ANALISIS BILANGAN KONEKSI PELANGI ANTIAJAIB PADA KELUARGA GRAF RODA DAN KAITANNYA DENGAN KETERAMPILAN BERPIKIR KOMBINATORIAL

SKRIPSI

Oleh
Intan Kusumawardani
NIM 160210101010

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MIPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER
2020

ANALISIS BILANGAN KONEKSI PELANGI ANTIAJAIB PADA KELUARGA GRAF RODA DAN KAITANNYA DENGAN KETERAMPILAN BERPIKIR KOMBINATORIAL

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Pendidikan Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Pendidikan

Oleh

Intan Kusumawardani

NIM 160210101010

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MIPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER
2020

HALAMAN PERSEMBAHAN

Puji syukur kehadirat Allah SWT yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang dengan segala limpahan rahmat dan hidayah-Nya. Sholawat dan salam semoga tetap tercurahkan kepada junjungan Nabi Muhammad SAW, atas kebesaran itu kupersembahkan sebagai rasa hormat dan bahagia dalam perjalanan dan perjuangan hidupku teriring rasa terima kasihku kepada:

1. Bapak Abdurrahman Rofik Fauzan dan Ibu Elok Rahmawati yang telah membesarkanku dengan penuh kasih sayang, kesabaran, perhatian, dan doa yang selalu diberikan;
2. Para guru dan dosen yang telah memberikan ilmu dan membimbing dalam banyak hal;
3. Almamater Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

HALAMAN MOTTO

"Keinginan merupakan kekuatan besar yang mampu mengalahkan rasa takut dan sifat malas untuk meraih sukses"
(Slamin)

"Pada prinsipnya kita bisa melakukan apapun yang orang lain bisa, hanya beda tingkatannya. Resepnya suka, biasa, dan bisa"
(Slamin)

"Jika nasib adalah titik, dan usaha adalah sisi; maka hidup adalah sebuah graf. Tantangan kita adalah bagaimana merangkai titik dan sisi tersebut agar tercipta sebuah graf yang keindahannya dapat dinikmati bersama"
(Slamin)

HALAMAN PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Intan Kusumawardani

NIM : 160210101010

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: Analisis Bilangan Koneksi Pelangi Antiajaib pada Keluarga Graf Roda dan Kaitannya dengan Keterampilan Berpikir Kombinatorial adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 3 Januari 2020
Yang menyatakan,

Intan Kusumawardani
NIM. 160210101010

HALAMAN PEMBIMBINGAN

SKRIPSI

ANALISIS BILANGAN KONEKSI PELANGI ANTIAJAIB PADA KELUARGA GRAF RODA DAN KAITANNYA DENGAN KETERAMPILAN BERPIKIR KOMBINATORIAL

Oleh

Intan Kusumawardani

NIM 160210101010

Dosen Pembimbing 1	: Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.
Dosen Pembimbing 2	: Dr. Arika Indah Kristiana, S.Si., M.Pd.

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MIPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER
2020

HALAMAN PENGAJUAN

ANALISIS BILANGAN KONEKSI PELANGI ANTIAJAIB PADA KELUARGA GRAF RODA DAN KAITANNYA DENGAN KETERAMPILAN BERPIKIR KOMBINATORIAL

Diajukan untuk dipertahankan di depan Tim Penguji sebagai salah satu persyaratan untuk menyelesaikan Program Pendidikan Sarjana Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam dengan Program Studi Pendidikan Matematika pada Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember

Oleh:

Nama	: Intan Kusumawardani
NIM	: 160210101010
Tempat dan Tanggal Lahir	: Jember, 26 Oktober 1998
Jurusan / Program Studi	: Pendidikan MIPA / P. Matematika

Disetujui oleh:

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.	Dr. Arika Indah Kristiana, S.Si., M.Pd.
NIP. 19680802 199303 1 004	NIP. 19760502 200604 2 001

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi berjudul : Analisis Bilangan Koneksi Pelangi Antiajaib pada Keluarga Graf Roda dan Kaitannya dengan Keterampilan Berpikiran Kombinatorial telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan pada:

Hari : Senin

Tanggal : 3 Januari 2020

Tempat : Ruang 35E 104 (R. Dosen P. Matematika) Gedung 3 FKIP UNEJ

Tim Penguji :

Ketua,	Sekretaris,
Prof. Drs. Dafik, M.Sc,.Ph.D. NIP. 19680802 199303 1 004	Dr. Arika Indah Kristiana, S.Si., M.Pd. NIP. 19760502 200604 1 004
Anggota I,	Anggota II,
Prof. Drs., Slamin, M.Comp.Sc., Ph.D. NIP. 19670420 199201 1 001	Drs. Toto' Bara S., M.Si. NIP. 19581209 198603 1 003

Mengetahui,
Dekan Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan
Universitas Jember

Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D
NIP. 19680802 199303 1 004

RINGKASAN

Analisis Bilangan Koneksi Pelangi Antiajaib pada Keluarga Graf Roda dan Kaitannya dengan Keterampilan Berpikir Kombinatorial; Intan Kusumawardani, 160210101010; 2020: 84 halaman; Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember.

Perkembangan teknologi informasi dan komunikasi dalam pendidikan yang sangat pesat menuntut setiap individu untuk dapat selalu mengembangkan pikiran serta wawasan dalam menyelesaikan berbagai masalah kehidupan. Matematika merupakan suatu subjek yang selalu menuntut individu untuk dapat menemukan pemecahan dan penyelesaian terhadap suautu masalah dengan berbagai macam keterampilan berpikir, salah satunya yaitu keterampilan berpikir kombinatorial. Pembelajaran tentang berbagai konsep kombinatorika menuntut siswa mengalami suatu cara khusus dalam berpikir. Proses berpikir tersebut sering disebut dengan berpikir kombinatorial. Menurut beberapa ahli, berpikir kombinatorial merupakan suatu pemikiran dalam menemukan suatu langkah sistematis untuk memberikan keyakinan bahwa semua kemungkinan penyelesaian sudah didiskusikan atau dipikirkan. Salah satu topik dalam kombinatorika yang sangat kaya akan celah penelitian yaitu teori graf. Teori graf memiliki banyak aplikasi dalam kehidupan nyata, khususnya pewarnaan graf dan pelabelan graf.

Andaikan $G(V,E)$ merupakan suatu graf simpel dan terkoneksi dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E. Sebuah fungsi bijektif $f : V \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(G)|\}$ dikatakan sebuah pelabelan pelangi antiajaib jika ada sebuah lintasan pelangi di antara setiap pasangan titik-titik dan untuk setiap sisi $e = uv \in E(G)$, bobot $w(e) = f(u) + f(v)$. Sebuah graf G dikatakan pelangi antiajaib jika G dilabeli pelangi antiajaib. Bilangan koneksi pelangi antiajaib dari suatu graf G dinotasikan dengan $rc_A(G)$ yaitu jumlah warna paling sedikit yang dibutuhkan untuk membuat graf G menjadi graf terkoneksi pelangi, dengan pelabelan antiajaib.

Pada penelitian ini digunakan metode pendeteksian pola dan metode

deduktif aksiomatik dalam menentukan nilai bilangan koneksi pelangi antiajaib pada keluarga graf roda. Penelitian ini menghasilkan lima teorema baru yaitu:

1. **Teorema 1** *untuk graf roda* W_n *dengan* $n = [3, 4]$, *bilangan koneksi pelangi antiajaib adalah* $rc_A(W_n) = 5$ *dan untuk* $n \geq 5$ *didapat* $rc_A(W_n) = n$.
2. **Teorema 2** *untuk graf gir* G_n *dengan* $n \geq 3$, *bilangan koneksi pelangi antiajaib adalah* $3 = rc(G_n) \leq rc_A(G_n) \leq n + 2$ *untuk* $n = 3$ *dan* $4 = rc(G_n) \leq rc_A(G_n) \leq n + 2$ *untuk* $n \geq 4$.
3. **Teorema 3** *untuk graf helm* H_n *dengan* $n \geq 3$, *bilangan koneksi pelangi antiajaib adalah* $n = rc(H_n) \leq rc_A(H_n) \leq n + \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2$ *untuk* $3 \leq n \leq 6$ *dan* $n + 3 = rc(H_n) \leq rc_A(H_n) \leq n + \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2$ *untuk* $n \geq 7$.
4. **Teorema 4** *untuk graf persahabatan* Fr_n *dengan* $n \geq 2$, *bilangan koneksi pelangi antiajaib adalah* $rc_A(Fr_n) = 2n$.
5. **Teorema 5** *untuk graf bunga* Fl_n *dengan* $n \geq 3$, *bilangan koneksi pelangi antiajaib adalah* $rc_A(Fl_n) = 2n$.

Kaitan bilangan koneksi pelangi antiajaib pada keluarga graf roda dengan keterampilan berpikir kombinatorial yaitu sub indikator mengidentifikasi properti/karakteristik masalah terkandung ketika tahap awal memahami konsep dan cara mencari bilangan koneksi pelangi antiajaib, sub indikator menerapkan beberapa kasus terkandung dalam proses melabeli setiap titik pada keluarga graf roda dengan order kecil. Sub indikator mengidentifikasi pola terkandung ketika mengetahui pola pelabelan titik dan pola bilangan koneksi pelangi antiajaib pada keluarga graf roda, sub indikator memperluas pola terkandung dalam menerapkan pola pelabelan yang didapat pada graf dengan order yang lebih tinggi. Sub indikator menerapkan simbolisasi matematika tersirat ketika memberikan simbol atau indeks unuk setiap titik yang terdapat pada keluarga graf roda, sub indikator menghitung kardinalitas terkandung ketika menghitung kardinalitas pada keluarga graf roda, sub indikator mengembangkan algoritma merupakan indikator yang terkandung dalam setiap alur proses pencarian bilangan koneksi pelangi antiajaib. Melakukan perhitungan argumen merupakan sub indikator yang terdapat ketika menghitung kardinalitas graf hingga order ke-n, menguji algoritma terkandung ketika menguji rumus dan fungsi titik yang telah ditemukan. mengembangkan dan menguji bijeksi tersirat ketika membuat fungsi titik dan mengujinya untuk order rendah hingga order ke-n, dan menerapkan pembuktian deduktif, induktif dan kualitatif yaitu ketika proses pembuktian teorema yang telah didapatkan. Sub indikator melakukan interpretasi terkandung dalam kegiatan menjelaskan apa yang telah dipahami dalam pencarian bilangan koneksi pelangi antiajaib pada keluarga graf roda. Sehingga, secara keseluruhan dapat disimpulkan bahwa indikator dan sub indikator keterampilan berpikir kombinatorial terkandung di dalam proses pencarian bilangan koneksi pelangi antiajaib pada keluarga graf roda.

