FUNGSI GELOMBANG ATOM TRITIUM ($_{1}^{3}H$) DENGAN PENDEKATAN PERSAMAAN SCHRODINGER

SKRIPSI

Oleh

Safitri Kusuma Wardani
NIM. 150210102037

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN FISIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MIPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER
2019

FUNGSI GELOMBANG ATOM TRITIUM ($^{3}_{1}H$) DENGAN PENDEKATAN PERSAMAAN SCHRODINGER

SKRIPSI

Diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Pendidikan Fisika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Pendidikan

Oleh

Safitri Kusuma Wardani
NIM 150210102037

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN FISIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MIPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER
2019

PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan untuk:

1. Kedua orang tua saya Ayah (Alm) Nawawi, Ibu Hamsah dan kakak saya yang senantiasa memberikan doa, motivasi dan dukungan dalam setiap langkah perjalanan hidup;
2. Guru-guru saya sejak Taman Kanak-Kanak sampai Perguruan Tinggi yang telah membimbing serta memberikan ilmu yang bermanfaat;
3. Teman seperjuangan Pendidikan Fisika angkatan 2015 yang selalu memberikan motivasi, doa serta dukungan;
4. Almamater Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

MOTTO

"*And for those who fear Allah SWT, he will make their path easy*"
"Dan barang siapa yang bertaqwa kepada Allah SWT, niscaya Allah SWT menjadikan baginya kemudahan dalam urusannya"
(terjemahan Q.S At-Talaq:4)*

*Departemen Agama Republik Indonesia. 2007. *Al-Qur'an dan Terjemahannya.* Bandung: PT. Sigma Examedia Arkanleema.

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Safitri Kusuma Wardani

NIM : 150210102037

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul "Fungsi Gelombang Atom Tritum (^3_1H) Dengan Pendekatan Persamaan Schrodinger" adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi manapun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 10 April 2019

Yang menyatakan,

Safitri Kusuma Wardani

NIM. 150210102037

SKRIPSI

FUNGSI GELOMBANG ATOM TRITIUM $({}^{3}_{1}H)$ DENGAN PENDEKATAN PERSAMAAN SCHRODINGER

Oleh

Safitri Kusuma Wardani

NIM. 150210102037

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Dr. Sri Handono Budi Prastowo, M.Si.

Dosen Pembimbing Anggota : Dr. Yushardi, S.Si., M.Si.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul "Fungsi Gelombang Atom Tritium $\left({}_{1}^{3}H\right)$ Dengan Pendekatan Persamaan Schrodinger" karya Safitri Kusuma Wardani telah diuji dan disahkan pada:

Hari, tanggal : Rabu, 10 April 2019

Tempat : Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember

Tim penguji

Ketua,	Sekertaris,
Dr. Sri Handono Budi P, M.Si. NIP. 19580318 198503 1 004	Dr. Yushardi, S.Si., M.Si. NIP. 19650420 199512 1 001
Anggota I,	Anggota II,
Drs. Bambang Supriadi, M.Sc. NIP. 19680710 199302 1 001	Dr. Drs. Agus Abdul Gani, M.Si. NIP. 19570801 198403 1 004

Mengesahkan
Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Jember

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.
NIP. 19680802 199303 1 004

RINGKASAN

Fungsi Gelombang Atom Tritium (^3_1H) Dengan Pendekatan Persamaan Schrodinger; Safitri Kusuma Wardani, 150210102037; 2019: 53 halaman; Program Studi Pendidikan Fisika Jurusan Pendidikan MIPA Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Atom Tritium adalah salah satu isotop Hidrogen yang mempunyai simbol ($^3_1$H) terdiri dari inti atom yang tersusun sebuah proton dan dua buah neutron serta sebuah electron yang mengelilingi inti atom. Atom Tritium merupakan bahan radioaktif yang memiliki waktu paruh 12,3 tahun dan termasuk dalam atom yang relative aman. Pengaplikasian atom Tritium dapat digunakan sebagai bahan untuk pembuatan baterai nuklir, campuran pembuatan jam tangan militer dan pilot. Suatu persamaan differensial terhadap ruang dan waktu bagi fungsi gelombang yang hendak dicari dan menggambarkan partikel mikroskopik yang bersangkutan disebut dengan persamaan Schrodinger. Persamaan Schrodinger yang ditemukan oleh Erwin Schrodinger ini harus memenuhi 3 syarat sebagai berikut: memenuhi hukum kekekalan energy $K + V = E$, taat azas terhadap hipotesa de Broglie $\lambda = \frac{h}{p}$, dengan λ merupakan panjang gelombang de Broglie dan persamaan yang dihasilkan bernilai tunggal, berhingga serta kontinu.

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan fungsi gelombang atom Tritium dengan bilangan kuantum (n $\leq$ 3) dan energi dari Atom Tritium dengan menggunakan model Atom Bohr. Jenis penelitian ini ialah penelitian non ekperimen atau kajian pustaka mengenai atom hidrogenik. Perhitungan yang digunakan yaitu perhitungan secara analitik dengan menggunakan persamaan Schrodinger dan perhitungan secara numerik dengan menggunakan aplikasi Scilab Console 6.0.0. Dalam mengkaji atom Tritium menggunakan persamaan Schrodinger tidak bergantung waktu pada koordinat bola. Penyelesaian dari persamaan Schrodinger koordinat bola yaitu fungsi Schrodinger koordinat bola.

Hasil penyelesaian persamaan Schrodinger pada atom Tritium memperoleh persamaan jari-jari bohr atom Tritium sebesar $a_T = 5{,}29273641\, x\, 10^{-11} m$.

Apabila jari-jari atom Tritium dibandingkan dengan jari-jari atom Hidrogen ($a_H = 5{,}291777 \times 10^{-11}$m), maka lebih besar jari-jari atom Tritium. Pada atom Tritium electron dan inti atom akan berotasi pada pusat massa, sehingga massa dari Tritium disebut massa tereduksi (μ) yang diperoleh sebesar $9{,}10787809 \times 10^{-31}$ kg. Perbedaan massa tereduksi dapat mempengaruhi nilai dari jari-jari atom dan energi pada setiap tingkatan, sehingga semakin kecil jari-jari atom maka semakin besar massa tereduksi sistemnya.

Fungsi gelombang atom Tritium diselesaikan melalui pemisahan variabel atau separasi variabel yang mendapatkan 14 fungsi gelombang dengan bilangan kuantum ($n = 1{,}2{,}3$). Bentuk fungsi gelombang atom Tritium yang diperoleh tidak berbeda jauh dengan bentuk fungsi gelombang atom Hidrogen. Fungsi gelombang atom Tritium terdiri dari fungsi gelombang radial yang bergantung pada bilangan kuantum utama dan azimut serta jari-jari (r), fungsi gelombang polar yang bergantung pada bilangan kuantum azimut dan sudut θ serta fungsi gelombang azimuth yang bergantung pada bilangan kuantum magnetik dan sudut ϕ. Untuk perhitungan secara numerik mendapatkan hasil berupa grafik yaitu grafik fungsi gelombang radial atom Tritium dengan bilangan kuantum ($n \leq 3$). Perhitungan energi atom Tritium menggunakan persamaan teori atom Bohr yang menghasilkan energi pada keadaan dasar, keadaan tereksitasi pertama dan keadaan tereksitasi kedua secara beturut-turut yaitu $-13{,}603428$ eV, $-3{,}400857$ eV dan $-1{,}511492$ eV. Jari-jari atom Tritium yang diperoleh mempunyai nilai yang lebih besar daripada jari-jari atom Hidrogen, sedangkan energi dasar atom Tritium yang diperoleh mempunyai nilai yang hampir sama dengan energi dasar dari atom Hidrogen yaitu $E_1 = 13{,}6$ eV. Semakin banyak lintasan kulit atom Tritium maka energi yang diperoleh akan semakin kecil sedangkan semakin besar energi atom Tritium maka radius jari-jari atom Tritium akan semakin kecil

PRAKATA

Puji syukur kehadirat Allah SWT, atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Fungsi Gelombang Atom Tritium ($^{3}_{1}H$) Dengan Pendekatan Persamaan Schrodinger”. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan pendidikan Strata satu (S1) pada Program Studi Pendidikan Fisika, Jurusan Pendidikan MIPA, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D., selaku Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember yang telah memberikan fasilitas sehingga skripsi ini dapat selesai;
2. Dr. Dwi Wahyuni, M.Kes., selaku Ketua Jurusan Pendidikan MIPA yang telah memberikan fasilitas sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini;
3. Drs. Bambang Supriadi, M.Sc., selaku Ketua Program Studi Pendidikan Fisika yang telah memberikan fasilitas dan motivasi sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini;
4. Dr. Sri Astutik, M.Si., selaku dosen pembimbing akademik yang telah memberikan fasilitas dan motivasi sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini;
5. Dr. Sri Handono Budi P, M.Si., selaku dosen pembimbing utama yang telah memberikan bimbingan dan motivasi dalam segala aspek serta meluangkan waktunya kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini;
6. Dr. Yushardi, S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing anggota yang telah memberikan bimbingan dan motivasi dalam membantu penulisan skripsi ini;
7. Drs. Bambang Supriadi, M.Sc., selaku dosen penguji utama yang telah meluangkan waktu untuk memberikan saran dan kritik yang membangun demi kesempurnaan skripsi ini;

8. Dr. Drs. Agus Abdul Gani, M.Si., selaku dosen penguji anggota yang telah meluangkan waktu untuk memberikan saran dan kritik yang membangun demi kesempurnaan skripsi ini;
9. Keluarga Lek Sobirin (Fadli, Deni, Trio, Dya, Gesi), keluarga Beringin (Gizelda, Seno, Iklila, Haris), Arrika, Kurnia, Linda, Fella dan Iklimatul yang selalu memberikan do'a, semangat, dukungan serta membantu dalam segala aspek;
10. Keluarga Pendidikan Fisika angkatan 15 yang selalu memberikan motivasi dan semangat;
11. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu yang telah memberikan kontribusi dan bantuannya demi kelancaran pengerjaan skripsi ini.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhir kata, penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat. Aamiin.

Jember,   April 2019

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

DAFTAR NOTASI

λ = panjang gelombang de Broglie

h = ketetapan Planck $(6{,}63\ x\ 10^{-34} Js)$

$\hbar$ = ketetapan Planck $(\hbar = \frac{h}{2\pi} Js)$

p = momentum partikel

E = energi total sistem atau energi eksitasi

$\psi = psi$ (symbol untuk menyatakan fungsi gelombang)

$\psi(r, \theta, \phi)$ = fungsi gelombang gabungan atom Tritium atau hydrogen

$\psi_{(x,y,z)}$ = fungsi gelombang dalam arah tiga dimensi (sumbu x, y dan z)

μ = massa tereduksi

m, m_1, m_2 = massa partikel, massa partikel pertama, massa partikel kedua

$V\ atau\ V_{(x)}$ = energi potensial partikel sebagai fungsi posisi

$V_{(x,y,z)}$ = energi potensial partikel sebagai fungsi posisi x, y dan z.

K = energi kinetic partikel

∇^2= operator Laplace

$\theta\ dan\ \phi$ = besaran sudut polar dan sudut azimuth

Θ dan Φ = fungsi gelombang polar dan fungsi gelombang azimuth

$R\ atau\ R_{nl}(r)$ = fungsi gelombang radial

${}^1_1H$ = simbol untuk atom Hidrogen

${}^3_1H$ =simbol untuk atom Tritium

e = muatan electron $(1{,}6\ x\ 10^{-19} C)$

ε_0 = permitivitas hampa

$\frac{d}{dx}$ = operator differensial pertama dari suatu fungsi terhadap variable posisi x

$\frac{d}{dy}$ = operator differensial pertama dari suatu fungsi terhadap variable posisi y

$\frac{d}{dz}$ = operator differensial pertama dari suatu fungsi terhadap variable posisi z

$\frac{d^2}{dx^2}$ = operator differensial orde dua dari suatu fungsi terhadap variable posisi x

$\frac{d^2}{dy^2}$ = operator differensial orde dua dari suatu fungsi terhadap variable posisi y

$\frac{d^2}{dz^2}$ = operator differensial orde dua dari suatu fungsi terhadap variable posisi z

$\frac{d^2}{dt^2}$ = operator differensial orde dua dari suatu fungsi terhadap variable waktu

$\frac{\partial}{\partial x}$ = operator diferensial parsial

$P_l(x)$ = Polinomial Legendre

$P_l^m(x)$ = Polinomial Legendre Terasosiasi

$L_n(x)$ = Polinomial Laguerre

$L_n^k(x)$ = Polinomial Laguerre Terasosiasi

N_{lm} = Konstanta normalisasi

δ_{nk} = simbol delta dirac atau delta kroneker

L = momentum Angular

n, l, m = bilangan kuantum utama, azimuth dan magnetik

a_0 = jari-jari bohr atom tritium atau hydrogen

$\int$ = simbol untuk integral

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Era teori klasik yang tejadi sekitar abad-19 masih membicarakan tentang peristiwa fisika yang terjadi pada suatu benda yang masih dapat ditinjau dari ukuran, tetapi sebagian hukum tersebut tidak berlaku pada ukuran benda yang sangat besar atau sangat kecil. Peristiwa fisika yang terjadi dalam teori klasik juga masih sampai pada pengamatan secara makroskopik yang masih menperhitungkan bahwa partikel dan gelombang ialah pokok bahasan yang terpisah satu dengan yang lain, ini dikarenakan teori klasik tidak dapat menjelaskan tentang sifat-sifat atom dan molekul serta interaksinya dengan radiasi elektrodinamika.

Berakhirnya abad ke-19 muncul beberapa peristiwa-peristiwa fisis yang ingin membuktikan sifat *dualisme* gelombang-partikel, diantaranya peristiwa *efek fotolistrik* dan *efek Compton* yang tidak dapat dijelaskan oleh teori klasik. Peristiwa tersebut menjelaskan bahwa sebuah gelombang dapat bersifat sebagai partikel. Salah satu ilmuwan yang bernama Louis de Broglie tahun 1924 mengajukan sebuah hipotesis yang menyatakan bahwa partikel dengan momentum (p) dapat berperilaku sebagai gelombang dengan panjang gelombang (λ) de Broglie yaitu $\lambda = \frac{h}{p}$ dan h sebagai ketetapan planck (Krane, 1992:126). Peristiwa ini merupakan awal munculnya teori baru dalam fisika yaitu teori mekanika kuantum.

Dalam mekanika kuantum keterkaitan antara gelombang dan partikel dapat dijelaskan dengan persamaan yang ditemukan oleh Erwin Schrodinger yang disebut Persamaan Schrodinger. Persamaan Schrodinger merupakan persamaan differensial orde dua yang berdasarkan hukum kekekalan energy, taat azas terhadap hipotesis de Broglie, bernilai tunggal, berhingga dan kontinu. Persamaan Schrodinger akan menghasilkan suatu solusi analitik kompleks berupa fungsi gelombang yang bersifat linier, bernilai tunggal dan berhingga disebut dengan fungsi Schrodinger, yang berarti bahwa tidak ditemukan partikel yang identik dalam waktu yang bersamaan pada dua tempat yang berbeda. Fungsi Schrodinger dapat memberikan informasi tentang perilaku dan karakteristik dari partikel yaitu probabilitas, momentum sudut, harga ekspektasi posisi dan energy rata-rata. Persamaan Schrodinger juga dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu permasalahan yang terjadi pada sistem mikroskopik yaitu atom. Berdasarkan karakteristik umum dari fungsi gelombangnya, persamaan schrodinger dapat dikelompokkan menjadi 2 bentuk, yaitu persamaan schrodinger tidak bergantung waktu dan persamaan schrodinger bergantung waktu. Menurut Beiser (1986), persamaan schrodinger tidak bergantung waktu ialah fungsi gelombang yang hanya dipengaruhi oleh potensial (V) yang bergantung pada posisi (r). Fungsi gelombang yang dipengaruhi oleh suatu potensial yang berubah-ubah setiap waktu (t) disebut dengan persamaan schrodinger bergantung waktu.

Era perkembangan teori mekanika kuantum yang paling berpengaruh salah satunya yaitu gejala atom hydrogen. Pada tabel periodik, hydrogen merupakan unsur yang paling ringan dan banyak terdapat di alam yang dinyatakan dengan symbol ${}_1^1H$ serta mempunyai nomor atom 1. Atom Tritium $({}_1^3H)$ dan Deuterium $({}_1^2H)$ merupakan satu keluarga dengan Hidrogen $({}_1^1H)$, tetapi ketiga unsur ini memiliki sifat dan karakteristik yang berbeda satu sama lain. Atom Tritium $({}_1^3H)$ merupakan salah satu isotope Hydrogen yang mempunyai neutron dalam nucleus (inti) dan sebuah electron yang mengelilingi nucleus (inti) (Supriadi *et al*, 2018). Triton merupakan sebutan dari inti Tritium $({}_1^3H)$ yang mengandung satu proton dan dua neutron.

Atom Tritium $({}_1^3H)$ merupakan radioisotop yang memiliki waktu paruh 12,323 tahun (Tanabe, 2017: 28). Hal ini diperkuat dengan penelitian dari Prastowo *et al* (2018) yang menyatakan bahwa atom Tritium merupakan bahan radioaktif yang memiliki waktu paruh 12,3 tahun dan termasuk dalam atom yang relative aman. Menurut Krane (2011), massa dari atom Tritium dibandingkan dengan atom hydrogen yaitu lebih besar atom Tritium sebesar 3,016049 u. Keberadaan di alam atom Tritium tidak sebanyak atom Hidrogen, sehingga dalam pengaplikasiannya atom Tritium dapat digunakan sebagai bahan untuk pembuatan baterai nuklir (Prastowo *et al*, 2018). Atom Tritium juga dapat dimanfaatkan dalam campuran pembuatan jam tangan militer dan pilot sebagai sumber cahaya.

Selain itu, menurut Supriadi *et al* (2018) atom Tritium dapat diaplikasikan pada baterai *betavoltaics* (*Nano Tritium Battery*).

Persamaan Schrodinger atom Tritium $({}^{3}_{1}H)$ menggunakan persamaan Schrodinger koordinat bola dengan solusi berupa fungsi gelombang yang hanya menggandung tiga bilangan kuantum yaitu bilangan kuantum utama (n), bilangan kuatum Azimuth (l) dan bilangan kuantum magnetic (m). Bilangan kuantum (n, l, m) merupakan komponen fungsi gelombang yang dapat digunakan untuk nama dari tiap keadaan dari suatu atom. Sedangkan untuk bilangan kuantum keempat yaitu bilangan kuantum spin (s) tidak diperhitungkan dengan alasan keterbatasan dalam pengerjaan, menginggat fungsi gelombang yang sangat banyak apabila bilangan kuantum tersebut diperhitungkan. Fungsi gelombang yang dibahas dibeberapa buku referensi hampir semuanya masih membahas tentang fungsi gelombang atom Hidrogen $({}^{1}_{1}H)$. Namun, tidak hanya atom Hidrogen $({}^{1}_{1}H)$ yang secara matematis dapat diselesaiakan dengan menggunakan persamaan Schrodinger, tetapi atom Tritium $({}^{3}_{1}H)$ yang merupakan salah satu isotope Hidrogen $({}^{1}_{1}H)$ juga dapat diselesaikan dengan persamaan Schrodinger.

Beberapa penelitian sebelumnya mengenai fungsi gelombang atom hidrogenik antara lain penelitian yang dilakukan oleh Prastowo, *et al* (2018) tentang "*The Stark effect on the Spectrum Energy of Tritium in First Excited State with Relativistic Condicition*" menyatakan bahwa atom tritium memiliki perhitungan tingkat energi dan fungsi gelombang yang mirip dengan atom Hidrogen karena merupakan salah satu keluarga dari atom Hidrogen. Ganesan dan Balaji (2008) dalam penelitiannya tentang " *Schrodinger Equation for the Hidrogen atom-A Simplifed Treatment*" mengatakan bahwa untuk menyelesaikan suatu persamaan Schrodinger pada atom electron tunggal atau atom mirip hydrogen yaitu dengan mengubah koordinat kartesius menjadi koordinat polar dan memerlukan pemahaman tentang polynomial Legendre dan Laguerre. Diperkuat dengan penelitian yang dilakukan oleh Hermanto (2016) tentang "Fungsi Gelombang Atom Deuterium dengan Pendekatan Persamaan Schrodinger" menyatakan bahwa penyelesaian persamaan Schrodinger pada atom berelektron tunggal dapat memisahkan menjadi persamaan yang bergantung jari-jari (r) dan persamaan yang bergantung sudut (θ, ϕ). Penelitian yang dilakukan oleh Supriyadi, et al (2006) tentang "Solusi Numerik Persamaan Schrodinger Atom Hidrogen dengan Metode Elemen Hingga" mengatakan bahwa perhitungan solusi numerik persamaan Schrodinger atom Hidrogen dengan metode elemen hingga mendapatkan hasil yang cukup baik bila dibandingkan dengan solusi analitik dan grafik fungsi gelombang yang diperoleh sesuai dengan analitik.

Kenyataannya bahwa permasalahan atom hydrogen dapat diselesaikan dengan menggunakan persamaan Schrodinger dalam koordinat bola, hal ini membuat peneliti tertarik untuk melakukan penelitian mengenai fungsi gelombang pada salah satu keluarga Hidrogen yaitu Atom Tritium dan nilai energi dari atom Tritium. Oleh karena itu, dilakukan penelitian yang berjudul "Fungsi Gelombang Atom Tritium $({}^3_1H)$ dengan Pendekatan Persamaan Schrodinger ".

1.2 Rumusan Masalah

Bedasarkan latar belakang yang telah diuraikan maka dapat dirumuskan beberapa permasalahan, antara lain:

a. Bagaimana fungsi gelombang atom Tritium dengan menggunakan pendekatan persamaan Schrodinger pada bilangan kuantum $(n \leq 3)$?
b. Bagaimana nilai energi dari Atom Tritium dengan menggunakan model Atom Bohr ?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan permasalahan di atas, maka tujuan dari penelitian ini, antara lain:

a. Untuk menentukan fungsi gelombang atom Tritium dengan menggunakan pendekatan persamaan Schrodinger pada bilangan kuantum $(n \leq 3)$.
b. Untuk menentukan nilai energi dari Atom Tritium dengan menggunakan model Atom Bohr.

1.4 Batasan Masalah

Agar penulis dalam penelitian ini lebih terfokus dan dapat menjawab permasalahan yang telah diuraikan di atas, maka batasan-batasan penelitian ini, sebagai berikut:

a. Persamaan Schrodinger yang digunakan ialah persamaan Schrodinger tidak bergantung waktu dalam koordinat bola.
b. Fungsi gelombang Atom Tritium memenuhi syarat normalisasi.
c. Fungsi gelombang yang diperoleh mengabaikan efek spin.
d. Bilangan kuantum yang digunakan adalah $(n = 1, 2, 3)$.
e. Atom yang digunakan adalah atom Tritium $({}^3_1H)$

1.5 Manfaat Penelitian

Berdasarkan uraian tujuan penelitian diatas, maka didapatkan bahwa manfaat dari penelitian ini, antara lain:

a. Bagi pembaca, dapat dijadikan sebagai sumber informasi, referensi, dan acuan dalam mempelajari fisika kuantum tentang fungsi gelombang dan energi atom Tritium dalam pembelajaran saat perkuliahan maupun penelitian yang lebih lanjut dengan tema serupa.
b. Bagi peneliti lain, dapat menambah pengetahuan, pengalaman dan wawasan tentang fisika kuantum khususnya yang mengkaji tentang fungsi gelombang dan energi pada Atom Tritium.
c. Bagi lembaga, dapat memberikan tambahan bahan referensi dalam pembelajaran di perkuliahan pokok bahasan atom berelektron tunggal atau atom hidrogenik.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Schrodinger

Persamaan Schrodinger adalah suatu persamaan differensial terhadap ruang dan waktu bagi fungsi gelombang yang hendak dicari dan menggambarkan partikel mikroskopik yang bersangkutan. Fungsi gelombang tidak hanya memenuhi syarat persamaan schrodinger saja namun juga harus memenuhi syarat batas-batas lain. Sebagai akibatnya hanya fungsi gelombang tertentu saja yang memenuhi syarat sebagai penyelesaian persamaan Schrodinger, fungsi-fungsi tersebut disebut dengan fungsi operator Hamilton yang muncul dalam persamaan Schrodinger (Bauqini, 1995: 1).

Persamaan Schrodinger mampu menjelaskan beberapa kasus fisika yang membingungkan seperti: menentukan tingkatan energy pada atom (tanpa melihat gagasan Bohr), spectrum atom hydrogen, dan kasus-kasus lainnya. Scrodinger menganggap bahwa partikel sebagai grup gelombang yang berdimensi kecil dan menjalar ke segala arah (sesuai dengan gagasan de Broglie) (Sugiyono, 2016: 186).

2.1.1 Persamaan Schrodinger tidak bergantung waktu

Pemecahan persamaan Schrodinger harus memenuhi dan patuh pada 3 syarat sebagai berikut (i) memenuhi hukum kekekalan energy; (iii) taat azas terhadap hipotesa de Broglie; (iii) persamaan yang dihasilkan bernilai tunggal, berhingga dan kontinu; (Krane, 2011: 140). Ketiga syarat tersebut, sebagai berikut:

a. Memenuhi hukum Kekekalan Energi

Hukum kekekalan energi adalah jumlah total energi yaitu jumlah energi kinetic ditambah energi potensial dari suatu partikel yang bersifat kekal. Persamaan Schrodinger harus memenuhi hukum kekekalan energi dari suatu partikel yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$K + V = E$$

Dimana E: Energi total, K: energi kinetik dan V: energi potensial. Dalam keadaan tidak relativistik energi total dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{p^2}{2m} + V = E \tag{2.1}$$

p sebagai momentum partikel dan m menyatakan massa suatu partikel. Pada ruas kiri persamaan (2.1) tersebut, suku pertama menyatakan energy kinetic dan suku kedua menyatakan energy potensial. Secara umum, energy potensial dapat didefinisikan sebagai energy yang dimiliki oleh benda karena kedudukannya. Sedangkan ruas kanan menyatakan suatu tetapan yang disebut energy total.

b. Taat Azas terhadap hipotesa de Broglie

Bentuk persamaan differensial apapun harus taat azas terhadap hipotesa de Broglie. Untuk menyelesaikan persmaaan secara matematis bagi sebuah partikel dengan momentum p, maka pemecahannya harus berbentuk sebuah fungsi gelombang dengan panjang gelombang λ yang sama dengan h/p, variabel h menyatakan ketetapan planck yang besarnya $6{,}63\, x\, 10^{-34} Js$. Persamaan (2.2) dapat memperoleh besar panjang gelombang de Broglie yaitu:

$$\lambda = \frac{h}{p} \tag{2.2}$$

c. Bernilai tunggal, berhingga dan kontinu

Sesuai dengan pengertian matematis persamaan Schrodinger haruslah "berperilaku baik". Sehingga pemecahan persamaan Schrodinger harus memberikan suatu informasi tentang probabilitas untuk menemukan partikelnya. Walaupun probabilitas dapat berubah secara kontinu dan partikelnya menghilang secara tiba-tiba dari suatu titik dan muncul kembali pada titik berikutnya, tetapi fungsinya haruslah bernilai tunggal dan berhingga artinya tidak boleh ada dua probabilitas untuk menemukan partikel di satu titik yang sama. Sifat gelombang yang linier dan berkelakuan baik adalah fungsi gelombang yang harus memiliki sifat superposisi gelombang (Krane, 1992: 172). Sehingga sesuai dengan persamaan (2.2) dan (2.1) dimana $p = \hbar k$, maka energy kinetic dari gelombang de Broglie partikel bebas dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$K = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \tag{2.3}$$

Persamaan Schrodinger dapat dibentuk dengan mengambil turunan kedua dari perasamaan $\psi(x,t) = A\sin(\omega t - kx) + B\cos(\omega t - kx)$ terhadap x, sebagai berikut:

$$\frac{d^2\psi(x,t)}{dx^2} = -k^2[A\sin(\omega t - kx) + B\cos(\omega t - kx)]$$

$$\frac{d^2\psi(x,t)}{dx^2} = -k^2\psi(x,t) \tag{2.4}$$

Variabel ψ merupakan fungsi gelombang Schrodinger, A dan B merupakan konstanta normalisasi, untuk ω ialah kecepatan sudut yang besarnya sama dengan $2\pi f$ sedangkan k menyatakan konstanta gelombang yang dapat dihitung melalui $\frac{2\pi}{\lambda}$. Dari persamaan (2.3) dapat diperoleh harga k^2 yaitu:

$$k^2 = \frac{2m\,K}{\hbar^2}\text{, dengan } K = E - V_{(x)}$$

$$k^2 = \frac{2m\,(E - V_{(x)})}{\hbar^2} \tag{2.5}$$

Untuk $V_{(x)}$ menyatakan energi potensial partikel sebagai fungsi posisi. Bentuk persamaan umum untuk kasus potensial tidak bergantung waktu di peroleh dengan $(x, t = 0) = \psi(x)$ialah:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\left[\frac{2m\,(E - V_{(x)})}{\hbar^2}\right]\psi(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + (E - V_{(x)})\psi(x) = 0 \tag{2.6}$$

Persamaan (2.6) dikenal dengan persamaan Schrodinger tidak bergantung waktu dalam satu dimensi. Apabila partikel yang bergerak dalam arah tiga dimensi, dapat dituliskan pada persamaan (2.7) sebagai berikut:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi_{(x,y,z)} + (E - V_{(x,y,z)})\psi_{(x,y,z)} = 0 \tag{2.7}$$

Persamaan (2.7) dapat dituliskan dengan menggunakan transformasi Laplace akan menjadi:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi_{(x,y,z)} + (E - V_{(x,y,z)})\psi_{(x,y,z)} = 0 \tag{2.8}$$

Dengan $V_{(x,y,z)}$= energi potensial partikel sebagai posisi x, y dan z dan ∇^2= operator Laplace yang bergantung pada koordinat yang digunakan untuk memecahkan persamaan Schrodinger. Dan operator laplace ∇^2 untuk koordinat bola tiga dimensi dapat ditulis:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

(Krane, 1992).

