POLINOMIAL KROMATIK GRAF KIPAS

SKRIPSI

Oleh

Nur Ridwan Maulana
NIM 151810101046

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2020

POLINOMIAL KROMATIK GRAF KIPAS

SKRIPSI

Disusun guna memenuhi Tugas Akhir sebagai salah satu persyaratan akademik pada program sarjana (S1) Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Oleh

Nur Ridwan Maulana
NIM 151810101046

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2020

PERSEMBAHAN

Puji sykur kehadirat Allah SWT saya dapat menyelesaikan skripsi yang saya persembahkan untuk:

1. Kedua orang tua saya Ayahanda Didik Hartono dan Ibunda Afita Nurdiana yang telah memberikan kasih sayang, motivasi dan doa;
2. Segenap keluarga besar saya yang telah memberikan doa dan dukungan;
3. Semua guru sejak TK Aisyiyah, SD N 7 Besuki, SMP N 1 Banyuglugur, SMA N 1 Besuki, serta bapak ibu dosen di perguruan tinggi yang telah memberikan ilmu dan bimbingannya dengan penuh kesabaran;
4. Kakak tingkat, teman seangkatan SIGMA ‘15, serta adik tingkat yang telah memberikan semangat, motivasi dan menemani selama perkuliahan ini;
5. Siti Aisyah Ayudia yang selalu memberikan dukungan dalam bentuk apapun dan menemani selama proses ini.
6. Teman-teman KKN 265 Gondosuli yang telah menemani waktu luang;
7. HIMATIKA “Geokompstat” yang telah memberikan pengalaman dan membantu berproses selama perkuliahan ini;
8. UKMS Titik, saudara tanpa hubungan darah yang sudah menjadi rumah kedua selama ini;
9. Almamater Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

MOTTO

"Maka apabila kamu telah selesai dari suatu urusan maka kerjakanlah dengan sungguh-sungguh urusan yang lain"
(QS. Al Insyirah :7)[*)]

"Boleh jadi kamu membenci sesuatu padahal ia amat baik bagimu, dan boleh jadi pula kamu menyukai sesuatu padahal ia amat buruk bagimu, Allah mengetahui sedang kamu tidak mengetahui"
(QS. AL-Baqarah : 216)[*)]

[*)] Departemen agama republik indonesia. 1998. Al Qur'an dan Terjemahannya. Semarang: PT Kumudasmoro Grafindo

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Nur Ridwan Maulana

NIM. : 151810101046

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa karya ilmiah yang berjudul "Polinomial Kromatik Graf Kipas " adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi manapun dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika tenyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Februari 2020

Yang menyatakan,

Nur Ridwan Maulana

NIM. 151810101046

SKRIPSI

Polinomial Kromatik Graf Kipas

Oleh

Nur Ridwan Maulana

NIM. 151810101046

Pembimbing:

Dosen Pembimbing Utama	: Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si
Dosen Pembimbing Anggota	: Dr. Kiswara Agung Santoso, S.Si., M.Kom.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul “Polinomial Kromatik Graf Kipas” telah diuji dan disahkan pada:

Hari, tanggal :

Tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Tim Penguji

Ketua,	Anggota I,
Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si. NIP. 197408132000032004	Dr. Kiswara Agung Santoso, S.Si., M.Kom. NIP. 197209071998031003
Anggota II	Anggota III
Kusbudiono, S.Si., M.Si. NIP. 197704302005011001	Dian Anggraeni, S.Si., M.Si NIP. 198202162006042002

Mengesahkan
Dekan,

Drs. Achmad Sjaifullah, M.Sc, Ph.D.
NIP. 195910091986021001

RINGKASAN

Polinomial Kromatik Graf Kipas; Nur Ridwan Maulana, 151810101046; 2020; 42 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pewarnaan graf adalah pewarnaan objek pada graf sedemikian sehingga setiap objek yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama. Misalkan G adalah graf terhubung dengan $V(G)$ adalah titik titik dari graf G, maka minimal banyaknya warna yang dapat diberikan pada graf G disebut bilangan kromatik ($\chi(G)$). Banyak cara berbeda untuk pemberian warna pada graf G dengan k warna disebut Polinomial kromatik yang dinotasikan $f(G,k)$. Tahun 2004, Kurniawati meneliti polinomial kromatik titik dari graf terhubung yaitu graf lengkap, graf sikel dan graf lintasan. Dwijayanti (2011) juga meneliti polinomial kromatik titik pada beberapa graf sederhana lain yaitu graf bintang, graf roda dan graf tangga. Pada penelitian ini, kami mengkaji polinomial kromatik dari graf kipas.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode induktif. Metode induktif adalah metode yang digunakan untuk menentukan polinomial kromatik suatu graf dari bentuk khusus ke bentuk umum.. Misalnya pada kasus graf kipas F_n ini, mencari polinomial kromatik pada graf kipas F_3, F_4, dan F_5. Dari beberapa graf tersebut akan didapatkan pola yang diperoleh dari polinomial kromatik dari graf tersebut dan akan diketahui polinomial kromatik graf kipas F_n untuk setiap $n \geq 3$.

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dilakukan dapat disimpulkan bahwa polinomial graf kipas F_3, F_4, F_5, secara berturut-turut adalah $P(F_3,k) = , k(k-1)(k-2)^2$, $P(F_4,k) = k(k-1)(k-2)^3$, dan $P(F_5,k) = k(k-1)(k-2)^4$. Sedangkan polinomial kromatik graf kipas F_n untuk setiap $n \geq 3$ adalah $P(F_n,k) = k(k-1)(k-2)^{n-1}$.

PRAKATA

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala rahmat dan kuasa-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir yang berjudul “Polinomial Kromatik Graf Kipas”. Penulisan tugas akhir ini disusun guna memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas jember.

Pada kesempatan ini, dengan segala hormat penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, kepada:

1. Ibu Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing utama dan Bapak Dr. Kiswara Agung Santoso, S.Si., M.Kom. selaku dosen pembimbing anggota;
2. Bapak Kusbudiono, S.Si., M.Si. selaku dosen penguji I dan Ibu Dian Anggraeni, S.Si., M.Si selaku dosen penguji II;
3. Seluruh dosen dan karyawan Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember;
4. Keluarga yang telah memberikan motivasi, doa, dan kasih sayang;
5. Siti Aisyah Ayudia yang selalu memberikan dukungan dalam bentuk apapun dan menemani selama proses ini;
6. UKMS Titik, saudara tanpa hubungan darah yang sudah menjadi rumah kedua selama ini
7. Serta semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa penelitian ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu penulis mengharap kritik dan saran demi kesempurnaan skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat untuk kita semua.

