



**SOLUSI PERSAMAAN SCHRODINGER ION HELIUM ($\frac{4}{2}\text{He}^+$)
PADA BILANGAN KUANTUM $n \leq 3$ DALAM
REPRESENTASI RUANG MOMENTUM**

SKRIPSI

Oleh:

**Destya Dwi Damayanti
NIM. 160210102050**

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN FISIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MIPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER
2020**



**SOLUSI PERSAMAAN SCHRODINGER ION HELIUM (${}^4_2\text{He}^+$)
PADA BILANGAN KUANTUM $n \leq 3$ DALAM
REPRESENTASI RUANG MOMENTUM**

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Studi Pendidikan Fisika (S1) dan
mencapai gelar sarjana pendidikan

Oleh:

Destya Dwi Damayanti
NIM. 160210102050

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN FISIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MIPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER
2020**

PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan untuk:

1. Kedua Orangtua saya Bapak Eka Muharam Suryadi dan Ibu Marsiati serta kakak saya Rendra Rizqi Ramadhan dan Nur Rika Aprilyani yang selalu memberikan motivasi, dukungan, dan juga doa dalam setiap langkah yang saya lalui.
2. Guru-guru sejak saya duduk di bangku TK hingga perguruan tinggi yang telah memberikan bimbingan dan juga ilmu yang bermanfaat.
3. Keluarga besar Program Studi Pendidikan Fisika khususnya angkatan 2016 yang selalu memberikan motivasi dan bantuan dalam hal apapun.
4. Almamater kebanggaan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

MOTTO

“Success is no accident. It is hard work, perseverance, learning, studying, sacrifice, and most of all, love of what you are doing or learning to do” – Pele¹



¹Shyam, G. 2018. *Journey to Success & Significance*. Chennai: Nation Press.

PERNYATAAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama : Destya Dwi Damayanti

NIM : 160210102050

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul “Solusi Persamaan Schrodinger Ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$) pada Bilangan Kuantum $n \leq 3$ dalam Representasi Ruang Momentum” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang telah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada instansi manapun dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenar-benarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata dikemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 10 Januari 2020

Yang menyatakan,

Destya Dwi Damayanti

NIM. 160210102050

SKRIPSI

**SOLUSI PERSAMAAN SCHRODINGER ION HELIUM (${}^4_2\text{He}^+$) PADA
BILANGAN KUANTUM $n \leq 3$ DALAM REPRESENTASI RUANG
MOMENTUM**

Oleh:

Destya Dwi Damayanti

NIM. 160210102050

Pembimbing:

Dosen Pembimbing Utama : Drs. Bambang Supriadi, M.Sc.

Dosen Pembimbing Anggota : Lailatul Nuraini, S.Pd., M.Pd.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul “Solusi Persamaan Schrodinger Ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$) pada Bilangan Kuantum $n \leq 3$ dalam Representasi Ruang Momentum” telah diuji dan disahkan pada:

Hari, tanggal :

Tempat : Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Tim Penguji:

Ketua,

Sekretaris,

Drs. Bambang Supriadi, M.Sc.

Lailatul Nuraini, S.Pd., M.Pd.

NIP. 19680710 199302 1 001

NRP. 760016812

Anggota I

Anggota II

Drs. Trapsilo Prihandono, M.Si.

Drs. Alex Harijanto, M.Si.

NIP. 19620401 198702 1 001

NIP. 19641117 199103 1 001

Mengesahkan

Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Universitas Jember,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

NIP. 19680802 199303 1 004

RINGKASAN

Solusi Persamaan Schrodinger Ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$) pada Bilangan Kuantum $n \leq 3$ dalam Representasi Ruang Momentum; Destya Dwi Damayanti, 160210102050; 2019; 46 halaman; Program Studi Pendidikan Fisika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember.