2.1.2 Persamaan Schrodinger Atom Hidrogen

Atom Hidrogen merupakan atom berelektron tunggal atau hidrogenik yang mempunyai satu proton sebagai inti dan satu electron yang mengelilinginya. Hidrogen mempunyai massa electron yang lebih kecil dibandingkan dengan massa proton yaitu $m_p = 1836\, m_e$. Persamaan Schrodinger atom berelektron tunggal dapat diselesaikan dengan menganggap bahwa atom memiliki simestri bola, sehingga harus disajikan dalam bentuk koordinat bola (tiga dimensi). Persamaan Schrodinger dalam bentuk tiga dimensi sebagai berikut:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) + V(x, y, z)\psi = E\psi$$

Dengan ψ sebagai fungsi x, y dan z. Dalam memecahkan persamaan diferensial parsial yang tidak lazim seperti ini dapat dengan memisahkan variable. V sebagai interaksi energy antara inti atom dan electron yang diberikan dari formulasi coulomb, sehingga mendapatkan persamaan: $V = -\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\left(\frac{e^2}{r}\right)$ dengan $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, sehingga mendapatkan persamaan:

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} \tag{2.9}$$

Karena $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, maka persamaan (2.9) akan menjadi:

$$V(r) = -\frac{ke^2}{r} \tag{2.10}$$

$$E = \frac{p^2}{2m_e} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} \tag{2.11}$$

Dimana e adalah muatan elektron sebesar $1{,}6\ x\ 10^{-19}C$ dan ε_0 ialah permitivitas ruang hampa. Maka persamaan Schrodinger atom Hidrogen yaitu:

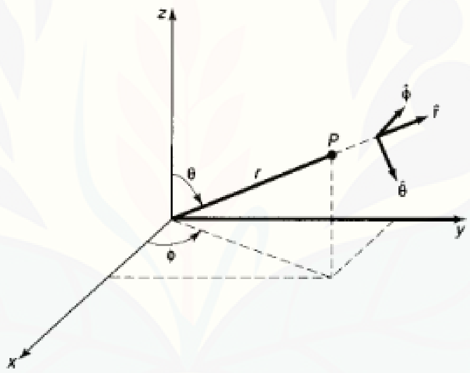
$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\right]\psi_{(\bar{r})} = E\psi(\bar{r}) \tag{2.12}$$

Dengan ∇^2 dalam koordinat bola sebagai operator laplace, sebagai berikut:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \quad (2.13)$$

Potensial dalam bentuk persamaan (2.12) ini tidak memberikan persamaan terpisahkan, namun jika dalam system koordinat bola (r, θ, ϕ) maka dapat memisahkan variabel-variabelnya dan menemukan himpunan pemecahannya. Variable r adalah persamaan radial, θ adalah persamaan polar dan ϕ adalah persamaan azimuth. Jika variabel-variabel system koordinat bola digambarkan pada Gambar (2.1), maka bentuk persamaan dengan menggunakan transformasi laplace menjadi:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right] + V_{(r,\theta,\phi)}\psi = E\psi \quad (2.14)$$



Gambar (2.1) Koordinat bola: jari-jari r, sudut polar θ dan sudut azimuth ϕ.

Atom hydrogen memiliki system dua partikel dengan gaya sentral, maka persamaan (2.14) dapat dituliskan:

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r_c^2}\left[\frac{\partial}{\partial r_c}(r_c^2\frac{\partial}{\partial r_c}) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]\psi_{(r,\theta,\phi)} + V_{(r,\theta,\phi)}\psi = E\psi \quad (2.15)$$

Dengan r_c adalah posisi pusat massa sistem yang dinyatakan sebagai berikut:

$$r_c = \frac{(r_1 m_1 + r_2 m_2)}{m_1 + m_2} \quad (2.16)$$

Koordinat relatif r dapat dituliskan:

$$r = r_1 - r_2$$

Transformasi kebalikannya dinyatakan sebagai berikut:

$$r_1 = r_c + \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \qquad r_2 = r_c - \frac{m_1}{m_1 + m_2} r$$

Persamaan gerak dua benda m_1 dan m_2 dapat dijelaskan dalam suku-suku koordinat pusat massa (r_c) dan koordinat relatif (r). Gerak dua benda dalam sistem sesuai dengan hukum Newton II dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$m_1 r_1 = F_1^e + F_{12}^i \tag{2.17}$$

$$m_2 r_2 = F_2^e + F_{21}^i \tag{2.18}$$

Dengan F_1^e dan F_2^e merupakan gaya luar yang bekerja pada partikel m_1 dan m_2, F_{12}^i sebagai gaya internal yang bekerja pada benda m_1 karena m_2 dan F_{21}^i sebagai gaya internal yang bekerja pada benda m_2 karena m_1. Kalikan persamaan (2.17) dengan m_2 dan persamaan (2.18) dengan m_1, kemudian hasil dari keduanya dikurangi akan mendapatkan persamaan sebagai berikut:

$$m_1 m_2(r_1 - r_2) = m_2 F_1^e - m_1 F_2^e + m_2 F_{12}^i - m_1 F_{21}^i \tag{2.19}$$

Sesuai dengan hukum Newton III, gaya f didefinisikan sebagai $F_{12}^i = -F_{21}^i = f$. Maka persamaan (2.19) akan menjadi:

$$m_1 m_2(r_1 - r_2) = m_1 m_2 \left(\frac{F_1^e}{m_1} - \frac{F_2^e}{m_2}\right) + (m_1 + m_2) f \tag{2.20}$$

Apabila $F_1^e = F_2^e = 0$, maka persamaan (2.20) dapat dituliskan:

$$m_1 m_2(r_1 - r_2) = (m_1 + m_2) f \tag{2.21}$$

Dan μ merupakan massa tereduksi dari electron dan inti atom yang terdiri atas proton dan neutron dinyatakan sebagai berikut:

$$\mu = \frac{m_1 . m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{atau} \quad \mu = \frac{m_e . m_p}{m_e + m_p} \tag{2.22}$$

Dengan $\psi = \psi(r, \theta, \phi)$. Maka solusi bagi persamaan (2.15) dengan melakukan pemecahan dan pemfaktoran variable yang terpisahkan akan menjadi sebagai berikut:

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r) \mathrm{Y}(\theta, \phi) \tag{2.23}$$

Dimana, $\mathrm{Y}(\theta, \phi)$ merupakan $\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ disebut dengan fungsi gelombang angular.

(Krane, 1992: 267-268).

Subsitusikan persamaan (2.6) ke dalam persamaan (2.14), akan diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\left[\frac{1}{r_c^2}\frac{\partial}{\partial r_c}\left(r_c^2\frac{\partial R}{\partial r_c}Y\right)+\frac{1}{r_c^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}R\right)+\frac{1}{r_c^2 sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}R\right)\right]+$$

$$\frac{2\mu}{\hbar^2}(E-V)RY=0 \qquad (2.24)$$

Persamaan (2.24) dibagi dengan RY lalu dikalikan dengan r_c^2, maka persamaannya akan menjadi:

$$\left[\left[\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r_c}\left(r_c^2\frac{\partial R}{\partial r_c}\right)+\frac{2\mu r_c^2}{\hbar^2}(E-V)\right]+\left[\frac{1}{Y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{Ysin^2\theta}\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\right)\right]\right]=0 \qquad (2.25)$$

(Griffith, 2005: 133).

Pada persamaan (2.25) terdapat dua suku yang mana masing-masing suku harus konstan. suku pertama hanya bergantung pada arah radial (R), sedangkan pada suku kedua hanya bergantung pada arah angular (Y). Persamaan (2.25) mempunyai nilai konstanta pemisah sebesar $l(l+1)$, maka dapat dipisahkan menjadi dua bentuk yang akan ditunjukkan pada persamaan (2.26) dan persamaan (2.27):

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r_c}\left(r_c^2\frac{\partial R}{\partial r_c}\right)+\frac{2\mu r_c^2}{\hbar^2}(E-V)=l(l+1) \qquad (2.26)$$

$$\frac{1}{Y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{Ysin^2\theta}\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\right)=-l(l+1) \qquad (2.27)$$

Persamaan (2.27) merupakan fungsi gelombang angular yang terdiri atas sudut polar dan sudut azimuth. Sehingga persamaannya dapat dituliskan, sebagai berikut:

$$\mathrm{Y}(\theta,\phi)=\Theta(\theta)\Phi(\phi) \qquad (2.28)$$

Subsitusikan persamaan (2.28) ke persamaan (2.27) akan menghasilkan persamaan:

$$\frac{\Phi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\frac{\Theta}{sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}\right)=-\Theta\Phi l(l+1) \qquad (2.29)$$

Lalu persamaan (2.29) dikalikan dengan $\frac{sin^2\theta}{\Theta\Phi}$, akan menjadi:

$$\left(\frac{1}{\Theta}sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+l(l+1)\,sin^2\theta\right)+\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}=0 \qquad (2.30)$$

Persamaan (2.30) mempunyai 2 suku dimana terdapat suku yang bergantung pada sudut polar (θ) dan suku yang bergantung dengan sudut azimuth (ϕ). Lalu pisahkan kedua suku tersebut dan tetapkan masing-masing bagian sama dengan konstanta m^2. Ini berfungsi agar solusi dari persamaan yang akan diberikan mempunyai makna fisis.

$$\left(\frac{1}{\Theta} sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right) + l(l+1)\, sin^2\theta\right) = -\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} = m^2 \tag{2.31}$$

Untuk suku bagian yang pertama, yaitu:

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} = -m^2$$

Atau

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + m^2\Phi = 0 \tag{2.32}$$

Suku kedua pada persamaan (2.31) merupakan suku yang bergantung pada sudut azimuth. Sedangkan suku pertama bergantung pada sudut polar, maka persamaannya sebagai berikut:

$$\frac{sin\theta}{\Theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right) + l(l+1)sin^2\theta = m^2 \tag{2.33}$$

Kalikan persamaan polar (2.33) dengan $\frac{\Theta}{sin^2\theta}$, maka persamaan akan menjadi:

$$\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{sin^2\theta}\right)\Theta = 0 \tag{2.34}$$

(Purwanto, 2006: 125-126).

2.1.3 Persamaan Schrodinger Atom Tritium (^3_1H)

Persamaan Schrodinger atom Tritium sama seperti persamaan Schrodinger atom berelektron tunggal yaitu atom Hidrogen dikarenakan mempunyai nila $Z = 1$. Persamaan Schrodinger atom Tritium ini terdapat 3 persamaan yaitu persamaan azimuth pada persamaan (2.32), persamaan polar pada persamaan (2.33) dan persamaan radial pada persamaan (2.26).

2.2 Solusi Fungsi Persamaan Schrodinger Atom Hidrogen

2.2.1 Solusi Persamaan Azimut (ϕ)

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -m^2 \tag{2.35}$$

Persamaan (2.35) merupakan persamaan Azimut yang menggambarkan rotasi di sekitar sumbu z dengan batas sudut rotasi dari nol sampai 2π dan periodisitasnya (berulang dengan periode 2π). Konstanta negative $(-m^2)$ ini untuk memberikan solusi berupa fungsi sinusoidal yang periodic. Apabila konstanta yang dipilih yakni positif (m^2) maka akan memberikan solusi berupa fungsi eksponensial, namun tidak menceritakan kondisi fisis yang sesungguhnya.

Keunikan Φ di setiap ϕ, maka solusiya sebagai berikut:

$$\Phi(\phi) = \Phi(2\pi + \phi) \text{ dengan } 0 \leq \theta < 2\pi \tag{2.36}$$

Pada persamaan (2.36) berarti bahwa kuantitas fisis pada sudut ϕ akan sama dengan sudut $2\pi + \phi$ atau $2n\pi + \phi$, dimana nilai n merupakan bilangan bulat. Maka di peroleh persamaan (2.37) berikut:

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + m^2\Phi = 0 \tag{2.37}$$

Solusi dari persamaan (2.37) akan diperoleh apabila menggunakan permisalan $\frac{d}{d\phi} = D$, sebagai berikut:

$$D^2\Phi + m^2\Phi = 0$$

$$D = \pm im$$

$$\frac{d}{d\phi} = \pm im$$

Kedua ruas dikalikan dengan Φ, akan diperoleh :

$$\frac{d\Phi}{\Phi} = \pm imd\phi$$

Dengan mengintegralkan kedua ruas akan diperoleh solusi persamaan (2.38) sebagai berikut:

$$\Phi = \Phi_0 e^{\pm im\phi} \tag{2.38}$$

Dimana memiliki hubungan dengan persamaan (2.36),yaitu:

$$\Phi(\phi) = \Phi(2\pi + \phi)$$

$$e^{-im(\phi)} = e^{-im(2\pi+\phi)} = e^{-im(2\pi)} = 1$$

Dengan setiap m merupakan bilangan bulat yakni $m = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$ (Griffiths, 1995:125).

Apabila digunakan suatu pemisalan $\Phi_0 = A$, dimana A menyatakan amplitudo gelombang yang besarnya ditentukan dengan menggunakan syarat Normalisasi. Sehingga di penuhi oleh konstanta $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, dari persamaan (2.34) diperoleh solusi persamaan Azimuth sebagai berikut:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\pm im\phi} \tag{2.39}$$

Bilangan bulat m merupakan bilangan kuantum magnetic.

2.2.2 Solusi Persamaan Polar (θ)

$$\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{sin^2\theta}\right)\Theta = 0 \tag{2.40}$$

Persamaan (2.40) dengan konstantan $l(l+1)$ dan m^2adalah persamaan diferensial Legendre Terasosiasi. Solusi penyelesaian persamaan ini dapat menggunakan metode Frobenius dan deret berhingga ialah polinom Legendre terasosiasi. Apabila konstanta yang dipilih dalam persaman (2.40) bukan $\pm l(l+1)$, maka solusi penyelesaiannya akan berupa deret tak berhingga. Persamaan (2.40) dapat diselesaikan dengan menggunakan polynomial Lagendre $P_l^m(\cos\theta)$, yakni:

$$\Theta(\theta) = \Theta_{lm}(\theta) = N_{lm}P_l^m(\cos\theta) \tag{2.41}$$

Dimana N_{lm} adalah konstanta normalisasi

$$(\Theta_{lm}, \Theta_{l'm'} = \mathrm{N}_{lm}\, N_{l'm'} \int_0^\pi P_l^m\,(\cos\theta)\, P_{l'}^{m'}(\cos\theta)\sin\theta\; d\theta = \delta_{ll'}\delta_{mm'} = 1$$

Menggunakan sifat ortogonalitas $P_l^m(\cos\theta)$, yaitu:

$$\int_0^\pi P_l^m\,(\cos\theta)\, P_{l'}^{m'}(\cos\theta)\sin\theta\; d\theta = \frac{2(l+|m|)!}{(2l+1)(l-|m|)!}\delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

Akan didapatkan :

$$\mathrm{N}_{lm} * N_{l'm'} \int_0^\pi P_l^m\,(\cos\theta)\, P_{l'}^{m'}(\cos\theta)\sin\theta\;\; d\theta = 1$$

$$(\mathrm{N}_{lm})^2\left[\frac{2}{2l+1}\frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}\right] = 1$$

$$\mathrm{N}_{lm} = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{2(l+|m|)!}} \tag{2.42}$$

Untuk mendapatkan solusi persamaan Schrodinger polar, maka subsitusikan persamaan (2.42) ke persamaan (2.41) akan diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\Theta_{lm}(\theta) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{2(l+|m|)!}}P_l^m(\cos\theta) \tag{2.43}$$

Dengan bentuk persamaan eksplisit polinom $P_l^m(\cos\theta)$ yang diperoleh dari rumus Rodigues sebagai berikut:

$$P_l^m(\cos\theta) = \frac{1}{2^l l!}(1-cos^2\theta)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{l+|m|}}{dcos^{l+|m|}\theta}(cos^2\theta - 1)^l \qquad (2.44)$$

Persamaan (2.43) yang merupakan solusi persamaan Schrodinger polar dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\Theta_{lm}(\theta) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{2(l+|m|)!}}\left[\frac{1}{2^l l!}(1-cos^2\theta)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{l+|m|}}{dcos^{l+|m|}\theta}(cos^2\theta-1)^l\right] \qquad (2.45)$$

Untuk l tertentu akan mendapatkan nilai m, yaitu:

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm l$$

Dengan bilangan bulat l disebut bilangan kuantum orbital dan m disebut bilangan kuantum magnetic (Purwanto, 2006: 159-160).

2.2.3 Solusi Persamaan Radial

Persamaan radial pada persamaan (2.22) dapat dituliskan kembali sebagai berikut:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r_c}\left(r_c^2 \frac{\partial R}{\partial r_c}\right) + \frac{2\mu r_c^2}{\hbar^2}(E - V) = l(l+1)$$

Atau

$$\frac{\partial}{\partial r_c}\left(r_c^2 \frac{\partial R}{\partial r_c}\right) + \frac{2\mu r_c^2}{\hbar^2}(E - V)R = l(l+1)R \qquad (2.46)$$

Subsitusikan harga $V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_c}$ ke dalam persamaan (2.46) akan menjadi:

$$\frac{\partial}{\partial r_c}\left(r_c^2 \frac{\partial R}{\partial r_c}\right) + \frac{2\mu r_c^2}{\hbar^2}\left(E + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_c}\right)R = l(l+1)R \qquad (2.47)$$

Atau persamaan (2.47) dapat juga berbentuk, sebagai berikut:

$$\frac{1}{r_c^2}\frac{\partial}{\partial r_c}\left(r_c^2 \frac{\partial R}{\partial r_c}\right) + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_c} - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r_c^2}\right)R = 0 \qquad (2.48)$$

Persamaan radial (2.48) menunjukkan adanya nilai atau energy eigen dan nilai energy akan berharga negative karena electron berada dalam keadaan terikat dengan inti atom. Maka, energy eigen pada keadaan terikat ialah $E = -|E|$. Untuk menyelesaikan persoalan fungsi gelombang radial menggunakan permisalan variabel:

$$\rho = \left(\frac{8\mu|E|}{\hbar^2}\right)^{1/2} r_c \qquad (2.49)$$

$$d\rho = \left(\frac{8\mu|E|}{\hbar^2}\right)^{1/2} dr_c \qquad (2.50)$$

Subsitusikan persamaan (2.49) dan (2.50) ke dalam persamaan (2.48) akan menjadi persamaan (2.51):

$$\frac{1}{\left(\frac{8\mu|E|}{\hbar^2}\right)^{-1}\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{dR}{d\rho}\right)+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{8\mu|E|}{\hbar^2}\right)^{(-1/2)}\rho}-\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu\left(\frac{8\mu|E|}{\hbar^2}\right)^{(-1)}\rho^2}\right)R=0 \quad (2.51)$$

Pada persamaan (2.51) setiap sukunya akan dikalikan dengan $\left(\frac{8\mu|E|}{\hbar^2}\right)^{(-1)}$ akan diperoleh:

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{dR}{d\rho}\right)+\left(\frac{E}{4|E|}+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{1}{\rho}\left(\frac{8\mu|E|}{\hbar^2}\right)^{(-1/2)}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right)R=0 \quad (2.52)$$

Untuk kasus energy terikat yang mana $E=-|E|$, maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{dR}{d\rho}\right)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_{0\hbar}}\frac{1}{\rho}[8\mu|E|]^{(-1/2)}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right)R=0 \quad (2.53)$$

Dan disederhanakan menjadi berikut:

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{dR}{d\rho}\right)-\frac{l(l+1)}{\rho^2}R+\left(\frac{A}{P}-\frac{1}{4}\right)R=0 \quad (2.54)$$

Atau

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}R+\left(\frac{A}{\rho}-\frac{1}{4}\right)R=0 \quad (2.55)$$

Dimana harga A ialah

$$A=\frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0\hbar}\left(\frac{\mu}{8|E|}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.56)$$

Pada daerah $\rho\to\infty$, persamaan (2.55) akan menjadi:

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}-\frac{1}{4}R=0 \quad (2.57)$$

Sehingga solusi persamaan (2.57) ialah

$$R(\rho)\approx e^{-\frac{\rho}{2}}$$

Untuk daerah asal, R dapat ditulis sebagai berikut:

$$R\ (\rho)=\frac{R(\rho)}{\rho} \quad (2.58)$$

Dengan $R\ (\rho)=U$

Subsitusikan persamaan (2.58) ke dalam suku pertama persamaan (2.55), dan akan diperoleh persamaan (2.59) berikut:

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left\{\rho^2\frac{d}{d\rho}\left(\frac{U}{\rho}\right)\right\} = \frac{d^2U}{\rho d\rho^2} \tag{2.59}$$

Sehingga persamaan (2.55) yang tereduksi akan menjadi persamaan differensial untuk U, sebagai berikut:

$$\frac{R}{U}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{U^2}{R^2}.\frac{dR}{d\rho}\right) + - \frac{l(l+1)}{\rho^2}U + \left(\frac{A}{P} - \frac{1}{4}\right)U = 0$$

$$\frac{d^2U}{d\rho^2} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}U + \left(\frac{A}{\rho} - \frac{1}{4}\right)U = 0 \tag{2.60}$$

Kalikan persamaan (2.60) dengan ρ^2 dan hasil yang diambil ialah limit mendekati pusat koordinat, yaitu:

$$\lim_{\rho\to 0}\left\{\rho^2\frac{d^2U}{d\rho^2} - l(l+1)U + A\rho U - \frac{1}{4}\rho^2 U\right\} = 0$$

$$\left(\rho^2\frac{d^2U}{d\rho^2}\right) - l(l+1)U = 0 \tag{2.61}$$

Dengan suku yang paling dominan dalam persamaan (2.61) ialah

$$\left(\frac{d^2U}{d\rho^2}\right) - \frac{l(l+1)}{\rho^2}U = 0 \tag{2.62}$$

Untuk solusi persamaan (2.62) differensial orde dua (suku yang paling dominan) adalah:

$$\mathrm{U} = \rho^{l+1}$$

Sehingga akan diperoleh:

$$R = \frac{U}{\rho} = \frac{\rho^{l+1}}{\rho} = \rho^l \tag{2.63}$$

Dengan mempertimbangkan solusi persamaan di daerah di atas, pada umumnya solusi didapatkan dari perkalian antara solusi titik asal, posisi jauh sekali, dan fungsi umum terhadap jarak ialah

$$R(\rho) = \rho^l e^{-\frac{p}{2}}L(\rho) \tag{2.64}$$

Perkalian antara persamaan (2.64) dengan (2.59) dan L merupakan konstanta Laguerre yang bergantung pada harga ρ ialah solusi umum dari penggabungan persamaan (2.64) dan (2.59). Persamaan (2.64) diselesaikan dengan menggunakan polynomial Laguerre dari persamaan (2.60)

$$\frac{d^2U}{d\rho^2} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}U + \left(\frac{A}{\rho} - \frac{1}{4}\right)U = 0$$

Keterangan $U = p^{l+1}e^{-\frac{\rho}{2}}L(\rho)$

Maka untuk suku pertama akan menjadi:

$$\frac{d^2U}{d\rho^2} = L(\rho)\left[l(l+1)p^{l-1}e^{-\frac{\rho}{2}} - (l+1)p^{l}e^{-\frac{\rho}{2}} + \frac{1}{4}p^{l+1}e^{-\frac{\rho}{2}}\right] +$$

$$\frac{\partial L(\rho)}{\partial \rho}\left[2(l+1)p^{l}e^{-\frac{\rho}{2}} - p^{l+1}e^{-\frac{\rho}{2}}\right] + \frac{\partial^2 L(\rho)}{\partial \rho^2}\left[p^{l+1}e^{-\frac{\rho}{2}}\right] \tag{2.65}$$

Persamaan (2.60) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$L(\rho)\left[l(l+1)p^{l-1}e^{-\frac{\rho}{2}} - (l+1)p^{l}e^{-\frac{\rho}{2}} + \frac{1}{4}p^{l+1}e^{-\frac{\rho}{2}}\right] + \frac{\partial L(\rho)}{\partial \rho}$$

$$\left[2l(l+1)p^{l}e^{-\frac{\rho}{2}} - p^{l+1}e^{-\frac{\rho}{2}}\right] + \frac{\partial^2 L(\rho)}{\partial \rho^2}\left[p^{l+1}e^{-\frac{\rho}{2}}\right] - \frac{l(l+1)}{\rho^2}U + \left(\frac{A}{\rho} - \frac{1}{4}\right)U = 0 \tag{2.66}$$

Persamaan di atas kalikan dengan $p^{-l}e^{\frac{\rho}{2}}$, maka akan menjadi persamaan yang lebih sederhana sebagai berikut:

$$\rho\frac{\partial^2 L(\rho)}{\partial \rho^2} + [2l(l+1) - \rho]\frac{\partial L}{\rho} + [A - (l+1)]L(\rho) = 0 \tag{2.67}$$

Solusi deret dari persamaan (2.67) adalah

$$L = \rho^s \sum_{s=0}^{\infty} a_s \rho^s \tag{2.68}$$

Akan menghasilkan Rumus Rekursi:

$$a_{s+1} = \frac{s+l+1-A}{(s+1)(s+2l+2)}a_s \tag{2.69}$$

Deret akan bernilai berhingga apabila harga A adalah bilangan bulat misalkan A = n, maka nilai deret a_{s+1} akan menjadi nol jika $s = n - l - 1$. Akan mendapatkan $L(\rho)$ yang sesungguhnya ialah suatu deret polynomial, yakni:

$$L = \rho^s \sum_{s=0}^{n-l-1} a_s \rho^s \tag{2.70}$$

Untuk A = n, persamaan (2.67) akan menjadi:

$$\rho\frac{\partial^2 L(\rho)}{\partial \rho^2} + \{2(l+1) - \rho\}\frac{dL}{d\rho} + \{n - (l+1)\}L(\rho) = 0 \tag{2.71}$$

Persamaan (2.71) merupakan persamaan differensial *Laguerre Terasosiasi* yang mempunyai bentuk umum:

$$\rho\frac{\partial^2 L(\rho)}{\partial \rho^2} + \{p + 1 - \rho\}\frac{dL_q^p}{d\rho} + \{q - p\}L_q^p = 0 \tag{2.72}$$

Solusi dari persamaan (2.72) adalah polinom Laguerre Terasosiasi, dengan L_q^p yang diperoleh dari rumus Rodrigues berikut ini:

$$L_q^p(\rho) = \frac{q!}{(q-p)!}e^{\rho}\frac{d^q}{d\rho^q}\left(e^{-p}\rho^{q-p}\right) \tag{2.73}$$

Dengan

p = $2l + 1$

q = n + l (Purwanto, 2006: 160-163).

