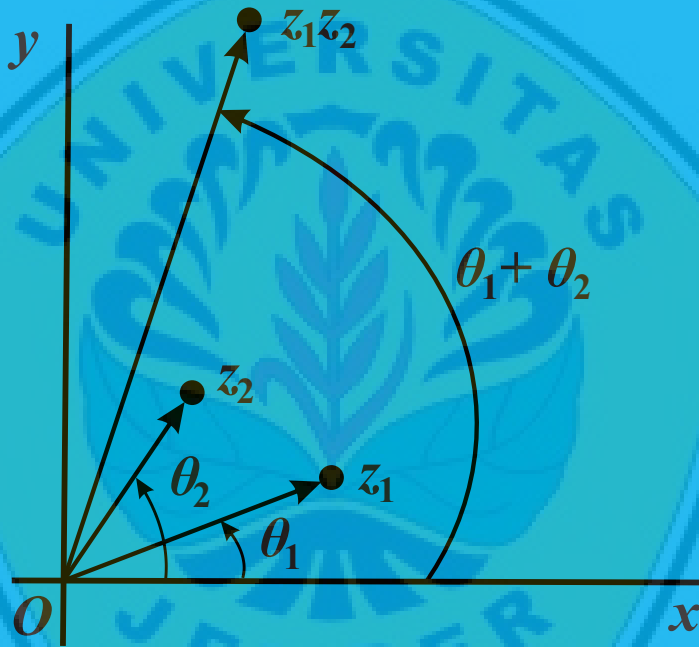


ANALISIS KOMPLEKS



Ikhsanul Halikin
Firdaus Ubaidillah





Kata Pengantar

Puji dan syukur saya panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan nikmat, rahmat, dan hidayahNya sehingga kita dapat beraktivitas sesuai dengan apa yang telah direncanakan. Shalawat beserta salam semoga tetap tercurahkan kepada nabi mulia Muhammad SAW.

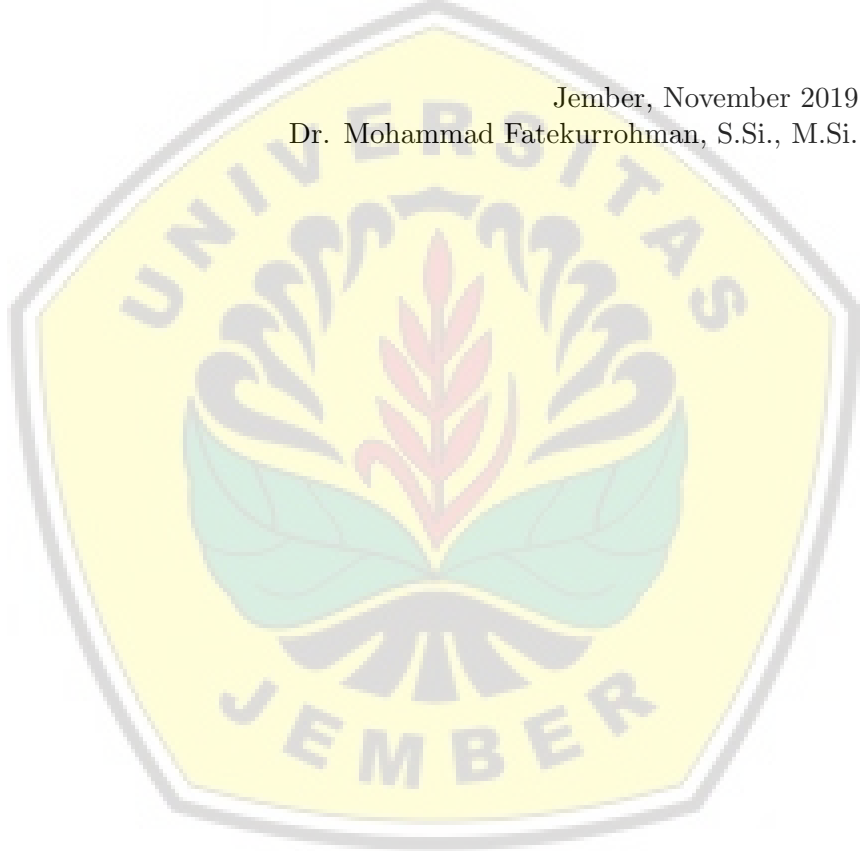
Penyusunan buku ajar ini dimulai dengan mengenalkan definisi bilangan kompleks beserta sifat-sifatnya yang dibahas dalam satu bab dan dilanjutkan dengan pengenalan fungsi kompleks. Dalam penjabaran fungsi peubah kompleks, Anda akan diajak untuk membedakan fungsi tersebut dengan fungsi dua variabel bilangan real pada Kalkulus peubah banyak. Secara khusus, pada Bab 3, Anda juga akan diperkenalkan dengan fungsi-fungsi yang bernilai tunggal maupun banyak. Setelah pembahasan fungsi, Anda akan diajak untuk belajar tentang limit, kemudian kekontinuan fungsi, dan terakhir turunan. Pada Bab 4, Anda akan belajar tentang integral, kemudian dilanjutkan oleh deret, residu, dan diakhiri oleh bab tentang pemetaan konformal.