Jember, Februari 2020

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika memiliki banyak manfaat karena teori yang terdapat pada teori graf dapat diterapkan untuk menyelesaikan permasalahan dalam kehidupan sehari hari. Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh matematikawan asal Swiss bernama Leonhard Euler pada tahun 1736. Euler berhasil memecahkan masalah jembatan yang berada di kota Koinsberg (Chartrand dan Oellerman, 1993).

Pewarnaan graf adalah pewarnaan objek pada graf sedemikian sehingga setiap objek yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama. Objek tersebut dapat berupa titik, sisi, maupun wilayah. Suatu graf dapat diwarnai dengan sejumlah t warna. Minimal banyaknya warna yang dapat diberikan pada suatu graf disebut bilangan kromatik. Dalam perkembangannya, cara yang digunakan untuk mewarnai suatu graf adalah *Algoritma Welch-Powell*. Hal sangat menarik dari kajian pewarnaan graf adalah berapa banyak cara untuk mewarnai suatu graf dengan k warna yang disediakan. Pemasalahan ini dibahas dalam polinomial kromatik yang dinotasikan $f(G, k)$, dengan k adalah banyaknya warna yang disediakan.

Polinomial kromatik pertama kali diperkenalkan oleh George David Birkhoff pada tahun 1912 dan dilanjutkan oleh Whitney pada tahun 1932. Birkhoff dan lewis mendapatkan polinomial kromatik dari graf planar dan membuat dugaan kuat mengenai teorema empat warna yaitu setiap graf planar membutuhkan maksimal 4-warna.

Kajian polinomial kromatik telah dibahas oleh beberapa peneliti. Kurniawati (2004) yang meneliti polinomial kromatik titik dari graf terhubung yaitu graf lengkap, graf sikel dan graf lintasan. Dwijayanti (2011) juga meneliti polinomial kromatik titik pada beberapa graf sederhana lain yaitu graf bintang, graf roda dan graf tangga. Pada proposal ini, penulis tertarik untuk membahas tentang menentukan polinomial kromatik titik pada graf kipas F_n, graf ini merupakan pengembangan dari graf lintasan P_n yang sudah diteliti sebelumnya. Pengembangan tersebut berupa operasi join antara graf lintasan P_n dan graf lengkap K_1.

1.2 Rumusan Masalah

Masalah yang akan dibahas pada skripsi ini adalah bagimana menentukan polinomial kromatik titik dari graf kipas F_n dengan $n \geq 3$.

1.3 Tujuan

Penulisan proposal ini bertujuan untuk mendapatkan persamaan polinomial kromatik titik dari graf kipas F_n dengan $n \geq 3$.

1.4 Manfaat

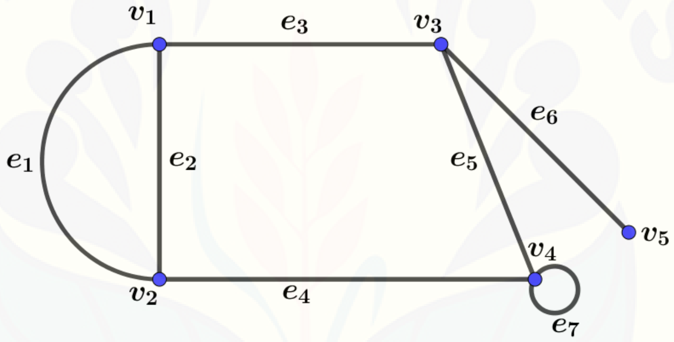
Manfaat yang diperoleh dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

a. Menambah pengetahuan dalam bidang teori graf mengenai polinomial kromatik titik pada graf kipas F_n.
b. Menambah motivasi pada pembaca dan peneliti lain untuk melanjutkan penelitian ini pada graf lainnya.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Graf

$Graf\ G$ didefiniskan sebagai pasangan himpunan (V, E) dengan V merupakan himpunan tak kosong yang elemennya disebut sebagai titik dan E merupakan himpunan yang boleh kosong dari pasangan tak terurut (u, v) untuk $u, v\ \in V(G)$, yang disebut sebagai sisi. Banyaknya unsur yang berada di V disebut *order* dari G. Sedangkan banyaknya unsur di E disebut *size* dari G. Graf dengan order berhingga dinamakan graf berhingga, sedangkan graf yang hanya memiliki satu buah titik disebut graf trivial. (Chartrand *and* Lesniak, 1996). Pada Gambar 2.1 diberikan contoh graf dengan 5 titik dan 7 sisi.



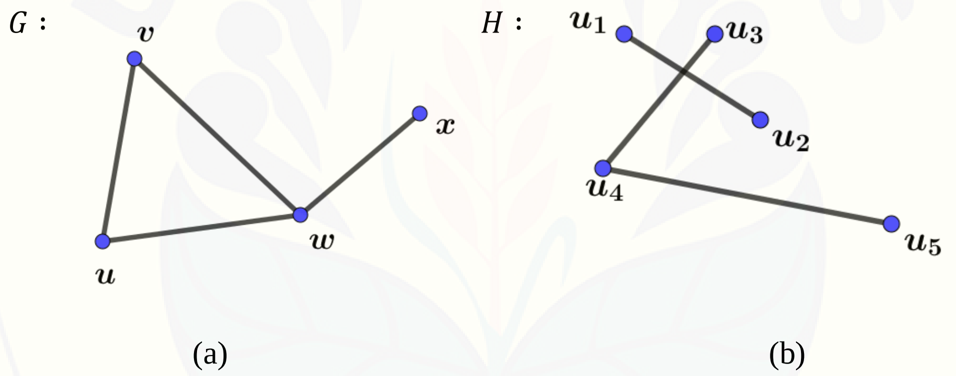
Gambar 2.1 Graf dengan 5 titik dan 7 sisi

Dua titik u dan v pada graf G dikatakan *bertetangga* jika dihubungkan oleh sebuah sisi e. Sisi e dikatakan *menempel* pada titik u dan v dan sebaliknya jika u dan v merupakan titik ujung dari sisi e. *Loop* dalam suatu graf adalah sebuah sisi yang menghubungkan sebuah titik dengan dirinya sendiri. Dua sisi atau lebih yang menghubungkan pasangan titik yang sama pada suatu graf disebut *sisi paralel*. Pada gambar 2.1 titik v_1 bertetangga dengan v_3 , sisi e_2 menempel pada titik v_1 dan v_3, e_1 dan e_2 adalah sisi paralel, e_7 adalah loop.

Graf sederhana (*simple graph*) adalah graf yang tidak memiliki *loop* dan sisi paralel. Graf ganda (*multiple graph*) adalah graf tak sederhana yang mengandung sisi paralel. Graf semu (*pseudo graph*) adalah graf tak sederhana yang mengandung *loop*.