PRAKATA

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul Analisis Bilangan Koneksi Pelangi Antiajaib pada Keluarga Graf Roda dan Kaitannya dengan Keterampilan Berpikir Kombinatorial. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Dekan FKIP Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Pendidikan MIPA FKIP Universitas Jember;
3. Ketua Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember;
4. Dosen Pembimbing dan Dosen Penguji yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
5. Dosen Pembimbing Akademik yang telah membimbing dan memberikan ilmu;
6. Bapak Ridho Alfarisi, S.Pd., M.Pd. yang telah membantu dalam penyusunan skripsi;
7. Dosen dan Karyawan FKIP Universitas Jember;
8. Teman seperjuangan kelompok riset graf (Jean C., Nadia A., Novi W., Regina A., dan Regita T.) beserta mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika angkatan 2016 lainnya;
9. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, 3 Januari 2020

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR TABEL

Halaman

DAFTAR LAMBANG

G	=	Graf G
$\in$	=	Menyatakan elemen
$V(G)$	=	Himpunan titik pada graf G
$E(G)$	=	Himpunan sisi pada graf G
$\|V(G)\|$	=	*Order* dari graf G atau banyaknya titik pada graf G
$\|E(G)\|$	=	*Size* dari graf G atau banyaknya sisi pada graf G
v_n	=	titik ke-n dari suatu graf G
e_n	=	sisi ke-n dari suatu graf G
(u, v)	=	sisi yang dihubungkan oleh titik u dan v
$d(v)$	=	Derajat titik v
w	=	Bobot
W	=	himpunan bobot
$rc_A(G)$	=	Bilangan koneksi pelangi antiajaib pada graf G
$rc(G)$	=	Bilangan koneksi pelangi pada graf G
P_n	=	Graf lintasan dengan n titik
C_n	=	Graf lingkaran dengan n titik
S_n	=	Graf bintang dengan n titik
G_n	=	Graf Gir dengan n titik
Fr_n	=	Graf persahabatan dengan n titik
W_n	=	Graf roda dengan n titik
H_n	=	Graf Helm dengan n titik
Fl_n	=	Graf Bunga dengan n titik
ψ	=	Fungsi insidensi titik dengan garis
θ	=	Fungsi bijektif
c	=	pewarnaan sisi suatu graf
$f(v)$	=	fungsi label titik v

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf berawal dari suatu permasalahan jembatan Knigsberg yang dipecahkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736. Setelah itu, lebih dari satu abad teori graf mengalami berbagai perkembangan hingga pada tahun 1976, Haken dan Appel membuat suatu resolusi terkait *Four-Colour Conjecture*. Resolusi ini ditandai sebagai suatu titik balik dalam sejarah graf. Sejak saat inilah penelitian terkait graf mengalami ledakan perkembangan yang sangat pesat. Hal ini juga dikarenakan oleh peranan graf sebagai suatu subjek yang mendasari matematika terapan modern. Secara sederhana, graf menggambarkan suatu objek sebagai titik, sedangkan hubungan antar objek digambarkan dengan suatu garis yang boleh ada dan boleh tidak.

Dalam periode di mana teknologi komunikasi dan informasi memegang peranan yang sangat penting, graf memiliki berbagai manfaat yang menjadikannya sebagai suatu alat yang sangat penting dalam desain dan analisis pada jaringan komunikasi. Banyak fenomena, situasi dan kondisi dalam kehidupan yang dapat direpresentasikan dengan suatu himpunan titik, atau himpunan titik dan himpunan garis yang menghubungkan pasangan tertentu dari anggota himpunan titik tersebut. Contohnya sederhana dalam kehidupan sehari hari, kita dapat menggambarkan titik sebagai orang, dan ikatan persahabatan antara dua orang atau lebih dapat digambarkan dengan garis yang menghubungkan dua atau lebih titik, contoh lainnya yaitu titik dapat menggambarkan suatu pusat komunikasi dan garis yang menghubungkan antar titik menggambarkan jaringan komunikasi serta masih banyak contoh lainnya dalam kehidupan.

Topik-topik dalam teori graf memegang andil yang cukup signifikan dalam menyelesaikan berbagai permasalahan di dalam dunia nyata, salah satunya yaitu pelabelan graf. Pelabelan graf telah ada semenjak lebih dari satu abad. Pelabelan graf merupakan suatu cara melabeli elemen-elemen di dalam graf menggunakan bilangan non-negatif. Pelabelan graf yang banyak diteliti adalah pelabelan ajaib dan antiajaib. Pelabelan ajaib merupakan suatu pelabelan pada sisi sedemikian hingga setiap titiknya mempunyai bobot yang sama semua. Sedangkan pelabelan antiajaib merupakan suatu pelabelan pada sisi sedemikian hingga bobot setiap titik dalam graf tersebut berbeda. Terdapat topik yang lebih khusus dalam pelabelan graf yaitu pewarnaan graf. Pewarnaan graf merupakan pelabelan elemen-elemen dalam graf dengan menggunakan warna.

Pewarnaan graf juga memegang andil yang sangat signifikan dalam perkembangan ilmu teknologi dan komunikasi saat ini. Terdapat dua kategori dalam pewarnaan graf yaitu pewarnaan sisi dan pewarnaan titik. Beberapa contoh manfaat dari pewarnaan graf yaitu pembuatan jadwal mengajar dari beberapa guru agar tidak memiliki jadwal di waktu dan kelas yang sama sekaligus, dan pengaturan warna lampu lalu lintas yang harus hidup di perempatan jalan untuk mencegah terjadinya kecelakaan, serta masih banyak lagi contoh lainnya dalam kehidupan. Pewarnaan pelangi merupakan salah satu topik pada pewarnaan graf yang sangat banyak diteliti pada beberapa dekade terakhir. Lintasan pelangi adalah suatu lintasan dimana semua sisi yang dilalui memiliki warna yang berbeda. Graf G dikatakan terkoneksi pelangi jika setiap sembarang dua titik dalam graf tersebut dapat dihubungkan oleh sebuah lintasan pelangi. Pewarnaan sisi pada graf G dikatakan pewarnaan pelangi *(rainbow coloring)* jika setiap dua titik berbeda dapat dihubungkan dengan sedikitnya satu lintasan pelangi.

Dafik dkk. (2019) mengkolaborasikan antara pewarnaan pelangi dan pelabelan antiajaib yaitu bilangan koneksi pelangi antiajaib pada graf lintasan, lingkaran, dan lingkaran. Pelabelan antiajaib lokal merupakan langkah awal yang dilakukan pada graf yang telah ditentukan, yaitu melabeli setiap titik dalam graf dengan himpunan bilangan asli sedemikian hingga setiap sisi yang bersebelahan memiliki bobot yang berbeda, dengan kondisi untuk setiap dua titik sembarang dalam graf tersebut terdapat sedikitnya satu jalur pelangi yang menghubungkannya. Bilangan koneksi ini dinotasikan dengan $rc_A(G)$ yaitu banyaknya warna paling sedikit yang dibutuhkan dalam membuat graf G menjadi graf terkoneksi pelangi dengan pelabelan antiajaib.

Perkembangan pendidikan dan IPTEK yang sangat pesat menuntut kita untuk terus mengembangkan kemampuan berpikir dan penyelesaian masalah, khususnya keterampilan berpikir dalam matematika untuk menghadapi berbagai tantangan kehidupan. Berbagai topik permasalahan dalam bidang matematika menuntut suatu keterampilan berpikir dalam penyelesaiannya. Keterampilan berpikir kombinatorial merupakan salah satu keterampilan yang dibutuhkan dalam permasalahan kombinatorika khususnya teori graf. Menurut Dafik dkk. (2019), berpikir kombinatorial mempunyai peran dalam menuntut pelajar untuk berpikir secara mendalam tentang ide dan konsep matematika yang kompleks. Keterampilan ini memiliki beberapa indikator dan sub indikator dalam kaitannya dengan proses penyelesaian suatu permasalahan. Maka dari itu, peneliti bermaksud meneliti terkait keterampilan berpikir kombinatorial dalam penyelesaian suatu permasalahan teori graf.

Berdasarkan penelitian sebelumnya, peneliti tertarik untuk meneliti bilangan koneksi pelangi antiajaib pada beberapa keluarga graf roda karena graf roda merupakan graf yang terdiri dari graf-graf dasar yaitu graf lintasan, bintang, dan lingkaran. Graf yang dipilih yaitu graf roda, gir, helm, persahabatan, dan bunga. Langkah awal penelitian ini adalah penentuan kardinalitas sisi dan titik dari graf yang telah ditentukan. Kemudian melakukan pelabelan sesuai dengan kriteria pelabelan antiajaib. Lalu menentukan koneksi pelangi antar setiap dua titik berbeda. Jika setiap sembarang dua titik telah dihubungkan dengan sedikitnya satu jalur pelangi, maka langkah selanjutnya adalah menentukan bilangan koneksi pelangi antiajaib dari setiap graf dan melakukan pengujian terhadap teorema yang dihasilkan. Setelah itu, peneliti akan menganalisis kaitan antara proses mencari bilangan koneksi pelangi antiajaib pada keluarga graf roda dengan keterampilan berpikir kombinatorial. Berdasarkan latar belakang tersebut, peneliti mengambil judul "**Analisis Bilangan Koneksi Pelangi Antiajaib pada Keluarga Graf Roda dan Kaitannya dengan Keterampilan Berpikir Kombinatorial**".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini sebagai berikut:

a) Bagaimanakah bilangan koneksi pelangi antiajaib pada beberapa keluarga graf roda yang telah ditentukan ?

b) Bagaimanakah kaitan antara proses mencari bilangan koneksi pelangi antiajaib pada keluarga graf roda dengan keterampilan berpikir kombinatorial ?

1.3 Batasan Masalah

Untuk menghindari meluasnya permasalahan yang akan dipecahkan, maka permasalahan dalam penelitian ini akan dibatasi pada beberapa keluarga graf roda. Graf yang digunakan pada penelitian ini adalah graf roda, Gir, helm, persahabatan, dan bunga.