Sehingga L_q^p yang diperoleh, yaitu:

$$L_q^p\,(\rho) = L_{n+l}^{2l+1}\,(\rho) = (-1)^{2l+l}\,\frac{(n+l)!}{(n-l-1)!}\,e^{\rho}\,\frac{d^{n+1}}{d_{(\rho)}^{n+l}}\,(e^{-\rho}\,.\,(\rho)^{n-l-1}) \tag{2.74}$$

Solusi radialnya dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$R_{nl}(\rho) = N_{nl}\rho^l e^{\frac{\rho}{2}} L_{n+l}^{2l+1}\,(\rho)$$

Dimana konstanta normalisasi $N_{nl} = \left[\left(\frac{2}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}\right]^{\frac{1}{2}}$

Maka diperoleh solusi umum persamaan radial:

$$R_{nl}(r) = \left[\left(\frac{2}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2r}{na_0}\right]^l e^{-\frac{r}{na_0}} L_{n+l}^{2l+1}\,(\rho) \tag{2.75}$$

(Singh, 2009: 237).

Persamaan fungsi radial ternomalisasi menjadi,

$$R_{nl}(r) = \left[\left(\frac{2}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2r}{na_0}\right]^l e^{-\frac{r}{na_0}} L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right) \tag{2.76}$$

(Zettili, 2009: 359).

2.2.4 Bentuk Fungsi Gelombang Atom Hidrogen

Bilangan kuantum merupakan label yang bukan hanya muncul dari prosedur matematis yang terlibat langsung dalam pemecahan persamaan Schrodinger, namun juga mempunyai makna dalam tafsiran geometris. Komponen fungsi gelombang $\psi(r,\theta,\phi)$ merupakan hasil kali dari tiga buah fungsi dalam satu variable, maka didapatkan sebagai berikut:

$$\psi_{n,l,m_l}(r,\theta,\phi) = R_{n,l}(r)\Theta_{l,m_l}(\theta)\Phi_m(\phi) \tag{2.77}$$

Tabel 2.1 Bebarapa Fungsi Gelombang Atom Hidrogen

n	l	m_l	$R(r)$	$\Theta(\theta)$	$\Phi(\phi)$
1	0	0	$\frac{2}{a_0^{3/2}} e^{-r/a_0}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
2	0	0	$\frac{1}{2\sqrt{2}a_0^{3/2}}\left(2-\frac{r}{a_0}\right)e^{-r/2a_0}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

2	1	0	$\frac{1}{2\sqrt{3}a_0^{3/2}}\frac{r}{a_0}e^{-r/2a_0}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}\cos\theta$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
2	1	± 1	$\frac{1}{2\sqrt{3}a_0^{3/2}}\frac{r}{a_0}e^{-r/2a_0}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\pm i\phi}$

Indeks (n, l, m_l) yang berbeda akan memberikan suatu fungsi gelombang yang berbeda. Pada Tabel 2.1 terdapat beberapa fungsi gelombang dengan beberapa nilai bilangan kuantum n, l, m_l dengan metode (terlampir) (Krane, 1992: 275-276).

2.3 Fungsi Persamaan Schrodinger Atom Tritium $({}_1^3H)$

2.3.1 Fungsi Persamaan Azimuth dan Persamaan Polar

Fungsi persamaan Schrodinger atom Tritium sama seperti persamaan Schrodinger atom berelektron tunggal yang terdiri dari persamaan azimuth, persamaan polar dan persamaan radial. Solusi fungsi persamaan azimuth dan persamaan polar pada atom Hidrogen dapat digunakan oleh atom Tritium karena keduanya merupakan atom berelektron tunggal. Sehingga solusi fungsi persamaan azimuth ialah persamaan (2.39) dan untuk solusi persamaan polar yaitu persamaan (2.45). Solusi persamaan Azimuth dan persamaan polar atom Tritium secara berturut-turut dapat dituliskan sebagai berikut:

Solusi Persamaan Azimuth Atom Tritium :

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\pm im\phi}$$

Solusi Persamaan Polar Atom Tritium:

$$\Theta_{lm}(\theta) = \left[\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{2(l+|m|)!}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2^l l!}(1-cos^2\theta)^{\frac{|m|}{2}}\frac{d^{l+|m|}}{dcos^{l+|m|}\theta}(cos^2\theta-1)^l\right]$$

2.3.2 Fungsi Persamaan Radial

Solusi penyelesaian fungsi persamaan radial atom Hidrogen dapat digunakan dalam mencari fungsi persamaan radial atom Tritium yang terdapat pada persamaan (2.76) yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$R_{nl}(r_c) = \sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)^3\frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}}\left[\frac{2r_c}{na_0}\right]^l e^{-\frac{r_c}{na_0}}L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2r_c}{na_0}\right)$$

Untuk solusi persamaan azimuth dan polar pada atom Tritium sama dengan solusi persamaa Hidrogen. Perbedaannya terdapat pada solusi fungsi radial yaitu nilai massa reduksi dan jari-jari atomnya.

2.3.3 Solusi Gabungan Fungsi Gelombang Atom Tritium

Gabungan antara solusi persamaan Azimuth, persamaan polar dan persamaan radial merupakan solusi umum dari persamaan Schrodinger atom Tritium. Maka, solusi persamaannya dapat dinyatakan sebagai berikut:

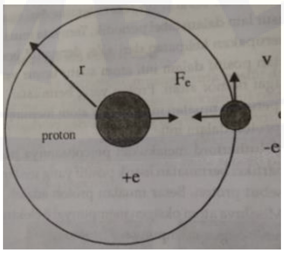
$$\psi_{n,l,m_l}(r,\theta,\phi) = R_{n,l}(r_c)\Theta_{l,m_l}(\theta)\Phi_m(\phi)$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\pm im\phi} \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{2(l+|m|)!}} \left[\frac{1}{2^l l!}(1-cos^2\theta)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{l+|m|}}{dcos^{l+|m|}\theta}(cos^2\theta-1)^l\right]$$

$$\left[\left(\frac{2}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2r_c}{na_0}\right]^l e^{-\frac{r_c}{na_0}} L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2r_c}{na_0}\right)$$

2.4 Model Atom Bohr

Dalam fisika atom, model atom Bohr melukiskan bahwa atom terdiri dari inti atom yang bermuatan positif yang dikelilingi oleh electron orbit seperti susunan planet-matahari. Gaya elektrostatis lebih dominan menyebabkan gaya tarik menarik antara electron-elektron dengan inti dibandingkan dengan gaya gravitasi. Pada tahun 1913, seorang ilmuwan yang bernama Neils Bohr mengajukan sebuah prinsip tentang model atom hydrogen. Niels Bohr menjelaskan bahwa sifat spectral hydrogen dapat digambarkan secara cukup akurat dengan berdasarkan postulat-postulat berikut:



Gambar 2.2 Kesetimbangan Gaya dalam Atom Hidrogen

1) Electron bergerak pada lintasan melingkar di sekitar proton

2) Orbit yang diijinkan hanya orbit yang memungkinkan momentum sudut electron adalah kelipatan bulat dari $\frac{h}{2\pi}$, yaitu:

$$L = mvr = n\hbar, \quad n = 1,2,3, \dots$$

3) Jika electron berada pada orbit yang diijinkan, electron tidak memancarkan energi
4) Jika electron melompat dari lintasan ke-i menuju ke-j, maka foton dengan frekuensi v

$$v = \frac{E_i - E_j}{h}$$

Dipancarkan $(untuk\ E_i > E_j\,)$ atau diserap $(untuk\ E_i < E_j\,)$ oleh atom hydrogen.

2.4.1 Solusi perhitungan jari-jari orbit electron pada atom Hidrogen

Persamaan hubungan antara gaya elektrostatis antara electron dan proton dengan gaya sentripental electron, sebagai berikut:

Gaya sentrifugal : $F_s = \frac{mv^2}{r}$, dengan m menyatakan massa electron, v adalah kecepatan electron dan r jari-jari orbit electron.

Gaya elektrostatik: $F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$, dengan e merupakan muatan elementer electron (Wiyatmo, 2010: 13).

Maka:

$$F_{coulumb} = F_{sentrifugal}$$

$$k\,\frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad \text{atau} \quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{mv^2}{r} \qquad (2.78)$$

Persamaan (2.78) dikalikan dengan m, maka persamaannya sebagai berikut:

$$\frac{me^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{m^2v^2}{r}$$

$$m^2v^2 = \frac{me^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad (2.79)$$

Oleh karena itu, nilai dari kuantisasi momentum angular yaitu $L = n\hbar = mvr$. Maka nilai dari momentum akan dituliskan seperti persamaan (2.80):

$$mvr = n\hbar$$

Kemudian kedua sisi dikuadratkan, maka akan mendapatkan:

$$(mvr)^2 = (n\hbar)^2$$

$$(mv)^2 = {n^2\hbar^2}/{r^2} \qquad (2.80)$$

Subsitusikan persamaan (2.80) ke dalam persamaan (2.78) akan menghasilkan persamaan berikut:

$$\frac{me^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{n^2\hbar^2}{r^2}$$

$$r^2 = \frac{4\pi\varepsilon_0 r n^2\hbar^2}{me^2} \qquad (2.81)$$

Sehingga, nilai jari-jari atom Bohr, yakni:

$$r = \frac{4\pi\varepsilon_0 n^2\hbar^2}{me^2} \qquad (2.82)$$

(Levi, 2003: 80-81).

2.4.2 Solusi perhitungan energy pada atom Hidrogen

$$mvr = n\hbar \qquad v = \frac{n\hbar}{mr}$$

$$v = \frac{n\hbar}{m\left(\frac{4\pi\varepsilon_0 n^2\hbar^2}{me^2}\right)}$$

$$v = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 n\hbar} \qquad (2.83)$$

Persamaan (2.83) merupakan persamaan klasik dengan kuantisasi momentum sudut dari lintasan electron. Subsitusikan persamaan (2.83) ke dalam persamaan energy kinetic dari atom hydrogen, akan menghasilkan persamaan (2.84).

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\frac{e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 n^2\hbar^2} \qquad (2.84)$$

Untuk besar energy potensial dari interaksi kedua muatan adalah sebesar,

$$V = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = -m\frac{e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 n^2\hbar^2} \qquad (2.85)$$

Sedangkan energy Hamiltonian dari electron dalam lintasan ialah,

$$E_n = K + V$$

$$E_n = \frac{1}{2}m\frac{e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 n^2\hbar^2} + \left(-m\frac{e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 n^2\hbar^2}\right) = -\frac{1}{2}m\frac{e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 n^2\hbar^2} \qquad (2.86)$$

Perbedaan energy transisi antara bilangan kuantum n_1 dan n_2, yakni:

$$E_{n1} - E_{n2} = \frac{1}{2} m \frac{e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 \hbar^2} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \tag{2.87}$$

$$E_1 = R_y = -\frac{1}{2} m \frac{e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 \hbar^2} = -13{,}6058\ eV \tag{2.88}$$

R_y merupakan konstanta Ryberg dan E_1adalah energy pada electron yang terdapat pada kulit pertama $n = 1$ yang merupakan keadaan energy terlemah (Levi, 2003: 82).

2.4.3 Solusi perhitungan energi dan jari-jari atom Tritium

Atom Tritium adalah salah satu isotop Hidrogen yang memiliki nomor massa 3 yang terdiri dari 2 buah neutron dan sebuah proton di dalam inti atom. Massa yang digunakan dalam perhitungan energi ataupun jari-jari atom Tritium menggunakan massa reduksi dengan formula sebagai berikut:

$$\mu = \frac{(m_p + m_n)\ x\ m_e}{(m_p + m_n) + m_e} = \frac{m_T\ x\ m_e}{m_T + m_e} \tag{2.89}$$

m_T = massa inti atom Tritium yang terdiri dari proton dan neutron, m_p =massa proton, m_n = massa neutron dan m_e = massa elektron. Formula dari energi atom Tritium dan jari-jari atom Tritium yaitu:

$$r = \frac{4\pi\varepsilon_0 n^2 \hbar^2}{\mu e^2} \tag{2.90}$$

$$K = \frac{1}{2} \mu \frac{e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 n^2 \hbar^2} \qquad \text{dan} \qquad V = -\mu \frac{e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 n^2 \hbar^2}$$

$$E_n = K + V$$

$$E_n = -\frac{1}{2} \mu \frac{e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 n^2 \hbar^2} \tag{2.91}$$

2.5 Bilangan Kuantum

Persoalan tiga dimensi suatu persamaan Schrodinger membutuhkan tiga bilangan kuantum dalam pemecahannya. Maka, fungsi gelombang atom hydrogen akan terdapat tiga bilangan kuantum. Menurut teori Bohr, bilangan kuantum n disebut dengan bilangan kuantum utama yang berkaitan dengan pemecahan fungsi radial $R(r)$ dan bernilai bulat 1,2,3,… . Pemecahan fungsi polar $\theta(\theta)$ berkaitan dengan bilangan kuantum l yang disebut dengan bilangan kuantum Azimuth.

Sedangkan untuk pemecahan fungsi $\Phi(\phi)$ ialah berkaitan dengan bilangan kuantum m_l yang merupakan bilangan kuantum magnetic (Krane, 1992: 268).

2.5.1 Bilangan Kuantum Utama (n)

Bilangan kuantum utama (n) digunakan untuk menamai tingkat-tingkat energy dalam model Bohr dan menyatakan ukuran suatu atom. Sesuai dengan di Model Bohr menentukan bilangan n setara dengan memilih suatu tingkat energy tertentu. Nilai dari bilangan kuantum utama ialah bilangan bulat $n = 1,2,3, \ldots$ dan tidak nol. Kelompok orbital dalam n akan membentuk kulit atom. Sehingga, semakin besar nilai n, maka ukuran dari orbital akan semakin besar dan tingkat energy akan semakin tinggi. Dengan meganggap bahwa energy terikat sebagai atom, maka nilai eigen E berharga negative ($E = -|E|$). Maka persamaan energy sebagai berikut:

$$E = -\frac{\mu e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2}\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (2.92)$$

(Krane, 1992: 269).

2.5.2 Bilangan Kuantum Azimuth (l)

Bentuk lintasan atau orbital suatu elektron berkaitan dengan bilangan kuantum Azimuth. Nilai dari bilangan Azimuth ialah bilangan cacah yang bermulai dari $l = 0$ sampai dengan $l = n - 1$. Bilangan kuantum Azimuth juga berkaitan dengan kecepatan sudut dari electron. Besar dari momentum sudut electron dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$$

(Krane, 2011: 201)

Tabel 2.2 Notasi Simbol Keadaan Atomik

Kuantum Utama (n)	Kuantum Azimut (l = 0)	Kuantum Azimut (l = 1)	Kuantum Azimut (l = 2)
1	1s		
2	2s	2p	
3	3s	3p	3d

2.5.3 Bilangan Kuantum Magnetik (m_l)

Bilangan kuantum Magnetik ini berkaitan dengan orientasi ruang orbital. Nilai dari bilangan kuantum Magnetik mempunyai rentang nilai dari $m = -l$ sampai dengan $m = +l$ dan tidak terkecuali dengan nol $-l \ldots 0 \ldots + l$. Sehingga untuk setiap harga l, akan memiliki harga m sebanyak $2l + 1$.

2.6 Atom Tritium

Bila suatu unsur terdaftar menurut nomor atomnya, maka unsur tersebut memiliki sifat kimiawi dan fisis serupa akan muncul pada interval yang teratur. Menurut Dmitry Mandeleyew pengamatan empiris ini dikenal dengan tabel periodic. Unsur yang memiliki sifat yang serupa akan membentuk group yang ditunjukkan oleh kolom vertical, yakni sebagai berikut:

a. Group I terdiri dari unsur Hydrogen ditambah dengan logam alkali. Unsur-unsur dalam group ini sangat aktif secara kimiawi dan mempunyai valensi 1.
b. Group VII terdiri dari Halogen, mudah menguap, non logam yang aktif yang memiliki valensi 1 dan membentik dwiatomik dalam keadaan gas.
c. Group VIII terdiri dari gas mulia, unsur yang tidak aktif sehingga kebanyakan tidak membentuk senyawa dengan unsur lain dan atomnya tidak membentuk molekul (Wiyatmo, 2010: 106-108).

Tahun 1935 untuk pertama kalinya dibuat atom Tritium yaitu berasal dari reaksi deuterium dengan inti deuterium (deuteron) yang berenergi tinggi, maka bentuk dari reaksinya yaitu:

$$ {}^{2}_{1}D + {}^{2}_{1}D \rightarrow {}^{1}_{1}H + {}^{3}_{1}H \qquad (2.93)$$

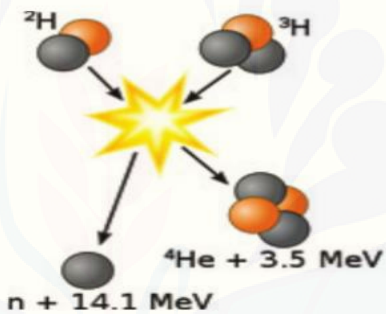
Radioaktif dari atom Tritium akan secara spontan meluruh menjadi Helium $({}^{3}_{2}He)$ dengan proses peluruhan beta. Peluruhan secara spontan ini juga menghasilkan electron dan antineutrino (v_e) yang mempunyai waktu paruh 12,3 tahun. Proses reaksinya akan menjadi:

$$ {}^{3}_{1}H \rightarrow {}^{3}_{2}He + e^{-} + v_e + 18{,}6 KeV \qquad (2.94)$$

(Jason, 2011:1).

Atom Tritium adalah radioaktif yang kondisi reaksinya cukup diunggulkan. Karena ${}^{3}_{1}H$ berada pada lapisan lebih tinggi dari atmosfer dan dapat diperoleh dari litium yang berlimpah dalam kerak bumi. Reaksi yang terjadi pada atom tritium ialah reaksi fusi dengan deuterium. Reaksi fusi merupakan penggabungan dua inti ringan untuk membentuk inti yang lebih berat disertai dengan pelepasan energi. Fusi deuterium dengan tritium menghasilkan helium-4, membebaskan sebuah neutron dan melepaskan energi sebesar 17,59 MeV sebagai jumlah massa yang sesuai untuk mengubah energi kinetik produk, sesuai dengan $E = \Delta mc^2$. Berlangsungnya reaksi fusi dimana inti pertama harus dibuat saling bertabrakan dengan mengatasi gaya-gaya tolakan elektrostatik. Energi yang dibutuhkan inti untuk bereaksi dapat diberikan dalam bentuk reaksi termonuklir. Reaksi fusi untuk deuterium dan tritium sebagai berikut:

$$ {}_1^2H + {}_1^3H \rightarrow {}_2^4He + {}_0^1n + 3{,}50\ MeV \qquad (2.95) $$



Gambar 2.3 Reaksi Fusi Deuterium dengan Tritium

(Hasan,2015:45-46)

Atom Tritium merupakan keluarga dari Hidrogen bersama dengan Deuterium. Atom Tritium ialah isotope radioaktif dari Hidrogen, yang mempunyai inti atom yang sering disebut dengan Triton. Triton mengandung satu buah proton dan dua buah neutron. Inti Protium (merupakan isotope hydrogen yang paling melimpah) yang mengandung satu proton dan tidak memiliki neutron. Atom Tritium yang ada di bumi sekarang jarang terjadi secara alami, maka atom ini terbentuk dari sebuah interaksi yaitu interaksi antara atmosfer dan sinar kosmik. Untuk pemanfaatannya atom tritium digunakan sebagai bahan pembuatan baterai nuklir (Prastowo *et al*, 2018), untuk alat pelacak radioaktif, untuk campuran bahan pembuatan jam tangan militer yang berfungsi sebagai sumber cahaya, dan sebagai bahan baterai *betavoltaics* (*Nano Tritium Battery*) (Supriadi *et al* (2018).

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Jenis, Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini merupakan jenis penelitian non eksperimen. Penelitian ini dilaksanakan pada semester 8 bulan Januari hingga bulan Februari tahun 2019 di Program Studi Pendidikan Fisika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pengetahuan, Universitas jember.

3.2 Definisi Operasional

Dalam penelitian ini variable-variabel yang akan diteliti antara lain:

a) Tingkat Energi Atom Tritium

Tingkat energi Atom Tritium adalah suatu keadaan elektron atau tingkatan energy yang dimiliki oleh atom Tritium di setiap tingkatan dan menunjukkan kulit atom. Pada penelitian ini tingkat energi atom Tritium yang akan dihitung yaitu dimulai dari energi dasar sampai dengan energi tereksitasi $1\ dan\ 2$.

b) Fungsi Gelombang Atom Tritium

Fungsi gelombang Tritium adalah solusi persamaan Schrodinger berupa persamaan differensial parsial orde dua untuk atom yang berelektron tunggal dengan menggunakan transformasi koordinat bola (R, Θ, ϕ). Fungsi yang digunakan dalam koordinat bola (R, Θ, ϕ) ialah fungsi gelombang angular yang terdiri dari fungsi gelombang azimuth dan fungsi gelombang polar, serta fungsi gelombang radial.

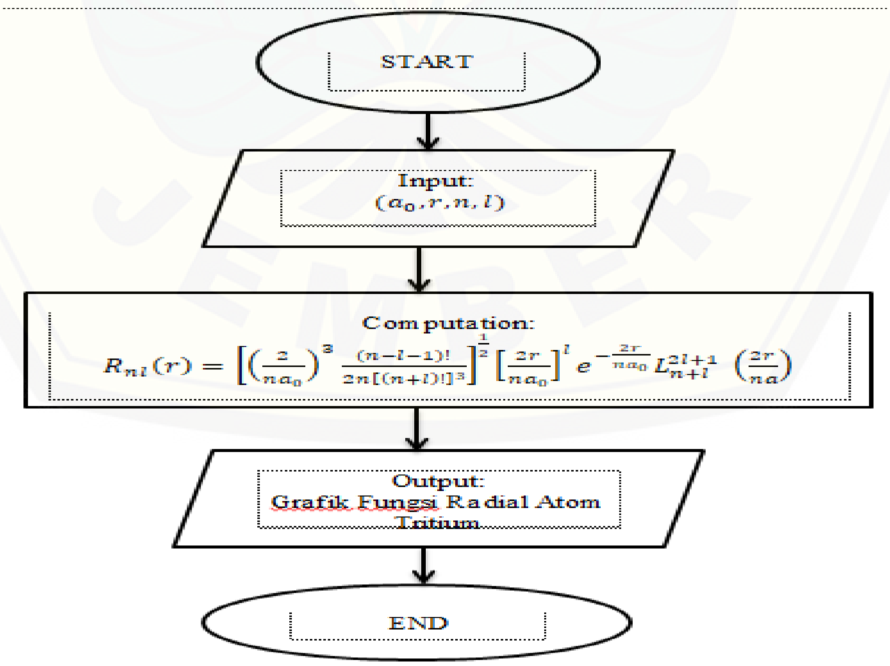
c) Pendekatan Schrodinger

Pendekatan Schrodinger adalah sebuah pendekatan yang berupa persamaan differensial yang menunjukkan hubungan matematis antara massa, energi kinetik, energi potensial dan fungsi gelombang partikel yang berada pada ruang tiga dimensi. Dengan pendekatan Schrodinger mampu menjelaskan beberapa kasus fisika seperti: menentukan tingkatan energy pada atom, spectrum atom hydrogen, dan kasus-kasus lainnya

3.3 Langkah Penelitian

Gambar 3.1 Bagan Langkah-langkah Penelitian

Pada penelitian ini menggunakan simulasi numerik dengan bantuan aplikasi Scilab 6.0.0 Console, secara umum flowchart untuk menentukan grafik fungsi radial atom tritium, sebagai berikut:



Gambar 3.2 Flowchart Grafik Fungsi Radial Atom Tritium

Berdasarkan bagan langkah-langkah penelitian di Gambar 3.1 dapat dijelaskan sebagai berikut:

a. Persiapan

Tahap persiapan ini merupakan tahap awal yang digunakan untuk mempersiapkan bahan-bahan yang akan dijadikan sebagai informasi atau referensi dalam mendukung penelitian yang akan dikaji dengan mengumpulkan buku (fisika modern, fisika kuantum, fisika matematika, mekanika lanjut, fisika atom dan fisika komputasi) serta jurnal nasional maupun internasional yang berhubungan dengan struktur atom Hidrogen, fungsi gelombang atom Hidrogen, persamaan Schrodinger dan energi menggunakan model atom bohr.

b. Pengembangan Teori

Pada tahap kedua ini, peneliti mengembangkan teori yang telah ada dari berbagai sumber referensi mengenai pendekatan persamaan Schrodinger terhadap fungsi gelombang atom hidrogen. Teori yang akan dikembangkan adalah fungsi gelombang dengan menggunakan pendekatan persamaan Schrodinger dan energy atom Tritium menggunakan model atom bohr.

c. Hasil Pengembangan Teori

Setelah pada tahap pengembangan teori diperoleh hasil pengembangan yang berupa persamaan matematis fungsi gelombang dengan menggunakan pendekatan persamaan Schrodinger dan energy atom Tritium menggunakan model atom bohr.

d. Validasi Simulasi

Pada tahap simulasi ini peneliti melakukan suatu validasi hasil pengembangan teori berupa fungsi gelombang dengan menggunakan pendekatan persamaan Schrodinger dan energy atom Tritium menggunakan model atom bohr. Hasil pengembangan teori ini akan dibandingkan dan dicocokkan dengan persamaan matematis yang telah ada di buku referensi ataupun jurnal-jurnal penelitian yang terkait.

e. Simulasi / Pengambilan Data

Pada tahap ini, pengambilan data dilakukan dengan perhitungan analitik yang berupa penyelesaian persamaan Schrodinger pada atom Tritium untuk mendapatkan bentuk fungsi gelombang atom Tritium dan nilai energi atom Tritium dengan menggunakan model Atom Bohr. Setelah mendapatkan hasil perhitungan analitik, akan mencari hasil simulasi numeric ialah grafik fungsi gelombang radial atom Tritium dengan menggunakan aplikasi Scilab 6.0.0 Console.

f. Pembahasan

Hasil pengumpulan data yang dilakukan secara perhitungan analitik dan simulasi numerik akan dibahas lebih rinci dan jelas secara fisis disertai dengan diskusi teori mengenai fungsi gelombang dengan menggunakan pendekatan persamaan Schrodinger dan energy atom Tritium menggunakan model atom bohr.

g. Kesimpulan

Hasil dari pembahasan selanjutnya akan disimpulkan untuk menjawab rumusan permasalahan dalam penelitian.

3.4 Teori Pengembangan Atom Tritium

Teori yang akan digunakan dalam penelitian ini adalah:

a) Fungsi Gelombang Atom Tritium

$$\psi_{n,l,m_l}(r,\theta,\phi) = R_{n,l}(r)\Theta_{l,m_l}(\theta)\Phi_m(\phi)$$

Dengan berdasarkan:

Fungsi Radial :

$$R_{nl}(r_c) = \sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}} \left[\frac{2r_c}{na_0}\right]^l e^{-\frac{r_c}{na_0}} L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2r_c}{na_0}\right)$$

Fungsi Polar:

$$\Theta_{lm}(\theta) = \left[\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{2(l+|m|)!}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2^l l!}(1-cos^2\theta)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{l+|m|}}{dcos^{l+|m|}\theta}(cos^2\theta-1)^l\right]$$

Fungsi Azimuth:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\pm im\phi}$$

b) Jari-jari atom Tritium

$r = \frac{4\pi\varepsilon_0 n^2 \hbar^2}{\mu e^2}$ dengan $n = 1,2,3$

c) Energi Atom Tritium dengan Model Atom Bohr

$E = -\frac{1}{2}\mu\frac{e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 n^2 \hbar^2}$

3.5 Data Simulasi

Pada penelitian ini dalam mengumpulkan data menggunakan dua cara, yaitu secara analitik dan numerik. Energi atom Tritium dan fungsi gelombang atom Tritium diperoleh dengan menggunakan perhitungan secara analitik. Perhitungan secara analitik yang digunakan yaitu dengan menyelesaikan persamaan Schrodinger untuk memperoleh fungsi gelombang atom Tritium dan menggunakan model Atom Bohr untuk mendapatkan variable energi dengan perhitungan manual. Sedangkan perhitungan secara numerik digunakan untuk memperoleh grafik fungsi gelombang radial atom Tritium. Berikut ini merupakan tabel data untuk fungsi gelombang dari atom Tritium dengan menggunakan bilangan kuantum $(n \leq 3)$ dan energy atom Tritium untuk setiap tingkatan energy.