Secara umum, Anda akan menemukan bahwa penyajian materi dalam buku ajar ini mengikuti alur penyajian pada kalkulus maupun analisis real. Beberapa sifat yang berlaku pada topik tertentu juga diturunkan dari pembahasan dari analisis real. Sebagai contoh, konsep kekontinuan pada fungsi kompleks didefinisikan sama dengan konsep kekontinuan pada fungsi real. Begitu pula untuk pendefinisian limit dan turunannya, Anda akan menemukan bahwa konsep tersebut hampir tidak jauh berbeda dengan konsep limit dan turunan pada fungsi dua variabel di kalkulus. Sehingga, dengan adanya familiaritas ini, Anda akan lebih mudah untuk mempelajarinya.

Selain pembahasan materinya yang disajikan secara terstruktur, buku ajar ini juga dilengkapi dengan contoh-contoh yang divisualisasikan dalam bentuk gambar. Penyajian tersebut akan memudahkan pembaca untuk merelasikan apa yang dijelaskan dalam contoh dengan bentuk tampilan geometrisnya. Buku ajar ini juga menyediakan soal latihan yang dapat Anda gunakan untuk mengetahui sejauh mana Anda memahami materi yang telah dipelajari.

Jember, November 2019

Dr. Mohammad Fatekurrohman, S.Si., M.Si.



Prakata

Puji dan syukur kami panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan hidayahNya atas selesainya penulisan buku ajar **Analisis Kompleks** ini yang dapat diselesaikan dengan baik. Ucapan terima kasih disampaikan kepada para dosen tim pengajar matakuliah Analisis Kompleks di Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember yang telah memberikan kontribusi dalam penulisan buku ini.

Analisis Kompleks adalah mata kuliah wajib semester kelima di program studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember semenjak diberlakukan Kurikulum 2017, terdiri dari 3 sks (3 sks kuliah tanpa praktikum). Mahasiswa yang mengambil matakuliah ini disyaratkan telah mengikuti matakuliah Analisis Real I dan II.

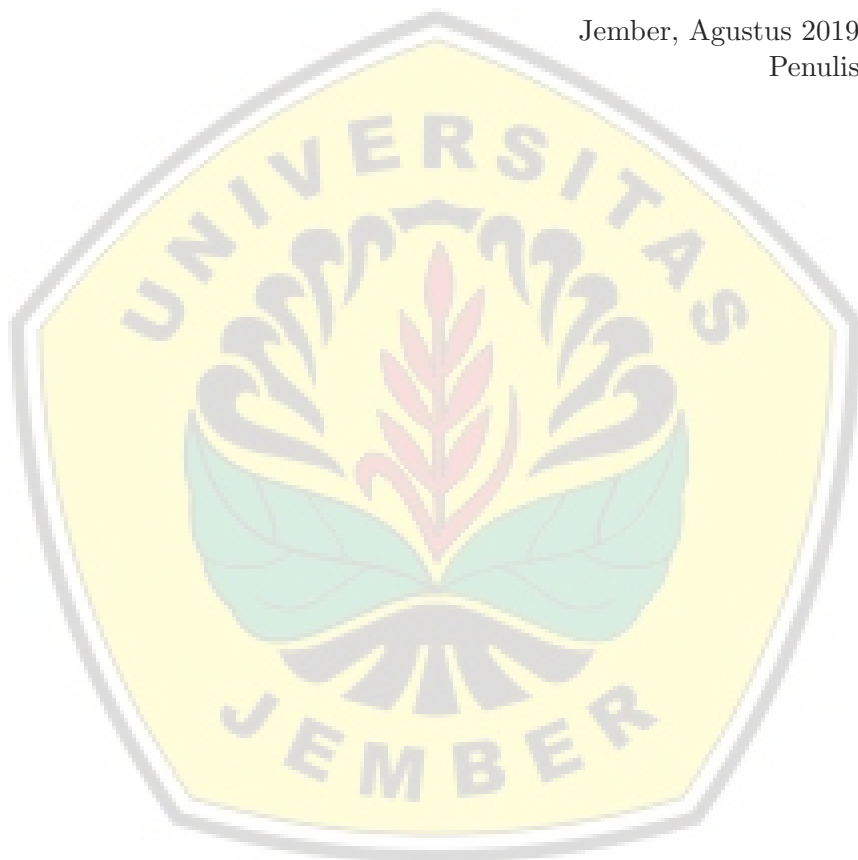
Buku Ajar Analisis Kompleks ini ditulis untuk digunakan pada perkuliahan Analisis Kompleks di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember, walaupun tidak menutup kemungkinan untuk dipakai di perkuliahan yang lain bahkan di luar fakultas. Penyusunan Buku Ajar ini dengan tujuan untuk mengefektifkan proses pembelajaran. Pada proses pembelajaran kelas selama ini, biasanya dosen memberikan penjelasan sambil mencatat di papan tulis. Mahasiswa pada umumnya menyalin catatan tersebut dan menyimak penjelasan dosen. Proses pembelajaran lebih banyak mendengarkan ceramah dari dosen/pengajar.