Gejala atom Hidrogen merupakan salah satu contoh dari perkembangan teori mekanika kuantum. Selain atom Hidrogen dan juga isotopnya, ada beberapa atom yang memiliki sifat hidrogenik yakni berelektron tunggal, salah satunya yaitu Ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$). Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji solusi Persamaan Schrodinger Ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$) pada bilangan kuantum $n \leq 3$ dalam representasi ruang momentum. Jenis penelitian ini adalah penelitian non eksperimen dengan metode kajian teori mengenai mekanika kuantum khususnya atom hidrogenik yang dikerjakan secara analitik. Pendekatan yang digunakan pada penelitian ini adalah Persamaan Schrodinger tak bergantung waktu menggunakan koordinat bola. Metode Persamaan Schrodinger yang digunakan adalah dengan metode separasi variabel dan normalisasi fungsi gelombang. Persamaan Schrodinger merupakan persamaan differensial orde dua yang dapat memberikan informasi mengenai perilaku sebuah partikel seperti elektron. Persamaan ini harus memenuhi tiga syarat, yakni: memenuhi hukum kekekalan energi, taat asas terhadap hipotesis de Broglie, dan harus berperilaku baik (persamaan yang dihasilkan bernilai tunggal, berhingga, dan kontinu).

Pada penelitian ini, solusi Persamaan Schrodinger tidak bergantung waktu yang didapat adalah berupa fungsi gelombang dalam representasi ruang momentum (p). Fungsi gelombang Ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$) dalam representasi ruang momentum dapat dituliskan $\varphi_{n,l,m}(p, \theta, \phi)$ dan biasa disebut dengan fungsi gelombang kompleks karena terdiri dari tiga fungsi berbeda. Fungsi radial $F_{n,l}(p)$ merepresentasikan bahwa keberadaan elektron dapat ditemukan di sepanjang jarak orbit elektron yang dalam hal ini direpresentasikan dengan operator momentum

(p) ketika mengorbit pada inti (proton) diukur dari pusat atom. Fungsi polar $\Theta_{l,m}(\theta)$ merepresentasikan bentuk orbital elektron berdasarkan sudut (θ) di dalam atom yang memotong bidang xy , sedangkan fungsi azimuth $\Phi_m(\phi)$ merepresentasikan gerakan elektron berotasi berdasarkan sudut (ϕ) secara periodik di sekitar sumbu z dalam atom. Dari keterangan tersebut, maka fungsi gelombang Ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$) dalam representasi ruang momentum $\varphi_{n,l,m}(p, \theta, \phi) = F_{n,l}(p)\Theta_{l,m}(\theta)\Phi_m(\phi)$ yang menunjukkan bahwa letak atau keberadaan serta bentuk orbital dari sebuah partikel berbentuk elektron mengorbit inti yaitu proton pada Ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$) berdasarkan ruang koordinat simetri bola.

Berdasarkan hasil yang diperoleh dari penelitian ini, maka didapatkan solusi Persamaan Schrodinger Ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$) pada bilangan kuantum utama $n \leq 3$ dalam representasi ruang momentum adalah sebanyak 14 fungsi gelombang yang terdiri dari 6 fungsi radial dan 14 fungsi angular. Grafik yang diperoleh pada penelitian ini adalah berupa grafik distribusi radial momentum yang dapat menjelaskan mengenai kemungkinan keberadaan partikel dalam Ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$) pada bilangan kuantum utama $n \leq 3$.

PRAKATA

Puji syukur kehadiran Allah SWT. Atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Solusi Persamaan Schrodinger Ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$) pada Bilangan Kuantum $n \leq 3$ dalam Representasi Ruang Momentum”. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Program Studi Pendidikan Fisika Jurusan Pendidikan MIPA Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Penyusunan ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyatakan terima kasih kepada:

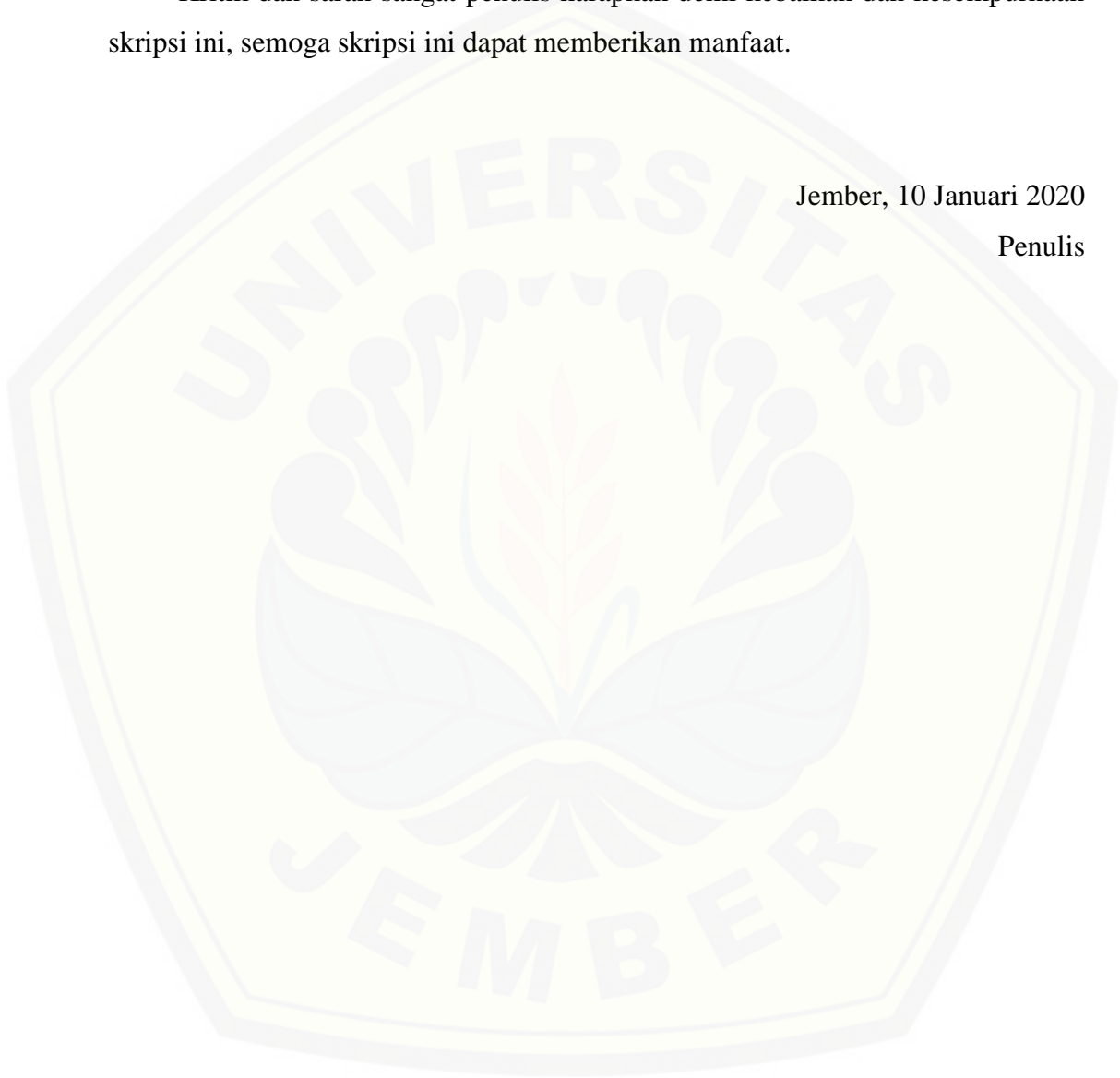
1. Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D., selaku Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember yang telah memberikan fasilitas sehingga skripsi ini dapat selesai;
2. Dr. Dwi Wahyuni, M.Kes., selaku ketua jurusan Pendidikan MIPA yang telah memberikan fasilitas sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini;
3. Drs. Bambang Supriadi, M.Sc., selaku Dosen Pembimbing Akademik sekaligus Dosen Pembimbing Utama yang telah membimbing penulis dalam segala aspek sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini;
4. Lailatul Nuraini, S.Pd., M.Pd., selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah membimbing penulis dalam segala aspek sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini;
5. Drs. Trapsilo Prihandono, M.Si., selaku Dosen Penguji Utama yang telah meluangkan waktu untuk memberikan saran dan kritik yang membangun demi kesempurnaan skripsi ini;
6. Drs. Alex Harijanto, M.Si., selaku Dosen Penguji Anggota yang telah memberikan saran dan kritik yang membangun demi kesempurnaan skripsi ini;
7. Teman-teman terdekat (Febri, Nelly, Ridha, Ayu, Alm. Andi) yang selalu memotivasi, memberi semangat, serta dukungan dalam penyelesaian skripsi ini;

8. Serta pihak-pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu yang telah memberikan kontribusi dan bantuannya demi kelancaran pengerjaan skripsi ini.