1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang diatas, maka tujuan dari penelitian ini adalah :

a) Menentukan bilangan koneksi pelangi antiajaib pada beberapa keluarga graf roda yang telah ditentukan ;
b) Menganalisis kaitan antar proses mencari bilangan koneksi pelangi antiajaib pada keluarga graf roda dengan keterampilan berpikir kombinatorial

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini dalam pengembangan keilmuan teori graf yaitu sebagai berikut :

a) Menambah wawasan dan pengetahuan baru dalam bidang graf khususnya bilangan koneksi pelangi antiajaib pada beberapa keluarga graf roda ;
b) Hasil penelitian dapat digunakan sebagai landasan kajian dalam pengembangan ilmu dan aplikasi yang berkaitan dengan bilangan koneksi pelangi antiajaib;
c) Memberikan motivasi pada peneliti lainnya untuk melakukan penelitian tentang bilangan koneksi pelangi antiajaib pada graf lainnya ;
d) Memahami keterampilan berpikir kombinatorial yang terdapat dalam proses pencarian bilangan koneksi pelangi antiajaib pada keluarga graf roda

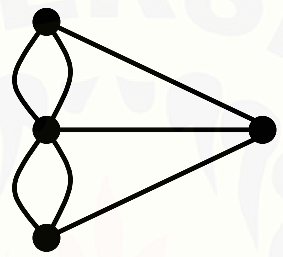
1.6 Kebaruan Penelitian

Kebaharuan penelitian ini adalah pencarian bilangan koneksi pelangi antiajib dari beberapa keluarga graf roda yaitu graf roda, gir, helm, persahabatan, dan bunga.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Terminologi Dasar Graf

Teori graf merupakan suatu topik yang memegang peranan cukup signifikan dalam matematika terapan modern. Konsep graf berawal dari suatu *unsolved problem* yang sangat terkenal yaitu permasalahan Jembatan Knigsberg. Dalam masalah ini, terdapat 2 pulau yang saling terhubung satu sama lainnya dan dikelilingi oleh Sungai Pregel, terdapat empat wilayah yang terhubung oleh jembatan seperti pada gambar di bawah ini

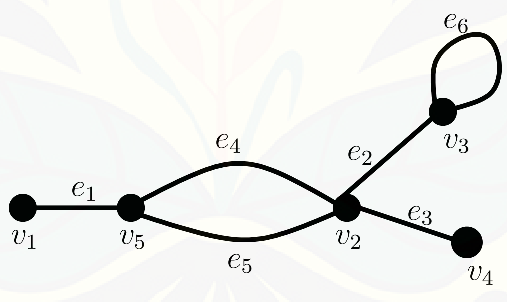


Gambar 2.1 Ilustrasi jembatan Konigsberg

Permasalahan yang diajukan adalah, bagaimanakah cara melakukan suatu perjalanan dari sembarang empat wilayah tersebut dengan syarat setiap jembatan dilalui tepat sekali dan titik akhir kembali adalah wilayah awal melakukan perjalanan. Permasalahan ini terselesaikan pada tahun 1736 oleh Leonhard Euler (1707 - 1782), dia menggantikan setiap wilayah dengan sebuah titik dan setiap jembatan dengan sebuah garis penghubung antar titik yang bersesuaian. Euler memberikan solusi yaitu dengan pemberian kriteria, jika graf yang dibangun merupakan graf dengan semua titiknya terhubung dan setiap titiknya terhubung dengan garis berjumlah genap, maka semua sisi dari graf tersebut dapat dilalui tepat satu kali. Dari sinilah Leonhard Euler dikenal sebagai bapak dari Teori Graf. Selain Euler, penemuan terkait teori graf selanjutnya oleh Kirchhoff yang menginvestigasi jaringan listrik berdasarkan konsep dasar dan teorema pohon dalam graf. Selanjutnya ada Cayley yang menemukan konsep dasar graf pohon dari isomer kimia organik serta berbagai penelitian lainnya (Harary, 1969 : 1-5).

Suatu graf G merupakan suatu himpunan berhingga dan tidak kosong dari elemen-elemen yang dinamakan titik dan suatu himpunan yang boleh kosong dari pasangan tak berurutan dari titik-titik yang berbeda yang dinamakan sisi. Himpunan titik dan himpunan sisi berturut-turut dinotasikan dengan $V(G)$ dan $E(G)$. Sisi $e = u, v$ merupakan sisi yang menghubungkan titik u dan v. Titik u dan v dikatakan saling bersebelahan atau beradjasensi, sedangkan titik u dan titik v dikatakan berhubungan atau berinsidensi dengan sisi e. Kardinalitas dari himpunan titik suatu graf G disebut dengan *order* dari graf G, sedangkan untuk kardinalitas dari himpunan sisinya disebut dengan *size*. Selain *order* dan *size*, dalam suatu graf, terdapat istilah derajat dari suatu titik. Derajat suatu titik adalah jumlah sisi yang berinsidensi dengan titik tersebut. Suatu graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_m\}$ (Chartrand dan Lesniak, 1996 : 1).

Suatu sisi eu, v dikatakan menghubungkan titik u dan v. Sisi ganda dari suatu graf disebut dengan *multiple edges* atau *paralel edges* adalah suatu himpunan dari dua atau lebih sisi dari suatu graf di mana sisi-sisi tersebut mempunyai pasangan titik akhir berbeda yang sama. Sedangkan, suatu sisi di mana kedua titik akhirnya sama, dinamakan gelang atau kalang (*loop*).

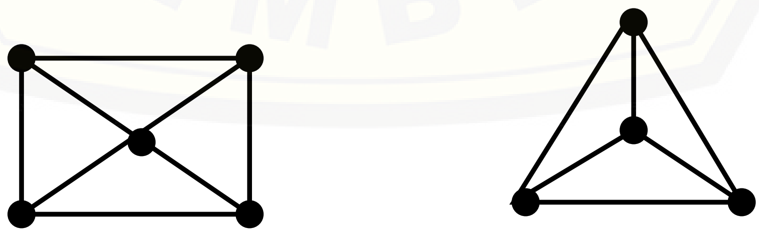


Gambar 2.2 Graf (G)

Pada gambar graf di atas, sisi e_1 memiliki titik akhir v_1 dan v_5. Sisi e_4 dan e_5 merupakan sisi ganda, dan sisi e_6 merupakan sebuah *loop* atau gelang pada titik v_3. Sisi e_3 dan e_4 merupakan sisi-sisi yang bersebelahan atau disebut sisi-sisi beradjasensi. Titik v_2 dan v_5 merupakan titik-titik yang bersebelahan atau disebut dengan titik-titik beradjasensi. Sedangkan sisi e_3 berinsidensi dengan titik v_2 dan v_4.

Ada beberapa istilah dasar dalam graf yang signifikan untuk dipahami antara lain yaitu *walk, trail, path, circuits, distance, diameter, radius*. Sebuah *walk* di graf merupakan suatu barisan bergantian berhingga dari titik-titik dan sisi-sisi $\{v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k\}$ diawali dan diakhiri oleh titik-titik sedemikian hingga v_{i-1} dan v_i adalah titik-titik akhir dari sisi e_i di mana $1 \leq i \leq k$. Dalam suatu *walk*, titik dan sisi yang sama boleh muncul lebih dari satu kali. Suatu *walk* merupakan suatu *trail* jika sisi-sisi yang dilewati berbeda semua. *Path* adalah suatu *trail* terbuka yaitu *trail* yang titik awal dan titik akhirnya berbeda, sedangkan *circuits* adalah *trail* tertutup yaitu *trail* dimana titik awal dan titik akhirnya sama. Panjang dari *path* terpendek antara dua titik u dan v disebut jarak antara titik u dan v yang dinotasikan dengan $d(u, v)$. Jika tidak ada *path* yang menghubungkan dua buah titik, maka jarak antara dua titik tersebut tak terhingga. *Diameter* dari suatu graf G merupakan jarak terpanjang antara dua titik pada graf G tersebut. Sedangkan *radius* adalah jarak terpendek antara dua titik di graf G (Thulasiraman dan Swamy, 1992 : 7-10).

Dua graf G dan H merupakan dua graf yang saling identik jika $V(G) = V(H)$, $E(G) = E(H)$, dan $\psi_G = \psi_H$. Lambang ψ merupakan fungsi insidensi yang mengasosiasikan setiap sisi dari suatu graf dengan sebuah pasangan tak berurut (tidak harus berbeda) dari titik-titik di graf tersebut. Dua graf yang identik selalu memiliki representasi diagram yang identik. Namun, dua graf atau lebih yang tidak identik juga mungkin untuk mempunyai representasi diagram yang sama, hal ini disebut isomorfis. Dua graf G dan H dikatakan isomorfis jika ada suatu korespondensi satu-satu antara himpunan titik dari kedua graf, dan korespondensi satu-satu antara himpunan sisi dari kedua graf, sedemikian hingga sisi yang bersesuaian antara kedua graf tersebut berhubungan dengan titik-titik yang bersesuaian juga dengan kedua graf (Bondy dan Murty, 1976 : 4). Berikut dua contoh dua graf yang isomorfis



Gambar 2.3 Graf isomorfis

Graf dasar merupakan graf yang menjadi sub graf dari graf lainnya, dan tidak isomorfis dengan graf lainya. Beberapa contoh graf dasar adalah sebagai berikut :

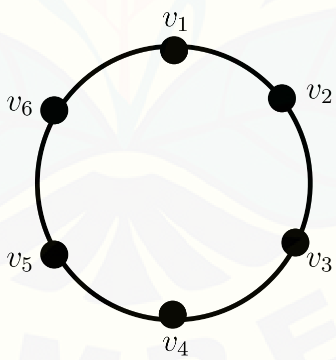
1) Graf Lintasan

Suatu graf lintasan dengan order n dinotasikan dengan P_n merupakan sebuah graf dimana titik-titik dari graf tersebut dapat dilabeli dengan $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ sedemikian hingga sisi-sisinya adalah $(v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \ldots, v_{n-1}v_n)$ (Chartrand dan Zang, 2012 : 29). Contoh graf lintasan dapat dilihat pada Gambar 2.4

Gambar 2.4 Graf Lintasan (P_6)

2) Graf Lingkaran

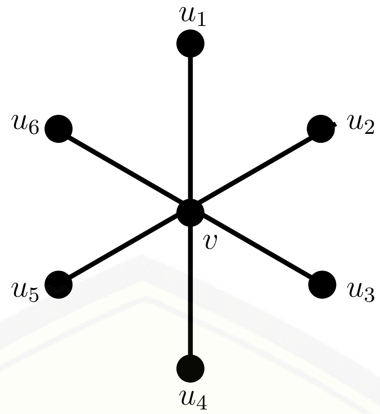
Suatu graf lingkaran dengan order n dinotasikan dengan C_n merupakan sebuah graf dimana titik-titiknya dapat dilabeli dengan $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ sedemikian hingga sisi-sisinya adalah $(v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \ldots, v_{n-1}v_n)$ dan v_nv_1(Chartrand dan Zang, 2012 : 29). Contoh graf lingkaran dapat dilihat pada Gambar 2.5