Kegunaan dari Buku Ajar ini, untuk dosen dipakai menjelaskan materi kuliah, sedang untuk mahasiswa sebagai pengganti catatan kuliah. Untuk itu waktu pembelajaran di kelas bisa digunakan secara lebih efektif untuk caramah dan diskusi. Dalam Buku Ajar ini, diberikan contoh-contoh soal yang telah diberikan penyelesaiannya. Diharapkan soal-soal yang diberikan di tiap akhir bab dapat diselesaikan oleh mahasiswa, begitu pula bahan diskusi yang ada di tiap bab.

Penyusunan Buku Ajar ini didasarkan pada buku-buku teks yang digunakan seperti tertulis dalam Daftar Pustaka. Semoga Buku Ajar ini dapat bermanfaat untuk meningkatkan kualitas pembelajaran Analisis Kompleks, terlebih khusus lagi di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Jember, Agustus 2019

Penulis



Daftar Isi

Kata Pengantar	i
Prakata	iii
Daftar Isi	v
Daftar Gambar	ix
Daftar Lambang dan Simbol	xi
Tinjauan Mata kuliah	xiii
1 Bilangan Kompleks	1
1.1 Pengantar Bilangan Kompleks	2
1.2 Sifat-sifat Aljabar Bilangan Kompleks	5
1.3 Vektor dan Modulus	9
1.4 Kompleks Sekawan	14
1.5 Bentuk Eksponensial	16
1.6 Perkalian dan Perpangkatan dalam Bentuk Eksponensial	19
1.7 <i>Argument</i> dari Perkalian dan Pembagian	22
1.8 Akar Bilangan Kompleks	25
1.9 Daerah dalam Bidang Kompleks	33
1.10 Rangkuman	36
1.11 Bahan Diskusi	37
1.12 Rujukan	38
1.13 Soal-soal Latihan	38
2 Fungsi Analitik	43
2.1 Fungsi Peubah Kompleks	44
2.2 Limit Fungsi	47

2.3	Teorema-teorema Limit	51
2.4	Limit di Ketakhinggaan	55
2.5	Kekontinuan Fungsi	58
2.6	Turunan Fungsi	61
2.7	Rumus Turunan Fungsi	65
2.8	Persamaan Cauchy-Riemann	68
2.9	Turunan dalam Koordinat Polar	76
2.10	Fungsi Analitik	80
2.11	Fungsi Harmonik	85
2.12	Rangkuman	90
2.13	Bahan Diskusi	92
2.14	Rujukan	92
2.15	Soal-soal Latihan	93
3	Fungsi Elementer	95
3.1	Fungsi Eksponensial	96
3.2	Fungsi Logaritma	98
3.3	Branch dan Turunan Logaritma	100
3.4	Identitas yang Melibatkan Logaritma	102
3.5	Eksponen Bilangan Kompleks	104
3.6	Fungsi Trigonometri	107
3.7	Fungsi Hiperbolik	110
3.8	Invers Fungsi Trigonometri dan Hiperbolik	113
3.9	Rangkuman	115
3.10	Bahan Diskusi	115
3.11	Rujukan	116
3.12	Soal-soal Latihan	116
4	Integral	117
4.1	Turunan Fungsi	118
4.2	Integral Kontur	121
4.3	Rangkuman	131
4.4	Bahan Diskusi	132
4.5	Rujukan	133
4.6	Soal-soal Latihan	134
5	Deret	139
5.1	Kekonvergenan Barisan	140
5.2	Kekonvergenan Deret	143
5.3	Deret Taylor	144

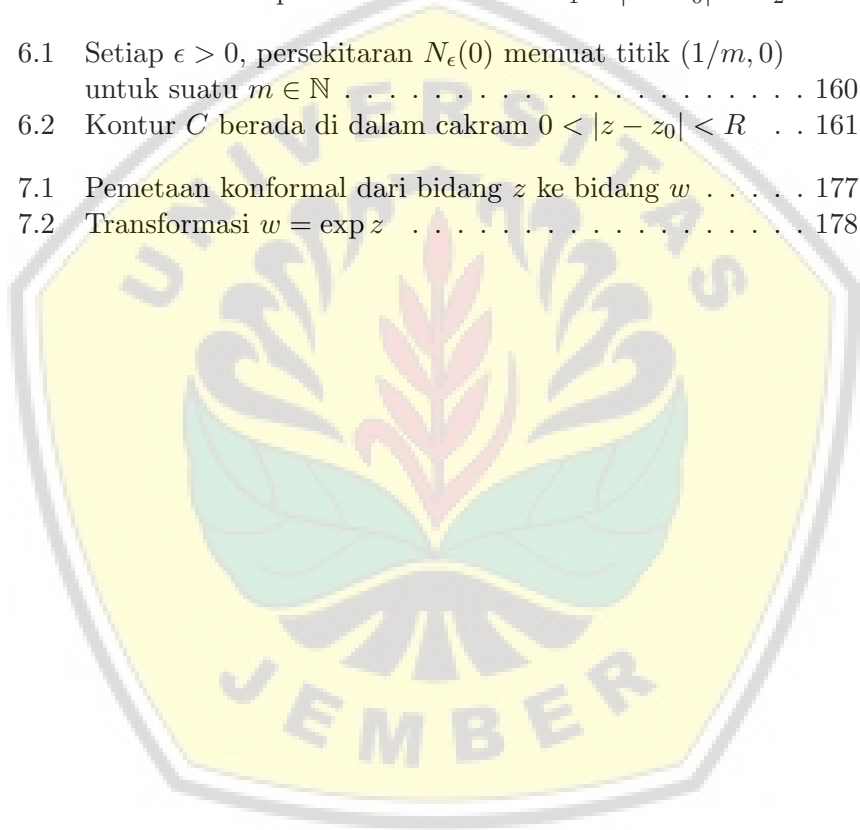
5.4	Deret Laurent	147
5.5	Ketunggalan Representasi Deret	148
5.6	Rangkuman	151
5.7	Bahan Diskusi	152
5.8	Rujukan	153
5.9	Soal-soal Latihan	154
6	Residu	159
6.1	Residu	160
6.2	Penggunaan Residu	167
6.3	Rangkuman	169
6.4	Bahan Diskusi	170
6.5	Rujukan	170
6.6	Soal-soal Latihan	170
7	Pemetaan Konformal	173
7.1	Preservasi Sudut	174
7.2	Transformasi Fungsi Harmonik	175
7.3	Rangkuman	177
7.4	Bahan Diskusi	178
7.5	Rujukan	178
7.6	Soal-soal Latihan	179
	Daftar Pustaka	181
	Glosarium	183
	Indeks	187
	Biografi	189