Kritik dan saran sangat penulis harapkan demi kebaikan dan kesempurnaan skripsi ini, semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat.

Jember, 10 Januari 2020

Penulis



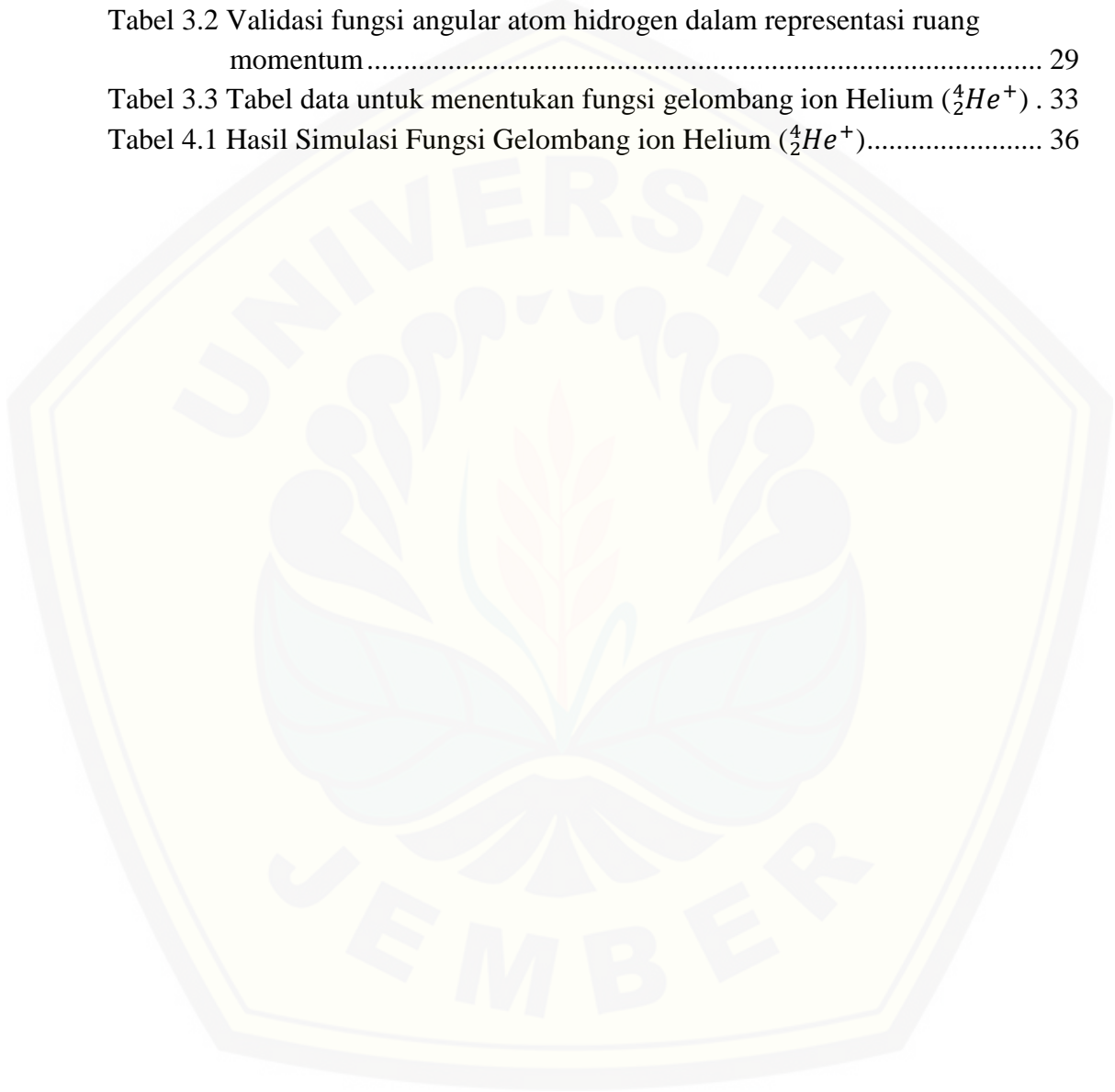
DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSEMBAHAN	ii
HALAMAN MOTTO	iii
HALAMAN PERNYATAAN	iv
HALAMAN PEMBIMBING	v
HALAMAN PENGESAHAN	vi
RINGKASAN	vii
PRAKATA	ix
DAFTAR ISI	xi
DAFTAR TABEL	xiii
DAFTAR GAMBAR	xiv
DAFTAR LAMPIRAN	xv
DAFTAR NOTASI	xvi
BAB 1. PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Batasan Masalah	4
1.5 Manfaat Penelitian	4
BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Dualisme Gelombang Partikel	5
2.2 Persamaan Schrodinger	7
2.2.1 Persamaan Schrodinger Tidak Bergantung Waktu	8
2.2.2 Persamaan Schrodinger Atom Berelektron Tunggal	9
2.3 Solusi Persamaan Schrodinger Ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$)	12
2.4 Transformasi Fourier	16
2.5 Solusi Persamaan Schrodinger Ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$) dalam Representasi Ruang Momentum	17