Gambar 2.5 Graf Lingkaran (C_6)

3) Graf Bintang

Graf $G(V, E)$ adalah sebuah graf bintang jika terdapat sebuah titik tetap v (disebut pusat dari graf bintang) sedemikian hingga $E = \{vu | u \in V \wedge u \neq v\}$. Graf bintang dengan order n dinotasikan dengan S_n(Bhavanari, Devanaboina, dan Bhavanari, 2016). Contoh graf bintang dapat dilihat pada Gambar 2.6



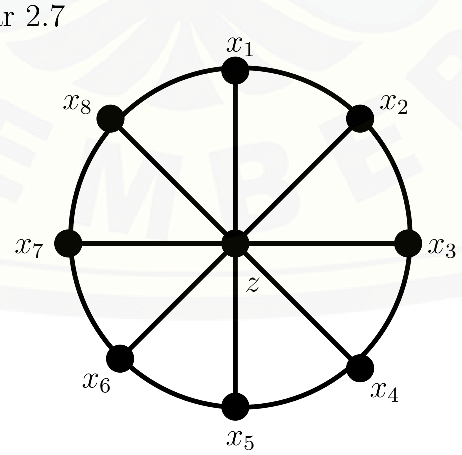
Gambar 2.6 Graf Bintang (S_6)

2.2 Keluarga Graf Roda

Keluarga graf roda memiliki suatu ciri khusus yaitu terdiri dari suatu titik pusat yang beradjasensi dengan seluruh titik yang terdapat pada lingkarannya. Beberapa keluarga graf roda yang diteliti yaitu :

1) Graf Roda /*wheel graph*

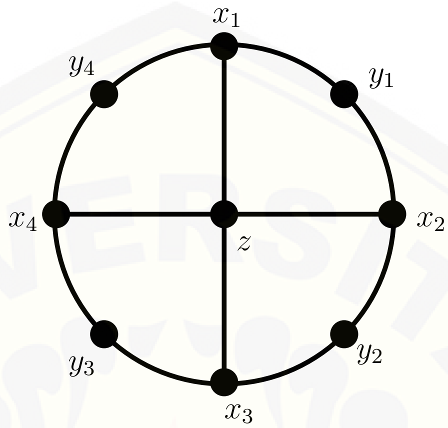
   Graf roda dengan jari-jari sebanyak n dinotasikan dengan (W_n) adalah graf yang terdiri dari sebuah graf lingkaran dengan order n dan satu tambahan titik yang beradjasensi dengan semua titik pada lingkaran tersebut (Turan dan Demirtekin, 2017). Sisi yang berkorespondensi dengan lingkaran disebut sisi *rim*, dan sisi yang berinsidensi dengan titik pusat dinamakan sisi *spoke*(Vaidya dan Pandit, 2016). Graf roda dapat dilihat pada Gambar 2.7



Gambar 2.7 Graf Roda (W_8)

2) Graf Gir /*gear graph*

Graf Gir (G_n) adalah sebuah graf roda dengan sebuah titik tambahan di antara setiap pasang titik-titik yang beradjasensi pada lingkaran, graf gir (G_n) mempunyai titik sebanyak $2n+1$ dan sisi sebanyak $3n$(Turan dan Demirtekin, 2017). Graf gir dapat dilihat pada Gambar 2.8



Gambar 2.8 Graf Gir (G_4)

3) Graf Helm /*helm graph*

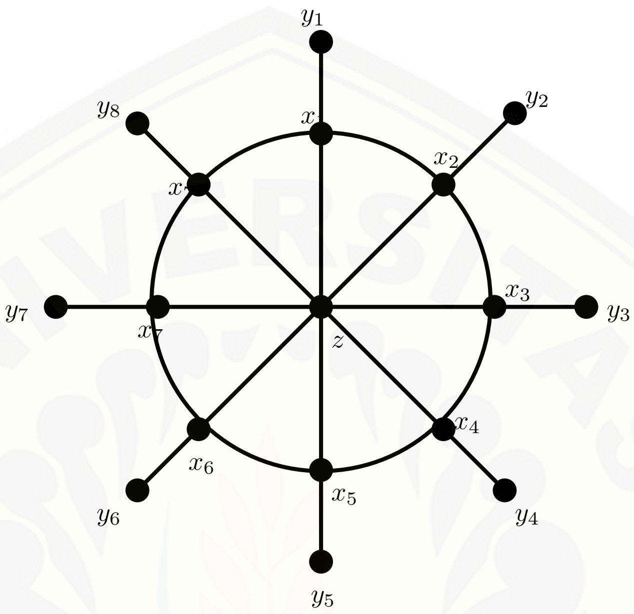
Graf helm H_n adalah sebuah graf terkoneksi dengan himpunan titik $V(H_n) = \{z\} \cup \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(H_n) = \{zx_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_iy_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_ix_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_ix_1; i = n\}$ dengan kardinalitas dari titik-titiknya $|V(G)| = 2n+1$ dan kardinalitas dari sisi-sisinya adalah $|E(G_n)| = 3n$ (Dafik dkk., 2018). Titik z dapat disebut dengan pusat, dan sisi $\{x_iy_i; 1 \leq i \leq n\}$ disebut dengan pendant. Graf helm dapat dilihat pada Gambar 2.9

4) Graf Persahabatan/ *friendship graph*

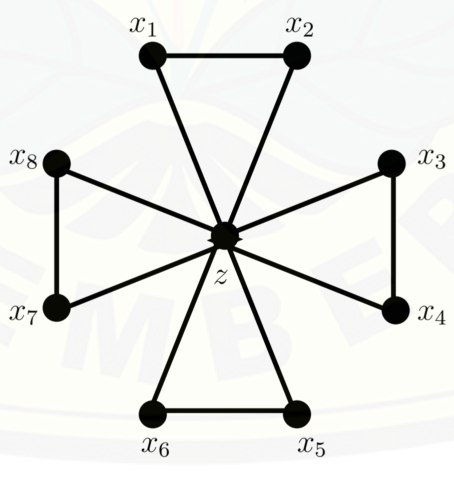
Graf persahabatan (Fr_n) adalah sebuah himpunan dari segitiga-segitiga sebanyak n yang mempunyai satu titik pusat bersama (Meena dan Vaithilingam, 2012) . Graf persahabatan dapat dilihat pada Gambar 2.10

5) Graf Bunga/ *flower graph*

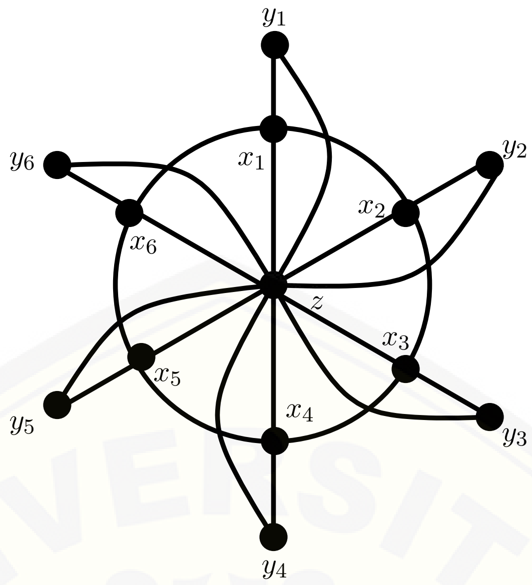
Graf bunga (Fl_n) adalah graf yang dibentuk dari sebuah graf helm di mana setiap titik dari pendantnya terhubung dengan pusatnya (Daoud dan Mohamed, 2016). Pendant adalah suatu sisi yang terbentuk dari titik yang berada di lingkaran dengan satu buah titik tambahan. Ramya dkk., (2012) mengklasifikasikan sisi-sisi pada graf bunga menjadi tiga jenis yaitu sisi yang beradjasensi dengan titik pusat dan setiap titik pada lingkaran *(spokes)*, *(petals)* sisi yang beradjasensi dengan titik pusat dan titik ujung pendant serta pendant, dan yang terakhir adalah sisi lingkaran *(cycle edges)* Graf bunga dapat dilihat pada Gambar 2.11



Gambar 2.9 Graf Helm (H_8)



Gambar 2.10 Graf Persahabatan (Fr_4)



Gambar 2.11 Graf Bunga (Fl_6)

2.3 Pelabelan Graf

Pelabelan graf mulai diangkat kembali sejak abad ke-19, ditandai oleh pembuktian seorang matematikawan terkenal bernama Arthur Cayley. Dia membuktikan terdapat sebanyak n^{n-2} pohon-pohon yang berlabel berbeda dengan order n. Sejak saat itu, pelabelan menjadi topik yang sangat terkenal dalam teori graf. Pelabelan graf merupakan pemberian label-label pada elemen-elemen yang ada di dalam graf yaitu titik, sisi, atau keduanya. Jika pelabelannya pada titik saja, dinamakan pelabelan titik, sedangkan jika pada sisi saja, maka akan dinamakan pelabelan sisi, dan jika pada keduanya disebut dengan pelabelan total. Suatu fungsi $f : V(G) \rightarrow S$ di mana S adalah suatu himpunan bilangan non negatif dan $V(G)$ adalah himpunan titik dalam graf tersebut, maka f disebut pelabelan titik dari graf G dan anggota dari $f(v)$ di mana $u \in V(G)$ disebut label titik. Pelabelan dalam teori graf banyak memiliki tujuan, sering sekali tujuan dari pelabelan titik dari suatu graf G adalah untuk mempermudah pembentukan pelabelan sisi dari graf G tersebut. Hal ini juga dapat berlaku sebaliknya, dapat dimulai dengan melabeli sisi terlebih dahulu dalam rangka membantu mempermudah membuat pelabelan titik dari graf tersebut (Chartrand, Egan, dan Zang, 2019 : 3-5).

Dalam pelabelan graf, terdapat dua topik yang cukup mempengaruhi perkembangan penelitian graf yaitu pelabelan ajaib dan pelabelan antiajaib. Suatu graf terkoneksi G dikatakan ajaib jika ada suatu fungsi pelabelan pada himpunan sisi dari G sedemikian hingga sisi-sisi yang berbeda memiliki label yang berbeda, dan jumlah dari label-label sisi yang berinsidensi dengan setiap titik dari G adalah sama (Chartrand, Egan, dan Zang, 2019 : vi). Sedangkan, jika suatu graf G yang sisi-sisinya dilabeli dengan bilangan bulat sedemikian hingga jumlah dari label-label sisi yang berinsidensi dengan setiap titik berbeda antara titik satu dan lainnya, maka pelabelan ini disebut pelabelan antiajaib (Hartsfield dan Ringel, 1990 : 108). Terdapat banyak macam pelabelan antiajaib, salah satunya adalah pelabelan titik sisi antiajaib *(edge antimagic vertex labeling)* yaitu suatu fungsi yang memetakkan himpunan titik $V(G)$ ke $\{0, 1, 2, \ldots, q\}$ sedemikian hingga jumlah dari label-label titik yang berinsidensi dengan setiap sisi berbeda antara sisi yang satu dan lainnya. Jumlah dari label titik ini disebut bobot sisi dan dinotasikan dengan $w(e)$ (Thirugnanasambandam dan Chitra, 2018).

