafik fungsi $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$	120
6.8	Ilustrasi untuk cekung ke atas dan cekung ke bawah	122
6.9	Grafik fungsi $f(x) = -2x - x^2$ untuk $x \leq 0$ dan $f(x) = x^2$ untuk $x > 0$	124
6.10	Grafik fungsi $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$	126
6.11	Grafik fungsi g	127

Daftar Tabel

1.1	Penulisan selang dan himpunan	6
5.1	Notasi Turunan Pertama dan Turunan Tingkat Tinggi	99





Daftar Lambang dan Simbol

(a, b)	: himpunan semua bilangan real x yang memenuhi $a < x < b$
$[a, b]$: himpunan semua bilangan real x yang memenuhi $a \leq x \leq b$
$[a, b)$: himpunan semua bilangan real x yang memenuhi $a \leq x < b$
$(a, b]$: himpunan semua bilangan real x yang memenuhi $a < x \leq b$
(a, ∞)	: himpunan semua bilangan real x yang memenuhi $x > a$
$(-\infty, a)$: himpunan semua bilangan real x yang memenuhi $x < a$
$[a, \infty)$: himpunan semua bilangan real x yang memenuhi $x \geq a$
$(-\infty, a]$: himpunan semua bilangan real x yang memenuhi $x \leq a$
$ x $: nilai mutlak x
D_f	: domain atau daerah asal fungsi f
$D_x f(x)$: turunan fungsi f terhadap x
$\frac{d}{dx} f$: turunan fungsi f terhadap x
f^{-1}	: invers fungsi f
$f'(x)$: turunan fungsi f terhadap x
$f'_-(c)$: turunan kiri fungsi f di titik c
$f'_+(c)$: turunan kanan fungsi f di titik c
$f^{(n)}(x)$: turunan ke- n fungsi f terhadap x
$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$: $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ dengan $x > c$
$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$: $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ dengan $x < c$
$\ln x$: $\log_e x$ (logaritma dengan basis e)
R_f	: range atau daerah hasil fungsi f
$f \circ g$: f komposisi g
$[[x]]$: bilangan bulat terbesar yang kurang atau sama dengan x
\mathbb{N}	: himpunan semua bilangan asli
\mathbb{Q}	: himpunan semua bilangan rasional
\mathbb{R}	: himpunan semua bilangan real
\mathbb{Z}	: himpunan semua bilangan bulat

$\int f(x) dx$: anti turunan atau integral tak tentu f
 $\int_a^b f(x) dx$: integral tentu f pada selang $[a, b]$
 $x \approx a$: a adalah nilai hampiran x



Bab 1

Sistem Bilangan Real

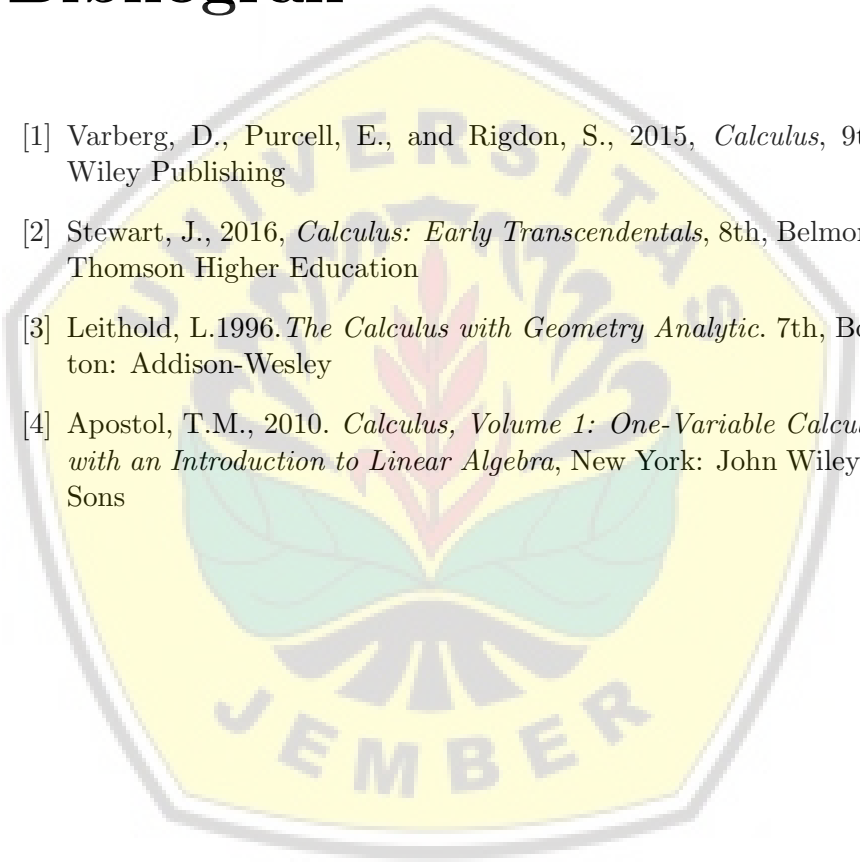
Setelah membaca dan mempelajari bab ini, kemampuan akhir yang diharapkan secara umum adalah mahasiswa:

1. memahami sistem bilangan real;
2. mampu berpikir kritis dan logis;
3. mempunyai kemampuan dan kreativitas dalam menyelesaikan masalah yang relevan;
4. mempunyai kemampuan berkomunikasi melalui diskusi materi.

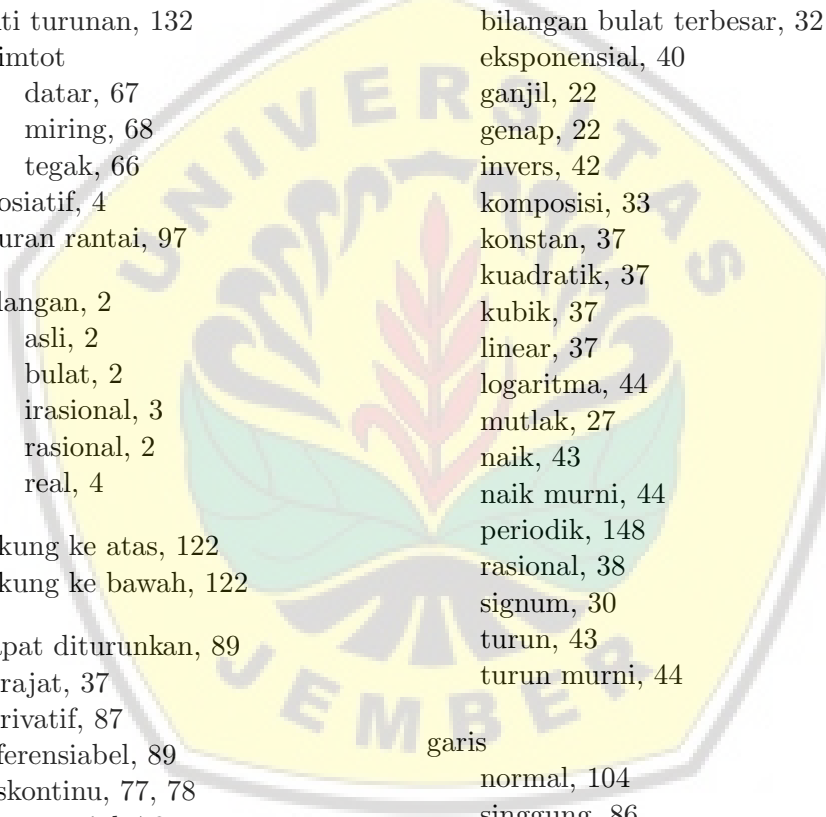
Sedangkan kemampuan akhir yang diharapkan secara khusus adalah mahasiswa mampu

1. menjelaskan hubungan antara bilangan asli, bilangan bulat, bilangan rasional dan bilangan real;
2. menjelaskan pengertian bilangan rasional, dapat membedakan bilangan rasional dan bilangan irasional, dan dapat menyebutkan beberapa contoh bilangan rasional dan bilangan irasional;
3. mengoperasikan bilangan real;
4. menyelesaikan pertaksamaan, baik yang melibatkan nilai mutlak maupun tidak.