Tabel 3.1 Fungsi Gelombang Atom Tritium

n	l	m	R(r)	$\Theta(\theta)$	$\Phi(\phi)$	$\psi(r,\theta,\phi)$
1	0	0				
2	0	0				
	1	0				
		1				
		1				
3	0	0				
	1	0				
		1				

		-1				
	2	0				
		1				
		-1				
		2				
		-2				

Tabel 3.2 Beberapa Tingkatan Energi Atom Tritium
menggunakan Model Atom Bohr

Tingkatan Energi	Kulit	Energi Atom Tritium (Joule)	Energi Atom Tritium (eV)
E_1	Kulit Pertama (K)		
E_2	Kulit Kedua (L)		
E_3	Kulit Ketiga (M)		

3.6 Validasi Penelitian

Penelitian ini menggunakan beberapa validasi sebagai pembanding hasil pengembangan teori, antara lain: simulasi fungsi gelombang dan energy gelombang atom Hidrogen. Bahan validasi/pembanding yang digunakan ialah fungsi gelombang atom Hidrogen, ini dikarenakan atom Hidrogen merupakan atom yang mempunyai jumlah elektron terluar yang sama dengan atom Tritium yaitu satu. Sehingga atom Hidrogen dan atom Tritium masih mempunyai sifat dan karakteristik yang mirip baik dari segi fisis maupun matematis.

3.6.1 Simulasi Fungsi Gelombang dan Energi Atom Hidrogen

Berikut ini merupakan tabel fungsi gelombang atom Hidrogen $n \leq 3$, yang terdiri dari fungsi gelombang azimuth, fungsi gelombang polar dan fungsi gelombang radial.

Tabel 3.3 Fungsi Gelombang Atom Hidrogen

n	l	m	R(r)	$\Theta(\theta)$	$\Phi(\phi)$
1	0	0	$\frac{2}{a_0^{3/2}} e^{-r/a_0}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
2	0	0	$\frac{1}{(2a_0)^{3/2}}\left(2-\frac{r}{a_0}\right) e^{-r/2a_0}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
	1	0	$\frac{1}{\sqrt{3}(2a_0)^{3/2}} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}\cos\theta$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
		1	$\frac{1}{\sqrt{3}(2a_0)^{3/2}} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\phi}$
		-1	$\frac{1}{\sqrt{3}(2a_0)^{3/2}} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\phi}$
3	0	0	$\frac{2}{(3a_0)^{3/2}}\left(2-\frac{2r}{3a_0}-\frac{2r^2}{27a_0^2}\right) e^{-r/3a_0}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
	1	0	$\frac{8}{9\sqrt{2}(3a_0)^{3/2}}\left(\frac{r}{a_0}-\frac{r^2}{6a_0^2}\right) e^{-r/3a_0}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}\cos\theta$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
		1	$\frac{8}{9\sqrt{2}(3a_0)^{3/2}}\left(\frac{r}{a_0}-\frac{r^2}{6a_0^2}\right) e^{-r/3a_0}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\phi}$
		-1	$\frac{8}{9\sqrt{2}(3a_0)^{3/2}}\left(\frac{r}{a_0}-\frac{r^2}{6a_0^2}\right) e^{-r/3a_0}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\phi}$
	2	0	$\frac{1}{27\sqrt{10}(3a_0)^{3/2}}\left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-r/3a_0}$	$\sqrt{\frac{5}{8}}\,(3cos^2\theta-1)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
		1	$\frac{1}{27\sqrt{10}(3a_0)^{3/2}}\left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-r/3a_0}$	$-\sqrt{\frac{15}{4}}\sin\theta\cos\theta$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\phi}$
		-1	$\frac{1}{27\sqrt{10}(3a_0)^{3/2}}\left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-r/3a_0}$	$\sqrt{\frac{15}{4}}\sin\theta\cos\theta$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\phi}$
		2	$\frac{1}{27\sqrt{10}(3a_0)^{3/2}}\left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-r/3a_0}$	$\frac{\sqrt{15}}{4}\sin^2\theta$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{2i\phi}$
		-2	$\frac{1}{27\sqrt{10}(3a_0)^{3/2}}\left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-r/3a_0}$	$\frac{\sqrt{15}}{4}\sin^2\theta$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-2i\phi}$

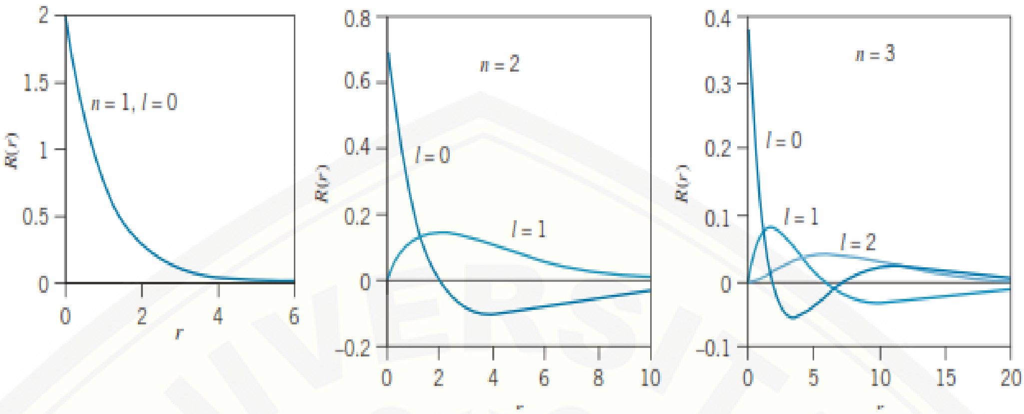
(Krane, 2011: 205)

Untuk mencari besar dari energy atom Hidrogen untuk beberapa tingkatan menggunakan persamaan sebagai berikut:

$$E_n = \frac{-13{,}6}{n^2}\ , untuk\ n = 1{,}2{,}3 \qquad (3.1)$$

(Griffith, 2005: 149)

Berikut ini merupakan bentuk grafik fungsi gelombang radial untuk atom Hidrogen $n \leq 3$.



Gambar 3.3 Fungsi Radial Atom Hidrogen untuk $n \leq 3$ (Krane, 2011: 206).

BAB 5. PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang diperoleh mengenai fungsi gelombang atom Tritium dengan pendekatan persamaan Schrodinger dapat disimpulkan bahwa:

a. Fungsi gelombang atom Tritium terdiri dari dua fungsi yaitu fungsi gelombang radial $R_{n,l}(r)$ dan fungsi gelombang angular yang merupakan gabungan dari fungsi gelombang (azimuth) $\Phi_m(\phi)$ dan fungsi gelombang polar $\Theta_{l,m_l}(\theta)$. Terdapat 14 fungsi gelombang yang dihasilkan dalam penelitian ini dengan bilangan kuantum $(n = 1,2,3)$. Bentuk fungsi gelombang atom Tritium sama dengan atom Hidrogen. Perbedaannya hanya terdapat pada massa tereduksi, jari-jari atom dan energi. Fungsi gelombang atom tritium untuk keadaan $n = 1,\ l = 0$ dan $m = 0$ dapat dituliskan $\sqrt{\frac{1}{\pi a_0^3}}\ e^{-r/a_0}$, sedangkan untuk fungsi gelombang atom Tritium keadaan bilangan kuantum $n = 2$ dan $n = 3$ hanya berbeda pada nilai fungsi eksponensial dan nilai fungsi persamaan laguerre terasosiasi.

b. Tingkat energi atom Tritium tidak jauh berbeda dengan energi atom Hidrogen. Semakin banyak lintasan kulit atom maka energi atom yang diperoleh semakin kecil, karena energi berbanding terbalik dengan bilangan kuantum utama (n). Dan semakin besar energi atom Tritium maka radius jari-jari atom Tritium akan semakin kecil. Nilai energi atom Tritium keadaan dasar, keadaan tereksitasi pertama dan keadaan tereksitasi kedua secara beturut-turut yaitu $-13{,}603428\ eV$, $-3{,}400857\ eV$ dan $-1{,}511492\ eV$.

5.2 Saran

Berdasarkan kesimpulan yang telah dipaparkan diatas, maka saran yang dapat diberikan pada penulis ialah perlu diadakan penelitian lebih lanjut mengenai fungsi gelombang atom Tritium untuk bilangan kuantum yang lain seperti bilangan kuantum $n = 4$ dan $n = 5$ dan dengan menambah kajian mengenai probabilitas dan ekspektasi. Agar dapat meningkatkan pemahaman dan keingintahuan yang lebih mengenai persamaan Schrodinger dan atom berelektron banyak.

DAFTAR PUSTAKA

Baiquni, A. 1995. *Buku materi pokok pengantar mekanika kuantum*. Jakarta: Depdikbud.

Beiser, Arthur. 1986. *Konsep Fisika Modern, Terjemahan oleh Houw Liong*. Jakarta: Erlangga.

Beiser, Athur. 2003. *Concepts of Modern Physics*. New York: McGraw-Hill.

Boas, M. L. 1983. *Mathematical Method in Physical Sciences*. Second Edition. New York: John Wiley.

Bugl, P. 1995. *Differensial Equations Matrices and Models*. New Jersey: Prentice Hall International.

Ganesan, L. R., & M. Balaji. 2008. Schrodinger Equation for the Hydrogen Atom A-Simplified Treatment. *Juornal of Chemistry*. 5(3): 659-662.

Griffiths, David J. 1995. *Introduction to Quantum Mechanics*. United States of America. Prentice Hall, Inc.

Griffiths, David J. 2005. *Introduction to Quantum Mechanics: Second Edition*. Reed College, United States of America. Pearson Prentice Hall.

Hasan, Yaziz. 2015. *Energi Dan Penggunaannya*. Jakarta: BATAN Press.

Hermanto, Wawan. 2016. Fungsi Gelombang Atom Deuterium dengan Pendekatan Persamaan Schrodinger. *Prosiding Seminar Nasional Pendidikan Sains 2016*: 794-802.

Jason. 2011. *Tritium*. McLean, Virginia: The MITRE Corporation.

Krane, Kenneth. S. 1992. *Fisika Modern*. Jakarta: Universitas Indonesia Press.

Krane, Kenneth S. 2011. *Modern Physics: Third Edition*. Oregan State University, United States Of America: John Wiley & Sons, INC.

Levi, A. F. J. 2003. *Applied Quantum Mechanis for Engineers and Physicsts*. London: Cambridge University Press.

Ohno, Koichi. 2004. *Quantum Chemistry*. Tokyo: Iwanami Shoten Publishers.

Prastowo, Sri H B et al. 2018. The stark effect on the spectrum energy of tritium in first excited state with relativistic condition. *Journal of Physics*: Conf. Series 1008 012013.

Purwanto, Agus. 2006. *Fisika Kuantum*. Surabaya: Gava Media.

Singh, R.B. 2009. *Introduction to modern physics-Volume 1 Second edition: New age International*. New Delhi: New Age International Publisher.

Sugiyono, Vani. 2016. *Mekanika Kuantum*. Yogyakarta: CPAS.

Supriadi, B et al. 2018. The Stark Effect on the Wave Function of Tritium in Relativistic Condition. *Journal of Physics*: Conf. Series 997 012045.

Supriyadi., A. Arkundato., & I. Rofi'i. 2006. Solusi Numerik Persamaan Schrodinger Atom Hidrogen dengan Metode Elemen Hingga (*Finite Element Methods*). *Berkala MIPA*: 16 (2).

Tanabe, Tetsuo. 2017. *Tritium: Fuel of Fussion Reactors*. Fukuoka: Springer.

Wiyatmo, Yusman. 2010. *Fisika Atom dalam perspektif klasik, semiklasik, dan kuantum*. Yogyakarta: Pustaka Pelajar.

Zettili, Nouredine. 2009. *Quantum Mechanics Concept and Applications*. England: John Wiley & Sons Ltd.

Lampiran 1. Matrik Penelitian

JUDUL	TUJUAN PENELITIAN	VARIABEL	DATA DAN TEKNIK PENGAMBILAN DATA	METODE PENELITIAN
Fungsi Gelombang Atom Tritium $({}_{1}^{3}H)$ dengan Pendekatan Persamaan Schrodinger	1. Menentukan fungsi gelombang atom Tritium dengan menggunakan pendekatan persamaan Schrodinger pada bilangan kuantum $(n \leq 3)$. 2. Menentukan nilai energy dari Atom Tritium dengan menggunakan model Atom Bohr.	Variable bebas: 1. Bilangan kuantum (n) = 1,2,3 Variable control: 1. Persamaan Schrodinger 2. Atom Tritium Variable terikat: 1. Fungsi gelombang atom Tritium pada bilangan kuantum $(n \leq 3)$. 2. Nilai energy dari Atom Tritium	Data diperoleh dari: 1. Buku 2. Jurnal 3. Internet Teknik Pengambilan data: Pengambilan data dilakukan dengan dua tahapan yaitu perhitungan secara analitik dan perhitungan secara numeric (aplikasi Scilab 6.0.0 Console)	1. Jenis penelitian : Penelitian non eksperimen 2. Analisis: Penelitian ini menggunakan persamaan teori sebagai berikut: a. Persamaan Schrodinger tidak bergantung waktu dalam koordinat bola b. Persamaan Energy model Bohr

Lampiran 2. Perhitungan Jari-Jari Atom Tritium

Dengan study literature diperoleh beberapa ketetapan, yaitu:

1. Ketetapan planck ($\hbar = 1{,}054589\ x\ 10^{-34} J.s$)
2. Massa proton ($m_p = 1{,}6726231\ x\ 10^{-27}\ kg = 938\ MeV$)
3. Massa neutron ($m_n = 1{,}674927471\ x\ 10^{-27}\ kg = 939{,}565\ MeV/c$)
4. Massa electron ($m_e = 9{,}10938215\ x\ 10^{-31}\ kg = 0{,}5119\ MeV/c^2$)

Dimana: $r = \frac{4\pi\varepsilon_0 n^2\hbar^2}{mZe^2} = a_0 n^2$

$a_0 =$ jari-jari atom bohr, yang secara matematis dapat dituliskan sebagai berikut:

$$a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0 n^2\hbar^2}{mZe^2}$$

Dengan menggunakan konstanta struktur halus, yaitu:

$$\propto = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} = 2{,}307113707464\ x\ 10^{-28}$$

Untuk atom tritium dengan $Z = 1$ dan m menggunakan massa tereduksi (μ), maka:

$$a_T = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{mZe^2} = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{\mu e^2}$$

Dari data yang diperoleh dengan study literature, maka massa Tritium yang didapatkan:

$$m_T = m_p + m_n = m_p + 2(m_n)$$
$$= [(1{,}6726231\ x\ 10^{-27} kg) + 2(1{,}674927471\ x\ 10^{-27} kg)]$$
$$= [(1{,}6726231\ x\ 10^{-27} kg) + (3{,}34991\ x 10^{-27}\ kg)]$$
$$= 5{,}022559\ x\ 10^{-27}\ kg$$

massa tereduksi

$$\mu = \frac{m_T\ x\ m_e}{m_T + m_e}$$
$$= \frac{5{,}022559\ x 10^{-27} kg\ \ x\ \ 9{,}10938215\ x\ 10^{-31}\ kg}{5{,}022559\ x\ 10^{-27}\ kg + 9{,}10938215\ x\ 10^{-31}\ kg}$$
$$= 9{,}10787809\ x\ 10^{-31}\ kg$$

Sehingga, diperoleh jari-jari atom Tritium sebagai berikut:

$a_T = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{\mu e^2}$ dengan $\propto = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} = 2{,}307113707464\ x\ 10^{-28}$

Maka, $a_T = \frac{\hbar^2}{\mu \propto}$

$$= \frac{(1{,}054589\ x\ 10^{-34})^2}{(9{,}10787809\ x\ 10^{-31})(2{,}307113707464\ x\ 10^{-28})}$$

$$= 0,0529273641\ x\ 10^{-9}m = 0,529273641\ \text{Å}$$

Untuk jari-jari atom pada kulit kedua:

$$a_{T1} = \frac{4\pi\varepsilon_0 n^2\hbar^2}{\mu e^2} = \frac{4\pi\varepsilon_0 2^2\hbar^2}{\mu e^2} = \frac{4\pi\varepsilon_0 4\hbar^2}{\mu e^2}$$

$$a_{T1} = \frac{4\hbar^2}{\mu\propto} = \frac{4(1{,}054589\ x\ 10^{-34})^2}{(9{,}10787809\ x\ 10^{-31})(2{,}307113707464\ x\ 10^{-28})}$$

$$= 0{,}211709456\ x\ 10^{-9}\ m = 2{,}11709456\ \text{Å}$$

Untuk jari-jari atom pada kulit ketiga:

$$a_{T2} = \frac{4\pi\varepsilon_0 n^2\hbar^2}{\mu e^2} = \frac{4\pi\varepsilon_0 3^2\hbar^2}{\mu e^2} = \frac{4\pi\varepsilon_0 9\hbar^2}{\mu e^2}$$

$$a_{T2} = \frac{9\hbar^2}{\mu\propto} = \frac{9(1{,}054589\ x\ 10^{-34})^2}{(9{,}10787809\ x\ 10^{-31})(2{,}307113707464\ x\ 10^{-28})}$$

$$= 0{,}476346275\ x\ 10^{-9}\ m = 4,76346275\ \text{Å}$$

Lampiran 3. Perhitungan Energi Atom Tritium

$$E_n = -\frac{1}{2} m \frac{e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 n^2 \hbar^2}$$

Untuk massa (m) menggunakan μ =massa tereduksi, akan menjadi:

$$E_n = -\frac{1}{2} \mu \frac{e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 n^2 \hbar^2}$$

$$= -\frac{\mu}{2\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{1}{n^2}$$

$$E_n = -\left[\frac{9{,}109787809\ x\ 10^{-31}}{2(\ 1{,}054589\ x\ 10^{-34})^2} (2{,}307113707464\ x\ 10^{-28})^2 \frac{1}{n^2}\right]$$

$$= -\left[\frac{48{,}4791736\ x\ 10^{-87}}{2{,}22431592\ x\ 10^{-68}}\right] \frac{1}{n^2}$$

$$= -21{,}795093\ x\ 10^{-19} \frac{1}{n^2}$$

Untuk energi dasar atom Tritium, yaitu:

$$E_1 = -21{,}795093\ x\ 10^{-19} \frac{1}{1^2} = -21{,}795093\ x\ 10^{-19}\ J$$

$$= \frac{-21{,}795093\ x\ 10^{-19}}{1{,}60217657\ x\ 10^{-19}} \frac{1}{1^2} = -13{,}603428\ eV$$

Energi tereksitasi pertama atom Tritium:

$$E_2 = -21{,}795093\ x\ 10^{-19} \frac{1}{2^2} = -5{,}4487734\ x\ 10^{-19}\ J$$

$$= \frac{-21{,}795093\ x\ 10^{-19}}{1{,}60217657\ x\ 10^{-19}} \frac{1}{2^2} = -3{,}400857\ eV$$

Energi tereksitasi kedua atom Tritium:

$$E_3 = -21{,}795093\ x\ 10^{-19} \frac{1}{3^2} = -2{,}42167707\ x\ 10^{-19}\ J$$

$$= \frac{-21{,}795093\ x\ 10^{-19}}{1{,}60217657\ x\ 10^{-19}} \frac{1}{3^2} = -1{,}511492\ eV$$

Lampiran 4. Perhitungan Fungsi Legendre untuk Beberapa Keadaan

$$\mathrm{P}_l\,(q) = \frac{1}{2^l l!}\left(\frac{d}{dq}\right)^l (q^2-1)^l$$

Dengan nilai $q = \cos\theta$

Untuk keadaan $l = 0$

$\mathrm{P}_0\,(q) = \frac{1}{2^0 0!}\left(\frac{d}{dq}\right)^0 (q^2-1)^0$

$\mathrm{P}_0\,(q) = \frac{1}{1}\left(\frac{d}{dq}\right)^0 (q^2-1)^0$

$\mathrm{P}_0\,(q) = 1$

$\mathrm{P}_0\,(\cos\theta) = 1$

Untuk keadaan $l = 1$

$\mathrm{P}_1\,(q) = \frac{1}{2^1 1!}\left(\frac{d}{dq}\right)^1 (q^2-1)^1$

$\mathrm{P}_1\,(\cos\theta) = \frac{1}{2^1 1!}\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^1 (cos^2\theta-1)^1$

$\mathrm{P}_1\,(\cos\theta) = \frac{1}{2}\frac{d}{d\cos\theta}cos^2\theta - 1$

$\mathrm{P}_1\,(\cos\theta) = \frac{1}{2}\,.\,2\cos\theta$

$\mathrm{P}_1\,(\cos\theta) = \cos\theta$

Untuk keadaan $l = 2$

$\mathrm{P}_2\,(q) = \frac{1}{2^2 2!}\left(\frac{d}{dq}\right)^2 (q^2-1)^2$

$\mathrm{P}_2\,(\cos\theta) = \frac{1}{2^2 2!}\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^2 (cos^2\theta-1)^2$

$\mathrm{P}_2\,(\cos\theta) = \frac{1}{4.2!}\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^2 (cos^2\theta-1)(cos^2\theta-1)$

$\mathrm{P}_2\,(\cos\theta) = \frac{1}{8}\frac{d}{d\cos\theta}\left(\frac{d}{d\cos\theta}\ (cos^4\theta - cos^2\theta - cos^2\theta + 1)\right)$

$\mathrm{P}_2\,(\cos\theta) = \frac{1}{8}\frac{d}{d\cos\theta}\left(\frac{d}{d\cos\theta}\ (cos^4\theta - 2cos^2\theta + 1)\right)$

$\mathrm{P}_2\,(\cos\theta) = \frac{1}{8}\frac{d}{d\cos\theta}(4\,cos^3\theta - 4\cos\theta)$

$\mathrm{P}_2\,(\cos\theta) = \frac{1}{8}(12\,cos^2\theta - 4)$

$\mathrm{P}_2\,(\cos\theta) = \frac{3}{2}\ cos^2\theta - \frac{1}{2}$

Lampiran 5. Perhitungan Fungsi Legendre Terasosiasi

$$P_l^m(\cos\theta) = \frac{1}{2^l l!}(1)(1 - cos^2\theta)^{\frac{|m|}{2}}\left(\frac{d}{dcos^{l+|m|}\theta}\right)^{l+|m|}(cos^2\theta - 1)^l$$

Dapat dituliskan sebagai berikut:

$$P_l^m(\cos\theta) = (1 - cos^2\theta)^{\frac{|m|}{2}}\frac{d^{|m|}}{dcos\theta^{|m|}}\,\mathrm{P}_l\,(\cos\theta)$$

Dimana, $\mathrm{P}_l\,(\cos\theta) = \frac{1}{2^l l!}\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^l(cos^2\theta - 1)^l$

Untuk $\boldsymbol{n = 1\ (l = 0; m = 0)}$

$P_0^0(\cos\theta) = (1 - cos^2\theta)^{\frac{|0|}{2}}\frac{d^{|0|}}{dcos\theta^{|0|}}\,\mathrm{P}_0\,(\cos\theta)$

$P_0^0(\cos\theta) = (1 - cos^2\theta)^{\frac{|0|}{2}}\frac{d^{|0|}}{dcos\theta^{|0|}}\,(1)$

$P_0^0(\cos\theta) = 1$

Untuk $\boldsymbol{n = 2\ (l = 1; m = -1)}$

$P_1^{-1}(\cos\theta) = (1 - cos^2\theta)^{\frac{|-1|}{2}}\frac{d^{|-1|}}{dcos\theta^{|-1|}}\,\mathrm{P}_1\,(\cos\theta)$

$P_1^{-1}(\cos\theta) = (1 - cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}\frac{d\cos\theta}{d\cos\theta}$

$P_1^{-1}(\cos\theta) = \sqrt{1 - cos^2\theta}$

$P_1^{-1}(\cos\theta) = \sqrt{sin^2\theta}$

$P_1^{-1}(\cos\theta) = \sin\theta$

Untuk $\boldsymbol{n = 2\ (l = 1; m = 0)}$

$P_1^0(\cos\theta) = (1 - cos^2\theta)^{\frac{|0|}{2}}\frac{d^{|0|}}{dcos\theta^{|0|}}\,\mathrm{P}_1\,(\cos\theta)$

$P_1^0(\cos\theta) = (1 - cos^2\theta)^0\,\frac{d^{|0|}}{dcos\theta^{|0|}}\cos\theta$

$P_1^0(\cos\theta) = 1.\frac{\cos\theta}{1}$

$P_1^0(\cos\theta) = \cos\theta$

Untuk $\boldsymbol{n = 2\ (l = 1; m = +1)}$

$P_1^{+1}(\cos\theta) = (1 - cos^2\theta)^{\frac{|+1|}{2}}\frac{d^{|+1|}}{dcos\theta^{|+1|}}\,\mathrm{P}_1\,(\cos\theta)$

$P_1^{+1}(\cos\theta) = (1 - cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}\frac{d\cos\theta}{d\cos\theta}$

$P_1^{+1}(\cos\theta) = \sqrt{1 - cos^2\theta}$

$P_1^{+1}(\cos\theta) = \sqrt{sin^2\theta}$

$P_1^{+1}(\cos\theta) = \sin\theta$

Untuk $n = 3$ ($l = 2; m = -2$)

$P_2^{-2}(\cos\theta) = (1 - cos^2\theta)^{\frac{|-2|}{2}} \frac{d^{|-2|}}{dcos\theta^{|-2|}} \mathrm{P}_2\,(\cos\theta)$

$P_2^{-2}(\cos\theta) = (1 - cos^2\theta)^1 \left(\frac{d}{dcos\theta}\right)^2 \frac{3}{2}\, cos^2\theta - \frac{1}{2}$

$P_2^{-2}(\cos\theta) = 1 - cos^2\theta \left(\frac{d}{dcos\theta}\frac{d}{dcos\theta}\left(\frac{3}{2}\, cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)\right)$

$P_2^{-2}(\cos\theta) = 1 - cos^2\theta \left(\frac{d}{dcos\theta}(3\cos\theta)\right)$

$P_2^{-2}(\cos\theta) = 1 - cos^2\theta\ (3)$

$P_2^{-2}(\cos\theta) = 3\, sin^2\theta$

Untuk $n = 3$ ($l = 2; m = -1$)

$P_2^{-1}(\cos\theta) = (1 - cos^2\theta)^{\frac{|-1|}{2}} \frac{d^{|-1|}}{dcos\theta^{|-1|}} \mathrm{P}_2\,(\cos\theta)$

$P_2^{-1}(\cos\theta) = (1 - cos^2\theta)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{dcos\theta}\right)^1 \frac{3}{2}\, cos^2\theta - \frac{1}{2}$

$P_2^{-1}(\cos\theta) = \sqrt{1 - cos^2\theta}\,\frac{3}{2}.\,2\cos\theta$

$P_2^{-1}(\cos\theta) = \sqrt{1 - cos^2\theta}\ 3\cos\theta$

$P_2^{-1}(\cos\theta) = \sqrt{sin^2\theta}3\cos\theta$

$P_2^{-1}(\cos\theta) = 3\sin\theta\cos\theta$

Untuk $n = 3$ ($l = 2; m = 0$)

$P_2^{0}(\cos\theta) = (1 - cos^2\theta)^{\frac{|0|}{2}} \frac{d^{|0|}}{dcos\theta^{|0|}} \mathrm{P}_2\,(\cos\theta)$

$P_2^{0}(\cos\theta) = (1 - cos^2\theta)^{\frac{|0|}{2}} \frac{d^{|0|}}{dcos\theta^{|0|}} \frac{3}{2}\, cos^2\theta - \frac{1}{2}$

$P_2^{0}(\cos\theta) = 1\ x\ \frac{3}{2}\, cos^2\theta - \frac{1}{2}$

$P_2^{0}(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3cos^2\theta - 1)$

Untuk $n = 3$ ($l = 2; m = +1$)

$P_2^{+1}(\cos\theta) = (1 - cos^2\theta)^{\frac{|+1|}{2}} \frac{d^{|+1|}}{dcos\theta^{|+1|}} \mathrm{P}_2\,(\cos\theta)$