Derajat (*degree*) suatu titik v pada graf G adalah banyaknya sisi yang menempel pada titik v dan dinotasikan dengan $deg(v)$. Jika dalam suatu graf G setiap titiknya memiliki derajat yang sama maka graf G disebut *graf regular*. Derajat dari sebuah *loop* v adalah $deg(v) = 2$. Pada Gambar 2.1 $deg(v_5) = 1$, $deg(v_4) = 4$, $deg(v_1) = deg(v_2) = deg(v_3) = 3$.

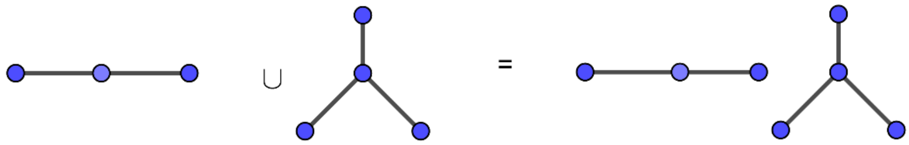
Sebuah graf dikatakan *terhubung* jika setiap dua titik u dan v di G, terdapat lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut. Sedangkan graf dikatakan *tak terhubung*. jika terdapat dua titik u dan v yang tidak mempunyai lintasan. Sebagai contoh, Gambar 2.2 merupakan contoh graf terhubung dan graf tidak terhubung.



Gambar 2.2 (a) Graf terhubung sederhana G dan (b) Graf tak terhubung sederhana H

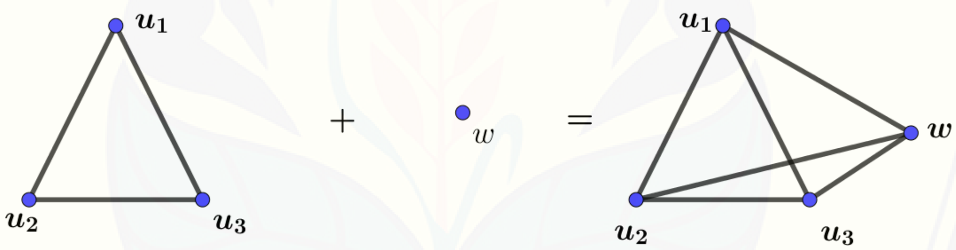
2.2 Operasi pada Graf

Operasi graf yang dibahas diantaranya adalah operasi *union*, operasi *join* dan operasi *dot*. Union dari G_1 dan G_2 yang dinotasikan dengan $G_1 \cup G_2$ adalah graf dimana $V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2)$. Graf *union* memiliki $|V(G_1 \cup G_2)| = |V(G_1)| + |V(G_2)|$ dan $|E(G_1 \cup G_2)| = |E(G_1)| + |E(G_2)|$. Gambar 2.3 menunjukan graf hasil operasi union.



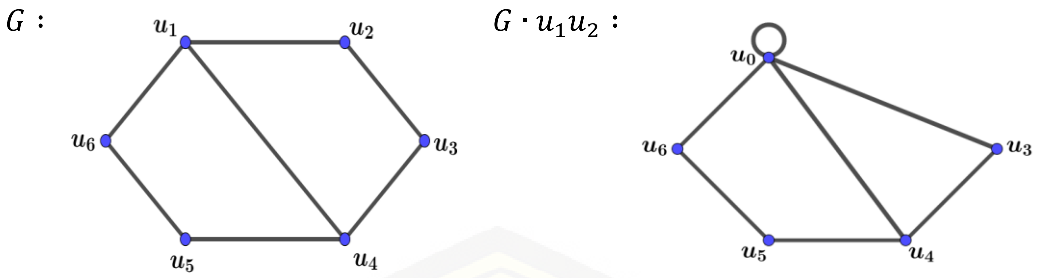
Gambar 2.3 Graf hasil operasi Union

Join dari G_1 dan G_2 yang dinotasikan $G_1 + G_2$ adalah graf yang terdiri dari *union* $G_1 \cup G_2$ dan semua sisi yang menghubungkan $v_i \in G_1$ dan $v_j \in G_2$, sedemikian sehingga setiap v_i bertetangga dengan setiap v_j. Berdasarkan hal ini maka $|V(G_1 + G_2)| = |V(G_1)| + |V(G_2)|$ dan $|E(G_1 + G_2)| = |E(G_1)| + |E(G_2)| + |V(G_1)|\ |V(G_2)|$. Pada Gambar 2.4 merupakan contoh graf yang dihasilkan oleh operasi join.



Gambar 2.4 Graf hasil operasi join

Misalkan $u, v \in V(G)$, maka operasi *dot* pada graf G dengan titik u dan v, dinotasikan dengan $G \cdot uv$, adalah graf yang diperoleh dari graf G dengan menghapus titik u dan v, kemudian digantikan dengan sebuah titik baru w dengan tetap mempertahankan ketetanggaan antara u dan v, begitu juga dengan ketetanggaan titik yang lain pada graf tersebut. Dengan demikian $V(G \cdot uv) = V(G|\{u, v\}) \cup \{w\}$ dan $E(G \cdot uv) = E(G)$. Berdasarkan hal ini maka $|V(G \cdot uv)| = |V(G)| - 1$ dan $|E(G \cdot uv)| = |E(G)|$. Jika u dan v bertetangga maka sisi uv akan menjadi *loop* yang menempel pada titik baru w. Gambar 2.5 menunjukkan graf hasil operasi *dot*.



Gambar 2.5 Graf hasil operasi *dot* $G \cdot u_1u_2$

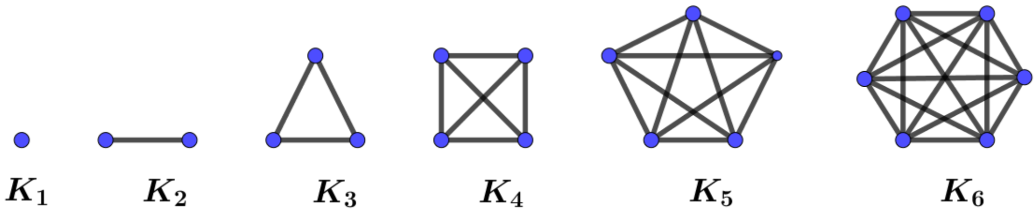
2.3 Kelas-kelas Graf

Graf diklasifikasikan dalam beberapa kelas, tetapi pada subbab ini hanya dibahas beberapa kelas graf sederhana diantaranya adalah graf lintasan P_n, graf lengkap K_n dan graf kipas F_n. Adapun penjelasan graf-graf tersebut adalah sebagai berikut.