2.6 Bilangan Kuantum	23
2.6.1 Bilangan Kuantum Utama (n)	23
2.6.2 Bilangan Kuantum Orbital (l)	23
2.6.3 Bilangan Kuantum Magnetik (m)	24
2.7 Ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$)	24
BAB 3. METODE PENELITIAN	26
3.1 Jenis, Tempat, dan Waktu Penelitian	26
3.2 Definisi Operasional Variabel	26
3.3 Desain Penelitian	27
3.4 Data dan Sumber Data	32
3.5 Teori Hasil Pengembangan	33
3.6 Tabel Data	33
BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN	35
4.1 Hasil Penelitian	35
4.2 Pembahasan	38
BAB 5. PENUTUP	44
5.1 Kesimpulan	44
5.2 Saran	44
DAFTAR PUSTAKA	45
LAMPIRAN	48

DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 3.1 Validasi fungsi radial atom hidrogen dalam representasi ruang momentum	29
Tabel 3.2 Validasi fungsi angular atom hidrogen dalam representasi ruang momentum	29
Tabel 3.3 Tabel data untuk menentukan fungsi gelombang ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$) .	33
Tabel 4.1 Hasil Simulasi Fungsi Gelombang ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$).....	36



DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1 Koordinat polar bola (r, θ, ϕ)	11
Gambar 3.1 Bagan langkah-langkah penelitian	27
Gambar 3.2 Validasi Grafik Fungsi Distribusi Radial Momentum pada keadaan 1s, 2s, 3s.....	30
Gambar 3.3 Validasi Grafik Fungsi Distribusi Radial Momentum pada Keadaan 2s.....	30
Gambar 3.4 Validasi Grafik Fungsi Radial Momentum pada Keadaan 3s.....	30
Gambar 3.5 Diagram langkah pemrograman komputer untuk menentukan grafik distribusi momentum ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$) dalam representasi ruang momentum	32
Gambar 4.1 Hasil Grafik Distribusi Radial Momentum Ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$) pada bilangan kuantum $n \leq 3$	37

DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran 1. Matriks Penelitian.....	48
Lampiran 2 Hasil Simulasi Fungsi Gelombang Ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$) pada bilangan kuantum $n \leq 3$	49
Lampiran 3. Perhitungan Jari-Jari Atom Bohr	51
Lampiran 4. Perhitungan Fungsi Radial.....	53
Lampiran 5. Perhitungan Fungsi Legendre.....	57
Lampiran 6. Perhitungan Fungsi Legendre Terasosiasi.....	58
Lampiran 7. Perhitungan Fungsi Polar.....	61
Lampiran 8. Perhitungan Fungsi Azimuth.....	64
Lampiran 9. Perhitungan Fungsi Angular.....	66
Lampiran 10. Perhitungan Fungsi Gelombang	68
Lampiran 11. Grafik Distribusi Radial Momentum Ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$) pada bilangan kuantum $n \leq 3$	72
Lampiran 12. Screenshot Pemrograman MATLAB	76