$P_2^{+1}(\cos\theta) = (1 - cos^2\theta)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{dcos\theta}\right)^1 \frac{3}{2}\, cos^2\theta - \frac{1}{2}$

$$P_2^{+1}(\cos\theta) = \sqrt{1 - cos^2\theta}\,\frac{3}{2}.\,2\cos\theta$$

$$P_2^{+1}(\cos\theta) = \sqrt{1 - cos^2\theta}\;3\cos\theta$$

$$P_2^{+1}(\cos\theta) = \sqrt{sin^2\theta}\;3\cos\theta$$

$$P_2^{+1}(\cos\theta) = 3\sin\theta\cos\theta$$

Untuk $\boldsymbol{n = 3\ (l = 2; m = +2)}$

$$P_2^{+2}(\cos\theta) = (1 - cos^2\theta)^{\frac{|+2|}{2}}\,\frac{d^{|+2|}}{dcos\theta^{|+2|}}\,\mathrm{P}_2\,(\cos\theta)$$

$$P_2^{+2}(\cos\theta) = (1 - cos^2\theta)^1\left(\frac{d}{dcos\theta}\right)^2\,\frac{3}{2}\,cos^2\theta - \frac{1}{2}$$

$$P_2^{+2}(\cos\theta) = 1 - cos^2\theta\,\left(\frac{d}{dcos\theta}\frac{d}{dcos\theta}\left(\frac{3}{2}\,cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$P_2^{+2}(\cos\theta) = 1 - cos^2\theta\left(\frac{d}{dcos\theta}(3\cos\theta)\right)$$

$$P_2^{+2}(\cos\theta) = 1 - cos^2\theta\ (3)$$

$$P_2^{+2}(\cos\theta) = 3\,(1 - cos^2\theta)$$

$$P_2^{+2}(\cos\theta) = 3\,sin^2\theta$$

Lampiran 6. Perhitungan Fungsi Persamaan Azimuth Atom Tritium

Perhitungan fungsi persamaan Azimuth $\Phi_m(\phi)$ atom Tritium untuk berbagai keadaan. Bentuk umum fungsi gelombang azimuth, yaitu:

$$\Phi_m(\phi) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{im\phi}$$

Untuk $m = 0$

$$\Phi_0(\phi) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i0\phi}$$

$$\Phi_0(\phi) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{0}$$

$$\Phi_0(\phi) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}$$

Untuk $m = -1$

$$\Phi_{(-1)}(\phi) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i(-1)\phi}$$

$$\Phi_{(-1)}(\phi) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{-i\phi}$$

Untuk $m = 1$

$$\Phi_{(1)}(\phi) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i(1)\phi}$$

$$\Phi_{(1)}(\phi) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i\phi}$$

Untuk $m = -2$

$$\Phi_{(-2)}(\phi) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i(-2)\phi}$$

$$\Phi_{(-2)}(\phi) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{-2i\phi}$$

Untuk $m = 2$

$$\Phi_{(2)}(\phi) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i(2)\phi}$$

$$\Phi_{(2)}(\phi) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{2i\phi}$$

Lampiran 7. Perhitungan Fungsi Persamaan Polar Atom Tritium

Fungsi Persamaan Polar dipengaruhi oleh bilangan kuantum magnetic m dan bilangan kuantum azimuth l yang bentuk umum persamaanya yaitu:

$$\Theta_{lm}(\theta) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}}\sqrt{\frac{(2l+1)}{2}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}P_l^m(\cos\theta)$$

Dengan fungsi Legendre Terasosiasi, sebagai

$$P_l^m(\cos\theta) = \frac{1}{2^l l!}(1)(1-cos^2\theta)^{\frac{|m|}{2}}\left(\frac{d}{dcos^{l+|m|}\theta}\right)^{l+|m|}(cos^2\theta-1)^l$$

Untuk $n = 1$ ($l = 0; m = 0$)

$$\Theta_{00}(\theta) = (-1)^{\frac{0+|0|}{2}}\sqrt{\frac{(2(0)+1)}{2}\frac{(0-|0|)!}{(0+|0|)!}}P_0^0(\cos\theta)$$

$$\Theta_{00}(\theta) = (-1)^0\sqrt{\frac{1}{2}}P_0^0(\cos\theta)$$

$$\Theta_{00}(\theta) = (-1)^0\sqrt{\frac{1}{2}}.1$$

$$\Theta_{00}(\theta) = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Untuk $n = 2$ ($l = 1; m = 0$)

$$\Theta_{10}(\theta) = (-1)^{\frac{0+|0|}{2}}\sqrt{\frac{(2(1)+1)}{2}\frac{(1-|0|)!}{(1+|0|)!}}P_1^0(\cos\theta)$$

$$\Theta_{10}(\theta) = (-1)^0\sqrt{\frac{3}{2!}}P_1^0(\cos\theta)$$

$$\Theta_{10}(\theta) = \sqrt{\frac{3}{2}}\cos\theta$$

Untuk $n = 2$ ($l = 1; m = 1$)

$$\Theta_{11}(\theta) = (-1)^{\frac{1+|1|}{2}}\sqrt{\frac{(2(1)+1)}{2}\frac{(1-|1|)!}{(1+|1|)!}}P_1^1(\cos\theta)$$

$$\Theta_{11}(\theta) = (-1)^1\sqrt{\frac{(2(1)+1)}{2}\frac{(1-|1|)!}{(1+|1|)!}}P_1^1(\cos\theta)$$

$$\Theta_{11}(\theta) = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{1}{2}}\sin\theta$$

$$\Theta_{11}(\theta) = \sqrt{\frac{3}{4}}\sin\theta$$

$$\Theta_{11}(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$$

Untuk $n = 2$ ($l = 1; m = -1$)

$$\Theta_{1(-1)}(\theta) = (-1)^{\frac{-1+|-1|}{2}}\sqrt{\frac{(2(1)+1)}{2}\frac{(1-|-1|)!}{(1+|-1|)!}}P_1^1(\cos\theta)$$

$$\Theta_{1-1}(\theta) = (-1)^0\sqrt{\frac{(2(1)+1)}{2}\frac{(1-|-1|)!}{(1+|-1|)!}}P_1^1(\cos\theta)$$

$$\Theta_{11}(\theta) = -\sqrt{\frac{3}{2}\frac{1}{2}}\sin\theta$$

$$\Theta_{11}(\theta) = -\sqrt{\frac{3}{4}}\sin\theta$$

$$\Theta_{11}(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$$

Untuk $n = 3$ ($l = 2; m = 0$)

$$\Theta_{20}(\theta) = (-1)^{\frac{0+|0|}{2}}\sqrt{\frac{(2(2)+1)}{2}\frac{(2-|0|)!}{(2+|0|)!}}P_2^0(\cos\theta)$$

$$\Theta_{20}(\theta) = (-1)^0\sqrt{\frac{5}{2}\frac{2}{2}}P_2^0(\cos\theta)$$

$$\Theta_{20}(\theta) = (-1)^0\sqrt{\frac{5}{2}\frac{1}{2}}\ (3\ cos^2\theta - 1)$$

$$\Theta_{20}(\theta) = \sqrt{\frac{5}{2}\frac{1}{4}}\ (3\ cos^2\theta - 1)$$

$$\Theta_{20}(\theta) = \sqrt{\frac{5}{8}}\ (3\ cos^2\theta - 1)$$

Untuk $n = 3$ ($l = 2; m = 1$)

$$\Theta_{21}(\theta) = (-1)^{\frac{1+|1|}{2}}\sqrt{\frac{(2(2)+1)}{2}\frac{(2-|1|)!}{(2+|1|)!}}P_2^1(\cos\theta)$$

$$\Theta_{21}(\theta) = (-1)^1\sqrt{\frac{5}{2}\frac{1}{6}}(3\sin\Theta\cos\theta)$$

$$\Theta_{21}(\theta) = \sqrt{\frac{5}{12}}(3\sin\Theta\cos\theta)$$

$$\Theta_{21}(\theta) = \sqrt{\frac{15}{4}}(\sin\Theta\cos\theta)$$

$$\Theta_{21}(\theta) = \frac{\sqrt{15}}{2}(\sin\Theta\cos\theta)$$

Untuk $n = 3$ ($l = 2; m = -1$)

$$\Theta_{2(-1)}(\theta) = (-1)^{\frac{1+|-1|}{2}}\sqrt{\frac{(2(2)+1)}{2}\frac{(2-|-1|)!}{(2+|-1|)!}}P_2^1(\cos\theta)$$

$$\Theta_{2(-1)}(\theta) = (-1)^0\sqrt{\frac{5}{2}\frac{0}{4!}}(3\sin\theta\cos\theta)$$

$$\Theta_{2(-1)}(\theta) = (1)\sqrt{\frac{5}{12}}(3\sin\theta\cos\theta)$$

$$\Theta_{2(-1)}(\theta) = -\sqrt{\frac{15}{4}}(\sin\theta\cos\theta)$$

$$\Theta_{2(-1)}(\theta) = -\frac{\sqrt{15}}{2}(\sin\theta\cos\theta)$$

Untuk $\boldsymbol{n = 3\ (l = 2; m = 2)}$

$$\Theta_{22}(\theta) = (-1)^{\frac{2+|2|}{2}}\sqrt{\frac{(2(2)+1)}{2}\frac{(2-|2|)!}{(2+|2|)!}}P_2^2(\cos\theta)$$

$$\Theta_{22}(\theta) = (-1)^2\sqrt{\frac{5}{2}\frac{0!}{4!}}(3\,sin^2\,\theta)$$

$$\Theta_{22}(\theta) = (-1)^2\sqrt{\frac{5x9}{2x24}}(\,sin^2\,\theta)$$

$$\Theta_{22}(\theta) = (1)\sqrt{\frac{45}{48}}(\,sin^2\,\theta)$$

$$\Theta_{22}(\theta) = (1)\sqrt{\frac{45}{48}}(\,sin^2\,\theta)$$

$$\Theta_{22}(\theta) = \sqrt{\frac{15}{16}}(\,sin^2\,\theta)$$

$$\Theta_{22}(\theta) = \frac{\sqrt{15}}{4}(\,sin^2\,\theta)$$

Untuk $\boldsymbol{n = 3\ (l = 2; m = -2)}$

$$\Theta_{2(-2)}(\theta) = (-1)^{\frac{-2+|-2|}{2}}\sqrt{\frac{(2(2)+1)}{2}\frac{(2-|-2|)!}{(2+|-2|)!}}P_2^2(\cos\theta)$$

$$\Theta_{2(-2)}(\theta) = (-1)^0\sqrt{\frac{5}{2}\frac{0!}{4!}}(3\,sin^2\,\theta)$$

$$\Theta_{2(-2)}(\theta) = (-1)^0\sqrt{\frac{5x9}{2x24}}(\,sin^2\,\theta)$$

$$\Theta_{2(-2)}(\theta) = (1)\sqrt{\frac{45}{48}}(\,sin^2\,\theta)$$

$$\Theta_{2(-2)}(\theta) = (1)\sqrt{\frac{45}{48}}(\,sin^2\,\theta)$$

$$\Theta_{22}(\theta) = \sqrt{\frac{15}{16}}(\,sin^2\,\theta)$$

$$\Theta_{22}(\theta) = \frac{\sqrt{15}}{4}(\,sin^2\,\theta)$$

Lampiran 8. Perhitungan Fungsi Persamaan Radial Atom Tritium

Persamaan Radial atom Tritium dipengaruhi oleh bilangan kuatum utama n dan bilangan kuantum azimuth l. Bentuk persamaan fungsi gelombang radial atom tritium, yaitu:

$$R_{nl}(r) = \left[\left(\frac{2}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2r}{na_0}\right]^l e^{-\frac{r}{na_0}} L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right)$$

Dengan Rumus Rodrigues, sebagai berikut:

$$L_q^p(\rho) = L_{n+l}^{2l+1}(\rho)$$

$$= (-1)^{2l+1} \frac{(n+l)!}{(n-l-1)!} e^{\frac{2r}{na_0}} \frac{d^{n+l}}{d\left(\frac{2r}{na_0}\right)^{n+l}} \left(e^{-\frac{2r}{na_0}} \left(\frac{2r}{na_0}\right)^{n-l-1}\right)$$

$$L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right) = (-1)^{2l+1} \frac{(n+l)!}{(n-l-1)!} e^{\frac{2r}{na_0}} \frac{d^{n+l}}{d\left(\frac{2r}{na_0}\right)^{n+l}} \left(e^{-\frac{2r}{na_0}} \left(\frac{2r}{na_0}\right)^{n-l-1}\right)$$

Untuk ($n = 1; l = 0$)

$$L_{1+0}^{2(0)+1}\left(\frac{2r}{1a_0}\right) = (-1)^{2(0)+1} \frac{(1+0)!}{(1-0-1)!} e^{\frac{2r}{1a_0}} \frac{d^{1+0}}{d\left(\frac{2r}{1a_0}\right)^{1+0}} \left(e^{-\frac{2r}{1a_0}} \left(\frac{2r}{1a_0}\right)^{1-0-1}\right)$$

$$L_1^1\left(\frac{2r}{a_0}\right) = (-1)^1 e^{\frac{2r}{a_0}} \frac{d^1}{d\left(\frac{2r}{a_0}\right)^1} \left(e^{-\frac{2r}{a_0}} \left(\frac{2r}{a_0}\right)^0\right)$$

Misalkan: $F = \frac{2r}{a_0}$

$$L_1^1(F) = (-1)^1 e^F \frac{d^1}{d(F)^1} (e^{-F}(F)^0)$$

$$L_1^1(F) = -e^F e^{-F}$$

$$L_1^1(F) = e^0$$

$$L_1^1\left(\frac{2r}{a_0}\right) = 1$$

Maka Fungsi Gelombang Radial Atom Tritium untuk keadaan dasar, sebagai berikut:

$$R_{10}(r) = \left[\left(\frac{2}{1a_0}\right)^3 \frac{(1-0-1)!}{21[(1+0)!]^3}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2r}{1a_0}\right]^0 e^{-\frac{r}{1a_0}} L_{1+0}^{2(0)+1}\left(\frac{2r}{1a_0}\right)$$

$$R_{10}(r) = \left[\left(\frac{2}{a_0}\right)^3\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2r}{1a_0}\right]^0 e^{-\frac{r}{a_0}} L_1^1\left(\frac{2r}{a_0}\right)$$

$$R_{10}(r) = \left(\frac{2}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{r}{a_0}}(1)$$

$$R_{10}(r) = 2a_0^{-3/2}\left(e^{-r/a_0}\right)$$

Untuk ($n = 2; l = 0$)

$$L_{2+0}^{2(0)+1}\left(\frac{2r}{2a_0}\right) = (-1)^{2(0)+1}\frac{(2+0)!}{(2-0-1)!}e^{\frac{2r}{2a_0}}\frac{d^{2+0}}{d\left(\frac{2r}{2a_0}\right)^{2+0}}\left(e^{-\frac{2r}{2a_0}}\left(\frac{2r}{2a_0}\right)^{2-0-1}\right)$$

$$L_2^1\left(\frac{r}{a_0}\right) = (-1)^1\frac{2}{1}e^{\frac{r}{a_0}}\frac{d^2}{d\left(\frac{r}{a_0}\right)^2}\left(e^{-\frac{r}{a_0}}\left(\frac{r}{a_0}\right)^1\right)$$

Misalkan: $F = \frac{r}{a_0}$

$$L_2^1(F) = (-2)e^F\frac{d^2}{d(F)^2}(e^{-F}(F)^1)$$

$$L_2^1(F) = (-2)e^F\frac{d^2}{d(F)^2}(e^{-F}F)$$

$$L_2^1(F) = (-2)e^F\frac{d}{d(F)}(e^{-F}.1 + -e^{-F}\ F)$$

$$L_2^1(F) = (-2)e^F(-e^{-F} + -e^{-F}\ 1 + e^{-F}.F)$$

$$L_2^1(F) = (-2)e^F(-2e^{-F} + e^{-F}.F)$$

$$L_2^1(F) = -2(-2 + F)$$

$$L_2^1\left(\frac{r}{a_0}\right) = -2(-2 + \left(\frac{r}{a_0}\right))$$

$$L_2^1\left(\frac{r}{a_0}\right) = (4 - 2\left(\frac{r}{a_0}\right))$$

Maka Fungsi Gelombang Radial Atom Tritium untuk keadaan tereksitasi pertama, sebagai berikut:

$$R_{20}(r) = \left[\left(\frac{2}{2a_0}\right)^3\frac{(2-0-1)!}{2(2)[(2+0)!]^3}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{2r}{2a_0}\right]^0 e^{-\frac{r}{2a_0}} L_{2+0}^{2(0)+1}\left(\frac{2r}{2a_0}\right)$$

$$R_{20}(r) = \left[\frac{2^3}{2^3 a_0{}^3}\frac{1}{4(2!)^3}\right]^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{r}{2a_0}} L_2^1\left(\frac{r}{a_0}\right)$$

$$R_{20}(r) = \sqrt{\frac{1}{a_0{}^3}\frac{1}{2!}\frac{1}{2}}.\frac{1}{2}e^{-\frac{r}{2a_0}} L_2^1\left(\frac{r}{a_0}\right)$$

$$R_{20}(r) = \sqrt{\frac{1}{2a_0{}^3}}\frac{1}{4}e^{-\frac{r}{2a_0}}\ 2(2 - \left(\frac{r}{a_0}\right))$$

$$R_{20}(r) = \frac{1}{2}\frac{1}{(2a_0)^{\frac{3}{2}}}\left(2-\left(\frac{r}{a_0}\right)\right)e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

Untuk ($\boldsymbol{n = 2; l = 1}$)

$$L_{2+(1)}^{2(1)+1}\left(\frac{2r}{2a_0}\right) = (-1)^{2(1)+1}\frac{(2+1)!}{(2-1-1)!}e^{\frac{2r}{2a_0}}\frac{d^{2+1}}{d\left(\frac{2r}{2a_0}\right)^{2+1}}\left(e^{-\frac{2r}{2a_0}}\left(\frac{2r}{2a_0}\right)^{2-1-1}\right)$$

$$L_3^3\left(\frac{r}{a_0}\right) = (-1)^3\frac{3!}{0!}e^{\frac{r}{a_0}}\frac{d^3}{d\left(\frac{r}{a_0}\right)^3}\left(e^{-\frac{r}{a_0}}\left(\frac{r}{a_0}\right)^0\right)$$

$$L_3^3\left(\frac{r}{a_0}\right) = (-1)6\, e^{\frac{r}{a_0}}\frac{d^3}{d\left(\frac{r}{a_0}\right)^3}\left(e^{-\frac{r}{a_0}}\right)$$

Misalkan: $F = \frac{r}{a_0}$

$$L_3^3(F) = (-1)6\, e^F\frac{d^3}{d(F)^3}(e^{-F})$$

$$L_3^3(F) = -6\, e^F\frac{d^2}{d(F)^2}(-e^{-F})$$

$$L_3^3(F) = -6\, e^F\frac{d}{d(F)}(e^{-F})$$

$$L_3^3(F) = -6\, e^F(-e^{-F})$$

$$L_3^3\left(\frac{r}{a_0}\right) = 6$$

Maka Fungsi Gelombang Radial Atom Tritium untuk keadaan tereksitasi pertama, sebagai berikut:

$$R_{21}(r) = \left[\left(\frac{2}{2a_0}\right)^3\frac{(2-1-1)!}{2(2)[(2+1)!]^3}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{2r}{2a_0}\right]^1 e^{-\frac{r}{2a_0}}L_{2+1}^{2(1)+1}\left(\frac{2r}{2a_0}\right)$$

$$R_{21}(r) = \sqrt{\left(\frac{1}{a_0}\right)^3\frac{0!}{4\,(3!)^3}}\left[\frac{r}{a_0}\right]^1 e^{-\frac{r}{2a_0}}L_3^3\left(\frac{r}{a_0}\right)$$

$$R_{21}(r) = \sqrt{\left(\frac{1}{a_0}\right)^3\frac{1}{3!}\frac{1}{2}.\frac{1}{3!}}\left[\frac{r}{a_0}\right]^1 e^{-\frac{r}{2a_0}}L_3^3\left(\frac{r}{a_0}\right)$$

$$R_{21}(r) = \sqrt{\left(\frac{1}{3!a_0}\right)^3\frac{1}{12}}\left[\frac{r}{a_0}\right]^1 e^{-\frac{r}{2a_0}}L_3^3\left(\frac{r}{a_0}\right)$$

$$R_{21}(r) = \sqrt{\left(\frac{1}{6a_0}\right)^3\frac{1}{12}}\left[\frac{r}{a_0}\right]^1 e^{-\frac{r}{2a_0}}(6)$$

$$R_{21}(r) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{6}}\left[\frac{r}{a_0}\right]a_0^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

$$R_{21}(r) = \sqrt{\frac{1}{6}}\ \left[\frac{r}{2a_0}\right]\ a_0^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

Untuk ($\boldsymbol{n = 3; l = 0}$)

$$L_{3+0}^{2(0)+1}\left(\frac{2r}{3a_0}\right) = (-1)^{2(0)+1}\frac{(3+0)!}{(3-0-1)!}e^{\frac{2r}{3a_0}}\frac{d^{3+0}}{d\left(\frac{2r}{3a_0}\right)^{3+0}}\left(e^{-\frac{2r}{3a_0}}\left(\frac{2r}{3a_0}\right)^{3-0-1}\right)$$

$$L_3^1\left(\frac{2r}{3a_0}\right) = (-1)\frac{3!}{2!}e^{\frac{2r}{3a_0}}\frac{d^3}{d\left(\frac{2r}{3a_0}\right)^3}\left(e^{-\frac{2r}{3a_0}}\left(\frac{2r}{3a_0}\right)^2\right)$$

Misalkan: $F = \frac{2r}{3a_0}$

$$L_3^1(F) = -\frac{3!}{2!}e^F\frac{d^3}{d(F)^3}(e^{-F}(F)^2)$$

$$L_3^1(F) = -3e^F\frac{d^2}{d(F)^2}(e^{-F}.2F + \ -e^{-F}.F^2)$$

$$L_3^1(F) = -3e^F\frac{d}{d(F)}(e^{-F}.2 + \ (-e^{-F})\ 2F + (-e^{-F})\ 2\ F + (e^{-F})F^2)$$

$$L_3^1(F) = -3e^F\frac{d}{d(F)}(2e^{-F} + \ 2(-e^{-F})2F \ + (e^{-F})F^2)$$

$$L_3^1(F) = -3e^F\left(2-e^{-F} + 2(2-e^{-F} + e^{-F}2F) + (e^{-F}2F + -e^{-F}F^2)\right)$$

$$L_3^1(F) = -3e^F(-6e^{-F} + 3e^{-F}2F + e^{-F}F^2)$$

$$L_3^1(F) = -3e^F(-6e^{-F} + 6e^{-F}F + e^{-F}F^2)$$

$$L_3^1(F) = -3(-6 + 6F + F^2)$$

$$L_3^1(F) = 3(F^2 - 6F + 6)$$

$$L_3^1(F) = F^2 - 18F + 18$$

$$L_3^1\left(\frac{2r}{3a_0}\right) = \left(\frac{2r}{3a_0}\right)^2 - 18\left(\frac{2r}{3a_0}\right) + 18$$

Maka Fungsi Gelombang Radial Atom Tritium untuk keadaan tereksitasi kedua, sebagai berikut:

$$R_{30}(r) = \left[\left(\frac{2}{3a_0}\right)^3\frac{(3-0-1)!}{2(3)[(3+0)!]^3}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{2r}{3a_0}\right]^0 e^{-\frac{r}{3a_0}}L_{3+0}^{2(0)+1}\left(\frac{2r}{3a_0}\right)$$

$$R_{30}(r) = \left[\left(\frac{2}{3a_0}\right)^3\frac{2!}{6\ (3!)^3}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{2r}{3a_0}\right]^0 e^{-\frac{r}{3a_0}}L_3^1\left(\frac{2r}{3a_0}\right)$$

$$R_{30}(r) = \left[\left(\frac{2}{3a_0}\right)^3\frac{2}{6\ 3!}\right]^{\frac{1}{2}}\frac{1}{3!}\left[\frac{2r}{3a_0}\right]^0 e^{-\frac{r}{3a_0}}\,3(F^2 - 6F + 6)$$

$$R_{30}(r) = \left[\frac{2^3}{3^3{a_0}^3}\frac{1}{3.6}\right]^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\left[\frac{2r}{3a_0}\right]^0 e^{-\frac{r}{3a_0}}(F^2 - 6F + 6)$$

$$R_{30}(r) = \left[\frac{2^3}{3.2\,a_0{}^3}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\frac{1}{9}\left[\frac{2r}{3a_0}\right]^0 e^{-\frac{r}{3a_0}} (F^2 - 6F + 6)$$

$$R_{30}(r) = \frac{2}{\sqrt{3\,a_0{}^3}}\frac{1}{18} e^{-\frac{r}{3a_0}} (F^2 - 6F + 6)$$

$$R_{30}(r) = \frac{1}{9\sqrt{3\,a_0{}^3}} e^{-\frac{r}{3a_0}} \left(\left(\frac{2r}{3a_0}\right)^2 - 6\left(\frac{2r}{3a_0}\right) + 6\right)$$

$$R_{30}(r) = \frac{1}{9\sqrt{3\,a_0{}^3}} e^{-\frac{r}{3a_0}} \left(\frac{4r^2}{9a_0{}^2} - \left(\frac{12r}{3a_0}\right) + 6\right)$$

$$R_{30}(r) = \frac{1}{9\sqrt{3\,a_0{}^3}} e^{-\frac{r}{3a_0}} \frac{2}{9}\left(\frac{2r^2}{a_0{}^2} - \left(\frac{18r}{a_0}\right) + 27\right)$$

$$R_{30}(r) = \frac{2}{81\sqrt{3\,a_0{}^3}} \left(\frac{2r^2}{a_0{}^2} - \left(\frac{18r}{a_0}\right) + 27\right) e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

Untuk ($\boldsymbol{n = 3; l = 1}$)

$$L_{3+1}^{2(1)+1}\left(\frac{2r}{3a_0}\right) = (-1)^{2(1)+1} \frac{(3+1)!}{(3-1-1)!} e^{\frac{2r}{3a_0}} \frac{d^{3+1}}{d\left(\frac{2r}{3a_0}\right)^{3+1}} \left(e^{-\frac{2r}{3a_0}} \left(\frac{2r}{3a_0}\right)^{3-1-1}\right)$$

$$L_4^3\left(\frac{2r}{3a_0}\right) = (-1)^3 \frac{4!}{1!} e^{\frac{2r}{3a_0}} \frac{d^4}{d\left(\frac{2r}{3a_0}\right)^4} \left(e^{-\frac{2r}{3a_0}} \left(\frac{2r}{3a_0}\right)^1\right)$$

$$L_4^3\left(\frac{2r}{3a_0}\right) = -\frac{4!}{1!} e^{\frac{2r}{3a_0}} \frac{d^4}{d\left(\frac{2r}{3a_0}\right)^4} \left(e^{-\frac{2r}{3a_0}} \left(\frac{2r}{3a_0}\right)^1\right)$$

Misalkan: : $F = \frac{2r}{3a_0}$

$$L_4^3\left(\frac{2r}{3a_0}\right) = -\frac{4x3x2x1}{1} e^{\frac{2r}{3a_0}} \frac{d^4}{d\left(\frac{2r}{3a_0}\right)^4} \left(e^{-\frac{2r}{3a_0}} \left(\frac{2r}{3a_0}\right)^1\right)$$

$$L_4^3(F) = -24\, e^F \frac{d^4}{d(F)^4} (e^{-F} (F)^1)$$

$$L_4^3(F) = -24\, e^F \frac{d^3}{d(F)^3} (e^{-F} + (-e^{-F})F)$$

$$L_4^3(F) = -24\, e^F \frac{d^2}{d(F)^2} \left((-e^{-F}) + (-e^{-F}) + e^{-F}F\right)$$

$$L_4^3(F) = -24\, e^F \frac{d}{d(F)} (e^{-F} + e^{-F} + e^{-F} + (-e^{-F})F)$$

$$L_4^3(F) = -24\, e^F \left((-e^{-F}) + (-e^{-F}) + (-e^{-F}) + (-e^{-F}) + e^{-F}F\right)$$

$$L_4^3(F) = -24\, e^F \left((-4e^{-F}) + e^{-F}F\right)$$

$$L_4^3(F) = -24\left((-4) + F\right)$$

$$L_4^3\left(\frac{2r}{3a_0}\right) = 24\left(4 - \frac{2r}{3a_0}\right)$$

Maka Fungsi Gelombang Radial Atom Tritium untuk keadaan tereksitasi kedua, sebagai berikut:

$$R_{31}(r) = \left[\left(\frac{2}{3a_0}\right)^3 \frac{(3-1-1)!}{2(3)[(3+1)!]^3}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2r}{3a_0}\right]^1 e^{-\frac{r}{3a_0}} L_{3+1}^{2(1)+1}\left(\frac{2r}{3a_0}\right)$$

$$R_{31}(r) = \left[\frac{2^3}{3^3{a_0}^3}\frac{1!}{2(3)(4!)^3}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2r}{3a_0}\right]^1 e^{-\frac{r}{3a_0}} L_4^3\left(\frac{2r}{3a_0}\right)$$

$$R_{31}(r) = \left[\frac{2^2}{3^4{a_0}^3}\frac{1}{24}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{24}\left[\frac{2r}{3a_0}\right]^1 e^{-\frac{r}{3a_0}}\, 24\left(4-\frac{2r}{3a_0}\right)$$

$$R_{31}(r) = \sqrt{\frac{4}{24{a_0}^3}}\frac{1}{9}\left[\frac{2r}{3a_0}\right]^1 e^{-\frac{r}{3a_0}} \left(4-\frac{2r}{3a_0}\right)$$

$$R_{31}(r) = \frac{1}{9}\sqrt{\frac{1}{6{a_0}^3}}\left(\frac{2r}{3a_0}\right)\left(4-\frac{2r}{3a_0}\right) e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

$$R_{31}(r) = \frac{1}{9}\sqrt{\frac{1}{6{a_0}^3}}\left(\frac{24r}{9a_0}-\frac{4r^2}{9{a_0}^2}\right) e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

$$R_{31}(r) = \frac{1}{9}\frac{4}{9}\sqrt{\frac{1}{6{a_0}^3}}\frac{r}{a_0}\left(6-\frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

$$R_{31}(r) = \frac{4}{81}\sqrt{\frac{1}{6{a_0}^3}}\frac{r}{a_0}\left(6-\frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