Graf lintasan adalah graf terhubung sederhana yang semua titik dan sisinya terletak pada lintasan tunggal. Graf lintasan dengan n titik dinotasikan sebagai P_n dengan $V(P_n) = v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan $E(P_n) = \{v_iv_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\}$. Titik v_1 dan v_n merupakan titik ujung dari P_n dengan $deg(v_1) = deg(v_n) = 1$ dan titik v_i merupakan titik dalam P_n dengan $deg(v_i) = 2$ untuk $2 \leq i \leq n-1$. Graf P_n memiliki n titik dan $(n-1)$ sisi. Pada Gambar 2.6 diberikan contoh graf lintasan dengan 7 titik, P_7.

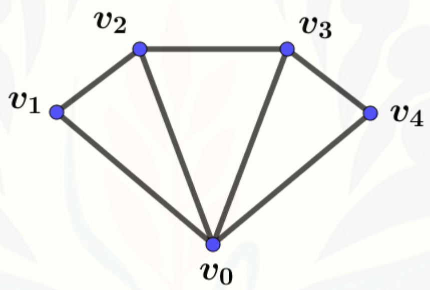
Gambar 2.6 Graf lintasan P_7

Graf lengkap dengan n titik yang dinotasikan K_n adalah graf sederhana yang setiap titiknya *bertetangga* dengan titik lainnya. Jadi graf lengkap K_n adalah *graf reguler* $n-1$. Graf lengkap memiliki $\frac{n(n-1)}{2}$ sisi. Pada Gambar 2.7 diberikan beberapa contoh beberapa graf lengkap.



Gambar 2.7 Graf lengkap K_1 hingga K_6

Graf kipas dinotasikan F_n merupakan graf terhubung sederhana yang dihasilkan oleh operasi join K_1 dan P_n yaitu $K_1 + P_n$ dengan $n \geq 1$. Graf kipas F_n memiliki $n + 1$ titik dan $2n - 1$ sisi. Karena graf $F_1 \cong K_2$ dan graf $F_2 \cong K_3$ sehingga penelitian ini hanya membahas polinomial kromatik F_n dengan $n \geq 3$. Contoh graf kipas diberikan pada Gambar 2.8.



Gambar 2.8 Graf kipas F_4

2.4 Pewarnaan Graf

Pewarnaan titik dari graf G adalah sebuah pemetaan himpunan titik $V(G)$ ke himpunan warna sedemikian sehingga titik yang *bertetangga* mempunyai warna yang berbeda. Graf G berwarna n jika terdapat sebuah pewarnaan dari G yang menggunakan n warna.

Dalam pewarnaan titik erat kaitannya dengan penentuan bilangan kromatik, yaitu masalah menentukan banyak warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai titik-titik pada graf sehingga dua titik yang saling bertetangga mempunyai warna yang berbeda. Bilangan kromatik dari graf G, dinotasikan dengan $\chi(G)$. Jika $\chi(G) = k$ maka G dapat diwarnai dengan k warna tetapi tidak dapat diwarnai dengan $(k-1)$ warna. Berikut diberikan beberapa teorema pewarnaan titik.

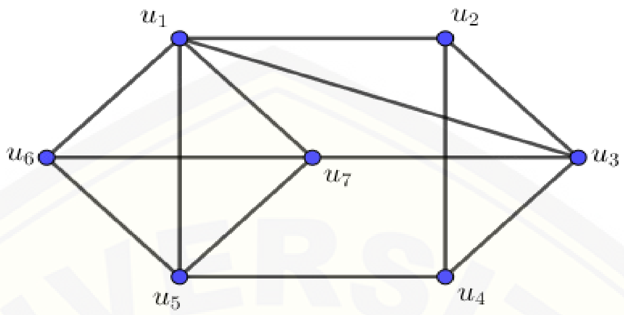
Teorema 2.1 (Chartrand *and* Lesniak, 1996) Sebuah graf G dengan order n memiliki bilangan kromatik sama dengan n jika dan hanya jika $G = K_n$.

Teorema 2.2 (Chartrand *and* Lesniak, 1996) Jika graf H adalah subgraf dari suatu graf G maka $\chi(H) \leq \chi(G)$.

Untuk mewarnai suatu graf dibutuhkan suatu cara atau metode agar lebih mudah untuk mewarnai graf tersebut. Salah satunya adalah Algoritma Welch-Powell. Algoritma Welch-Powell ini adalah suatu cara yang sering digunakan untuk mewarnai sebuah graf G. Langkah-langkah dalam algoritma Welch-Powell :

a. Urutkan titik pada graf dengan derajat titik yang paling tinggi ke derajat titik yang paling rendah misalkan urutan titiknya $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ dimana $deg(v_1) \geq deg(v_2) \geq \ldots \geq deg(v_n)$
b. Memberikan warna pertama pada titik yang derajat titiknya paling tinggi dan pada titik yang tidak *adjacent* dengan titik tersebut.
c. Memberikan warna kedua pada titik dengan derajat tertinggi yang belum diwarnai dan pada titik yang tidak *adjacent* dengan titik tersebut.
d. Lanjutkan langkah seperti langkah c, jika masih terdapat titik yang belum diwarnai dan berhenti jika semua titik telah diwarnai.

Berikut diberikan ilustrasi untuk mewarnai titik pada suatu graf G menggunakan *Algoritma Welch-Powell*.



Gambar 2.9 Contoh graf untuk menentukan pewarnaan graf

Langkah pertama adalah mengurutkan derajat titik dari yang terbesar sampai yang terkecil yaitu $u_1, u_3, u_5, u_7, u_2, u_4,$ dan u_6 dengan $deg(u_1) = 5$, $deg(u_3) = deg(u_5) = deg(u_7) = 4$, $deg(u_2) = deg(u_4) = deg(u_6) = 3$. Kemudian berikan warna 1 pada titik u_1 dan titik yang tidak *adjacent* dengan u_1 diberikan warna yang sama yaitu titik u_4. Selanjutnya, berikan warna 2 pada titik u_3 dan u_5, warna 3 pada u_7 dan u_2 dan terakhir berikan warna 4 pada titik u_6. Jadi graf pada Gambar 2.9 dapat diwarnai dengan 4 warna.

2.5 Partisi Pewarnaan Pada Graf

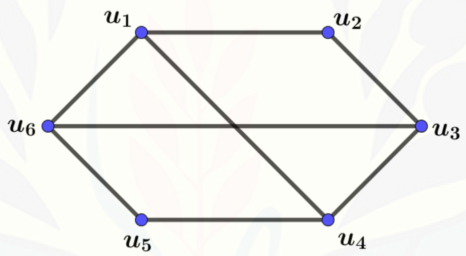
Partisi dari sebuah himpunan A adalah sekumpulan himpunan bagian tak kosong $A_1, A_2, \ldots . A_n$ Dari A sedemikian sehingga,

- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots . \cup \; A_{,n} = A$
- $A_i \cap A_j = \emptyset$ untuk setiap $i \neq j$

(Purcell and Verberg, 1998)

Misalkan diberikan himpunan A = {2,4,6,8,10} maka {{2},{6,8},{10}} adalah partisi A. Sedangkan {{2,4},{4,6},{8},{10}} bukan partisi dari A karena $A_1 \cap A_2 = \{4\}$ dengan A_1 = {2,4} dan A_2 = {4,6}, sehingga tidak memenuhi syarat partisi himpunan.