DAFTAR NOTASI

λ = panjang gelombang de Broglie

h = tetapan Planck ($6,63 \times 10^{-34} \text{ Js}$)

\hbar = tetapan Planck ($\hbar = \frac{h}{2\pi} \text{ Js}$)

p = momentum partikel

E = energi total sistem atau energi eksitasi

ψ = psi (simbol untuk menyatakan fungsi gelombang)

$\psi_{(x,y,z)}$ = fungsi gelombang dalam arah tiga dimensi (sumbu x, y, dan z)

μ = massa tereduksi

$V_{(r)}$ = energi potensial partikel sebagai fungsi posisi

K = energi kinetik partikel

∇^2 = operator Laplacian

θ = besaran sudut polar

ϕ = besaran sudut azimuth

Θ = fungsi gelombang polar

Φ = fungsi gelombang azimuth

$F_{n,l}$ = fungsi gelombang radial dalam ruang momentum

${}^4_2\text{He}^+$ = Ion Helium berelektron tunggal

e = muatan elektron ($1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$)

$\frac{d}{dx}$ = operator differensial pertama dari suatu fungsi terhadap variabel posisi x

$\frac{d}{dy}$ = operator differensial pertama dari suatu fungsi terhadap variabel posisi y

$\frac{d}{dz}$ = operator differensial pertama dari suatu fungsi terhadap variabel posisi z

$\frac{d^2}{dx^2}$ = operator differensial orde dua dari suatu fungsi terhadap variabel posisi x

$\frac{d^2}{dy^2}$ = operator differensial orde dua dari suatu fungsi terhadap variabel posisi y

$\frac{d^2}{dz^2}$ = operator differensial orde dua dari suatu fungsi terhadap variabel posisi z

$\frac{d^2}{dt^2}$ = operator differensial orde dua dari suatu fungsi terhadap variabel waktu

$\frac{\partial}{\partial x}$ = operator differensial parsial

$P_l(x)$ = Polinomial Legendre

$P_l^m(x)$ = Polinomial Legendre Terasosiasi

$L_n(x)$ = Polinomial Laguerre

$L_n^k(x)$ = Polinomial Laguerre Terasosiasi

$C_v^\alpha(x)$ = Polinomial Gegenbauer

N_{lm} = konstanta normalisasi

δ_{nk} = simbol delta dirac

L = momentum angular

n, l, m = bilangan kuantum utama, azimuth, magnetik

a_0 = nilai jari-jari atom bohr

p_0 = nilai momentum dalam orbit bohr

\int = simbol integral

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pada abad ke 19 dan awal abad ke 20, perumusan-perumusan yang terdapat pada fisika klasik tidak bisa lagi digunakan untuk menjelaskan peristiwa yang terjadi pada suatu materi yang bentuknya sangat kecil dan bergerak dengan kecepatan yang hampir mendekati kecepatan cahaya. Hal ini dibuktikan dari berbagai eksperimen baru yang dilakukan fisikawan untuk menjelaskan hal-hal yang berkaitan dengan teori-teori mekanika, elektromagnetik, maupun termodinamika. Namun hasil eksperimen yang diperoleh memerlukan cara pandang yang berbeda dalam menjelaskan gejala fisika yang terjadi tersebut, hingga munculah teori baru yang disebut dengan mekanika kuantum.

Fisika klasik dan mekanika kuantum memiliki perbedaan pokok yang terdapat dalam cara penggambarannya. Teori klasik menjelaskan bahwa materi dan gelombang merupakan suatu hal yang berbeda, namun pada teori mekanika kuantum menjelaskan mengenai keterkaitan antara gelombang dan partikel itu sendiri. Sifat partikel dari suatu gelombang dapat dibuktikan melalui percobaan efek fotolistrik dan efek Compton. Hasil dari percobaan tersebut menjelaskan bahwa gelombang dan partikel memiliki keterkaitan yang mendasar dan memungkinkan bahwa antara partikel dan gelombang tidak dapat dibedakan. Louis de Broglie adalah seorang ilmuwan Perancis yang mengusulkan bahwa seluruh materi menampakkan sifat seperti gelombang dan panjang gelombang materi yang diamati dengan momentumnya dapat saling berhubungan. Hubungan tersebut dapat dituliskan menjadi sebuah persamaan $\lambda = \frac{h}{p}$ atau yang biasa disebut dengan panjang gelombang de Broglie.