Untuk ($\boldsymbol{n = 3; l = 2}$)

$$L_{3+2}^{2(2)+1}\left(\frac{2r}{3a_0}\right) = (-1)^{2(2)+1}\frac{(3+2)!}{(3-2-1)!} e^{\frac{2r}{3a_0}} \frac{d^{3+2}}{d\left(\frac{2r}{3a_0}\right)^{3+2}}\left(e^{-\frac{2r}{3a_0}}\left(\frac{2r}{3a_0}\right)^{3-2-1}\right)$$

$$L_5^5\left(\frac{2r}{3a_0}\right) = (-1)^5\frac{5!}{0!} e^{\frac{2r}{3a_0}} \frac{d^5}{d\left(\frac{2r}{3a_0}\right)^5}\left(e^{-\frac{2r}{3a_0}}\left(\frac{2r}{3a_0}\right)^0\right)$$

$$L_5^5\left(\frac{2r}{3a_0}\right) = -\frac{5!}{0!} e^{\frac{2r}{3a_0}} \frac{d^5}{d\left(\frac{2r}{3a_0}\right)^5}\left(e^{-\frac{2r}{3a_0}}\right)$$

Misalkan: $F = \frac{2r}{3a_0}$

$$L_5^5\left(\frac{2r}{3a_0}\right) = -\frac{5x4x3x2x1}{1} e^{\frac{2r}{3a_0}} \frac{d^5}{d\left(\frac{2r}{3a_0}\right)^5}\left(e^{-\frac{2r}{3a_0}}\right)$$

$$L_5^5\left(\frac{2r}{3a_0}\right) = -120\, e^F \frac{d^5}{d(F)^5}\left(e^{-F}\right)$$

$$L_5^5\left(\frac{2r}{3a_0}\right) = -120\, e^F \frac{d^4}{d(F)^4}\left(-e^{-F}\right)$$

$$L_5^5\left(\frac{2r}{3a_0}\right) = -120\, e^F \frac{d^3}{d(F)^3}\left(e^{-F}\right)$$

$$L_5^5\left(\frac{2r}{3a_0}\right) = -120\ e^F \frac{d^2}{d(F)^2}(-e^{-F})$$

$$L_5^5\left(\frac{2r}{3a_0}\right) = -120\ e^F \frac{d}{d(F)}(e^{-F})$$

$$L_5^5\left(\frac{2r}{3a_0}\right) = -120\ e^F(-e^{-F})$$

$$L_5^5\left(\frac{2r}{3a_0}\right) = 120$$

Maka Fungsi Gelombang Radial Atom Tritium untuk keadaan tereksitasi kedua, sebagai berikut:

$$R_{32}(r) = \left[\left(\frac{2}{3a_0}\right)^3 \frac{(3-2-1)!}{2(3)[(3+2)!]^3}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2r}{3a_0}\right]^2 e^{-\frac{r}{3a_0}} L_{3+2}^{2(2)+1}\left(\frac{2r}{3a_0}\right)$$

$$R_{32}(r) = \left[\frac{2^3}{3^3 {a_0}^3} \frac{0!}{2(3)(5!)^3}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2r}{3a_0}\right]^2 e^{-\frac{r}{3a_0}} L_5^5\left(\frac{2r}{3a_0}\right)$$

$$R_{32}(r) = \left[\frac{1}{(5!)\ {a_0}^3}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{2}{9}\frac{1}{5!} \left[\frac{2r}{3a_0}\right]^2 e^{-\frac{r}{3a_0}} L_5^5\left(\frac{2r}{3a_0}\right)$$

$$R_{32}(r) = \left[\frac{1}{120\ {a_0}^3}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{2}{9}\frac{1}{120} \left(\frac{4r^2}{9{a_0}^2}\right)\ e^{-\frac{r}{3a_0}} L_5^5\left(\frac{2r}{3a_0}\right)$$

$$R_{32}(r) = \sqrt{\frac{1}{120\ {a_0}^3}} \left(\frac{r^2}{1215\ {a_0}^2}\right)\ e^{-\frac{r}{3a_0}}\ (120)$$

$$R_{32}(r) = \sqrt{\frac{1}{30{a_0}^3}\ \frac{1}{2}\ \frac{120}{1215}} \left(\frac{r^2}{{a_0}^2}\right) e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

$$R_{32}(r) = \sqrt{\frac{1}{30{a_0}^3}} \frac{4}{81} \left(\frac{r^2}{{a_0}^2}\right) e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

$$R_{32}(r) = \frac{4}{81}\sqrt{\frac{1}{30}} \left(\frac{r^2}{{a_0}^2}\right) {a_0}^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

Lampiran 9. Perhitungan Fungsi Gelombang Atom Tritium

$$\psi_{n,l,m_l}(r,\theta,\phi) = R_{n,l}(r_c)\Theta_{l,m_l}(\theta)\Phi_m(\phi)$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\pm im\phi}\sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{2(l+|m|)!}}\left[\frac{1}{2^l l!}(1-cos^2\theta)^{\frac{|m|}{2}}\frac{d^{l+|m|}}{dcos^{l+|m|}\theta}(cos^2\theta - 1)^l\right]\left[\left(\frac{2}{na_0}\right)^3\frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{2r_c}{na_0}\right]^l e^{-\frac{r_c}{na_0}}L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2r_c}{na_0}\right)$$

1) Fungsi Gelombang Atom Tritium Untuk Keadaan Dasar

a. **Untuk $\boldsymbol{n=1; l=0; m=0}$**

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = R_{n,l}(r_c)\Theta_{l,m_l}(\theta)\Phi_m(\phi)$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\sqrt{\frac{1}{2}}2a_0^{3/2}\left(e^{-r/a_0}\right)$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}2a_0^{3/2}\left(e^{-r/a_0}\right)$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \sqrt{\frac{1}{\pi a_0^3}}\ e^{-r/a_0}$$

2) Fungsi Gelombang Atom Tritium Untuk Keadaan Tereksitasi Pertama

a. **Untuk $\boldsymbol{n=2; l=0; m=0}$**

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = R_{n,l}(r_c)\Theta_{l,m_l}(\theta)\Phi_m(\phi)$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\sqrt{\frac{1}{2}}\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(2-\left(\frac{r}{a_0}\right)\right)(a_0)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\left(2-\left(\frac{r}{a_0}\right)\right)(a_0)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2\pi {a_0}^3}}\left(2-\left(\frac{r}{a_0}\right)\right)e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

b. **Untuk $\boldsymbol{n=2; l=1; m=0}$**

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = R_{n,l}(r_c)\Theta_{l,m_l}(\theta)\Phi_m(\phi)$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\sqrt{\frac{3}{2}}\cos\theta\sqrt{\frac{1}{6}}\left[\frac{r}{2a_0}\right]a_0^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \sqrt{\frac{1}{8\pi}}\left[\frac{r}{2a_0}\right]\cos\theta\ a_0^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi a_0^3}}\ \frac{1}{2}\left[\frac{r}{2a_0}\right]\cos\theta\ e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \frac{r}{4a_0}\sqrt{\frac{1}{2\pi a_0^3}}\ \cos\theta\ e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

c. **Untuk $\boldsymbol{n = 2; l = 1;\ m = 1}$**

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = R_{n,l}(r_c)\Theta_{l,m_l}(\theta)\Phi_m(\phi)$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}e^{i\phi}\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\sqrt{\frac{1}{6}}\ \left[\frac{r}{2a_0}\right]\ a_0^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \sqrt{\frac{3}{12\pi}}\ \frac{1}{2}\left[\frac{r}{2a_0}\right]\sin\theta\ a_0^{\frac{3}{2}}e^{i\phi}e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}\ \left[\frac{r}{4a_0}\right]\sin\theta\ a_0^{\frac{3}{2}}e^{i\phi}e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \frac{r}{8a_0}\sqrt{\frac{1}{\pi a_0^3}}\ \sin\theta\ e^{i\phi}e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

d. **Untuk $\boldsymbol{n = 2; l = 1;\ m = -1}$**

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = R_{n,l}(r_c)\Theta_{l,m_l}(\theta)\Phi_m(\phi)$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}e^{-i\phi}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)\sqrt{\frac{1}{6}}\ \left[\frac{r}{2a_0}\right]\ a_0^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = -\sqrt{\frac{3}{12\pi}}\ \frac{1}{2}\left[\frac{r}{2a_0}\right]\sin\theta\ a_0^{\frac{3}{2}}e^{-i\phi}e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = -\sqrt{\frac{1}{4\pi}}\ \left[\frac{r}{4a_0}\right]\sin\theta\ a_0^{\frac{3}{2}}e^{-i\phi}e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = -\frac{r}{8a_0}\sqrt{\frac{1}{\pi a_0^3}}\ \sin\theta\ e^{-i\phi}e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

3) Fungsi Gelombang Atom Tritium Untuk Keadaan Tereksitasi Kedua

a. **Untuk $\boldsymbol{n = 3; l = 0;\ m = 0}$**

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = R_{n,l}(r_c)\Theta_{l,m_l}(\theta)\Phi_m(\phi)$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\sqrt{\frac{1}{2}}\frac{2}{81\sqrt{3\ {a_0}^3}}\left(\frac{2r^2}{{a_0}^2} - \left(\frac{18r}{a_0}\right) + 27\right)e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \frac{1}{2}\frac{2}{81\sqrt{3\pi {a_0}^3}}\left(\frac{2r^2}{{a_0}^2} - \left(\frac{18r}{a_0}\right) + 27\right)e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \frac{2}{162\sqrt{3\pi {a_0}^3}}\left(\frac{2r^2}{{a_0}^2} - \left(\frac{18r}{a_0}\right) + 27\right)e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \frac{1}{81\sqrt{3\pi {a_0}^3}}\left(\frac{2r^2}{{a_0}^2} - \left(\frac{18r}{a_0}\right) + 27\right)e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

b. **Untuk $n = 3; l = 1;\ m = 0$**

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = R_{n,l}(r_c)\Theta_{l,m_l}(\theta)\Phi_m(\phi)$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\sqrt{\frac{3}{2}}\cos\theta\,\frac{4}{81}\sqrt{\frac{1}{6a_0{}^3}}\,\frac{r}{a_0}\left(6-\frac{r}{a_0}\right)e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \sqrt{\frac{3}{24\pi a_0{}^3}}\frac{4}{81}\,\frac{r}{a_0}\left(6-\frac{r}{a_0}\right)\cos\theta\, e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \frac{4}{81}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2\pi a_0{}^3}}\,\frac{r}{a_0}\left(6-\frac{r}{a_0}\right)\cos\theta\, e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \frac{2}{81}\sqrt{\frac{1}{2\pi a_0{}^3}}\,\frac{r}{a_0}\left(6-\frac{r}{a_0}\right)\cos\theta\, e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \frac{1}{81}\sqrt{\frac{2}{\pi a_0{}^3}}\,\frac{r}{a_0}\left(6-\frac{r}{a_0}\right)\cos\theta\, e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

c. **Untuk $n = 3; l = 1;\ m = 1$**

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = R_{n,l}(r_c)\Theta_{l,m_l}(\theta)\Phi_m(\phi)$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}e^{i\phi}\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\,\frac{4}{81}\sqrt{\frac{1}{6a_0{}^3}}\,\frac{r}{a_0}\left(6-\frac{r}{a_0}\right)e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \sqrt{\frac{3}{12\pi a_0{}^3}}\frac{2}{81}\,\frac{r}{a_0}\left(6-\frac{r}{a_0}\right)\sin\theta\, e^{i\phi}e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \frac{2}{81}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi a_0{}^3}}\frac{r}{a_0}\left(6-\frac{r}{a_0}\right)\sin\theta\, e^{i\phi}e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \frac{1}{81\sqrt{\pi a_0{}^3}}\frac{r}{a_0}\left(6-\frac{r}{a_0}\right)\sin\theta\, e^{i\phi}e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

d. **Untuk $n = 3; l = 1;\ m = -1$**

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = R_{n,l}(r_c)\Theta_{l,m_l}(\theta)\Phi_m(\phi)$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}e^{-i\phi}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)\frac{4}{81}\sqrt{\frac{1}{6a_0{}^3}}\,\frac{r}{a_0}\left(6-\frac{r}{a_0}\right)e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = -\sqrt{\frac{3}{12\pi a_0{}^3}}\frac{2}{81}\,\frac{r}{a_0}\left(6-\frac{r}{a_0}\right)\sin\theta\, e^{-i\phi}e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = -\frac{2}{81}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi a_0{}^3}}\frac{r}{a_0}\left(6-\frac{r}{a_0}\right)\sin\theta\, e^{-i\phi}e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \frac{-1}{81\sqrt{\pi a_0{}^3}}\frac{r}{a_0}\left(6-\frac{r}{a_0}\right)\sin\theta\, e^{-i\phi}e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

e. Untuk $\boldsymbol{n = 3; l = 2;\ m = 0}$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = R_{n,l}(r_c)\Theta_{l,m_l}(\theta)\Phi_m(\phi)$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\sqrt{\frac{5}{8}}\,(3\,cos^2\theta - 1)\,\frac{4}{81}\sqrt{\frac{1}{30}}\,\left(\frac{r^2}{a_0{}^2}\right)a_0{}^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \frac{4}{81}\sqrt{\frac{1}{96\pi a_0{}^3}}\left(\frac{r^2}{a_0{}^2}\right)(3\,cos^2\theta - 1)e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \frac{4}{81}\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{6\pi a_0{}^3}}\left(\frac{r^2}{a_0{}^2}\right)(3\,cos^2\theta - 1)e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \frac{1}{81}\sqrt{\frac{1}{6\pi a_0{}^3}}\left(\frac{r^2}{a_0{}^2}\right)(3\,cos^2\theta - 1)e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

f. Untuk $\boldsymbol{n = 3; l = 2;\ m = 1}$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = R_{n,l}(r_c)\Theta_{l,m_l}(\theta)\Phi_m(\phi)$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}e^{i\phi}\frac{\sqrt{15}}{2}(\sin\theta\cos\theta)\frac{4}{81}\sqrt{\frac{1}{30}}\,\left(\frac{r^2}{a_0{}^2}\right)a_0{}^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \sqrt{\frac{15}{60\pi a_0{}^3}}\frac{2}{81}\left(\frac{r^2}{a_0{}^2}\right)(\sin\theta\cos\theta)e^{i\phi}e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \frac{2}{81}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi a_0{}^3}}\left(\frac{r^2}{a_0{}^2}\right)(\sin\theta\cos\theta)e^{i\phi}e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \frac{1}{81\sqrt{\pi a_0{}^3}}\left(\frac{r^2}{a_0{}^2}\right)(\sin\theta\cos\theta)e^{i\phi}e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

g. Untuk $\boldsymbol{n = 3; l = 2;\ m = -1}$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = R_{n,l}(r_c)\Theta_{l,m_l}(\theta)\Phi_m(\phi)$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}e^{-i\phi}\left(-\frac{\sqrt{15}}{2}(\sin\theta\cos\theta)\right)\frac{4}{81}\sqrt{\frac{1}{30}}\,\left(\frac{r^2}{a_0{}^2}\right)a_0{}^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = -\sqrt{\frac{15}{60\pi a_0{}^3}}\frac{2}{81}\left(\frac{r^2}{a_0{}^2}\right)(\sin\theta\cos\theta)e^{-i\phi}e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = -\frac{2}{81}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi a_0{}^3}}\left(\frac{r^2}{a_0{}^2}\right)(\sin\theta\cos\theta)e^{-i\phi}e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \frac{-1}{81\sqrt{\pi a_0{}^3}}\left(\frac{r^2}{a_0{}^2}\right)(\sin\theta\cos\theta)e^{-i\phi}e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

h. Untuk $\boldsymbol{n = 3; l = 2;\ m = 2}$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = R_{n,l}(r_c)\Theta_{l,m_l}(\theta)\Phi_m(\phi)$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}e^{2i\phi}\frac{\sqrt{15}}{4}(\,sin^2\,\theta)\frac{4}{81}\sqrt{\frac{1}{30}}\,\left(\frac{r^2}{a_0{}^2}\right)a_0{}^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \sqrt{\frac{1}{4\pi a_0{}^3}}\frac{1}{81}\left(\frac{r^2}{a_0{}^2}\right)(\,sin^2\,\theta)e^{2i\phi}e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \frac{1}{162}\,\frac{1}{\sqrt{\pi a_0{}^3}}\left(\frac{r^2}{a_0{}^2}\right)(\,sin^2\,\theta)e^{2i\phi}e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

i. **Untuk $n = 3; l = 0;\ m = -2$**

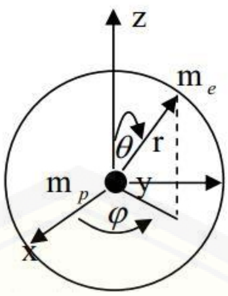
$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = R_{n,l}(r_c)\Theta_{l,m_l}(\theta)\Phi_m(\phi)$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}e^{-2i\phi}\frac{\sqrt{15}}{4}(\,sin^2\,\theta)\,\frac{4}{81}\sqrt{\frac{1}{30}}\,\left(\frac{r^2}{a_0{}^2}\right)a_0{}^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \sqrt{\frac{1}{4\pi a_0{}^3}}\frac{1}{81}\left(\frac{r^2}{a_0{}^2}\right)(\,sin^2\,\theta)e^{-2i\phi}e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = \frac{1}{162}\,\frac{1}{\sqrt{\pi a_0{}^3}}\left(\frac{r^2}{a_0{}^2}\right)(\,sin^2\,\theta)e^{-2i\phi}e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

Lampiran 10. Pembuktian Massa Tereduksi



Gambar 1. posisi relatif elektron terhadap inti atom

Tinjau suatu sistem yang terdiri dari dua benda brmassa m_1 dan m_2 yang berada di r_1 dan r_2 dari titik asal O. Untuk atom Hidrogen dapat dimisalkan m_1 dan m_2 masing – masing adalah masa inti atom dan massa elektron. Komponen gaya – gaya yang bekerja pada partikel tersebut diantaranya adalah :

F_1^e = gaya luar yang bekerja pada partikel m_1

F_2^e = gaya luar yang bekerja pada partikel m_2

F_{12}^i = gaya internal yang bekerja pada benda m_1 karena pengaruh dari m_2

F_{21}^i= gaya internal yang bekerja pada benda m_2 karena pengaruh dari m_1

Menurut hukum III Newton gaya aksi reaksi didefinisikan sebagai berikut :

$$F = F_{12}^i = - F_{21}^i$$

Gaya luar total yang bekerja pada sistem adalah : $F' = F_1^e + F_2^e$

Menurut hukum II Newton, gerak dua benda dalam kerangka laboratorium :

$$m_1\ddot{r}_1 = F_1^e + F_{12}^i \qquad m_2\ddot{r}_2 = F_2^e + F_{21}^i$$

Untuk menentukan massa tereduksi, persamaan pertama dikalikan dengan m_2 dan persamaan kedua dikalikan dengan m_1. Kemudian dilakukan eliminasi sehingga diperoleh :

$$m_1m_2(\ddot{r}_1 - \ddot{r}_2) = m_2F_1^e - m_1F_2^e + m_2F_{12}^i - m_1F_{21}^i$$

$$m_1m_2(\ddot{r}_1 - \ddot{r}_2) = m_1m_2\left[\frac{F_1^e}{m_1} - \frac{F_2^e}{m_2}\right] + (m_1 + m_2)F$$

Jika tidak ada gaya luar $F_1^e = F_2^e = 0$ maka diperoleh :

$$m_1m_2(\ddot{r}_1 - \ddot{r}_2) = 0 + (m_1 + m_2)F$$

$$F = \frac{m_1m_2}{(m_1 + m_2)}(\ddot{r}_1 - \ddot{r}_2)$$

Dengan, $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$ disebut sebagai massa tereduksi.

Lampiran 11. Solusi Persamaan Polar Atom Tritium

$$\frac{1}{Y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{Y\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\right)=-l\,(l+1) \qquad (1)$$

Persamaan (1) merupakan persamaan angular, apabila mensubtitusi nilai dari $Y(\theta,\phi)=\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ akan menjadi:

$$\frac{1}{\Theta\,\Phi\,sin\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\Phi\right)+\frac{1}{\Theta\,\Phi\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}\Theta\right)=-l\,(l+1)$$

$$\frac{1}{\Theta\,\Phi}\left[\frac{\Phi}{sin\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\frac{\Theta}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}\right)\right]=-l\,(l+1)$$

$$\frac{\Phi}{sin\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\frac{\Theta}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}\right)=-\Theta\,\Phi\,l\,(l+1) \qquad (2)$$

Selanjutnya persamaan (2) dikalikan dengan $\frac{\sin^2\theta}{\Theta\,\Phi}$

$$\frac{sin\,\theta}{\Theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\Phi}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}\right)=-l\,(l+1)\,\sin^2\theta$$

$$\left(\frac{sin\,\theta}{\Theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+l\,(l+1)\sin^2\theta\right)+\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\emptyset^2}=0 \qquad (3)$$

Pada persamaan (3) terdapat dua bagian yaitu suku yang pertama hanya bergantung pada sudut polar (θ) dan suku yang kedua hanya bergantung pada sudut azimuth ($\emptyset$). Agar solusi yang diberikan dapat bermakna fisis maka tetapkan masing-masing bagian dengan sebuah konstanta m^2, dapat dituliskan:

$$\left(\frac{sin\,\theta}{\Theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+l\,(l+1)\sin^2\theta\right)=-\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\emptyset^2}=m^2 \qquad (4)$$

Untuk persamaan azimuth akan menjadi:

$$-\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}=m^2$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}=-m^2\Phi$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}+m^2\Phi=0 \qquad (5)$$

Sedangkan persamaan polarnya akan menjadi:

$$\frac{sin\,\theta}{\Theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+l\,(l+1)\sin^2\theta=m^2 \qquad (6)$$

Selanjutnya dikalikan dengan $\frac{\Theta}{\sin^2\theta}$, maka persamaan (6) akan menjadi:

$$\frac{1}{sin\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\Theta l\,(l+1)=\frac{m^2\Theta}{\sin^2\theta}$$

$$\frac{1}{sin\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\Theta\,l\,(l+1)-\frac{m^2\Theta}{\sin^2\theta}=0$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\left(l\,(l+1)-\frac{m^2\theta}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0 \tag{7}$$

Solusi Persamaan Polar

Pertama melakukan transformasi variabel pada persamaan (7) $w=\cos\theta$. Maka:

$$\frac{dw}{d\theta}=\frac{d\cos\theta}{d\theta}=-\sin\theta$$

$$\frac{d}{d\theta}=\frac{d}{dw}\frac{dw}{d\theta}=-\sin\theta\,\frac{d}{dw}$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$$\sin^2\theta+w^2=1$$

$$\sin^2\theta=1-w^2$$

$$\sin\theta\ =(1-\mathrm{w})^{1/2}$$

Sehingga persamaan (7) akan menjadi:

$$\frac{1}{\sin\theta}\left(-\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial w}\right)\left(\sin\theta\,\left(-\sin\theta\,\frac{\partial\Theta}{\partial w}\right)\right)+\left(l\,(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0$$

$$-\frac{\partial}{\partial w}\left(-\sin^2\theta\,\frac{\partial\Theta}{\partial w}\right)+\left(l\,(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0$$

$$-\frac{\partial}{\partial\omega}\left(-(1-w^2)\frac{\partial\Theta}{\partial w}\right)+\left(l\,(l+1)-\frac{m^2}{(1-w^2)}\right)\Theta=0$$

$$\frac{\partial(1-w^2)}{\partial w}\frac{\partial\Theta}{\partial w}+(1-w^2)\frac{\partial^2\Theta}{\partial w^2}+\left(l\,(l+1)-\frac{m^2}{(1-w^2)}\right)\Theta=0$$

$$-2w\frac{\partial\Theta}{\partial w}+(1-w^2)\frac{\partial^2\Theta}{\partial w^2}+\left(l\,(l+1)-\frac{m^2}{(1-w^2)}\right)\Theta=0$$

$$(1-w^2)\frac{\partial^2\Theta}{\partial w^2}-2w\frac{\partial\Theta}{\partial w}+\left(l\,(l+1)-\frac{m^2}{(1-w^2)}\right)\Theta=0 \tag{8}$$

Persamaan (8) merupakan persamaan differensial orde dua fungsi legendre, dalam menyelesaikan persamaan tersebut yaitu memisalkan m = 0. Persamaan Differensial Legendre Terasosiasi pada kondisi ini berubah menjadi persamaan Differensial Legendre yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$(1-w^2)\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2}-2w\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}+l(l+1)\Theta=0 \tag{9}$$

Persamaan (9) dapat diselesaikan dengan fungsi pembangkit Legendre, yakni:

$$g(t,w)=\frac{1}{\sqrt{1-2wt+t^2}}=(1-2wt+t^2)^{-1/2}=\ \sum_{n=0}^{\infty}\Theta_l(\mathrm{w})t^n \tag{10}$$

Memisalkan $B=(2wt-t^2)$

Pada persamaan (10) pada ruas sebelah kiri,

$$(1-2wt+t^2)^{-1/2}=(1-(2wt-t^2))^{-1/2}$$

$$(1-2wt+t^2)^{-1/2}=(1-B)^{-1/2}$$

Selanjutnya menggunakan uraian deret binomial $(1+x)^p$ maka bentuk polinomialnya adalah

$$(1-B)^{-\frac{1}{2}}=1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-B)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}(-B)^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}(-B)^3+\cdots+\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}(-B)^n$$

$$\begin{aligned}(1-2wt+t^2)^{-1/2} &= \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}(-B)^n\\ &= \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}(-1)^n(B)^n\\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}(B)^n\end{aligned}$$

$$(1-2wt+t^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}(2wt-t^2)^n \qquad (11)$$

Untuk ekspansi $(2wt-t^2)^n$ yakni:

$$\begin{aligned}(2wt-t^2)^n &= t^n(2w-t)^n\\ &= t\left[(2w)^n-n(2w)^{n-1}(-t)+\frac{n(n-1)}{2!}(2w)^{n-2}(-t)^2+\cdots+\frac{n!}{k!(n-k)!}(2w)^{n-k}(t)^k(-1)^k\right]\end{aligned}$$

$$(2wt-t^2)^n=t^n\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}(2w)^{n-k}(t)^k(-1)^k \qquad (12)$$

Substitusi persamaan (12) kedalam persamaan (11) menjadi:

$$\begin{aligned}(1-2wt+t^2)^{-1/2} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left[t^n\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}(2w)^{n-k}(t)^k(-1)^k\right]\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!n!}{2^{2n}(n!)^2k!(n-k)!}(2w)^{n-k}(t)^{n+k}(-1)^k\end{aligned}$$

Kemudian menggunakan pendekatan $n+k\to n$ sehingga $n\to n-k$ sehingga persamaannya berubah menjadi

$$(1-2wt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2[n-k])!}{2^{2(n-k)}(n-k)!}\frac{1}{k!(n-2k)!}(2w)^{(n-2k)}t^n(-1)^k$$

Maka rumus awal fungsi pembangkit diperoleh:

$$(1-2wt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\Theta_l(\mathrm{w})t^n$$