Sebuah *partisi pewarnaan* graf G adalah sebuah partisi dari $V(G)$ yang terdiri dari himpunan bagian dari $V(G)$ yang saling bebas dengan titik yang memiliki warna yang sama pada setiap himpunan bagiannya. Pada Gambar 2.10, jika titik pada graf G diberikan warna yang berbeda semua maka diperoleh $\{\{u_1\},\{u_2\},\{u_3\},\{u_4\},\{u_5\},\{u_6\}\}$ adalah sebuah partisi graf G dengan 6 himpunan bagian yang saling bebas. Titik u_1 dan u_5 tidak saling bertetangga sehingga kedua titik tersebut dapat diwarnai dengan warna yang sama. Jika u_1 dan u_5 diwarnai sama maka diperoleh $\{\{u_1,u_5\},\{u_2\},\{u_3\},\{u_4\},\{u_6\}\}$ adalah partisi graf G dengan 5 himpunan bagian yang saling bebas. Pada partisi pewarnaan ini, titik u_1 dan u_6 tidak boleh berada dalam satu himpunan bagian karena u_1 dan u_6 memiliki warna yang berbeda akibat ketetanggaan kedua titik tersebut. Hal ini juga berlaku kepada titik-titik yang lain.



Gambar 2.10 Contoh graf untuk menentukan partisi pewarnaan

2.6 Polinomial

Fungsi polinomial adalah sebarang fungsi yang dapat diperoleh dari fungsi konstanta dan fungsi identitas dengan menggunakan operasi penambahan, pengurangan, dan perkalian (Purcell dan Varberg, 1998). Secara matematis, polinomial $P(x)$ dengan koefisien bilangan bulat Z adalah sebuah penjumlahan tak hingga $P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ dengan $a_i \in Z$. Unsur-unsur a_i disebut koefisien-koefisien dari $P(x)$. Jika untuk setiap $i > 0$, $a_i = 0$, maka $P(x)$ disebut polinomial konstan dan a_0 disebut suku konstan (Fraleigh, 1994).

2.7 Polinomial Kromatik

Polinomial kromatik yang dinotasikan $f(G,k)$ merupakan sebuah polinomial dari graf G yang menghitung banyak cara berbeda untuk pemberian warna pada graf G dengan k warna. Bilangan kromatik ($\chi(G)$) adalah minimal warna yang diperlukan untuk mewarnai suatu graf G. Adapun maksimal warna yang digunakan adalah sebanyak titik pada graf tersebut (Chartrand dan Oellerman, 1993).

Pada skripsinya, Kurniawati (2004) melakukan studi literatur polinomial kromatik pada beberapa kelas graf terhubung, yaitu :

- Polinomial kromatik dari graf lengkap K_n adalah $P(K_n,k) = k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)$.
- Polinomial kromatik dari graf lingkaran C_n adalah $P(C_n,k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$.
- Polinomial kromatik dari graf lintasan P_n adalah $P(P_n,k) = k(k-1)^{n-1}$.

Dwijayanti (2011) melakukan studi literature untuk skripsinya tentang polinomial kromatik pada graf bintang, graf roda, dan graf tangga, yaitu :

- Polinomial kromatik dari graf bintang S_n adalah $P(S_n) = k(k-1)^n$.
- Poliomial kromatik dari graf roda W_n adalah $P(W_n,k) = k[(k-2)^n + (-1)^n(k-2)]$.
- Polinomial kromatik dari graf tangga L_n adalah $P(L_n,k) = k(k-1)(k^2 - 3k + 3)^{n-1}$.

Teorema 2.3 (Dong dkk, 2005) Jika diberikan sebuah graf G dengan order n maka polinomial kromatik dari graf G adalah $P(G,k) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(G,i)(k)_i$ dengan $\alpha(G,i)$ adalah banyak kemungkinan partisi $V(G)$ dalam i himpunan bagian.

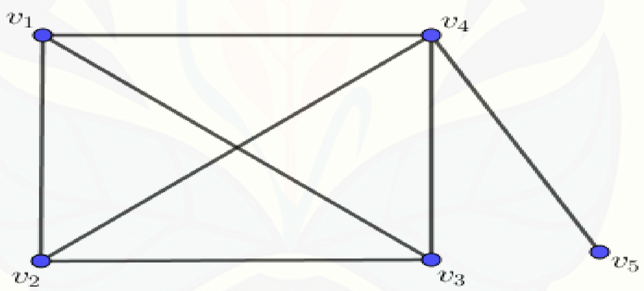
Misalkan sebuah graf G diwarnai sebanyak k warna dan ada $(k)_i$ cara mewarnainya, maka cara pewarnaan graf G dapat dipartisi sebanyak i warna dari himpunan $\{1,2,3,\dots,k\}$. Sehingga pada setiap partisi himpunan pewarnaan titik terhadap $(k)_i$ cara untuk mewarnai graf G dengan $k_i = k(k-1)(k-2)\dots(k-

$i + 1$). Jadi, polinomial kromatik suatu graf G adalah penjumlahan dari banyaknya partisi himpunan pewarnaan titik dikali dengan banyaknya cara untuk mewarnai graf G tepat i warna.

Teorema 2.4 (Read, 1968) Polinomial kromatik $P(G,k)$ dari graf G dengan n titik dan e sisi memenuhi kondisi berikut.

a. Orde polinomial dari $P(G,k)$adalah n.
b. Koefisien dari k^n pada $P(G,k)$adalah 1.
c. Koefisien dari k^{n-1} pada $P(G,k)$ adalah $-e$.
d. Suku konstan dari $P(G,k)$adalah 0.
e. Jika $e \neq 0$, maka jumlah koefisien pada $P(G,k)$alah 0.

Berikut diberikan Gambar 2.11 sebagai ilustrasi untuk mendapatkan polinomial suatu graf G menggunakan teorema 2.3.



Gambar 2.11 Contoh graf G untuk mendapatkan polinomial kromatik

Langkah pertama untuk mendapatkan polinomial graf G adalah mencari semua kemungkinan pewarnaan yang ada pada graf tersebut. Langkah berikutnya, mempartisi kemungkinan pewarnaan tersebut sesuai warnanya. Tabel 2.1 menunjukkan kemungkinan pewarnaan dan partisi pewarnan pada graf G.