Di dalam mekanika kuantum, terdapat sebuah persamaan yang sering sekali digunakan sebagai topik penelitian yaitu Persamaan Schrodinger. Fungsi gelombang dan energi suatu sistem partikel dapat ditentukan dengan menyelesaikan persamaan schrodinger tersebut yang nantinya akan didapatkan hasil deskripsi mengenai perilaku sekelompok partikel (Suparmi *et al*, 2018: 43). Persamaan schrodinger ini memiliki banyak kegunaan diantaranya yaitu sebagai

solusi untuk menyelesaikan fungsi gelombang partikel dalam kotak, efek terobosan, osilator harmonik, fungsi gelombang pada atom hidrogen, maupun fungsi gelombang isotop atom hidrogen.

Fungsi gelombang (ψ) merupakan kuantitas kompleks yang memberikan karakteristik dari gelombang de Broglie. Harga fungsi (ψ) ini tidak memiliki arti fisis secara langsung. Akan tetapi, fungsi ini dapat memberikan informasi fisis bahwa partikel tersebut memiliki gerakan yang tak terbatas. Apabila fungsi gelombang ψ di harga mutlak dan dikuadratkan menjadi $|\psi|^2$ maka akan menyatakan rapat probabilitas dan memiliki makna bahwa terdapat kemungkinan suatu partikel ditemukan pada posisi tertentu dalam sebuah atom (Maulana, 2019). Apabila telah didapatkan fungsi gelombang yang telah ternormalisasi maka untuk menentukan probabilitas akan selalu menghasilkan posisi elektron antara 0 dan 1.

Menurut Hermanto (2016) penyelesaian persamaan schrodinger pada atom berelektron tunggal dapat dipisahkan menjadi dua buah solusi persamaan yang bergantung jari-jari dan bergantung sudut. Fuadah *et al* (2018) juga menyatakan bahwa fungsi gelombang atom Deuterium mengandung fungsi gelombang radial dan fungsi gelombang angular. Penelitian yang telah dilakukan oleh Yusron *et al* (2007) memberikan kesimpulan bahwa probabilitas untuk menemukan elektron di ruang antar proton pada molekul H_2^+ bergantung pada jarak antar proton. Penelitian lainnya dilakukan oleh Idris-Bey dan Al-Hashimi (2018) menyatakan bahwa fungsi gelombang atom hidrogen merupakan kuantitas kompleks yang terdiri atas bagian radial dan bagian angular.

Helium adalah insulator listrik yang baik, kecuali jika diionisasikan. Seperti gas mulia pada umumnya, Helium mempunyai aras energi metastabil untuk tetap terionisasi dengan potensial di bawah potensial ionisasinya (Hampel, 1968). Helium dapat membentuk senyawa tidak stabil yang dikenal sebagai eksimer, dengan yodium, sulfur, tungsten, fluorin, dan fosofarus ketika terkena tumbukan elektron, lucutan pijar, ataupun plasma dari sebab lainnya. Senyawa HeNe, HgHe, Whe₂, dan ion He⁺, He²⁺, dan HeD sudah berhasil dibentuk menggunakan cara ini (Hiby, 1993). Cara untuk membuat atom Helium menjadi reaktif adalah mengubahnya menjadi ion. Salah satu ionisasi dari Helium adalah

He^+ yang merupakan bahan energi sangat tinggi dan mampu mengekstraksi elektron dari atom lainnya. He^+ memiliki konfigurasi elektron seperti hidrogen, sehingga selain ionik juga dapat membentuk ikatan kovalen (Kana'an *et al*, 1964).

Dalam perkembangannya, teori mekanika yang paling berpengaruh salah satunya yakni mengenai gejala atom hidrogen. Selain atom hidrogen dan isotop-isotopnya, terdapat beberapa atom yang dapat bersifat hidrogenik. Menurut Gautreau dan Savin (2006), atom hidrogenik merupakan atom yang melepaskan elektron-elektron hingga menyisakan satu elektron saja pada orbital terluarnya. Contoh atom yang memiliki satu elektron seperti hidrogen adalah Ion Helium He^+ dan Ion Litium Li^{++} (Sudiarta, 2019: 207).