Dikarenakan variabel Θ bergantung pada variabel l, maka variabel n diganti menjadi variabel l. Dan persamaanya akan menjadi:

$$(1-2wt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{l=0}^{\infty}\Theta_l(\mathrm{w})t^l$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{l}\frac{(2[l-k])!}{2^{2(l-k)}(l-k)!}\frac{1}{k!(l-2k)!}(2w)^{(l-2k)}t^{l}(-1)^{k} = \sum_{l=0}^{\infty}\Theta_{l}(\mathrm{w})t^{l}$$

Dengan melakukan eliminasi pada ruas kiri dan kanan akan menghasilkan

$$\sum_{k=0}^{l}\frac{(2[l-k])!}{2^{2(l-k)}(l-k)!}\frac{1}{k!(l-2k)!}2^{(l-2k)}w^{(l-2k)}(-1)^{k} = \Theta_{l}(\mathrm{w})$$

$$\sum_{k=0}^{l}\frac{(2[l-k])!}{2^{2l}2^{(-2k)}(l-k)!}\frac{1}{k!(l-2k)!}2^{l}2^{(-2k)}(w)^{(l-2k)}(-1)^{k} = \Theta_{l}(\mathrm{w})$$

$$\sum_{k=0}^{l}\frac{(2[l-k])!}{2^{l}(l-k)!}\frac{1}{k!(l-2k)!}(w)^{(l-2k)}(-1)^{k} = \Theta_{l}(\mathrm{w})$$

$$\Theta_{l}(\mathrm{w}) = \sum_{k=0}^{l}\frac{(2[l-k])!}{2^{l}(l-k)!}\frac{1}{k!(l-2k)!}(w)^{(l-2k)}(-1)^{k} \quad (13)$$

Persamaan (13) merupakan solusi persamaan Legendre. Untuk penyederhanaan digunakan ekspansi deret binomial $(w^2-1)^l$ berikut :

$$(w^2-1)^l = w^{2l} + l(w^2)^{l-1}(-1) + \frac{l(l-1)}{2!}(w^2)^{l-2}(-1)^2 + \cdots + \frac{l(l-1)(l-2)\ldots(l-k+1)}{k!}(w^2)^{l-k}(-1)^k$$

$$(w^2-1)^l = \sum_{k=0}^{l}\frac{l!}{k!(l-k)!}(w^2)^{l-k}(-1)^k \quad (14)$$

Untuk merubah bentuk deret menjadi bentuk persamaan differensial, maka untuk setiap bilangan *l* bilangan bulat berlaku:

$$\frac{d^l}{dw^l}w^{2l-2k} = (2l-2k)(2l-2k-1)(2l-2k-2)\ldots.(2l-2k-(l-1))w^{(l-2k)}$$

$$\frac{d^l}{dw^l}w^{(2l-2k)} = \frac{[2(l-k)]!}{(l-2k)!}W^{(l-2k)} \quad (15)$$

Selanjutnya substitusikan persamaan (15) kedalam persamaan Rodrigues:

$$\mathrm{G}_l(w) = \sum_{k=0}^{l}\frac{[2(l-k)]!}{2^l(l-k)!}\frac{1}{k!(l-2k)!}w^{(l-2k)}(-1)^k$$

$$\mathrm{G}_l(w) = \sum_{k=0}^{l}\frac{[2(l-k)]!}{(l-2k)!}\frac{1}{2^l(l-k)!k!}w^{(l-2k)}(-1)^k$$

$$\mathrm{G}_l(w) = \frac{1}{2^l(l-k)!k!}(-1)^k\sum_{k=0}^{l}\frac{d^l}{dw^l}w^{2(l-k)}\frac{l!}{l!}$$

$$\mathrm{G}_l(w) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dw^l}(-1)^k\sum_{k=0}^{l}\frac{l!}{(l-k)!k!}w^{2(l-k)}$$

$$\mathrm{G}_l(w) = \sum_{k=0}^{l}\frac{(-1)^k}{2^l(l-k)!k!}\frac{d^l}{dw^l}w^{2(l-k)} \quad (16)$$

Untuk lebih sederhana lagi, maka substitusikan persamaan (14) kedalam persamaan (16), dapat dituliskan:

$$\mathrm{G}_l(w) = \frac{1}{2^l}\frac{d^l}{dw^l}w^{2(l-k)}\,\frac{1}{k!(l-k)!}\frac{l!}{l!} = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dw^l}\frac{(-1)^k l!}{k!(l-k)!}w^{2(l-k)}$$

$$\mathrm{G}_l(w) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dw^l}(w^2-1)^l$$

penyelesaian persamaan legendre terasosiasi ialah dengan cara mengubah persamaan differensial fungsi legendre menjadi persamaan differensial fungsi legendre terasosiasi dengan mendifferensialkan persamaan differensial fungsi legendre m kali terhadap w akan menjadi:

$$\frac{d^m}{dw^m}\left[(1-w^2)\frac{d^2\mathrm{G}(w)}{dw^2} - 2w\frac{d\mathrm{G}(w)}{dw} + l(l+1)\mathrm{G}(w)\right] = 0$$

$$\frac{d^m}{dw^m}(1-w^2)\frac{d^2\mathrm{G}(w)}{dw^2} - \frac{d^m}{dw^m}2w\frac{d\mathrm{G}(w)}{dw} + l(l+1)\mathrm{G}(w) = 0$$

Untuk penyelesaian lebih sederhana, maka dimisalkan $N = \frac{d^m}{dw^m}\mathrm{G}_l^n$

Suku Pertama

$$\frac{d^m}{dw^m}(1-w^2)\frac{d^2\mathrm{G}(w)}{dw^2} = \frac{d^2}{dw^2}\left[\frac{d^m}{dw^m}\mathrm{G}_l^n(1-w^2)\right]$$

Dengan $A(w) = \mathrm{G}_l^n$ dan $B(w) = 1-w^2$

Menggunakan notasi leibnit'z dapat diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\frac{d^m}{dw^m}[\mathrm{G}_l^n)(1-w^2)] = \frac{m!}{0!\,m!}(1-w^2)\frac{d^m}{dw^m}\mathrm{G}_l^n + \frac{m!}{1!\,(m-1)!}\frac{d}{dw}(1-w^2)$$
$$\frac{d^{m-1}}{dw^{m-1}}\mathrm{G}_l^n + \frac{m!}{2!(m-2)!}\frac{d}{dw}(2-w^2)\frac{d^{m-2}}{dw^{m-2}}\mathrm{G}_l^n$$

$$\frac{d^m}{dw^m}[\mathrm{G}_l^n)(1-w^2)] = (1-w^2)\frac{d^m}{dw^m}\mathrm{G}_l^n - 2mw\frac{d^{m-1}}{dw^{m-1}}\mathrm{G}_l^n -$$
$$m(m-1)\frac{d^{m-2}}{dw^{m-2}}\mathrm{G}_l^n$$

Dapat dituliskan kembali dalam bentuk :

$$\frac{d^2}{dw^2}\left[\frac{d^m}{dw^m}(\mathrm{G}_l^n)(1-w^2)\right] = \frac{d^2}{dw^2}\left[(1-w^2)\frac{d^m}{dw^m}\mathrm{G}_l^n - 2mw\frac{d^{m-1}}{dw^{m-1}}\mathrm{G}_l^n - \right.$$
$$\left. m(m-1)\frac{d^{m-2}}{dw^{m-2}}\mathrm{G}_l^n\right]$$
$$= \frac{d^2}{dw^2}(1-w^2)\frac{d^m}{dw^m}\mathrm{G}_l^n - 2mw\frac{d^{m+1}}{dw^{m+1}}\mathrm{G}_l^n -$$
$$m(m-1)\frac{d^m}{dw^m}\mathrm{G}_l^n$$

$$\frac{d^2}{dw^2}\left[\frac{d^m}{dw^m}(\mathrm{G}_l^n)(1-w^2)\right] = (1-w^2)N" - 2mwN' - m(m-1)N \qquad (17)$$

Suku Kedua

$$\frac{d^m}{dw^m}(-2w)\frac{d}{dw}G_l^n = (-2w)\frac{d}{dw}\frac{d^m}{dw^m}G_l^n = (-2w)\frac{d^{m+1}}{dw^{m+1}}G_l^n$$

$$\frac{d^m}{dw^m}(-2w)\frac{d}{dw}G_l^n = (-2w)N' \tag{18}$$

Suku Ketiga

$$l(l+1)\frac{d^m}{dw^m}G_l^n(w) = l(l+1)N \tag{19}$$

Dengan menggabungkan persamaan (17), (18), dan (19) didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$\frac{d^m}{dw^m}(1-w^2)\frac{d^2G_l^n}{dw^2} - \frac{d^m}{dw^m}2w\frac{dG_l^n}{dw} + l(l+1)\frac{d^m}{dw^m}G_l^n = 0$$

$$(1-w^2)N'' - 2mwN' - m(m-1)N - 2wN' + l(l+1)N = 0$$

$$(1-w^2)N'' - 2w(m+1)N' + (m^2 - m + l^2 + l)N = 0$$

$$(1-w^2)N'' - 2w(m+1)N' + (l-m)(l+m+1)N = 0 \tag{20}$$

Persamaan (20) dapat menjadi persamaan self adjoint dengan merubah persamaannya dengan menggunakan suatu permisalan, yaitu:

$$v(w) = u(w)(1-w^2)^{-\frac{m}{2}} \text{ dan } N(w) = v(w)(1-w^2)^{-\frac{m}{2}} \tag{21}$$

Turunan pertama $N(w)$

$$N'(\mathrm{w}) = \frac{d}{dw}[\, v\,(1-w^2)^{-\frac{m}{2}}\,]$$

$$N'(\mathrm{w}) = (1-w^2)^{-\frac{m}{2}}\frac{dv}{dw} + v\,\frac{d}{dw}(1-w^2)^{-\frac{m}{2}}$$

$$N'(\mathrm{w}) = v'(1-w^2)^{-\frac{m}{2}} + v\,mw(1-w^2)^{-\frac{m}{2}}$$

$$N'(\mathrm{w}) = [\, v'\frac{mwv}{(1-w^2)}\,](1-w^2)^{-\frac{m}{2}} \tag{22}$$

Turunan Kedua $N(w)$

$$N''(w) = \frac{d}{dw}\{\,[\, v'\frac{mwv}{(1-w^2)}\,](1-w^2)^{-\frac{m}{2}}\,\}$$

Agar lebih mudah, maka penyelesaian persamaan diatas dibagi menjadi 2 suku, yaitu:

<u>Suku pertama</u>

$$\frac{d}{dw}[\, v'(1-w^2)^{-\frac{m}{2}}\,] = (1-w^2)^{-\frac{m}{2}}\frac{dv'}{dw} + \, v'\frac{d}{dw}1-w^2)^{-\frac{m}{2}}$$

$$= \, v''(1-w^2)^{-\frac{m}{2}} + \frac{mwv'}{(1-w^2)}(1-w^2)^{-\frac{m}{2}} \tag{23}$$

<u>Suku kedua</u>

$$\frac{d}{dw}[\frac{mwv}{(1-w^2)}(1-w^2)^{-\frac{m}{2}}] = \frac{d}{dw}[\,mwv(1-w^2)^{-\frac{(m+2)}{2}}\,]$$

$$=(1-w^2)^{-\frac{(m+2)}{2}}\frac{d}{dw}(mwv) + mwv\,\frac{d}{dw}(1-w^2)^{-\frac{(m+2)}{2}}$$

Dengan permisalan

$$A = (1-w^2)$$

$$\frac{dA}{dw} = -2w$$

$$dw = \frac{dA}{-2w}$$

Maka,

$$\frac{d}{dw}\left[\frac{mwv}{(1-w^2)}(1-w^2)^{-\frac{m}{2}}\right] = (1-w^2)^{-\frac{(m+2)}{2}}\,m\,(v+v'w) +$$

$$mwv(-2w)\frac{d}{dA}(A)^{-\frac{(m+2)}{2}}$$

$$= (1-w^2)^{-\frac{(m+2)}{2}}(mv+mwv') +$$

$$mwv(-2w)\left(-\frac{(m+2)}{2}\right)(1-w^2)^{-\frac{(m+2)}{2}}$$

$$\frac{d}{dw}\left[\frac{mwv}{(1-w^2)}(1-w^2)^{-\frac{m}{2}}\right] = \frac{mv}{(1-w^2)}(1-w^2)^{-\frac{m}{2}} + \frac{mwv'}{(1-w^2)}(1-w^2)^{-\frac{m}{2}} +$$

$$\frac{m^2w^2v}{(1-w^2)^2}(1-w^2)^{-\frac{m}{2}} + \frac{2mw^2v}{(1-w^2)^2}(1-w^2)^{-\frac{m}{2}} \qquad (24)$$

Gabungkan persamaan (23) dan (24)

$$N'' = v''(1-w^2)^{-\frac{m}{2}} + \frac{mwv'}{(1-w^2)}\,(1-w^2)^{-\frac{m}{2}} + \frac{mv}{(1-w^2)}(1-w^2)^{-\frac{m}{2}} +$$

$$\frac{mwv'}{(1-w^2)}(1-w^2)^{-\frac{m}{2}} + \frac{m^2w^2v}{(1-w^2)^2}(1-w^2)^{-\frac{m}{2}} + \frac{2mw^2v}{(1-w^2)^2}(1-w^2)^{-\frac{m}{2}}$$

$$N'' = \left[v''\frac{mwv'}{(1-w^2)} + \frac{mv}{(1-w^2)} + \frac{mwv'}{(1-w^2)} + \frac{m^2w^2v}{(1-w^2)^2} + \frac{2mw^2v}{(1-w^2)^2}\right](1-w^2)^{-\frac{m}{2}}$$

$$N'' = \left[v''\frac{2mwv'}{(1-w^2)} + \frac{mv}{(1-w^2)}\frac{m^2w^2v}{(1-w^2)^2} + \frac{2mw^2v}{(1-w^2)^2}\right](1-w^2)^{-\frac{m}{2}} \qquad (25)$$

Substitusi nilai dari N, N' dan N'' ke dalam persamaan (20)

$$(1-w^2)N'' - 2w(m+1)N' + (l-m)(l+m+1)N = 0$$

$$(1-w^2)\left[v'' + \frac{2mwv'}{(1-w)} + \frac{mv}{(1-w^2)} + \frac{m^2w^2v}{(1-w^2)^2} + \frac{2mw^2v}{(1-w^2)^2}\right](1-w^2)^{-\frac{m}{2}} -$$

$$2w(m+1)\left[v' + \frac{mwv}{(1-w^2)}\right](1-w^2)^{-\frac{m}{2}} + (l-m)(l+m+l)v(1-w^2)^{-\frac{m}{2}} = 0$$

Dan disederhanakan menjadi:

$$(1-w^2)\left[v''+\frac{2mwv'}{(1-w^2)}+\frac{mv}{(1-w^2)}+\frac{m^2w^2v}{(1-w^2)^2}+\frac{2mw^2v}{(1-w^2)^2}\right]-2w(m+1)\left[v'+\frac{mwv}{(1-w^2)}\right]+(l-m)(l+m+l)v=0$$

$$(1-w^2)v''+2mwv'+mv+\frac{m^2w^2v}{(1-w^2)}+\frac{2mw^2v}{(1-w^2)}-2mwv'-\frac{2mw^2v}{(1-w^2)}-\frac{m^2w^2v}{(1-w^2)}+(l-m)(l+m+l)v=0$$

$$(1-w^2)v''+mv-2mv'-\frac{m^2w^2v}{(1-w^2)}+(l-m)(l+m+l)v=0$$

$$(1-w^2)v''-2mv'+\left[l(l+1)-m^2-m+m-\frac{m^2w^2}{(1-w^2)}\right]v=0$$

$$(1-w^2)v''-2mv'+\left[l(l+1)-m^2-\frac{m^2w^2}{(1-w^2)}\right]v=0$$

$$(1-w^2)v''-2mv'+\left[l(l+1)-\frac{w^2}{(1-w^2)}\right]v=0 \qquad (26)$$

Dengan solusi:

$$v(w)=N(w)(1-w^2)^{\frac{m}{2}}$$

Dengan

$$N(w)=N=\frac{d^m}{dw^m}\mathrm{G}_l^m$$

Dari rumus Rodrigues, diperoleh

$$\mathrm{G}_l^m=\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dw^l}(w^2-1)^l \qquad (27)$$

Sehingga solusi self adjoint diatas dapat dituliskan:

$$v(w)=\frac{d^m}{dw^m}\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dw^l}(w-1)^l(1-w^2)^{\frac{m}{2}}$$

$$v(w)=(1-w^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dw^m}\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{d\omega^l}(w^2-1)^l \qquad (28)$$

Persamaan (24) identik dengan persamaan polar differensial orde dua dan fungsi Legendre terasosiasi:

$$(1-\omega^2)\frac{d^2\Theta}{d\omega^2}-2\omega\frac{d\Theta}{d\omega}+l(l+1)\theta-\frac{m^2\Theta}{sin^2\theta}=0$$

$$(1-\omega^2)\Theta''-2\omega\Theta'+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{sin^2\theta}\right]\Theta=0$$

Maka solusi persamaan polar ialah

$$\mathrm{G}_l^m=(1-\omega^2)^{\frac{m}{2}}\frac{1}{2^l l!}\frac{d^{l+m}}{dw^{l+m}}(w^2-1)^l \qquad (29)$$

$$\mathrm{G}_l^m=(1-cos^2\theta)^{\frac{m}{2}}\frac{1}{2^l l!}\frac{d^{l+m}}{dcos^{l+m}\theta}(cos^2\theta-1)^l \qquad (30)$$

Lampiran 12. Persamaan Differensial Legendre

Terdapat beberapa bentuk persamaan differensial orde dua antara lain persamaan differensial bessel, persamaan differensial hermite, persamaan differensial chebyshev, persamaan differensial legendre dan persamaan differensial laguerre. Persamaan yang muncul dalam solusi persamaan differensial parsial dalam sistem koordinat bola ialah persamaan differensial legendre dan persamaan differensial laguerre.

Bentuk persamaan differensial fungsi legendre dapat dituliskan:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0 \tag{1}$$

(Boas, 1983: 485)

Persamaan (1) dapat dijabarkan kedalam bentuk lain sebagai berikut:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dy}\right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]y = 0 \tag{2}$$

(Bugl, 1995: 544)

Maka persamaan (1) disebut persamaan differensial legendre terasosiasi atau persamaan differensial sekawan.

Secara umum, bentuk penyelesaian persamaan differensial legendre, ialah:

$$P_l(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^r \frac{(2l-2r)!}{2^n r!(l-r)!(l-2r)!} x^{l-2r} \tag{3}$$

Persamaan (3) disebut dengan polinominal legendre. Untuk solusi penyelesaian persamaan (1) yaitu:

$$y = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$$

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$$

$$P_l^m(x) = \frac{1}{2^l l!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{m+l}}{dx^{m+l}}(1-x^2)^l \tag{4}$$

Persamaan (4) merupakan polinominal legendre sekawan. Untuk fungsi $P_l^m(x)$ ialah orthogonal pada selang $(-1, 1)$, sehingga persamaan (4) akan menjadi:

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(x)\, P_l^m(x) dx = \frac{2(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!} \tag{5}$$

Lampiran 13. Persamaan Differensial Laguerre

Untuk persamaan differensial Laguerre berbentuk:

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0 \quad (1)$$

Dapat dinyatakan dalam bentuk lain sebagai berikut:

$$xy'' + (k+1-x)y' + ny = 0 \quad (2)$$

n merupakan parameter yang belum terperinci. Sehingga solusi dari persamaan (1) ialah berupa deret yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$y = (-1)^n \left[x^n - \frac{n^2}{1!}x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-1} - \frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{3!}x^{n-3} + \cdots\right]$$

$$L_n(x) = (-1)^n \left[x^n - \frac{n^2}{1!}x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-1} - \frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{3!}x^{n-3} + \cdots\right]$$

$$L_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) \quad (3)$$

Persamaan (3) merupakan bentuk polinomial laguerre. Persamaan differensial laguerre yang memiliki solusi polinomial laguerre terasosiasi, maka persamaan (2) akan menjadi

$$y = L_n^k(x) = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} L_{n+k}(x) \quad (4)$$

Fungsi $L_n^k(x)$ mempunyai bentuk orthogonal pada selang $(0, \infty)$, maka didapatkan normalisasi fungsi laguerre yaitu:

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_k(x) dx = \delta_{nk} \quad (5)$$

Normalisasi untuk fungsi laguerre terasosiasi ialah:

$$\int_0^\infty x^k e^{-x} L_n^k(x) L_n^k(x)\, dx = \frac{(n+k)!}{n!}\delta_{nm} \quad (6)$$

Normalisasi fungsi laguerre terasosiasi pada atom Hidrogen dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\int_0^\infty x^{k+1} e^{-x} [L_n^k(x)]^2\, dx = (2n+k+1)\frac{(n+k)!}{n!}\delta_{nm} \quad (7)$$

Dimana:

$\delta_{nk} = 0$ apabila $n \neq k$

$\delta_{nk} = 1$ apabila $n = k$

(Boas, 1983: 532)

Lampiran 14. Program Grafik Fungsi Radial Atom Tritium pada Scilab 6.0.0

1. Plot Fungsi Gelombang Radial Atom Tritium dalam Keadaan Dasar

```
--> Hbar=1.054589*10^-34;
--> pi=3.14159265;
--> alfa=2.307113707464*10^-28;
--> MR=9.10787809*10^-31;
--> a0=(Hbar^2)/(MR*alfa)
 a0  =
   5.293D-11
--> n=linspace(0,8,1000);
--> rT=n.*a0;
--> Pr=rT./a0;
--> R10=2.*(a0^-1.5).*exp(-rT./a0);
--> plot(Pr,R10)
--> xset('window',1)
--> plot(Pr,R10)
--> title("Grafik Radial Atom Tritium","fontsize",5)
--> xlabel("r = posisi elektron","fontsize",4)
--> ylabel("R(r)= Fungsi Radial","fontsize",4)
 Figure saved.
```

2. Plot Fungsi Gelombang Radial Atom Tritium $(n = 2; l = 0)$

```
--> Hbar=1.054589*10^-34;
--> pi=3.14159265;
--> alfa=2.307113707464*10^-28;
--> MR=9.10787809*10^-31;
--> a0=(Hbar^2)/(MR*alfa)
 a0  =
   5.293D-11
--> n=linspace(0,15,1000);
--> rT=n.*a0;
--> Pr=rT/a0;
```

```
--> R20=(1./(2*(sqrt(2)))).*(2-(rT/a0)).*(a0^1.5).*exp(-Pr/2);
--> xset('window',1)
--> plot(Pr,R20,'r','linewidth',2)
--> title("Grafik Fungsi Radial Atom Tritium n=2","Fontsize",5)
--> xlabel("r= posisi elektron","Fontsize",4)
--> ylabel("R(r)=Fungsi Radial","Fontsize",4)
Figure saved.
```

3. Plot Fungsi Gelombang Radial Atom Tritium ($n = 2; l = 1$)

```
--> Hbar=1.054589*10^-34;
--> pi=3.14159265;
--> alfa=2.307113707464*10^-28;
--> MR=9.10787809*10^-31;
--> a0=(Hbar^2)/(MR*alfa)
 a0  =
   5.293D-11
--> n=linspace(0,15,1000);
--> rT=n.*a0;
--> Pr=rT/a0;
--> R21=(1./(sqrt(6))).*(Pr/2).*(a0^1.5).*exp(-Pr/2);
--> xset('window',1)
--> plot(Pr,R21,'linewidth',2)
--> xgrid(2)
--> title("Grafik Fungsi Radial Atom Tritium n=2","Fontsize",5)
--> xlabel("r= posisi elektron","Fontsize",4)
--> ylabel("R(r)=Fungsi Radial","Fontsize",4)
Figure saved.
```

4. Plot Fungsi Gelombang Radial Atom Tritium dalam Keadaan Tereksitasi Pertama

```
--> Hbar=1.054589*10^-34;
--> pi=3.14159265;
```

```
--> alfa=2.307113707464*10^-28;
--> MR=9.10787809*10^-31;
--> a0=(Hbar^2)/(MR*alfa)
 a0  =
   5.293D-11
n=linspace(0,15,1000);
--> rT=n.*a0;
--> Pr=rT/a0;
--> R20=(1./(2*(sqrt(2)))).*(2-(rT/a0)).*(a0^1.5).*exp(-Pr/2);
--> R21=(1./(sqrt(6))).*(Pr/2).*(a0^1.5).*exp(-Pr/2);
--> xset('window',1)
--> plot(Pr,R20,'r',Pr,R21,'linewidth',2)
--> xgrid(2)
--> title("Grafik Fungsi Radial Atom Tritium Keadaan Tereksitasi
Pertama","Fontsize",5)
--> xlabel("r= posisi elektron","Fontsize",4)
--> ylabel("R(r)=Fungsi Radial","Fontsize",4)
--> legend('keadaan n=2,l-0','keadaan n=2,l=1')
Figure saved.
```

5. Plot Fungsi Gelombang Radial Atom Tritium $(n = 3; l = 0)$

```
--> Hbar=1.054589*10^-34;
--> pi=3.14159265;
--> alfa=2.307113707464*10^-28;
--> MR=9.10787809*10^-31;
--> a0=(Hbar^2)/(MR*alfa)
 a0  =
   5.293D-11
--> n=linspace(0,20,1000);
--> rT=n.*a0;
--> Pr=rT/a0;
```

```
--> R30=(2./(81.*(sqrt(3)))).*((1./a0)^1.5).*((2.*(Pr^2))-(18.*Pr)+27).*exp(-Pr/3);
--> xset('window',1)
--> plot(Pr,R30,'r','linewidth',2)
--> xgrid(2)
--> title("Grafik Fungsi Radial Atom Tritium n=3","Fontsize",5)
--> xlabel("r= posisi elektron","Fontsize",4)
--> ylabel("R(r)=Fungsi Radial","Fontsize",4)
Figure saved.
```

6. Plot Fungsi Gelombang Radial Atom Tritium ($n = 3; l = 1$)

```
--> Hbar=1.054589*10^-34;
--> pi=3.14159265;
--> alfa=2.307113707464*10^-28;
--> MR=9.10787809*10^-31;
--> a0=(Hbar^2)/(MR*alfa)
 a0  =
   5.293D-11
--> n=linspace(0,20,1000);
--> rT=n.*a0;
--> Pr=rT/a0;
--> R31=(4./(81.*(sqrt(6)))).*((1./a0)^1.5).*(rT./a0).*(6-(rT./a0)).*exp(-Pr/3);
--> xset('window',1)
--> plot(Pr,R31,'k','linewidth',2)
--> xgrid(2)
--> title("Grafik Fungsi Radial Atom Tritium n=3","Fontsize",5)
--> xlabel("r= posisi elektron","Fontsize",4)
--> ylabel("R(r)=Fungsi Radial","Fontsize",4)
Figure saved.
```

7. Plot Fungsi Gelombang Radial Atom Tritium ($n = 3; l = 2$)

```
--> Hbar=1.054589*10^-34;
```

```
--> pi=3.14159265;
--> alfa=2.307113707464*10^-28;
--> MR=9.10787809*10^-31;
--> a0=(Hbar^2)/(MR*alfa)
 a0  =
   5.293D-11
--> n=linspace(0,20,1000);
--> rT=n.*a0;
--> Pr=rT/a0;
--> R32=(4./(81.*(sqrt(30)))).*((1./a0)^1.5).*((rT^2)/(a0^2)).*exp(-Pr/3);
--> xset('window',1)
--> plot(Pr,R32,'g','linewidth',2)
--> title("Grafik Fungsi Radial Atom Tritium n=3","Fontsize",5)
--> xlabel("r= posisi elektron","Fontsize",4)
--> ylabel("R(r)=Fungsi Radial","Fontsize",4)
Figure saved.
```

8. Plot Fungsi Gelombang Radial Atom Tritium dalam Keadaan Tereksitasi Kedua

```
--> Hbar=1.054589*10^-34;
--> pi=3.14159265;
--> alfa=2.307113707464*10^-28;
--> MR=9.10787809*10^-31;
--> a0=(Hbar^2)/(MR*alfa)
 a0  =
   5.293D-11
--> n=linspace(0,20,1000);
--> rT=n.*a0;
--> Pr=rT/a0;
--> xset('window',1)
--> plot(Pr,R30,'r',Pr,R31,'k',Pr,R32,'g','linewidth',2)
--> xgrid(2)
```

```
--> title("Grafik Fungsi Radial Atom Tritium Keadaan Tereksitasi Kedua","Fontsize",5)
--> xlabel("r= posisi elektron","Fontsize",4)
--> ylabel("R(r)=Fungsi Radial","Fontsize",4)
--> legend('keadaan n=3,l=0','keadaan n=3,l=1','keadaan n=3,l=2')
Figure saved.
```