Tabel 2.1 Kemungkinan pewarnaan dan partisi pewarnaan graf G

Jika v_i dan v_j diwarnai sama	Kemungkinan pewarnaan yang lain	Bentuk partisi himpunan pewarnaan	Banyak partisi
$v_1 = v_5$	$v_2 \neq v_3 \neq v_4$	$\{v_1, v_5\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}$	4
$v_2 = v_5$	$v_1 \neq v_3 \neq v_4$	$\{v_2, v_5\}, \{v_1\}, \{v_3\}, \{v_4\}$	4
$v_3 = v_5$	$v_1 \neq v_2 \neq v_4$	$\{v_3, v_5\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_4\}$	4
Berbeda Semua	$v_1 \neq v_2 \neq v_3 \neq v_4 \neq v_5$	$\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}$	5

Berdasarkan Tabel 2.1 diketahui bahwa $\alpha(G,1) = 0$, $\alpha(G,2) = 0$, $\alpha(G,3) = 0$, $\alpha(G,4) = 3$ dan $\alpha(G,5) = 1$. Langkah berikutnya, menggunakan Teorema 2.3 seperti berikut ini.

$$\begin{aligned}
P(G,k) &= \textstyle\sum_{i=1}^{5} \alpha(G,i)(k)_i \\
&= 0k_1 + 0k_2 + 0k_3 + 3k_4 + k_5 \\
&= 3\big(k(k-1)(k-2)(k-3)\big) + k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4) \\
&= \big(k(k-1)(k-2)(k-3)\big)[3 + (k-4)] \\
&= k(k-1)(k-2)(k-3)(k-1) \\
&= k(k-1)^2(k-2)(k-3) \\
&= k^5 - 7k^4 + 17k^3 - 17k^2 + 6k \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

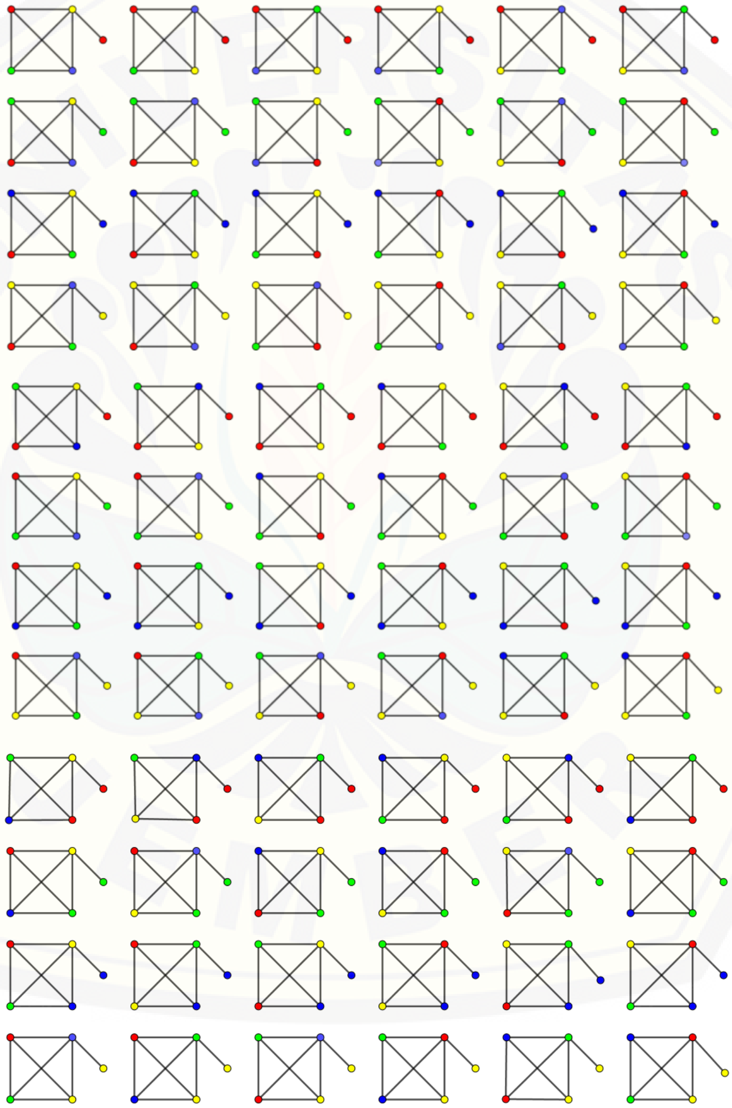
Teorema 2.4 merupakan teorema yang menjelaskan tentang sifat-sifat polinomial kromatik. Teorema 2.4 ini digunakan untuk membuktikan kebenaran dari polinomial yang telah ditemukan menggunakan Teorema 2.3. Graf pada gambar 2.11 memiliki 5 titik dan 7 sisi. Berikut akan dibuktikan bahwa pada persamaan (2.1) benar menggunakan Teorema 2.4.

a. Orde polinomial dari $P(G,k)$adalah 5.
b. Koefisien dari k^5 pada $P(G,k)$ adalah 1.
c. Koefisien dari k^{5-1} pada $P(G,k)$ adalah -7.
d. Suku konstan dari $P(G,k)$adalah 0.

e. Banyak sisi pada Gambar 2.11 tidak sama dengan 0, maka jumlah koefisien pada $P(G,k)$ adalah $1 - 7 + 17 - 17 + 6 = 0$.

Berdasarkan hal ini, terbukti bahwa persamaan (2.1) adalah benar.

Jika Gambar 2.11 diberikan 4 warna maka berdasarkan persamaan (2.1), terdapat 72 cara untuk mewarnai graf pada Gambar 2.11. Gambar 2.12 menunjukkan ilustrasi 72 cara mewarnai Gambar 2.11 dengan 4 warna.



Gambar 2.12 Ilustrasi 72 cara mewarnai suatu graf

BAB 3. METODE PENELITIAN

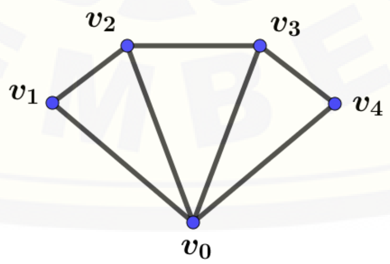
Pada bab ini akan dijelaskan mengenai prosedur untuk mendapatkan polinomial kromatik pada graf kipas F_3, $F_{,4}$, dan F_5 Prosedur tersebut terdiri dari metode penelitian, penotasian titik dan langkah-langkah penelitian.