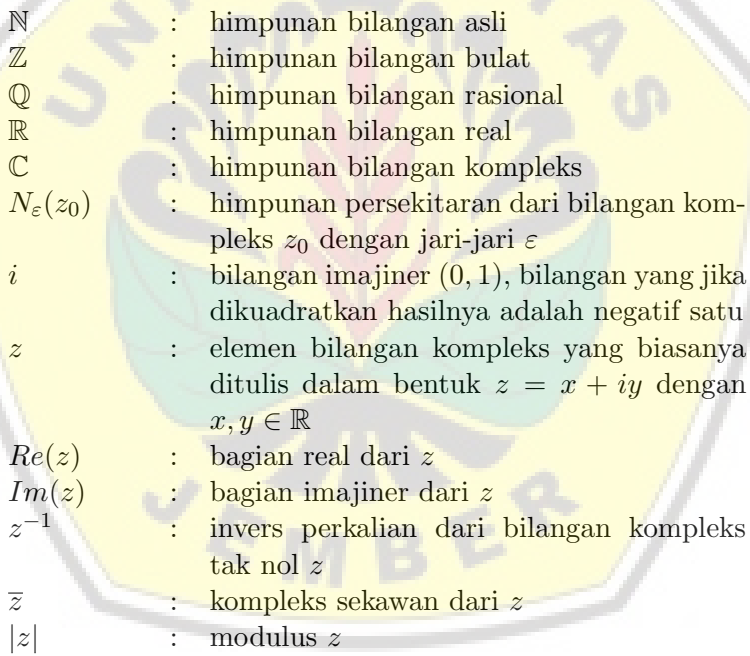
Daftar Gambar

1.1	Kedudukan bilangan kompleks	3
1.2	Penggambaran arah vektor z	10
1.3	Penjumlahan dua vektor dan arah vektornya	10
1.4	Jarak antara dua bilangan kompleks	12
1.5	Kompleks sekawan	14
1.6	Penyajian bilangan kompleks dalam koordinat polar	16
1.7	Bentuk eksponensial bilangan kompleks	19
1.8	Koordinat polar eksponensial	20
1.9	Representasi z_1, z_2 dan $z_1 z_2$	23
1.10	Ilustrasi akar bilangan kompleks	26
1.11	Posisi bilangan kompleks c_k	27
1.12	Akar-akar dari $z^n = 1$ untuk kasus $n = 3, 4$, dan 6	30
1.13	Ilustrasi akar pangkat tiga $z = (-8i)^{1/3}$	32
1.14	Ilustrasi akar pangkat dua bilangan kompleks $z = (\sqrt{3} + i)^{1/2}$	32
1.15	Representasi $ z - z_0 $	34
1.16	Anulus Himpunan Terbuka dan Terhubung	36
2.1	Persekitaran z_0 dan w_0	48
2.2	Irisan himpunan terbuka	49
2.3	Ilustrasi $z = (x, 0)$ dan $z = (0, y)$ mendekati titik asal	50
2.4	Proyeksi stereografik pada <i>Riemann sphere</i>	56
2.5	Pemetaan fungsi kontinu	60
2.6	Ilustrasi turunan fungsi	62
2.7	Ilustrasi turunan fungsi konstan	83
4.1	Busur sederhana berupa dua segmen garis	122
4.2	Busur setengah lingkaran	123
4.3	Busur lingkaran $ z = 2$ di kuadran pertama	125

4.4	Ilustrasi kontur tertutup dengan berhingga titik potong dengan dirinya sendiri	129
4.5	Grafik tiga busur	133
5.1	Barisan $\{z_n\}$ konvergen ke z	140
5.2	Cakram terbuka $ z - z_0 < R_0$	145
5.3	Kontur tertutup C_0	146
5.4	Kontur tertutup C di dalam anular $R_1 < z - z_0 < R_2$	148
6.1	Setiap $\epsilon > 0$, persekitaran $N_\epsilon(0)$ memuat titik $(1/m, 0)$ untuk suatu $m \in \mathbb{N}$	160
6.2	Kontur C berada di dalam cakram $0 < z - z_0 < R$	161
7.1	Pemetaan konformal dari bidang z ke bidang w	177
7.2	Transformasi $w = \exp z$	178