Bibliografi

- 
- The background of the page features a large, semi-transparent watermark of the Universitas Jember logo. The logo is a shield-shaped emblem with a yellow background. At the top, the word 'UNIVERSITAS' is written in a semi-circle. In the center, there is a stylized green and red plant or tree. At the bottom, the word 'JEMBER' is written in a semi-circle.
- [1] Varberg, D., Purcell, E., and Rigdon, S., 2015, *Calculus*, 9th, Wiley Publishing
 - [2] Stewart, J., 2016, *Calculus: Early Transcendentals*, 8th, Belmont: Thomson Higher Education
 - [3] Leithold, L. 1996. *The Calculus with Geometry Analytic*. 7th, Boston: Addison-Wesley
 - [4] Apostol, T.M., 2010. *Calculus, Volume 1: One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra*, New York: John Wiley & Sons

Indeks

- 
- anti turunan, 132
asimtot
 datar, 67
 miring, 68
 tegak, 66
asosiatif, 4
aturan rantai, 97
bilangan, 2
 asli, 2
 bulat, 2
 irasional, 3
 rasional, 2
 real, 4
cekung ke atas, 122
cekung ke bawah, 122
dapat diturunkan, 89
derajat, 37
derivatif, 87
diferensiabel, 89
diskontinu, 77, 78
 esensial, 78
 yang dapat dihapus, 78
distributif, 4
domain, 18
eksplisit, 100
fungsi, 18
 naik ketat, 44
 turun ketat, 44
bilangan bulat terbesar, 32
eksponensial, 40
ganjil, 22
genap, 22
invers, 42
komposisi, 33
konstan, 37
kuadratik, 37
kubik, 37
linear, 37
logaritma, 44
mutlak, 27
naik, 43
naik murni, 44
periodik, 148
rasional, 38
signum, 30
turun, 43
turun murni, 44
garis
 normal, 104
 singgung, 86
grafik, 19
identitas, 4
implisit, 100, 101
integral, 131
 parsial, 145
 tentu, 137
invers, 4
 aditif, 4

- multiplikatif, 4
- jumlah Riemann, 136
- ketaksamaan, 5
- kodomain, 18
- koefisien, 37
- komposisi, 33
- komutatif, 4
- kontinu, 77
 - kanan, 79
 - kiri, 79
- Leibniz, 98
- limit, 51, 52
 - di tak hingga, 59
 - kanan, 57
 - kiri, 58
 - sepihak, 57
 - tak hingga, 62
- logaritma, 44
 - asli, 46
- maksimum
 - lokal, 112
 - relatif, 112
- minimum
 - lokal, 112
 - relatif, 112
- monoton
 - ketat, 44
 - murni, 44
- nilai
 - ekstrim, 111, 113
 - maksimum, 111
 - maksimum lokal, 112
 - minimum, 111
 - minimum lokal, 112
 - mutlak, 9
- nonnegatif, 5
- nonpositif, 5
- operator diferensial, 90
- pertaksamaan, 5
- pertidaksamaan, 5
- polinom, 37
- polinomial, 37
- range, 18
- rapat, 4
- selang, 5
- sigma, 134
- sign, 30
- slope, 86
- talibusur, 86
- Teorema
 - Nilai Rata-rata, 116
 - Rolle, 116
- terintegral, 137
- tidak diferensiabel, 89
- tidak kontinu, 77
- titik
 - balik, 123
 - ekstrim, 113
 - kritis, 113
 - singular, 113
 - stasioner, 113
 - ujung, 113
- transitif, 5
- trikotomi, 5
- turunan, 85, 87
 - tingkat tinggi, 98
 - kanan, 91
 - kedua, 98
 - kiri, 91
 - pertama, 98
- urutan, 5