2.4 Koneksi Pelangi

Terdapat beberapa kondisi tertentu dalam pelabelan graf, ada kemungkinan bahwa label yang digunakan bukan hanya bilangan bulat tergantung pada fungsi dan tujuan pelabelan tersebut. Jika labelnya adalah bobot, maka disebut pembobotan, jika labelnya adalah warna, maka disebut pewarnaan. Suatu pewarnaan pada graf G adalah pemberian warna-warna (anggota dari suatu himpunan) pada titik-titik atau sisi-sisi dari graf G sedemikian hingga titik-titik yang bersebelahan atau sisi-sisi yang bersebelahan mempunyai warna yang berbeda (Chartrand, Egan, dan Zang, 2019 : 3). Pewarnaan graf dibedakan menjadi tiga kategori di antaranya pewarnaan titik yaitu pemberian warna hanya pada titik di dalam graf, pewarnaan area pada peta, dan pewarnaan sisi yaitu pemberian warna pada sisi-sisi di dalam suatu graf (Wilson, 2010 : 101).

Salah satu topik pewarnaan graf adalah pewarnaan pelangi (*rainbow coloring*). Lintasan pelangi adalah suatu lintasan antara dua titik berbeda dimana semua sisi yang dilewatinya memiliki warna yang berbeda. Andaikan G adalah sebuah graf terkoneksi dengan pewarnaan sisi yang didefinisikan sebagai

$c : E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \ldots, n\}, n \in N$ dimana sisi-sisi yang bersebelahan boleh berwarna sama. Graf G dikatakan terkoneksi pelangi jika setiap sembarang dua titik dalam graf tersebut dapat dihubungkan oleh sedikitnya satu lintasan pelangi. Pewarnaan sisi pada graf G tersebut dikatakan pewarnaan pelangi (*rainbow coloring*). Setiap graf terkoneksi dapat memiliki pewarnaan sisi yang menyebabkan graf tersebut terkoneksi pelangi, yaitu dengan mewarnai semua sisi menggunakan warna yang berbeda. Bilangan koneksi pelangi atau *rainbow connection number* dari suatu graf terkoneksi G dinotasikan dengan $rc(G)$ adalah jumlah warna paling sedikit yang dibutuhkan supaya graf G terkoneksi pelangi. Contoh aplikasi dari pewarnaan pelangi antara lain pengamanan transfer informasi rahasia antara lembaga, permasalahan jaringan dll (Li dan Sun, 2012 : 1).

2.5 Bilangan Koneksi Pelangi Antiajaib

Andaikan $G(V, E)$ merupakan suatu graf simpel dan terkoneksi dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E. Sebuah fungsi bijektif $f : V \rightarrow \{1, 2, 3, \ldots, |V(G)|\}$ dikatakan sebuah pelabelan pelangi antiajaib jika ada sebuah lintasan pelangi di antara setiap pasangan titik-titik dan untuk setiap sisi $e = uv \in E(G)$, bobot $w(e) = f(u) + f(v)$. Sebuah graf G dikatakan pelangi antiajaib jika G dilabeli pelangi antiajaib. Bilangan koneksi pelangi antiajaib dari suatu graf G dinotasikan dengan $rc_A(G)$ yaitu jumlah warna paling sedikit yang dibutuhkan untuk membuat graf G menjadi graf terkoneksi pelangi, dengan pelabelan antiajaib (Dafik, Alfarisi, dan Agustin, 2019).

2.6 Hasil Penelitian yang Relevan

Beberapa hasil penelitian yang relevan dituliskan dalam tabel berikut.

Tabel 2.1 Penelitian relevan

Penulis	Graf	Hasil
(Chartrand, Jhons, McKeon, dan Zang, 2008)	roda	$rc(W_n) = 1$, jika $n = 3$ $rc(W_n) = 2$, jika $4 \leq n \leq 6$ $rc(W_n) = 3$, jika $n \geq 7$

Penulis	Graf	Hasil
(Syafrizal, Wijaya dan Surahmat, 2014)	gir	$rc(G_n) = 3$, jika $n = 3$ $rc(G_n) = 4$, jika $n \geq 4$
(Zamora , Baldado dan Padua, 2019)	helm	$rc(H_n) = n$, jika $3 \leq n \leq 6$ $rc(H_n) = n + 3$, jika $n \geq 7$
(Ramya N , Rangarajan, Sattanathan, 2012)	Persahabatan	$rc(Fr_n) = 3$, jika $n \geq 3$
	Bunga	$rc(Fl_n) = 3$, jika $n \geq 3$
(Dafik, Alfarisi, dan Agustin, 2019)	lintasan	$rc_A(P_n) = n - 1$
	lingkaran	$\lceil \frac{n}{2} \rceil \leq rc_A(C_n) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ jika $n = 1, 2 (mod\ 4)$
		$\lceil \frac{n}{2} \rceil \leq rc_A(C_n) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ jika $n = 0, 3 (mod\ 4)$
	bintang	$rc_A(S_n) = n$

2.7 Konsep Dasar Matematika

Beberapa konsep dasar matematika yang dibutuhkan dalam penelitian ini antara lain himpunan, relasi, fungsi, fungsi *floor*, dan fungsi *ceiling.*

1) Himpunan

   Himpunan merupakan sekumpulan/sekelompok objek yang didefinisikan secara jelas dan memiliki suatu sifat yang sama. Misalkan A adalah himpunan bilangan genap lebih dari 3 dan kurang dari 11, kita dapat menuliskan $A = \{4, 6, 8, 10\}$ (Munir, 2010: 48)

2) Relasi

   Relasi antara himpunan A dan himpunan B adalah suatu aturan yang memasangkan anggota-anggota A dengan anggota-anggota B. (Munir, 2010 : 104).

3) Fungsi

   Fungsi atau pemetaan dari himpunan A ke himpunan B merupakan suatu relasi khusus yang memasangkan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B. Dalam fungsi terdapat beberapa istilah yaitu, domain (daerah asal), kodomain (daerah kawan), dan *range* (daerah hasil/bayangan) .

Misalkan, suatu fungsi didefinisikan sebagai $f : x \to 2x$, cara membacanya adalah "fungsi f memetakkan x ke $2x$ ". Lambang x merupakan anggota himpunan asal/domain. Jika diketahui domainnya adalah himpunan $A = \{4, 6, 8\}$, maka kita dapat menentukan *range* nya dengan cara mengalikan 2 dengan setiap anggota himpunan A, sehingga *range* nya adalah $\{8, 12, 16\}$. (Munir, 2010: 129). Fungsi dibedakan menjadi 3 yaitu fungsi injektif, surjektif dan bijektif. Fungsi injektif adalah fungsi di mana semua himpunan domain memiliki range yang berbeda. fungsi surjektif apabila semua anggota himpunan kodomain mempunyai pasangan dengan minimal satu anggota domain. Suatu fungsi merupakan bijektif, jika fungsi tersebut merupakan fungsi injektif dan surjektif sekaligus (Munir, 2010 : 132).

4) Fungsi *floor*

Fungsi *floor* dari suatu bilangan real x dinotasikan dengan $\lfloor x \rfloor$ adalah suatu fungsi yang memetakkan bilangan real x ke suatu bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x . Contoh fungsi *floor* adalah sebagai berikut

$$\lfloor -4,98 \rfloor = -5$$
$$\lfloor 4,98 \rfloor = 4$$

5) Fungsi *ceiling*

Fungsi *ceiling* dari suatu bilangan real x dinotasikan dengan $\lceil x \rceil$ merupakan suatu fungsi yang memetakkan bilangan real x ke suatu bilangan bulat terkecil yang lebih dari atau sama dengan x(Grimaldi, 2003 : 253-254). Contoh fungsi *ceiling* adalah sebagai berikut :

$$\lceil 0,76 \rceil = 1$$
$$\lceil -0,76 \rceil = 0$$

2.8 Keterampilan Berpikir Kombintorial

Pembelajaran tentang berbagai konsep kombinatorika menuntut siswa mengalami suatu cara khusus dalam berpikir. Proses berpikir tersebut sering disebut dengan berpikir kombinatorial. Graumann (2002) berpendapat bahwa berpikir kombinatorial merupakan suatu alat yang digunakan dalam penelitiannya terhadap siswa-siswa pada penyelesaian masalah. Siswa harus menggunakan pemikiran kombinatorial dalam menemukan suatu langkah sistematis untuk memberikan keyakinan bahwa semua kemungkinan penyelesaian sudah didiskusikan atau dipikirkan. Selain itu, Hacking (dalam Faiqotul Mufarrohah, 2018) juga mengemukakan tentang sebuah metode baru dalam pemberian alasan mengenai pemikiran kombinatorial dan geometris di mana di dalamnya mengandung pembuktian dan kemampuan penalaran. Godino (2007) berpendapat bahwa terdapat perbedaan antara berpikir kombinatorial dengan berpikir matematis lainnya. Hal ini karena berpikir kombinatorial menuntut siswa mengembangkan pengetahuan dengan menggunakan pendekatan sederhana. Penyelesaian permasalahan dalam matematika berbeda-beda tergantung topik permasalahannya, karena fokus materi pembelajaran antar topik berbeda. Hal ini menyebabkan perbedaan pemikiran dan penalaran dalam memecahkan masalah. Dafik (2019) memaparkan lima indikator yang mempengaruhi keterampilan berpikir kombinatorial. Indikator dan sub indikator dari keterampilan berpikir kombinatorial diuraikan pada tabel berikut.