Daftar Lambang dan Simbol



\mathbb{N}	:	himpunan bilangan asli
\mathbb{Z}	:	himpunan bilangan bulat
\mathbb{Q}	:	himpunan bilangan rasional
\mathbb{R}	:	himpunan bilangan real
\mathbb{C}	:	himpunan bilangan kompleks
$N_\varepsilon(z_0)$:	himpunan persekitaran dari bilangan kompleks z_0 dengan jari-jari ε
i	:	bilangan imajiner $(0, 1)$, bilangan yang jika dikuadratkan hasilnya adalah negatif satu
z	:	elemen bilangan kompleks yang biasanya ditulis dalam bentuk $z = x + iy$ dengan $x, y \in \mathbb{R}$
$Re(z)$:	bagian real dari z
$Im(z)$:	bagian imajiner dari z
z^{-1}	:	invers perkalian dari bilangan kompleks tak nol z
\bar{z}	:	kompleks sekawan dari z
$ z $:	modulus z
r	:	jarak titik z pada bidang kompleks ke titik asal
Θ	:	nilai khusus yang berada pada selang $(-\pi, \pi]$, yang dibetuk oleh vektor posisi bilangan kompleks z dan sumbu real positif, disimbolkan juga dengan $Arg z$

θ	:	sudut yang dihitung dalam radian yang dibetuk oleh vektor posisi bilangan kompleks z , yang dihitung dari sumbu real positif berlawanan arah dengan jarum jam, disimbolkan juga dengan $\arg z$
$f(z)$:	fungsi variabel kompleks
R_f	:	range atau daerah hasil fungsi f
D_f	:	domain atau daerah asal fungsi f
$f^{-1}(z)$:	invers fungsi $f(z)$
$u(x, y)$:	bagian real dari fungsi variabel kompleks $f(z)$
$v(x, y)$:	bagian imajiner dari fungsi variabel kompleks $f(z)$
$u_x(x, y)$:	turunan parsial pertama terhadap x dari fungsi komponen $u(x, y)$
$u_y(x, y)$:	turunan parsial pertama terhadap y dari fungsi komponen $u(x, y)$
$H_{xx}(x, y)$:	turunan parsial kedua terhadap x dari fungsi $H(x, y)$
$H_{yy}(x, y)$:	turunan parsial kedua terhadap y dari fungsi $H(x, y)$
$f'(z)$:	turunan fungsi f terhadap z
$\frac{d}{dz}f(z)$:	turunan fungsi f terhadap z
$f^{(n)}(z)$:	turunan ke- n fungsi f terhadap z
$\ln f(z)$:	$\log_e f(z)$ (logaritma dengan basis e)
$\text{Log } z$:	nilai utama (<i>principal value</i>) dari $\log z$, yaitu nilai yang diperoleh dari fungsi bernilai banyak logaritma $\log z$ saat $n = 0$
$\int f(z) dz$:	anti turunan atau integral tak tentu f
$\int_a^b f(z) dz$:	integral tentu f dari $z = a$ ke $z = b$ yang tidak bergantung pada lintasan

Tinjauan Mata kuliah

Buku ajar "Analisis Kompleks" ini merupakan bahan penunjang dalam perkuliahan "Fungsi Peubah Kompleks". Mata kuliah Fungsi Peubah Kompleks merupakan mata kuliah wajib yang ditawarkan pada semester lima. Mata kuliah Fungsi Peubah Kompleks membahas tentang operasi hitung pada bilangan kompleks, nilai mutlak, penyajian geometris bilangan kompleks, bentuk kutub dan akar bilangan kompleks, fungsi variabel kompleks, limit dan kekontinuan, turunan, persamaan Cauchy-Reinmann dan aturan pendifferensialan, integral fungsi peubah kompleks, integral garis, teorema Cauchy- Goursat, rumus integral Cauchy, deret, residu, dan pemetaan konformal. Capaian pembelajaran yang diharapkan dari mata kuliah Fungsi Peubah Kompleks ini adalah