3.1 Metodologi

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode induktif. Metode induktif adalah metode yang digunakan untuk menentukan polinomial kromatik suatu graf dari bentuk khusus ke bentuk umum.. Misalnya pada kasus graf kipas F_n ini, mencari polinomial kromatik pada graf kipas F_3, F_4, dan F_5. Dari beberapa graf khusus tersebut akan didapatkan pola yang dihasilkan oleh polinomial kromatik dari graf khusus tersebut dan akan diketahui polinomial kromatik graf kipas F_n secara umum.

3.2 Penotasian Titik

Misalkan graf kipas F_n dengan $n \geq 3$ mempunyai himpunan titik $V(F_n) = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dengan $deg(v_0) = n$, $deg(v_1) = deg(v_n) = 2$ dan $deg(v_i) = 3$ untuk $2 \leq i \leq n-1$ dan himpunan sisi $E(F_n) = \{v_0 v_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\}$. Berikut ini adalah contoh penotasian titik pada graf kipas F_4.



Gambar 3.1 Penotasian titik pada graf kipas F_4

3.3 Langkah-langkah Penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan untuk mendapatkan polinomial kromatik pada graf kipas F_n adalah sebagai berikut.

1. Mencari bilangan kromatik pada graf.

   Bilangan kromatik didefinisikan sebagai jumlah minimal warna yang diperlukan untuk mewarnai titik pada graf G. Dengan kata lain jika bilangan kromatik pada suatu graf G adalah k maka graf G dapat diberi warna sebanyak k warna tetapi tidak dapat diberi diwarnai sebanyak $k - 1$ warna. Untuk bilangan kromatik dari graf kipas F_n penulis masih perlu mencarinya.

2. Menentukan kemungkinan pewarnaan yang terjadi pada graf.

   Suatu graf dapat diwarnai minimal sebesar bilangan kromatiknya dan maksimal sebanyak titik pada graf tersebut. Sehingga menentukan kemungkinan pewarnaan yang terjadi pada graf kipas F_n dimulai dengan warna sebanyak bilangan kromatik hingga warna sebanyak titiknya. Jika kemungkinan pewarnaan tersebut berulang maka cukup pilih satu saja.

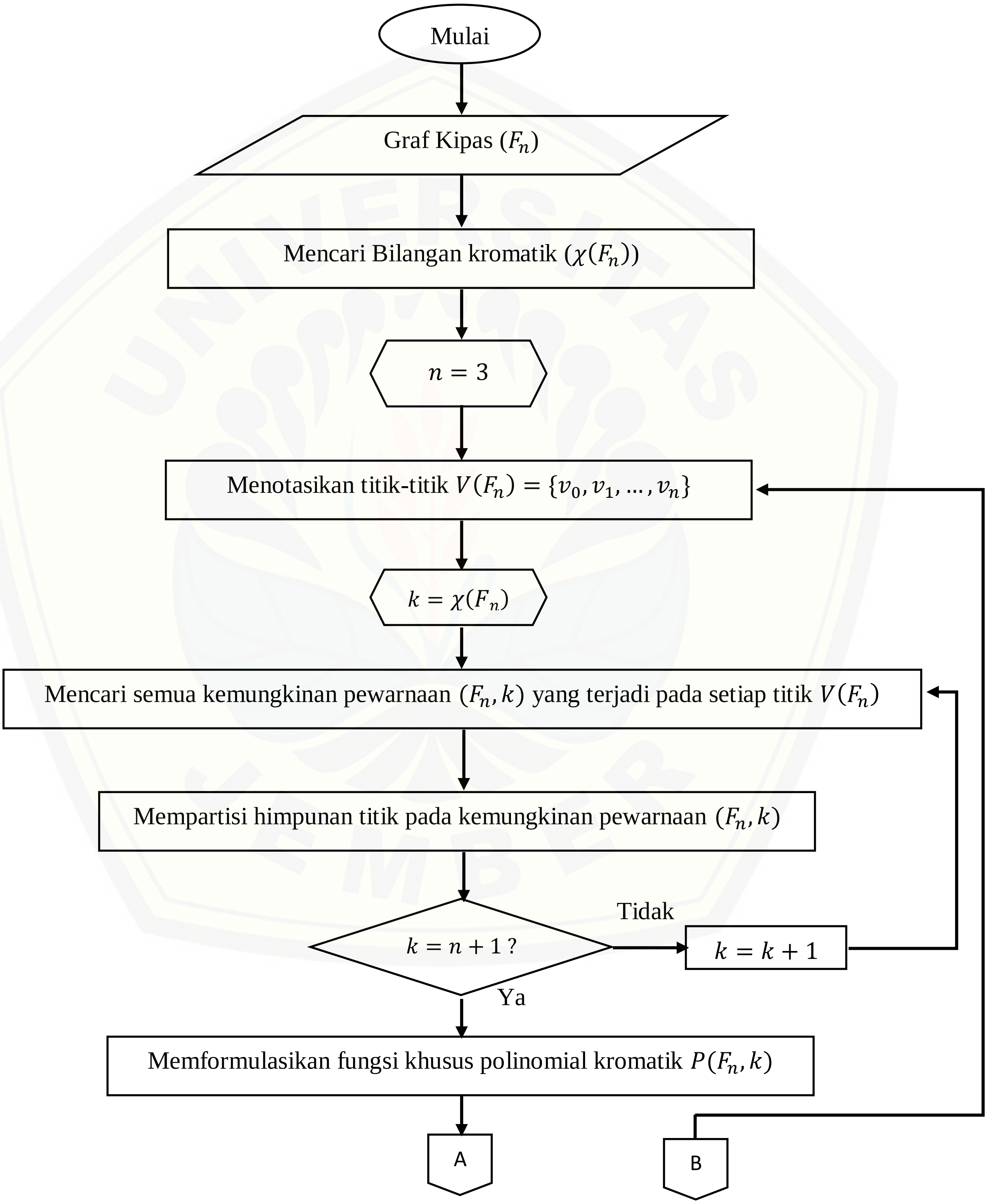
3. Mempartisi himpunan titik pada graf.