Lampiran 15. Pembuktian Fungsi Gelombang Atom Hidrogen

Untuk $\boldsymbol{n = 1\ (l = 0; m = 0)}$

Fungsi Azimuth $\boldsymbol{\Phi_m(\phi)}$

$$\Phi_m(\phi) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}e^{im\phi}$$

$$\Phi_0(\phi) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}e^{i0\phi} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}$$

Fungsi Polar $\boldsymbol{\Theta_{lm}(\theta)}$

$$P_l^m(\cos\theta) = (1 - cos^2\theta)^{\frac{|m|}{2}}\frac{d^{|m|}}{dcos\theta^{|m|}}\ \mathrm{P}_l\,(\cos\theta)$$

$$P_0^0(\cos\theta) = (1 - cos^2\theta)^{\frac{|0|}{2}}\frac{d^{|0|}}{dcos\theta^{|0|}}\ (1) = 1$$

Mendapatkan fungsi polar sebagai berikut:

$$\Theta_{lm}(\theta) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}}\sqrt{\frac{(2l+1)}{2}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}P_l^m(\cos\theta)$$

$$\Theta_{00}(\theta) = (-1)^{\frac{0+|0|}{2}}\sqrt{\frac{(2(0)+1)}{2}\frac{(0-|0|)!}{(0+|0|)!}}(1) = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Fungsi Radial $\boldsymbol{R_{nl}(r)}$

$$L_{1+0}^{2(0)+1}\left(\frac{2r}{1a_0}\right) = (-1)^{2(0)+1}\frac{(1+0)!}{(1-0-1)!}e^{\frac{2r}{1a_0}}\frac{d^{1+0}}{d\left(\frac{2r}{1a_0}\right)^{1+0}}\left(e^{-\frac{2r}{1a_0}}\left(\frac{2r}{1a_0}\right)^{1-0-1}\right)$$

$$L_1^1\left(\frac{2r}{a_0}\right) = (-1)^1 e^{\frac{2r}{a_0}}\frac{d^1}{d\left(\frac{2r}{a_0}\right)^1}\left(e^{-\frac{2r}{a_0}}\left(\frac{2r}{a_0}\right)^0\right)$$

$$L_1^1\left(\frac{2r}{a_0}\right) = e^0 = 1$$

Mendapatkan fungsi radial sebagai berikut:

$$R_{10}(r) = \left[\left(\frac{2}{1a_0}\right)^3\frac{(1-0-1)!}{21[(1+0)!]^3}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{2r}{1a_0}\right]^0 e^{-\frac{r}{1a_0}}L_{1+0}^{2(0)+1}\left(\frac{2r}{1a_0}\right)$$

$$R_{10}(r) = \left(\frac{2}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{r}{a_0}}(1) = \frac{2}{a_0^{3/2}}\left(e^{-r/a_0}\right)$$

Untuk $\boldsymbol{n = 2\ (l = 0, 1; m = 0, \pm 1)}$

Fungsi Azimuth $\boldsymbol{\Phi_m(\phi)}$

Untuk $m = 0$, maka:$\Phi_m(\phi) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}e^{im\phi} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}$

Untuk $m = \pm 1$, maka:$\Phi_m(\phi) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\, e^{im\phi} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\, e^{\pm i\phi}$

Fungsi Polar $\boldsymbol{\Theta_{lm}(\theta)}$

Untuk $\boldsymbol{l = 0}$ dan $\boldsymbol{m = 0}$

$$P_l^m(\cos\theta) = (1 - cos^2\theta)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{|m|}}{dcos\theta^{|m|}}\ \mathrm{P}_l\,(\cos\theta)$$

$$P_0^0(\cos\theta) = (1 - cos^2\theta)^{\frac{|0|}{2}} \frac{d^{|0|}}{dcos\theta^{|0|}}\ (1) = 1$$

Mendapatkan fungsi polar sebagai berikut:

$$\Theta_{lm}(\theta) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{(2l+1)}{2}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\, P_l^m(\cos\theta)$$

$$\Theta_{00}(\theta) = (-1)^{\frac{0+|0|}{2}} \sqrt{\frac{(2(0)+1)}{2}\frac{(0-|0|)!}{(0+|0|)!}}\,(1) = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Untuk $l = 1$ dan $m = 0$

$$P_l^m(\cos\theta) = (1 - cos^2\theta)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{|m|}}{dcos\theta^{|m|}}\ \mathrm{P}_l\,(\cos\theta)$$

$$P_1^0(\cos\theta) = (1 - cos^2\theta)^0 \frac{d^{|0|}}{dcos\theta^{|0|}} \cos\theta = \cos\theta$$

Mendapatkan fungsi polar sebagai berikut:

$$\Theta_{lm}(\theta) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{(2l+1)}{2}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\, P_l^m(\cos\theta)$$

$$\Theta_{10}(\theta) = (-1)^{\frac{0+|0|}{2}} \sqrt{\frac{(2(1)+1)}{2}\frac{(1-|0|)!}{(1+|0|)!}} \cos\theta = \sqrt{\frac{3}{2}} \cos\theta$$

Untuk $\mathbf{l = 1}$ dan $\mathbf{m = 1}$

$$P_l^m(\cos\theta) = (1 - cos^2\theta)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{|m|}}{dcos\theta^{|m|}}\ \mathrm{P}_l\,(\cos\theta)$$

$$P_1^{+1}(\cos\theta) = (1 - cos^2\theta)^{\frac{1}{2}} \frac{d\cos\theta}{d\cos\theta} = \sin\theta$$

Mendapatkan fungsi polar sebagai berikut:

$$\Theta_{lm}(\theta) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{(2l+1)}{2}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\, P_l^m(\cos\theta)$$

$$\Theta_{11}(\theta) = (-1)^{\frac{1+|1|}{2}} \sqrt{\frac{(2(1)+1)}{2}\frac{(1-|1|)!}{(1+|1|)!}} \sin\theta = -\sqrt{\frac{3}{4}} \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin\theta$$

Untuk $\boldsymbol{l = 1}$ dan $\boldsymbol{m = -1}$

$$P_l^m(\cos\theta) = (1-cos^2\theta)^{\frac{|m|}{2}}\frac{d^{|m|}}{dcos\theta^{|m|}}\ \mathrm{P}_l\,(\cos\theta)$$

$$P_1^{-1}(\cos\theta) = (1-cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}\frac{d\cos\theta}{d\cos\theta} = \sin\theta$$

Mendapatkan fungsi polar sebagai berikut:

$$\Theta_{lm}(\theta) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}}\sqrt{\frac{(2l+1)}{2}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\,P_l^m(\cos\theta)$$

$$\Theta_{1(-1)}(\theta) = (-1)^{\frac{1+|1|}{2}}\sqrt{\frac{(2(1)+1)}{2}\frac{(1-|1|)!}{(1+|1|)!}}\sin\theta = \sqrt{\frac{3}{4}}\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$$

Fungsi Radial $R_{nl}(r)$

Untuk $n = 2$ dan $l = 0$

$$L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right) = (-1)^{2l+1}\frac{(n+l)!}{(n-l-1)!}e^{\frac{2r}{na_0}}\frac{d^{n+l}}{d\left(\frac{2r}{na_0}\right)^{n+l}}\left(e^{-\frac{2r}{na_0}}\left(\frac{2r}{na_0}\right)^{n-l-1}\right)$$

$$L_2^1\left(\frac{r}{a_0}\right) = (-1)^1\frac{2}{1}e^{\frac{r}{a_0}}\frac{d^2}{d\left(\frac{r}{a_0}\right)^2}\left(e^{-\frac{r}{a_0}}\left(\frac{r}{a_0}\right)^1\right)$$

$$L_2^1\left(\frac{r}{a_0}\right) = -2\left(-2+\left(\frac{r}{a_0}\right)\right) = \left(4-2\left(\frac{r}{a_0}\right)\right)$$

Mendapatkan fungsi radial sebagai berikut:

$$R_{nl}(r) = \left[\left(\frac{2}{na_0}\right)^3\frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{2r}{na_0}\right]^l e^{-\frac{r}{na_0}}L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right)$$

$$R_{20}(r) = \left[\left(\frac{2}{2a_0}\right)^3\frac{(2-0-1)!}{2(2)[(2+0)!]^3}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{2r}{2a_0}\right]^0 e^{-\frac{r}{2a_0}}L_2^1\left(\frac{r}{a_0}\right)$$

$$R_{20}(r) = \sqrt{\frac{1}{a_0{}^3}\frac{1}{2!}\frac{1}{2}}.\frac{1}{2}e^{-\frac{r}{2a_0}}L_2^1\left(\frac{r}{a_0}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}(a_0)^{\frac{3}{2}}}\left(2-\left(\frac{r}{a_0}\right)\right)e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

Untuk $n = 2$ dan $l = \pm 1$

$$L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right) = (-1)^{2l+1}\frac{(n+l)!}{(n-l-1)!}e^{\frac{2r}{na_0}}\frac{d^{n+l}}{d\left(\frac{2r}{na_0}\right)^{n+l}}\left(e^{-\frac{2r}{na_0}}\left(\frac{2r}{na_0}\right)^{n-l-1}\right)$$

$$L_3^3\left(\frac{r}{a_0}\right) = (-1)6\,e^{\frac{r}{a_0}}\frac{d^3}{d\left(\frac{r}{a_0}\right)^3}\left(e^{-\frac{r}{a_0}}\right)$$

$$L_3^3\left(\frac{r}{a_0}\right) = -6\,e^{\frac{r}{a_0}}\left(-e^{-\frac{r}{a_0}}\right) = 6$$

Mendapatkan fungsi radial sebagai berikut:

$$R_{nl}(r) = \left[\left(\frac{2}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2r}{na_0}\right]^l e^{-\frac{r}{na_0}} L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right)$$

$$R_{21}(r) = \left[\left(\frac{2}{2a_0}\right)^3 \frac{(2-1-1)!}{2(2)[(2+1)!]^3}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2r}{2a_0}\right]^1 e^{-\frac{r}{2a_0}} L_3^3\left(\frac{r}{a_0}\right)$$

$$R_{21}(r) = \sqrt{\left(\frac{1}{6a_0}\right)^3 \frac{1}{12}} \left[\frac{r}{a_0}\right]^1 e^{-\frac{r}{2a_0}} (6) = \frac{1}{2\sqrt{3}a_0^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{r}{a_0}\right] e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

Untuk $\boldsymbol{n = 3}$ ($\boldsymbol{l = 0, 1, 2; m = 0, \pm 1, \pm 2}$)

Fungsi Azimuth $\boldsymbol{\Phi_m(\phi)}$

Untuk $m = 0$, maka $\Phi_m(\phi) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{im\phi} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i0\phi} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}$

Untuk $m = \pm 1$, maka $\Phi_m(\phi) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{im\phi} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{\pm i\phi}$

Untuk $m = \pm 2$, maka $\Phi_m(\phi) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{im\phi} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{\pm 2i\phi}$

Fungsi Polar $\boldsymbol{\Theta_{lm}(\theta)}$

Untuk $\boldsymbol{l = 0}$ dan $\boldsymbol{m = 0}$

$$P_l^m(\cos\theta) = (1 - cos^2\theta)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{|m|}}{dcos\theta^{|m|}} \mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

$$P_0^0(\cos\theta) = (1 - cos^2\theta)^{\frac{|0|}{2}} \frac{d^{|0|}}{dcos\theta^{|0|}} (1) = 1$$

Mendapatkan fungsi polar sebagai berikut:

$$\Theta_{lm}(\theta) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{(2l+1)}{2} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^m(\cos\theta)$$

$$\Theta_{00}(\theta) = (-1)^{\frac{0+|0|}{2}} \sqrt{\frac{(2(0)+1)}{2} \frac{(0-|0|)!}{(0+|0|)!}} (1) = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Untuk $\boldsymbol{l = 1}$ dan $\boldsymbol{m = 0}$

$$P_l^m(\cos\theta) = (1 - cos^2\theta)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{|m|}}{dcos\theta^{|m|}} \mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

$$P_1^0(\cos\theta) = (1 - cos^2\theta)^0 \frac{d^{|0|}}{dcos\theta^{|0|}} \cos\theta = \cos\theta$$

Mendapatkan fungsi polar sebagai berikut:

$$\Theta_{lm}(\theta) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{(2l+1)}{2} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^m(\cos\theta)$$

$$\Theta_{10}(\theta) = (-1)^{\frac{0+|0|}{2}} \sqrt{\frac{(2(1)+1)}{2} \frac{(1-|0|)!}{(1+|0|)!}} \cos\theta = \sqrt{\frac{3}{2}} \cos\theta$$

Untuk $\boldsymbol{l} = 1$ dan $\boldsymbol{m} = 1$

$$P_l^m(\cos\theta) = (1 - cos^2\theta)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{|m|}}{dcos\theta^{|m|}} \mathrm{P}_l\,(\cos\theta)$$

$$P_1^{+1}(\cos\theta) = (1 - cos^2\theta)^{\frac{1}{2}} \frac{d\cos\theta}{d\cos\theta} = \sin\theta$$

Mendapatkan fungsi polar sebagai berikut:

$$\Theta_{lm}(\theta) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{(2l+1)}{2}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\, P_l^m(\cos\theta)$$

$$\Theta_{11}(\theta) = (-1)^{\frac{1+|1|}{2}} \sqrt{\frac{(2(1)+1)}{2}\frac{(1-|1|)!}{(1+|1|)!}} \sin\theta = -\sqrt{\frac{3}{4}}\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$$

Untuk $\boldsymbol{l} = 1$ dan $\boldsymbol{m} = -1$

$$P_l^m(\cos\theta) = (1 - cos^2\theta)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{|m|}}{dcos\theta^{|m|}} \mathrm{P}_l\,(\cos\theta)$$

$$P_1^{-1}(\cos\theta) = (1 - cos^2\theta)^{\frac{1}{2}} \frac{d\cos\theta}{d\cos\theta} = \sin\theta$$

Mendapatkan fungsi polar sebagai berikut:

$$\Theta_{lm}(\theta) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{(2l+1)}{2}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\, P_l^m(\cos\theta)$$

$$\Theta_{1(-1)}(\theta) = (-1)^{\frac{1+|1|}{2}} \sqrt{\frac{(2(1)+1)}{2}\frac{(1-|1|)!}{(1+|1|)!}} \sin\theta = \sqrt{\frac{3}{4}}\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$$

Untuk $\boldsymbol{l} = 2$ dan $\boldsymbol{m} = 0$

$$P_l^m(\cos\theta) = (1 - cos^2\theta)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{|m|}}{dcos\theta^{|m|}} \mathrm{P}_l\,(\cos\theta)$$

$$P_2^0(\cos\theta) = (1 - cos^2\theta)^{\frac{|0|}{2}} \frac{d^{|0|}}{dcos\theta^{|0|}} \frac{3}{2}\, cos^2\theta - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3cos^2\theta - 1)$$

Mendapatkan fungsi polar sebagai berikut:

$$\Theta_{lm}(\theta) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{(2l+1)}{2}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\, P_l^m(\cos\theta)$$

$$\Theta_{20}(\theta) = (-1)^{\frac{0+|0|}{2}} \sqrt{\frac{(2(2)+1)}{2}\frac{(2-|0|)!}{(2+|0|)!}}\, \frac{1}{2}\,(3\,cos^2\theta - 1) = \sqrt{\frac{5}{8}}\,(3\,cos^2\theta - 1)$$

Untuk $\boldsymbol{l} = 2$ dan $\boldsymbol{m} = 1$

$$P_l^m(\cos\theta) = (1 - cos^2\theta)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{|m|}}{dcos\theta^{|m|}} \mathrm{P}_l\,(\cos\theta)$$

$$P_2^{+1}(\cos\theta) = (1 - cos^2\theta)^{\frac{|+1|}{2}} \frac{d^{|+1|}}{dcos\theta^{|+1|}} \frac{3}{2}\, cos^2\theta - \frac{1}{2}$$

$$P_2^{+1}(\cos\theta) = \sqrt{1 - cos^2\theta}\; 3\cos\theta = 3\sin\theta\cos\theta$$

Mendapatkan fungsi polar sebagai berikut:

$$\Theta_{lm}(\theta) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{(2l+1)}{2} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^m(\cos\theta)$$

$$\Theta_{21}(\theta) = (-1)^{\frac{1+|1|}{2}} \sqrt{\frac{(2(2)+1)}{2} \frac{(2-|1|)!}{(2+|1|)!}} (3\sin\theta\cos\theta) = -\sqrt{\frac{5}{12}}(3\sin\theta\cos\theta)$$

$$\Theta_{21}(\theta) = -\sqrt{\frac{15}{4}}(\sin\theta\cos\theta)$$

Untuk $l = 2$ dan $m = -1$

$$P_l^m(\cos\theta) = (1-cos^2\theta)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{|m|}}{dcos\theta^{|m|}} \mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

$$P_2^{-1}(\cos\theta) = (1-cos^2\theta)^{\frac{|-1|}{2}} \frac{d^{|-1|}}{dcos\theta^{|-1|}} \frac{3}{2} cos^2\theta - \frac{1}{2}$$

$$P_2^{-1}(\cos\theta) = \sqrt{1-cos^2\theta}\, 3\cos\theta = 3\sin\theta\cos\theta$$

Mendapatkan fungsi polar sebagai berikut:

$$\Theta_{lm}(\theta) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{(2l+1)}{2} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^m(\cos\theta)$$

$$\Theta_{2(-1)}(\theta) = (-1)^{\frac{1+|-1|}{2}} \sqrt{\frac{(2(2)+1)}{2} \frac{(2-|-1|)!}{(2+|-1|)!}} (3\sin\theta\cos\theta) = \sqrt{\frac{5}{12}}(3\sin\theta\cos\theta)$$

$$\Theta_{2(-1)}(\theta) = \sqrt{\frac{15}{4}}(\sin\theta\cos\theta)$$

Untuk $l = 2$ dan $m = 2$

$$P_l^m(\cos\theta) = (1-cos^2\theta)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{|m|}}{dcos\theta^{|m|}} \mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

$$P_2^{+2}(\cos\theta) = (1-cos^2\theta)^{\frac{|+2|}{2}} \frac{d^{|+2|}}{dcos\theta^{|+2|}} \frac{3}{2} cos^2\theta - \frac{1}{2}$$

$$P_2^{+2}(\cos\theta) = 1-cos^2\theta\left(\frac{d}{dcos\theta}(3\cos\theta)\right) = 1-cos^2\theta\,(3) = 3\,sin^2\theta$$

Mendapatkan fungsi polar sebagai berikut:

$$\Theta_{lm}(\theta) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{(2l+1)}{2} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^m(\cos\theta)$$

$$\Theta_{22}(\theta) = (-1)^{\frac{2+|2|}{2}} \sqrt{\frac{(2(2)+1)}{2} \frac{(2-|2|)!}{(2+|2|)!}} (3\,sin^2\theta) = (1)\sqrt{\frac{45}{48}}(\,sin^2\theta)$$

$$\Theta_{22}(\theta) = \sqrt{\frac{15}{16}}(\,sin^2\theta) = \frac{\sqrt{15}}{4}(\,sin^2\theta)$$

Untuk $l = 2$ dan $m = -2$

$$P_l^m(\cos\theta) = (1 - cos^2\theta)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{|m|}}{dcos\theta^{|m|}} \, \mathrm{P}_l\,(\cos\theta)$$

$$P_2^{-2}(\cos\theta) = (1 - cos^2\theta)^{\frac{|-2|}{2}} \frac{d^{|-2|}}{dcos\theta^{|-2|}} \frac{3}{2}\; cos^2\theta - \frac{1}{2}$$

$$P_2^{-2}(\cos\theta) = 1 - cos^2\theta \left(\frac{d}{dcos\theta}(3\cos\theta)\right) = 1 - cos^2\theta\;(3) = 3\;sin^2\theta$$

Mendapatkan fungsi polar sebagai berikut:

$$\Theta_{lm}(\theta) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{(2l+1)}{2}\;\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\, P_l^m(\cos\theta)$$

$$\Theta_{2(-2)}(\theta) = (-1)^{\frac{-2+|-2|}{2}} \sqrt{\frac{(2(2)+1)}{2}\;\frac{(2-|-2|)!}{(2+|-2|)!}}\,(3\;sin^2\,\theta) = (1)\sqrt{\frac{45}{48}}\,(\;sin^2\,\theta)$$

$$\Theta_{2(-2)}(\theta) = \sqrt{\frac{15}{16}}\,(\;sin^2\,\theta) = \frac{\sqrt{15}}{4}\,(\;sin^2\,\theta)$$

Fungsi Radial $R_{nl}(r)$

Untuk $n = 3$ dan $l = 0$

$$L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right) = (-1)^{2l+1} \frac{(n+l)!}{(n-l-1)!} e^{\frac{2r}{na_0}} \frac{d^{n+l}}{d\left(\frac{2r}{na_0}\right)^{n+l}} \left(e^{-\frac{2r}{na_0}} \left(\frac{2r}{na_0}\right)^{n-l-1}\right)$$

$$L_3^1\left(\frac{2r}{3a_0}\right) = (-1)\frac{3!}{2!} e^{\frac{2r}{3a_0}} \frac{d^3}{d\left(\frac{2r}{3a_0}\right)^3} \left(e^{-\frac{2r}{3a_0}} \left(\frac{2r}{3a_0}\right)^2\right) = -\frac{3!}{2!} e^{\frac{2r}{3a_0}} \frac{d^3}{d\left(\frac{2r}{3a_0}\right)^3} \left(e^{-\frac{2r}{3a_0}} \left(F\,\frac{2r}{3a_0}\right)^2\right)$$

$$L_3^1\left(\frac{2r}{3a_0}\right) = -3e^{\frac{2r}{3a_0}} \left(-6e^{-\frac{2r}{3a_0}} + 6e^{-\frac{2r}{3a_0}} \frac{2r}{3a_0} + e^{-\frac{2r}{3a_0}} \frac{2r}{3a_0}^2\right) = 3\left(\left(\frac{2r}{3a_0}\right)^2 - 6F + 6\right)$$

$$L_3^1\left(\frac{2r}{3a_0}\right) = \left(\frac{2r}{3a_0}\right)^2 - 18\left(\frac{2r}{3a_0}\right) + 18$$

Mendapatkan fungsi radial sebagai berikut:

$$R_{nl}(r) = \left[\left(\frac{2}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2r}{na_0}\right]^l e^{-\frac{r}{na_0}} L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right)$$

$$R_{30}(r) = \left[\left(\frac{2}{3a_0}\right)^3 \frac{(3-0-1)!}{2(3)[(3+0)!]^3}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2r}{3a_0}\right]^0 e^{-\frac{r}{3a_0}} L_3^1\left(\frac{2r}{3a_0}\right)$$

$$R_{30}(r) = \frac{2}{\sqrt{3\,a_0{}^3}} \frac{1}{18} e^{-\frac{r}{3a_0}} \left(\left(\frac{2r}{3a_0}\right)^2 - 18\left(\frac{2r}{3a_0}\right) + 18\right)$$

$$R_{30}(r) = \frac{1}{9\sqrt{3\,a_0{}^3}} e^{-\frac{r}{3a_0}}\, 18\left(\left(\frac{2r}{27a_0}\right)^2 - \left(\frac{2r}{3a_0}\right) + 1\right)$$

$$R_{30}(r) = \frac{2}{\sqrt{3\,a_0{}^3}} e^{-\frac{r}{3a_0}} \left(\frac{2r^2}{27a_0{}^2} - \left(\frac{2r}{3a_0}\right) + 2\right)$$

Untuk $n = 3$ dan $l = \pm 1$

$$L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right) = (-1)^{2l+1}\frac{(n+l)!}{(n-l-1)!}e^{\frac{2r}{na_0}}\frac{d^{n+l}}{d\left(\frac{2r}{na_0}\right)^{n+l}}\left(e^{-\frac{2r}{na_0}}\left(\frac{2r}{na_0}\right)^{n-l-1}\right)$$

$$L_4^3\left(\frac{2r}{3a_0}\right) = -\frac{4!}{1!}e^{\frac{2r}{3a_0}}\frac{d^4}{d\left(\frac{2r}{3a_0}\right)^4}\left(e^{-\frac{2r}{3a_0}}\left(\frac{2r}{3a_0}\right)^1\right) = -24\,e^{\frac{2r}{3a_0}}\left(\left(-4e^{-\frac{2r}{3a_0}}\right) + e^{-\frac{2r}{3a_0}}\frac{2r}{3a_0}\right)$$

$$L_4^3\left(\frac{2r}{3a_0}\right) = 24\left(4 - \frac{2r}{3a_0}\right) = \left(96 - \frac{48r}{3a_0}\right)$$

Mendapatkan fungsi radial sebagai berikut:

$$R_{nl}(r) = \left[\left(\frac{2}{na_0}\right)^3\frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{2r}{na_0}\right]^l e^{-\frac{r}{na_0}}L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right)$$

$$R_{31}(r) = \left[\left(\frac{2}{3a_0}\right)^3\frac{(3-1-1)!}{2(3)[(3+1)!]^3}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{2r}{3a_0}\right]^1 e^{-\frac{r}{3a_0}}L_4^3\left(\frac{2r}{3a_0}\right)$$

$$R_{31}(r) = \sqrt{\frac{2^3}{27{a_0}^3}\frac{1}{6(24)^3}}\left[\frac{2r}{3a_0}\right]^1 e^{-\frac{r}{3a_0}}\left(96 - \frac{48r}{3a_0}\right)$$

$$R_{31}(r) = \sqrt{\frac{8}{27{a_0}^3}\frac{1}{6(24)^3}}\left[\frac{2r}{3a_0}\right]^1 e^{-\frac{r}{3a_0}}\,96\left(1 - \frac{r}{6a_0}\right) = \frac{8}{27\sqrt{6a_0^3}}e^{-\frac{r}{3a_0}}\frac{r}{a_0}\left(1 - \frac{r}{6a_0}\right)$$

$$R_{31}(r) = \frac{8}{27\sqrt{6a_0^3}}e^{-\frac{r}{3a_0}}\left(\frac{r}{a_0} - \frac{r^2}{6a_0^2}\right) = \frac{8}{9\sqrt{2}\left(3a_0^3\right)^3}e^{-\frac{r}{3a_0}}\left(\frac{r}{a_0} - \frac{r^2}{6a_0^2}\right)$$

Untuk $n = 3$ dan $l = \pm 2$

$$L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right) = (-1)^{2l+1}\frac{(n+l)!}{(n-l-1)!}e^{\frac{2r}{na_0}}\frac{d^{n+l}}{d\left(\frac{2r}{na_0}\right)^{n+l}}\left(e^{-\frac{2r}{na_0}}\left(\frac{2r}{na_0}\right)^{n-l-1}\right)$$

$$L_5^5\left(\frac{2r}{3a_0}\right) = -\frac{5!}{0!}e^{\frac{2r}{3a_0}}\frac{d^5}{d\left(\frac{2r}{3a_0}\right)^5}\left(e^{-\frac{2r}{3a_0}}\right) = -120\,e^{\frac{2r}{3a_0}}\frac{d^5}{d\left(\frac{2r}{3a_0}\right)^5}\left(e^{-\frac{2r}{3a_0}}\right)$$

$$L_5^5\left(\frac{2r}{3a_0}\right) = -120\,e^{\frac{2r}{3a_0}}\left(-e^{-\frac{2r}{3a_0}}\right) = 120$$

Mendapatkan fungsi radial sebagai berikut:

$$R_{32}(r) = \left[\left(\frac{2}{3a_0}\right)^3\frac{(3-2-1)!}{2(3)[(3+2)!]^3}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{2r}{3a_0}\right]^2 e^{-\frac{r}{3a_0}}L_5^5\left(\frac{2r}{3a_0}\right)$$

$$R_{32}(r) = \sqrt{\frac{1}{120\,{a_0}^3}}\left(\frac{r^2}{1215\,{a_0}^2}\right)e^{-\frac{r}{3a_0}}(120) = \sqrt{\frac{1}{30{a_0}^3}}\frac{1}{2}\frac{120}{1215}\left(\frac{r^2}{{a_0}^2}\right)e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

$$R_{32}(r) = \sqrt{\frac{1}{30{a_0}^3}}\frac{4}{81}\left(\frac{r^2}{{a_0}^2}\right)e^{-\frac{r}{3a_0}} = \frac{1}{27\sqrt{10}}(3a_0)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{r^2}{{a_0}^2}\right)e^{-\frac{r}{3a_0}}$$