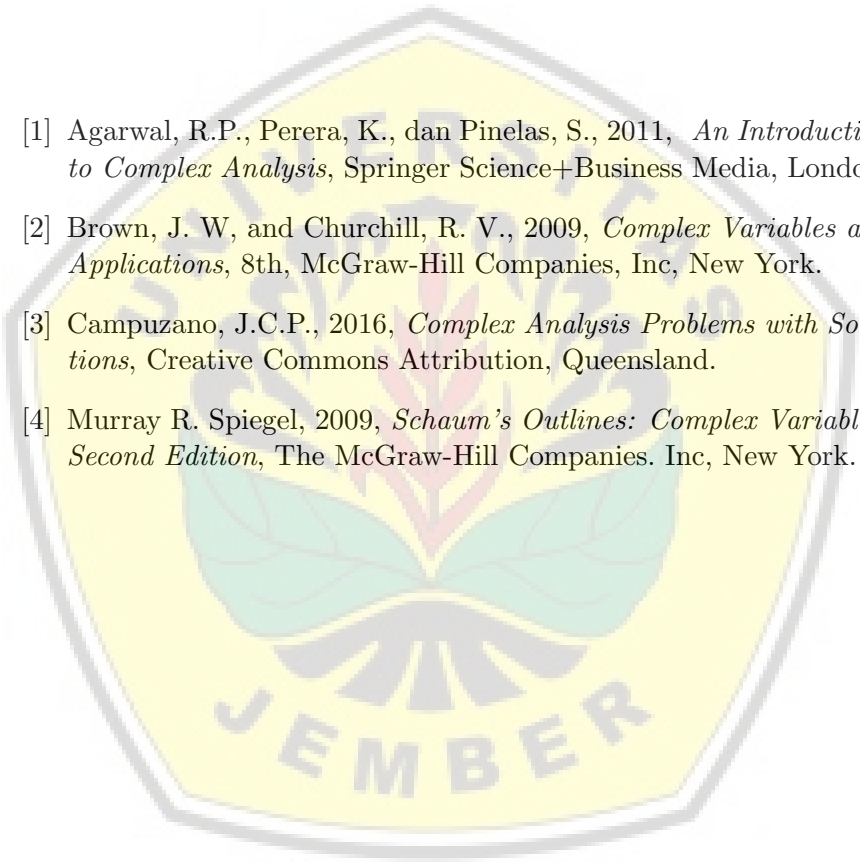
1. mampu memahami dan menjelaskan kembali konsep-konsep dalam bidang kajian Fungsi Peubah Kompleks
2. mampu menganalisis dan membuktikan beberapa sifat yang berlaku pada kajian Fungsi Peubah Kompleks
3. mampu menerapkan dan menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan konsep bidang kajian Fungsi Peubah Kompleks
4. mampu mengelola dan bertanggungjawab
5. mampu bersikap etis, kreatif dan bekerjasama

Untuk dapat mengikuti perkuliahan Fungsi Peubah Kompleks, mahasiswa wajib untuk mengikuti perkuliahan Analisis Real terlebih dahulu. Hal ini dikarenakan bahwa sebagian besar sifat-sifat yang berlaku pada bilangan dan fungsi kompleks diturunkan dari sifat-sifat yang berlaku pada bilangan dan fungsi real. Pemahaman yang mahasiswa dapatkan dari perkuliahan Analisis Real akan mempercepat

pemahamannya ketika mempelajari buku ajar ini. Buku ajar ini dapat dijadikan sebagai penuntun mandiri bagi mahasiswa. Oleh sebab itu, untuk mempelajari topik-topik pada buku ajar ini, ada beberapa hal yang perlu diperhatikan, yaitu:

1. Bacalah terlebih dahulu tentang kemampuan akhir yang diharapkan yang dijelaskan di awal bab.
2. Bacalah dengan teliti dan pahami setiap pernyataan dan alasan untuk setiap pembuktian yang dilakukan
3. Kerjakan kegiatan yang disediakan dalam tiap bab secara baik dan bertanggung jawab;
4. Pahami seluruh isi bab dengan cermat;
5. Kerjakan latihan di akhir bab dengan baik.
6. Carilah informasi pembandingan dari internet atau buku lainnya berkenaan dengan topik yang dipelajari.
7. Catatlah hal-hal penting yang perlu dicatat ketika mempelajari materi pada tiap bab .
8. Lakukan proses pengkajian tiap bab ke dalam dua bagian, yaitu belajar kelompok dan belajar mandiri.
9. Pembelajaran harus dilakukan secara bertahap dari Bab 1 sampai Bab 7. Sebagai contoh, kita tidak dapat langsung memulai pembelajaran langsung ke Bab 2 karena ada beberapa terminologi dan konsep yang harus dipelajari di Bab 1. Begitupula untuk bab-bab yang lain, kecuali kita sudah mengetahui materi tersebut sebelumnya.

Daftar Pustaka

- 
- [1] Agarwal, R.P., Perera, K., dan Pinelas, S., 2011, *An Introduction to Complex Analysis*, Springer Science+Business Media, London.
 - [2] Brown, J. W, and Churchill, R. V., 2009, *Complex Variables and Applications*, 8th, McGraw-Hill Companies, Inc, New York.
 - [3] Campuzano, J.C.P., 2016, *Complex Analysis Problems with Solutions*, Creative Commons Attribution, Queensland.
 - [4] Murray R. Spiegel, 2009, *Schaum's Outlines: Complex Variables, Second Edition*, The McGraw-Hill Companies. Inc, New York.



Glosarium

B

bilangan imajiner himpunan bilangan yang jika dikuadratkan menghasilkan bilangan real negatif.

bilangan kompleks himpunan bilangan yang terdiri atas bilangan real dan imajiner.

D

domain himpunan yang terbuka dan terhubung.

F

fungsi analitik fungsi yang memiliki turunan di setiap titik pada himpunan.

fungsi harmonik fungsi dua variabel yang turunan parsial pertama dan keduanya kontinu serta memenuhi persamaan Laplace.

fungsi kontinu fungsi yang nilai limitnya sama dengan nilai fungsinya.

fungsi penuh fungsi yang analitik di setiap titik pada bidang kompleks.