Tabel 2.2 Indikator dan Sub indikator keterampilan berpikir kombinatorial

Indikator	**Sub indikator**
Mengidentifikasi beberapa kasus	Mengidentifikasi properti/karakteristik dari masalah
	Menerapkan beberapa kasus
Mengenali pola dari semua kasus	Mengidentifikasi pola dari penyelesaian kasus
	Memperluas pola dari penyelesaian kasus yang diperoleh
Menggeneralisasi semua kasus	Menerapkan simbolisasi matematika
	Menghitung kardinalitas
	Mengembangkan algoritma
Membuktikan secara matematis	Melakukan perhitungan argumen
	Menguji algoritma
	Mengembangkan sebuah bijeksi
	Menguji bijeksi
	Menerapkan pembuktian induktif, deduktif, dan kualitatif
Mempertimbangkan dengan masalah kombinatorial lain	melakukan interpretasi
	mengusulkan masalah terbuka

Indikator	Sub indikator
Mempertimbangkan dengan masalah kombinatorial lain	mengetahui masalah kombinatorial baru
	menemukan aplikasi yang potensial

Terdapat pengembangan sub indikator yang didasarkan pada langkah-langkah mencari bilangan koneksi pelangi antiajaib pada keluarga graf roda yang disajikan pada tabel berikut.

Tabel 2.3 Pengembangan sub indikator berdasarkan materi bilangan koneksi pelangi antiajaib

Sub indikator	**Pengembangan sub indikator berdasarkan materi bilangan koneksi pelangi antiajaib**
Mengidentifikasi properti/ karakteristik dari masalah	Memahami konsep dan cara mencari bilangan koneksi pelangi antiajaib
	Memahami karakteristik dari keluarga graf roda
Menerapkan beberapa kasus	Melakukan pelabelan titik pada graf roda order 3 sedemikian hingga terkoneksi pelangi antiajaib
	Melakukan pelabelan titik pada graf gir order 3 sedemikian hingga terkoneksi pelangi antiajaib
	Melakukan pelabelan titik pada graf helm order 3 sedemikian hingga terkoneksi pelangi antiajaib
	Melakukan pelabelan titik pada graf persahabatan order 3 sedemikian hingga terkoneksi pelangi antiajaib
	Melakukan pelabelan titik pada graf bunga order 3 sedemikian hingga terkoneksi pelangi antiajaib
Mengidentifikasi pola dari penyelesaian kasus	Mengetahui pola pelabelan titik pada graf roda order 3

Sub indikator	Pengembangan sub indikator berdasarkan materi bilangan koneksi pelangi antiajaib
Mengidentifikasi pola dari penyelesaian kasus	Mengetahui pola pelabelan titik pada graf gir order 3
	Mengetahui pola pelabelan titik pada graf helm order 3 Mengetahui pola pelabelan titik pada graf persahabatan order 3
	Mengetahui pola pelabelan titik pada graf bunga order 3
	Mengetahui pola rc_A pada graf roda order 3
	Mengetahui pola rc_A pada graf gir order 3
	Mengetahui pola rc_A pada graf helm order 3
	Mengetahui pola rc_A pada graf persahabatan order 3
	Mengetahui pola rc_A pada graf bunga order 3
Memperluas pola dari penyelesaian kasus yang diperoleh	Menerapkan pola pelabelan titik yang telah dilakukan sebelumnya pada graf roda order 4, 5, 6
	Menerapkan pola pelabelan titik yang telah dilakukan sebelumnya pada graf roda order 4, 5, 6
	Menerapkan pola pelabelan titik yang telah dilakukan sebelumnya pada graf gir order 4, 5, 6
	Menerapkan pola pelabelan titik yang telah dilakukan sebelumnya pada graf helm order 4, 5, 6
	Menerapkan pola pelabelan titik yang telah dilakukan sebelumnya pada graf persahabatan order 4, 5, 6
	Menerapkan pola pelabelan titik yang telah dilakukan sebelumnya pada graf bunga order 4, 5, 6

Sub indikator	Pengembangan sub indikator berdasarkan materi bilangan koneksi pelangi antiajaib
Menerapkan simbolisasi matematika	Memberikan simbol pada setiap titik yang ada dalam keluarga graf roda
Menghitung kardinalitas	Menghitung kardinalitas titik dan sisi graf roda untuk order n
	Menghitung kardinalitas titik dan sisi graf gir untuk order n
	Menghitung kardinalitas titik dan sisi graf helm untuk order n
	Menghitung kardinalitas titik dan sisi graf persahabatan untuk order n
	Menghitung kardinalitas titik dan sisi graf bunga untuk order n
Mengembangkan algoritma	Menentukan graf yang akan diteliti
	melabeli masing-masing keluarga graf roda dengan pelabelan antiajaib
	mengecek koneksi pelangi antara dua titik berbeda pada keluarga graf roda
	mengecek jumlah bobot yang dihasilkan sesuai kriteria rc_A
	melabeli kembali jika belum sesuai dengan kriteria rc_A
Menguji algoritma	Menguji benar tidaknya teorema rc_A yang dihasilkan
Mengembangkan bijeksi	Membuat fungsi titik pada graf roda sesuai kriteria rc_A
	Membuat fungsi titik pada graf gir sesuai kriteria rc_A
	Membuat fungsi titik pada graf helm sesuai kriteria rc_A
	Membuat fungsi titik pada graf persahabatan sesuai kriteria rc_A
	Membuat fungsi titik pada graf bunga sesuai kriteria rc_A
Menguji bijeksi	Menguji fungsi titik pada graf roda apakah sudah memenuhi kriteria rc_A

Sub indikator	Pengembangan sub indikator berdasarkan materi bilangan koneksi pelangi antiajaib
Menguji bijeksi	Menguji fungsi titik pada graf gir apakah sudah memenuhi kriteria rc_A
	Menguji fungsi titik pada graf helm apakah sudah memenuhi kriteria rc_A
	Menguji fungsi titik pada graf persahabatan apakah sudah memenuhi kriteria rc_A
	Menguji fungsi titik pada graf bunga apakah sudah memenuhi kriteria rc_A
Menerapkan pembuktian induktif, deduktif dan kualitatif	Membuktikan teorema bilangan koneksi pelangi antiajaib pada keluarga graf roda yang telah dihasilkan
Melakukan interpretasi	memahami dan dapat menjelaskan proses pencarian bilangan koneksi pelangi antiajaib pada graf roda $rc_A(W_n)$
	memahami dan dapat menjelaskan proses pencarian bilangan koneksi pelangi antiajaib pada graf gir $rc_A(G_n)$
	memahami dan dapat menjelaskan proses pencarian bilangan koneksi pelangi antiajaib pada graf helm $rc_A(H_n)$
	memahami dan dapat menjelaskan proses pencarian bilangan koneksi pelangi antiajaib pada graf persahabatan $rc_A(Fr_n)$
	memahami dan dapat menjelaskan proses pencarian bilangan koneksi pelangi antiajaib pada graf bunga $rc_A(Fl_n)$
Mengusulkan masalah terbuka	Mengusulkan masalah terbuka terkait bilangan koneksi pelangi antiajaib pada graf lainnya
Mengetahui masalah kombinatorial baru	Menemukan masalah kombinatorial baru terkait bilangan koneksi pelangi antiajaib rc_A pada graf gir dan helm
Menemukan aplikasi yang potensial	Menemukan aplikasi bilangan koneksi pelangi antiajaib pada kehidupan sehari-hari

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan pada penelitian ini adalah penelitian eksploratif. Penelitian eksploratif merupakan penelitian yang memiliki tujuan untuk menemukan serta menggali secara luas dan mendalam tentang alasan, sebab, ataupun hal-hal lain yang mempengaruhi terjadinya suatu fenomena. Jenis penelitian ini dipakai apabila kita belum mengetahui secara persis mengenai sifat-sifat objek penelitian kita. Pendekatan yang digunakan adalah pendekatan induktif, yaitu suatu pendekatan dengan mengambil suatu kesimpulan secara umum dari fakta-fakta nyata yang ada di lapangan (Arikunto, 2006 : 7). Penelitian ini termasuk dalam penelitian eksploratif karena tujuan penelitian ini ialah agar suatu topik yang diangkat pada dapat lebih dikenal oleh masyarakat luas, memberikan gambaran dasar dari topik yang diteliti, mengembangkan gagasan dan teori yang bersifat dapat diubah, membuka kemungkinan adanya penelitian lanjutan mengenai topik bahasan, serta menentukan arah dan teknik yang akan digunakan dalam penelitian selanjutnya.

3.2 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deduktif aksiomatik dan metode pendeteksi pola (*pattern recognition*).

1 Metode deduktif aksiomatik
  Metode deduktif aksiomatik adalah metode penelitian yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada, kemudian diterapkan dalam bilangan koneksi pelangi antiajaib pada keluarga graf roda.

2 Metode pendeteksi pola
  Metode pendeteksi pola (*pattern recognition*) digunakan untuk mencari pola dan bilangan koneksi pelangi antiajaib pada keluarga graf roda

Penelitian ini menggunakan pedoman dari lima indikator serta sub indikator yang dipaparkan oleh Dafik dkk. (2019). Proses pemahaman kasus, penemuan teorema hingga pembuktian teorema akan dikaitkan dengan lima aspek indikator tersebut.