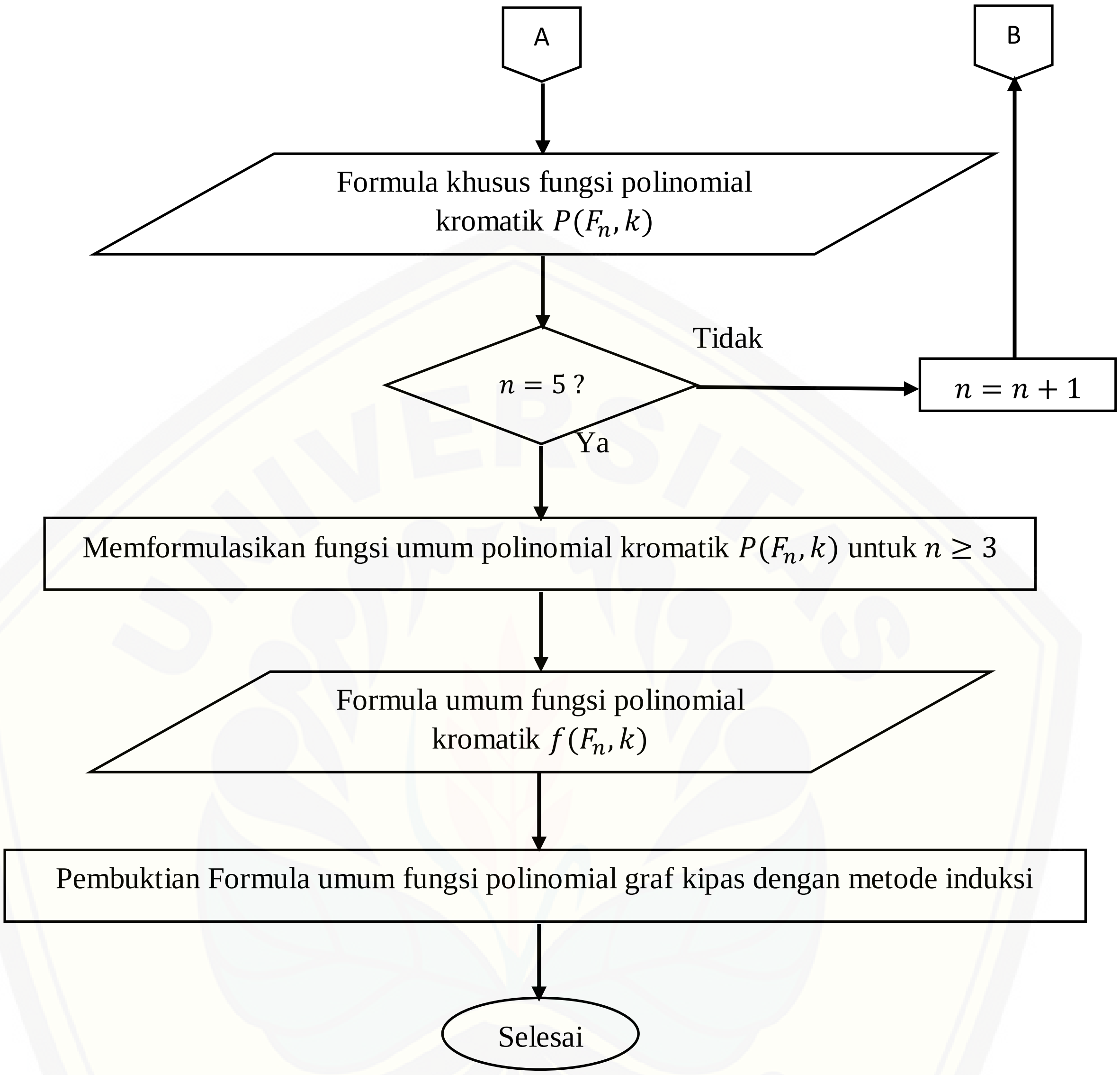
   Setelah kita mendapatkan beberapa kemungkinan pewarnaan yang terjadi pada graf kipas F_n, kita akan mempartisi titik pada graf kipas F_n dengan aturan 2 titik atau lebih yang memiliki warna yang berbeda tidak boleh berada pada himpunan bagian yang sama. Untuk lebih jelasnya, kita akan membuat tabel partisi. Tabel partisi tersebut juga berisi kemungkinan pewarnaan yang terjadi, bentuk partisi dan banyaknya pewarnaan yang terjadi.

4. Mendapatkan polinomial kromatik suatu graf

   Dari langkah-langkah yang sudah dilakukan sebelumnya, akan diperoleh polinomial kromatik pada dari graf kipas F_n dengan $n = 3,4,5$. Untuk mendapatkan polinomial kromatik graf kipas F_n untuk setiap $n \geq 3$ akan digunakan metode induktif.

Berdasarkan langkah-langkah penelitian di atas, dapat ditunjukkan diagram alur pada Gambar 3.2 sebagai berikut.





Gambar 3.2 Diagram alur penentuan polinomial kromatik Graf Kipas (F_n)

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dilakukan, untuk mendapatkan polinomial kromatik graf kipas F_n adalah dengan mencari semua kemungkinan pewarnaan yang terjadi pada graf kipas F_n dengan $3 \leq n \leq 5$ dan mempartisi himpunan pewarnaan titiknya, kemudian dengan menggunakan Teorema 2.3 akan diperoleh polinomial kromatik graf kipas F_n dengan $3 \leq n \leq 5$. Selanjutnya, dengan melihat pola yang terdapat pada polinomial graf kipas F_n dengan $3 \leq n \leq 5$ akan didapatkan polinomial graf F_n untuk setiap $n \geq 3$. Polinomial kromatik dari graf kipas F_n adalah

$$P(F_n, k) = k(k-1)(k-2)^{n-1}$$

dengan $k \geq 3$

5.2 Saran

Penelitian mengenai polinomial kromatik dari suatu graf merupakan salah satu permasalahan yang berkaitan dengan pewarnaan titik. Peneliti memberikan saran kepada pembaca untuk mencari polinomial kromatik graf tak-terhubung dengan metode yang sama atau metode yang lain. Serta dapat mengkaji mengenai permasalahan pewarnaan graf lain seperti pewarnaan sisi dan wilayah.

DAFTAR PUSTAKA

Chartrand, G dan L , Lesniak. 1996. *Graphs & Diagraps fifth edition*. New York : Chapman & Hall/CRC.

Chartrand, G dan OR., Oellerman,. 1993. *Apllied and Algorithmic Graph Theory*. New York : McGraw-Hil, Inc.

Dwijayanti, R. 2011. *Polinomial Kromatik pada Graf Bintang, Graf Roda, dan Graf Tangga*. Tidak diterbitkan. Skripsi. Jember : Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember.

Dong, F. M., Koh, K. M., dan Teo, K. L. 20015. *Chromatic Polynomial and Chromaticity of Graphs*. Singapore : B & JO Enterprise.

Fraleigh, B. 1994. *A First in Absract Algebra*. 5th Edition. USA : Addison-Welsey Publishing Company. Inc

Kurniawati, R. 2004. *Polinomial Kromatik dari Graf Terhubung*. Tidak diterbitkan. Skripsi. Jember : Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember.

Read, R.C. 1968. An indtroduction to Chromatic Polynomials, J. Co,bin. Theory 4.

Varberg, D. dan Purcell, E.J. dan 1998. *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 1*. Alih bahasa oleh I Nyoman S., Bana K., dan Rawuh. Jakarta : Erlangga.