H

himpunan terbuka himpunan yang tidak memuat satupun titik batas atau himpunan yang setiap anggotanya merupakan titik-dalam (*interior point*).

himpunan terhubung himpunan yang setiap dua elemennya dapat dihubungkan oleh garis poligon yang terdiri dari sejumlah hingga segmen garis yang terhubung yang terletak pada himpunan tersebut.

himpunan tertutup himpunan yang memuat semua titik batas atau himpunan yang komplementnya terbuka.

K

kompleks sekawan bilangan kompleks yang diperoleh dari hasil pencerminan terhadap sumbu real.

M

modulus jarak antara titik yang merepresentasikan bilangan kompleks ke titik asal.

N

nilai utama suatu nilai yang berada pada selang $-\pi < \Theta \leq \pi$.

P

pemetaan konformal pemetaan yang setiap titik pada domainnya analitik dan nilai pemetaannya tidak sama dengan nol.

persekitaran himpunan titik-titik yang berada pada posisi kurang dari radius tertentu.

S

sumbu imajiner sumbu- y pada koordinat kartesius.

sumbu real sumbu- x pada koordinat kartesius.

T

titik batas titik yang bukan titik eksterior maupun titik interior.

titik eksterior titik yang beberapa persekitarannya tidak satupun memuat titik-titik pada himpunan.

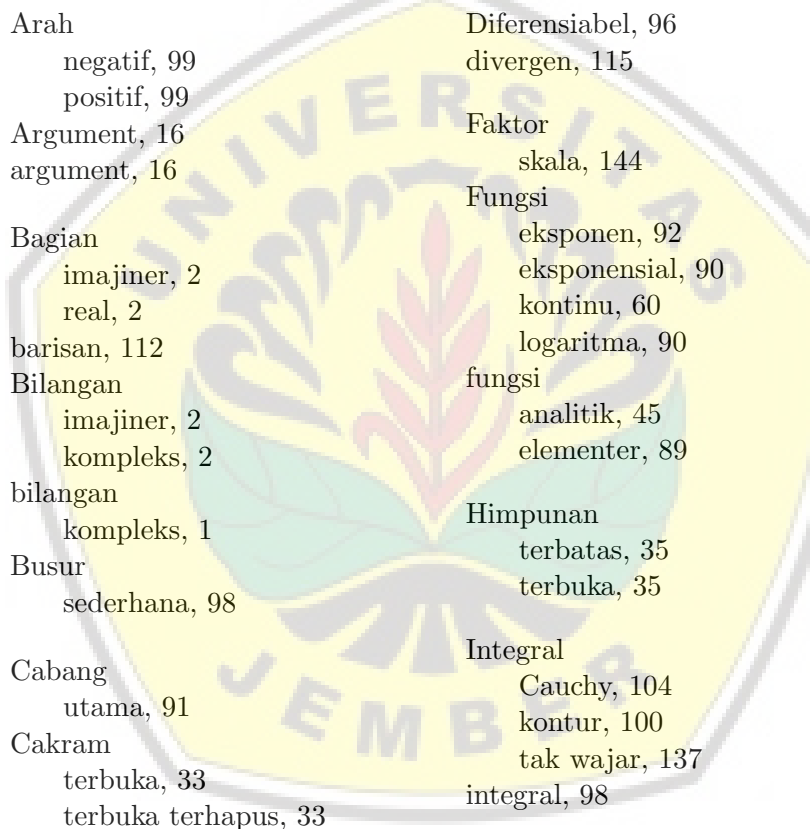
titik interior titik yang beberapa persekitarannya hanya memuat titik-titik pada himpunan.

titik singular titik yang tidak analitik namun analitik pada persekitarannya.





Indeks

- 
- Arah
 negatif, 99
 positif, 99
Argument, 16
argument, 16
Bagian
 imajiner, 2
 real, 2
barisan, 112
Bilangan
 imajiner, 2
 kompleks, 2
bilangan
 kompleks, 1
Busur
 sederhana, 98
Cabang
 utama, 91
Cakram
 terbuka, 33
 terbuka terhapus, 33
 tertutup, 33
Dapat
 diturunkan, 96
de Moivre, 23
Deret
 Laurent, 118
 Maclaurin, 116
deret, 111
Diferensiabel, 96
divergen, 115
Faktor
 skala, 144
Fungsi
 eksponen, 92
 eksponensial, 90
 kontinu, 60
 logaritma, 90
fungsi
 analitik, 45
 elementer, 89
Himpunan
 terbatas, 35
 terbuka, 35
Integral
 Cauchy, 104
 kontur, 100
 tak wajar, 137
integral, 98
Kompleks
 sekawan, 13
Konformal, 144
Konvergen, 112, 115, 137
Kurva
 tertutup sederhana, 98
Limit, 112
Lingkaran, 33