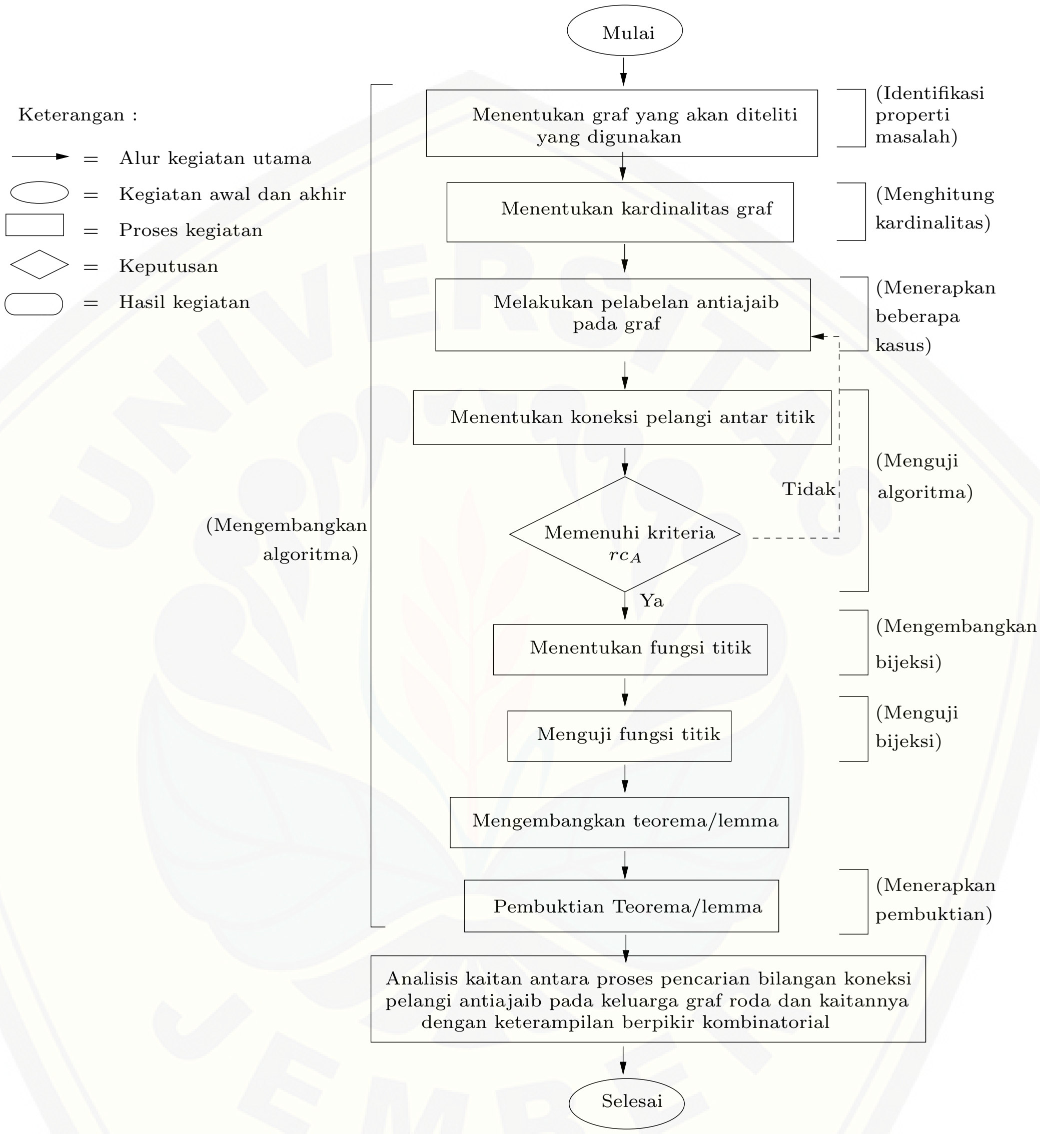
3.3 Prosedur Penelitian

Prosedur penelitian merupakan uraian mengenai langkah-langkah yang akan dilakukan sebagai pedoman dalam melaksanakan penelitian untuk meraih hasil yang akan dicapai sesuai dengan tujuan penelitian. Prosedur penelitian yang akan dilakukan dalam menentukan bilangan koneksi pelangi antiajaib pada keluarga graf roda berdasarkan pada indikator dan sub indikator keterampilan berpikir kombinatorial dapat dilihat pada Gambar 3.1

Alur prosedur penelitian untuk menentukan bilangan koneksi pelangi antiajaib pada keluarga graf roda adalah sebagai berikut :

a. Menentukan beberapa keluarga graf roda yang akan dicari bilangan koneksi pelangi antiajaibnya;
b. Menentukan indeks untuk semua titik pada keluarga graf roda;
c. Mengidentifikasi kardinalitas dari keluarga graf roda;
d. Melabeli keluarga graf roda yang telah ditentukan dengan pelabelan titik sisi antiajaib, sedemikian hingga terdapat koneksi pelangi antar setiap dua titik yang berbeda;
e. Melakukan pengecekan apakah sudah sesuai dengan kriteria koneksi pelangi dan minimal, jika belum sesuai dengan kriteria bilangan koneksi pelangi antiajaib, kembali ke langkah. Jika sudah sesuai kriteria bilangan koneksi pelangi antiajaib, kemudian menentukan bilangan koneksi pelangi antiajaib dari keluarga graf roda yang ditentukan;
f. Menganalisis keteraturan bilangan pada pola bilangan koneksi pelangi antiajaib yang telah diperoleh;
g. Membuat formulasi bilangan koneksi pelangi antiajaib untuk setiap keluarga graf roda yang telah ditentukan;
h. Merumuskan teorema/lemma terkait bilangan koneksi pelangi antiajaib pada keluarga graf roda;
i. Menguji kebenaran dari teorema/lemma;

j. Menganalisis keterkaitan antara proses penemuan bilangan koneksi pelangi antiajaib pada keluarga graf roda dengan keterampilan berpikir kombinatorial.



Gambar 3.1 Alur Penelitian

3.4 Observasi Awal Penelitian

Observasi awal yang dilakukan dalam penelitian ini adalah merumuskan kardinalitas pada semua graf yang diteliti dan mencarian bilangan koneksi pelangi antiajaib pada graf roda. Hal ini dilakukan untuk mengetahui adanya kemungkinan bilangan koneksi pelangi antiajaib pada keluarga graf roda. Kardinalitas keluarga graf roda sebagai berikut :

a. Himpunan titik dan sisi berturut-turut dari graf roda W_n yaitu $V(W_n) = \{z\} \cup \{x_i\ ; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(W_n) = \{zx_i\ ; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i x_{i+1}\ ; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\}$. Kardinalitas titik dan sisi dari graf roda W_n berturut-turut adalah $|V(W_n)| = n+1$ dan $|E(W_n)| = 2n$;
b. Himpunan titik dan sisi berturut-turut dari graf gir G_n yaitu $V(G_n) = \{z\} \cup \{x_i\ ; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_j\ ; 1 \leq j \leq n\}$ dan $E(G_n) = \{zx_i\ ; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i y_j\ ; 1 \leq i = j \leq n\} \cup \{x_i y_j\ ; 2 \leq i \leq n\ ; j = i-1\} \cup \{x_1 y_n\}$. Kardinalitas titik dan sisi dari graf gir G_n berturut-turut adalah $|V(G_n)| = 2n+1$ dan $|E(G_n)| = 3n$;
c. Himpunan titik dan sisi berturut-turut dari graf helm H_n yaitu $V(H_n) = \{z\} \cup \{x_i\ ; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_j\ ; 1 \leq j \leq n\}$ dan $E(H_n) = \{zx_i\ ; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i y_j\ ; 1 \leq i = j \leq n\} \cup \{x_i x_{i+1}\ ; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\}$. Kardinalitas titik dan sisi dari graf helm H_n berturut-turut adalah $|V(H_n)| = 2n+1$ dan $|E(H_n)| = 3n$;
d. Himpunan titik dan sisi berturut-turut dari graf persahabatan Fr_n yaitu $V(Fr_n) = \{z\} \cup \{x_i\ ; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_j\ ; 1 \leq j \leq n\}$ dan $E(Fr_n) = \{zx_i\ ; 1 \leq i \leq n\} \cup \{zy_j\ ; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_i y_j\ ; 1 \leq i = j \leq n\}$. Kardinalitas titik dan sisi dari graf persahabatan Fr_n berturut-turut adalah $|V(Fr_n)| = 2n+1$ dan $|E(Fr_n)| = 3n$;
e. Himpunan titik dan sisi berturut-turut dari graf bunga Fl_n yaitu $V(Fl_n) = \{z\} \cup \{x_i\ ; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_j\ ; 1 \leq j \leq n\}$ dan $E(Fl_n) = \{zx_i\ ; 1 \leq i \leq n\} \cup \{zy_j\ ; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_i y_j\ ; 1 \leq i = j \leq n\} \cup \{x_i x_{i+1}\ ; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\}$. Kardinalitas titik dan sisi dari graf bunga Fr_n berturut-turut adalah $|V(Fl_n)| = 2n+1$ dan $|E(Fl_n)| = 4n$

Dalam observasi awal ini, peneliti menemukan adanya bilangan koneksi pelangi pada graf roda dari order 3 hingga order 8. Langkah-langkah pada observasi awal adalah sebagai berikut :

a. Memahami konsep bilangan koneksi pelangi antiajaib;
b. Memilih graf yang akan diteliti;
c. Mencari definisi graf roda dari beberapa jurnal;
d. Memberikan simbol untuk setiap titik pada keluarga graf roda;

e. Mencari kardinalitas titik dan sisi pada keluarga graf roda;

f. Mencoba melabeli masing-masing graf sesuai dengan kriteria bilangan koneksi pelangi antiajaib;

g. Menerapkan pola pelabelan yang sudah ditemukan pada keluarga graf roda order lainnya;

h. Menghitung bilangan koneksi pelangi antiajaib pada beberapa order dari keluarga graf roda;

i. Menemukan pola bilangan koneksi pelangi antiajaib pada masing-masing keluarga graf roda;

j. Membuat generalisasi rumus nilangan koneksi pelangi antiajaib untuk perluasan ke-n;

k. Menguji rumus bilangan koneksi pelangi antiaajaib yang telah didapat;

l. Membuktikan rumus bilangan koneksi pelangi antiajaib yang telah didapat;

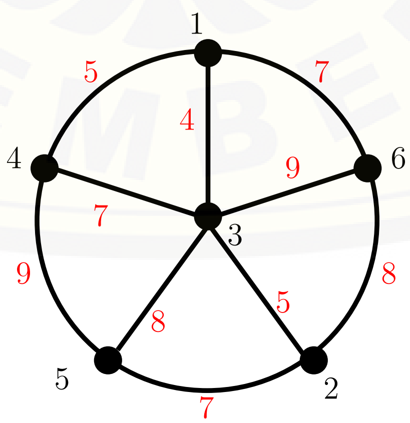
m. Membuat fungsi titik dan menghitung bobot sisi sesuai kriteria bilangan koneksi pelangi antiajaib;

n. Menguji fungsi titik yang telah dirumuskan;

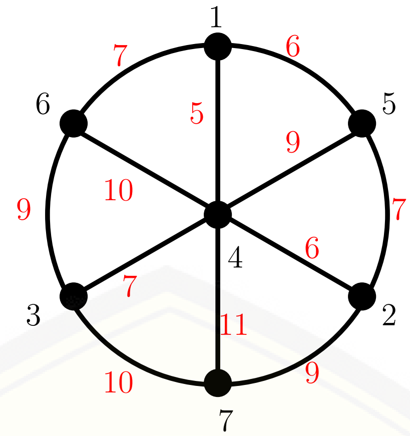
o. Membuktikan fungsi titik yang telah dirumuskan;

p. Mengkaji kaitan antara proses pencarian bilangan koneksi pelangi antiajaib pada keluarga graf roda dengan indikator serta sub indikator keterampilan berpikir kombinatorial;

Hasil observasi awal bilangan koneksi pelangi antiajaib pada graf roda ditunjukkan pada gambar berikut.



Gambar 3.2 Koneksi pelangi graf roda (W_5)



Gambar 3.3 Koneksi pelangi graf roda (W_6)

Berdasarkan tahapan pencarian pada observasi awal, peneliti telah menemukan bilangan koneksi pelangi antiajaib pada graf roda dengan order 5 dan 6 yaitu :

Pada graf roda dengan order 5, dihasilkan $rc_A(W_5) = 5$

Pada graf roda dengan order 6, dihasilkan $rc_A(W_6) = 6$

Peneliti menemukan keteraturan bilangan koneksi pelangi antiajaib dari graf roda yaitu n. Sehingga peneliti dapat melanjutkan penelitian dalam menentukan bilangan koneksi pelangi antiajaib pada keluarga graf roda yang lain hingga ekspansi ke n. Observasi selanjutnya mengikuti tahapan yang telah dilakukan pada observasi awal.

BAB 5. PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa terdapat lima teorema baru bilangan koneksi pelangi antiajaib pada keluarga graf roda yaitu :

a. Bilangan koneksi pelangi antiajaib pada keluarga graf roda dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

   untuk graf roda W_n *dengan* $n = [3,4]$, *bilangan koneksi pelangi antiajaib adalah* $rc_A(W_n) = 5$ *dan untuk* $n \geq 5$ *didapat* $rc_A(W_n) = n$.

   untuk graf Gir G_n, $n \geq 3$, *bilangan koneksi pelangi antiajaib adalah* $rc(G_n) \leq rc_A(G_n) = 3 \leq n + 2$.

   untuk graf helm H_n, $n \geq 3$, *bilangan koneksi pelangi antiajaib adalah* $rc(H_n) \leq rc_A(H_n) = 3 \leq n + \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2$.

   untuk graf persahabatan Fr_n *dengan* $n \geq 2$, *bilangan koneksi pelangi antiajaib adalah* $rc_A(Fr_n) = 2n$.

   untuk graf bunga Fl_n *dengan* $n \geq 3$, *bilangan koneksi pelangi antiajaib adalah* $rc_A(Fl_n) = 2n$.

b. Kaitan bilangan koneksi pelangi antiajaib pada keluarga graf roda dengan keterampilan berpikir kombinatorial yaitu sub indikator mengidentifikasi properti/karakteristik masalah terkandung ketika tahap awal memahami konsep dan cara mencari bilangan koneksi pelangi antiajaib, sub indikator menerapkan beberapa kasus terkandung dalam proses melabeli setiap titik pada keluarga graf roda dengan order kecil. Sub indikator mengidentifikasi pola terkandung ketika mengetahui pola pelabelan titik dan pola bilangan koneksi pelangi antiajaib pada keluarga grfa roda, sub indikator memperluas pola terkandung dalam menerapkan pola pelabelan yang didapat pada graf dengan order yang lebih tinggi. Sub indikator menerapkan simbolisasi matematika tersirat ketika memberikan simbol atau indeks unuk setiap titik yang terdapat pada keluarga graf roda, sub indikator menghitung kardinalitas terkandung ketika menghitung kardinalitas pada keluarga graf roda, sub indikator mengembangkan algoritma merupakan indikator yang terkandung dalam setiap alur proses pencarian bilangan koneksi pelangi antiajaib. Melakukan perhitungan argumen merupakan sub indikator yang terdapat ketika menghitung kardinalitas graf hingga order ke-n, menguji algoritma terkandung ketika menguji rumus dan fungsi titik yang telah ditemukan. mengembangkan dan menguji bijeksi tersirat ketika membuat fungsi titik dan mengujinya untuk order rendah hingga order ke-n, dan menerapkan pembuktian deduktif, induktif dan kualitatif yaitu ketika proses pembuktian teorema yang telah didapatkan. Sub indikator melakukan interpretasi terkandung dalam kegiatan menjelaskan apa yang telah dipahami dalam pencarian bilangan koneksi pelangi antiajaib pada keluarga graf roda.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian terdapat beberapa graf yang masih belum ditemukan bagaimana bilangan koneksi pelangi antiajaibnya seperti contoh graf lemon, graf web, graf antiweb dan lain sebagainya. Terdapat pula dua graf yang sulit untuk ditemukan sehingga peneliti memiliki beberapa open problem sebagai berikut:

Masalah terbuka 5.2.1. *Bagaimanakah bilangan koneksi pelangi antiajaib pada keluarga graf roda lainnya ?*

Masalah terbuka 5.2.2. *Bagaimanakah nilai pasti (exact value) dari graf gir* $rc(G_n)$ *?*

Masalah terbuka 5.2.3. *Bagaimanakah nilai pasti (exact value) dari graf helm* $rc(H_n)$ *?*

DAFTAR PUSTAKA

Arikunto, S. (2006). *Metode Penelitian Kualitatif*, Jakarta: Bumi Aksara.

Bhavanari, S., Devanaboina, S., dan Bhavanari, M. (2016). Star Number of A Graph. *Research Journal of Science and IT Management*, 18-19.

Bondy, J. A., dan Murty, U. S. (1976). *Graph Theory With Applications.* United States of America: Elservier Science Publishing Co., Inc.

Cameron, P. J. (1994). *COMBINATORICS : Topics, Techniques, Algorithms.* London: Cambridge University Press.

Chartrand, G., dan Lesniak, L. (1996). *Graphs and Digraphs Third Edition.* United States of America: Chapman and Hall/CRC.

Chartrand, G., dan Zang, P. (2012). *A First Course in Graph Theory.* New York: Dover Publication, Inc.

Chartrand, G., dan Zang, P. (2009). *Chromatic Graph Theory.* United States of America: Chapman and Hall/CRC.

Chartrand, G., Egan, C., dan Zang, P. (2019). *How to Label a Graph.* Switzerland: Springer Nature Switzerland AG.

Chartrand, G., Jhons, K., dan Zang, P. (2008). Rainbow Connection in Graphs. *Mathematica Bohemica.* 133. 85-98

Dafik, Adawiyah, R., Agustin, I. H., Slamin, dan Albirri, E. R. (2018). Related Wheel Graphs and Its Locating Edge Domination Number. *Journal of Physics.* 1-8.

Dafik, Alfarisi, R., dan Agustin, I. H. (2019). On Rainbow Edge Antimagic Connection Number of Graphs. *Journal of Physics* , 1-5.

Dafik, Anggraeni, dan Tirta, I. M. (2019). The analysis of the application of discovery learning in improving student's combinatorial thinking skill to solve super antimagic face coloring problem. *Journal of Physics* , 1-15.

Daoud, S. N., dan Mohamed, K. (2016). Complexity of Some Families of Cycle Related Graphs. *Journal of Taibah University for Science* , 6.

Godino. (2007). The-onto semiotic approach to research in mathematics. *The International Journal on Mathematics Education* , 127-135.

Graumann, G. (2002). General aims of mathematics education explained with examples in geometry teaching. Palermo: *The Mathematics Education into the 21th Century Project.*

Grimaldi, R. P. (2003). *Discrete and Combinatorial Mathematics 5th Edition.* United States of America: Pearson Education.

Hacking, I. (2007). On The Historical Roots of Scienific Reason. *Experience and Truth Conference* .

Harary, F. (1969). *GRAPH THEORY.* United States of America: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Hartsfield, N., dan Ringel, G. (1990). *Pearls in Graph Theory.* London: Academic Press, Inc.

Li, X., dan Sun, Y. (2012). *Rainbow Connections of Graphs.* London: Springer Science + Business Media.

Li, X., Shi, Y., dan Sun, Y. (2013). Rainbow Connection of Graphs : A Survey. *Graphs and Combinatorics* , 1-38.

Meena, D. S., dan Vaithilingam, K. (2012). Prime Labeling of Friendship Graphs. *International Journal of Engineering Research and Technology (IJERT)* , 3.

Mufarrohah, F. 2018. Profil Penalaran Kombinatorial Siswa Madrasah Tsanawiyah Dalam Menyelesaikan Soal Olimpiade Matematika. Universitas Islam Negeri Sunan Ampel Surabaya.

Munir, R. (2010). *Matematika Diskrit.* Bandung: Penerbit INFORMATIKA Bandung.

Polya, G. (1983). *Notes on introductory combinatorics.* Cambridge: Birkhauser Boston Inc.

Ramya, N., Rangarajan, K. dan Sattanathan, R. (2012). On Rainbow Coloring of Some Classes of Graphs. *International Journal of Computer*

Application . 46. 36-38.

Syafrizal. Sy., Wijaya, R., dan Surahmat. (2014). Rainbow Connection Number of Some Graphs. *Applied Mathematics Science*. 8. 4693-4696.

Thirugnanasambandam, K., dan Chitra, G. (2018). Mean Edge-Antimagic Vertex Labeling of Graphs. *International Journal of Mathematics Trends and Technology (IJMTT)*, 300.

Thulasiraman, K., dan Swamy, M. N. (1992). *Graphs : Theory and Algorithms*. Canada: John Wiley and Sons, Inc.

Turan, G. B., dan Demirtekin, E. (2017). Neighbor Rupture Degree of Gear Graphs. *Journal of Computer Mathematics* , 319-323.

Vaidya, S. K., dan Pandit, R. M. (2016). Independent Domination in Some Wheel Related Graphs. *Journal of Application and Applied Mathematics* , 319-323.

Zamora, R. B., Baldado, M. P., dan Padua, R. N. (2019). Rainbow Connection Number of Some Wheel-Related Graphs. *Communications in Applied Analysis* . 23. 31-39.

Wilson, R. J. (2010). *Introduction to Graph Theory 5th Edition*. England: Library of Congress Cataloging-in- Publication Data.

LAMPIRAN

LAMPIRAN A. Matrik Penelitian

Judul	Latar Masalah	Rumusan Masalah	Variabel	Indikator	Sumber Data	Jenis Penelitian	Metode Penelitian
Analisis Bilangan Koneksi Pelangi Antiajaib pada Keluarga Graf Roda dan Kaitannya dengan Keterampilan Berpikir Kombinatorial	1.Perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi 2.Matematika 3.Teori graf 4.Pelabelan graf 5.Pewarnaan Graf 6.Proses ber pikir kombinatorial	1.Bagaimanakah bilangan koneksi pelangi antiajaib pada keluarga graf roda ? 2.Bagaimanakah kaitan antara proses pencarian bilangan koneksi pelangi antiajaib pada keluarga graf roda dengan keterampilan berpikir kombinatorial ?	1.Keluarga graf roda 2.Bilangan koneksi teraturan antiajaib 3.Keterampilan berpikir kombinatorial	1.Untuk menentukan bilangan koneksi pelangi antiajaib pada keluarga graf roda; 2.Untuk menganalisis keterampilan berpikir kombinatorial dalam proses pencarian bilangan koneksi pelangi antiajaib	Kepustakaan	1.Penelitian eksploratif 2.Penelitian terapan	1.Metode aksiomatik 2.Metode pendeteksian pola