Modulus, 10, 11

Nilai

mutlak, 11

Pemetaan

konformal, 144

pemetaan

konformal, 143

Pole

berderajat, 133

sederhana, 133

Polinomial, 47

Preservasi

sudut, 144

Residu, 131

residu, 129, 130

Selang

semi-tak hingga, 137

Sumbu

imajiner, 2

Teorema

Laurent, 118, 122

terisolasi, 130

Titik

eksterior, 34

interior, 34

kritis, 144

singular esensial, 134

singular yang dapat dihapus,
134

titik

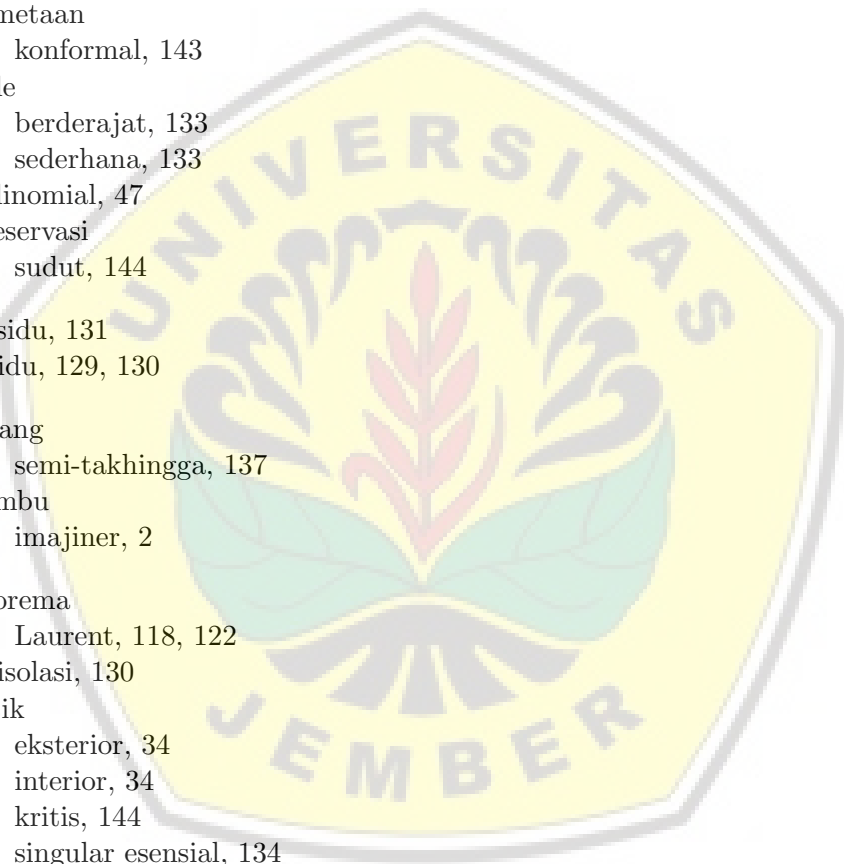
singular, 130

titik-dalam, 34

titik-luar, 34

Turunan, 96

fungsi, 96



Biografi Penulis



Ikhsanul Halikin, lahir di pulau Giligenting Kabupaten Sumenep pada hari selasa tanggal 14 Oktober 1986, putra kedua dari Bapak Syamsuri dan Ibu Nurhayati yang beralamat di dusun Murassem Timur, desa Aenganyar, kecamatan Giligenting. Pendidikan sekolah dasar ditempuh di SDN Aenganyar II dan lulus pada tahun 1999, kemudian melanjutkan pendidikan di SLTPN 1 Giligenting dan lulus pada tahun 2002. Pada tahun 2005, lulus sekolah di SMAN 2

Sumenep kemudian melanjutkan kuliah S1 di Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember. Setelah mendapatkan gelar sarjana, penulis melanjutkan kuliah S2 di program Studi Magister Matematika FMIPA Universitas Jember dan lulus pada tahun 2012. Pada tahun 2014 menikah dengan Siti Holifah dan pada tahun 2015 dikaruniai seorang anak laki-laki bernama Fahri Ahza Ihsani. Penulis aktif sebagai dosen di jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember sejak tahun 2014 hingga sekarang. Mata kuliah yang pernah di ampu adalah Kalkulus, Kalkulus Lanjut, Kalkulus Peubah Banyak, Kombinatorika, Teori Graf, Struktur Aljabar, Fungsi Peubah Kompleks, Pemodelan, dan Matematika Dasar.



Firdaus Ubaidillah Lahir di Lamongan tanggal 6 Juni 1970, menempuh pendidikan dasar di SD Alun-alun II Lamongan dan SD Dinoyo III Malang, pendidikan menengah di MTsN Malang II dan MAN Malang II Batu. Tahun 1989 melanjutkan studi S1 di Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Brawijaya (UB) Malang lulus tahun 1994. Studi S2 ditempuh di Jurusan Matematika Fakultas MIPA Institut

Teknologi Bandung (ITB) lulus tahun 2004. Pendidikan S3 ditempuh di Jurusan Matematika Universitas Gadjah Mada (UGM) Yogyakarta dan memperoleh gelar Doktor bidang matematika tahun 2016. Dalam kesehariannya, penulis aktif mengajar di prodi S1 dan S2 Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember dengan matakuliah yang diampu adalah Kalkulus, Analisis Real, Fungsi Peubah Kompleks, Persamaan Diferensial Biasa, Persamaan Diferensial Parsial, Aljabar Linear, dan lain-lain. Karya buku yang telah ditulis adalah Kalkulus Fungsi Satu Peubah.