Penelitian sebelumnya mengenai atom hidrogen telah dilakukan salah satunya oleh Aziz dan Abdullah (2015) yang menyimpulkan bahwa perhitungan sistem kuantum atom hidrogen dapat dipisahkan berdasarkan operator-operatornya, yaitu: Laplacian radial satu dimensi, operator momentum sudut, dan operator potensial. Ganesan dan Balaji (2008) menyimpulkan bahwa untuk bisa menyelesaikan persamaan Schrodinger pada atom yang memiliki elektron tunggal atau atom yang mirip dengan Hidrogen adalah dengan mengubah koordinat kartesius menjadi koordinat polar dan membutuhkan pemahaman mengenai polinomial Legendre dan Laguerre.

Berdasarkan penelitian tersebut, didapatkan kenyataan bahwa telah banyak dilakukan penelitian mengenai fungsi gelombang, probabilitas, dan ekspektasi dari atom Hidrogen dengan representasi ruang posisi (x). Fungsi gelombang dalam representasi ruang momentum pada atom hidrogenik menurut Hey (1993) sangat jarang dibahas secara terperinci pada buku-buku maupun literatur lainnya. Hassan (2008) melakukan penelitian mengenai fungsi gelombang dalam representasi ruang momentum dan didapatkan kesimpulan bahwa perhitungan Transformasi Fourier pada koordinat posisi dapat digunakan untuk menyelesaikan fungsi gelombang pada ruang momentum. Oleh karena itu, akan dilakukan penelitian lebih lanjut mengenai “Solusi Persamaan Schrodinger Ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$) dengan Bilangan Kuantum utama $n \leq 3$ dalam Representasi Ruang Momentum”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang penelitian, maka rumusan masalah yang akan dikaji adalah bagaimanakah solusi persamaan schrodinger ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$) pada bilangan kuantum utama $n \leq 3$ dalam representasi ruang momentum?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengkaji solusi persamaan schrodinger ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$) pada bilangan kuantum utama $n \leq 3$ dalam representasi ruang momentum.

1.4 Batasan Masalah

Agar penelitian ini lebih terfokus dan dapat menjawab permasalahan yang ada, maka batasan masalah pada penelitian ini sebagai berikut:

- Ion yang digunakan adalah ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$)
- Bilangan kuantum yang dimaksud adalah bilangan kuantum utama $n \leq 3$
- Solusi persamaan schrodinger ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$) menggunakan syarat normalisasi
- Solusi persamaan schrodinger yang diperoleh mengabaikan efek spin
- Grafik yang dikaji hanya grafik fungsi distribusi radial momentum ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$)

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang dapat diperoleh dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

- Bagi peneliti, dapat menambah wawasan mengenai solusi persamaan schrodinger dalam representasi ruang momentum pada ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$).
- Bagi pembaca, dapat dijadikan sebagai sumber dalam mempelajari fisika kuantum khususnya persamaan schrodinger dalam mengkaji atom yang bersifat hidrogenik.
- Bagi lembaga, dapat memberikan sumbangan penelitian dan sebagai bahan referensi pembelajaran pada mata kuliah fisika atom dengan pokok bahasan atom hidrogenik.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Dualisme Gelombang Partikel

Percobaan efek fotolistik dan efek Compton dapat memberikan informasi bahwa radiasi elektromagnetik dapat menunjukkan berbagai karakteristik partikel. Selain itu, dari eksperimen interferensi dan difraksi dapat membuktikan bahwa radiasi elektromagnetik juga dapat berperilaku sebagai gelombang. Hal ini menunjukkan bahwa radiasi elektromagnetik merupakan dualisme gelombang-partikel dimana dalam keadaan tertentu radiasi elektromagnetik dapat bersifat sebagai partikel dan dalam keadaan lain radiasi elektromagnetik juga bisa bersifat sebagai gelombang.

Dalam fisika klasik, partikel dapat diartikan sebagai sesuatu yang memiliki posisi, momentum, energi kinetik, massa, maupun muatan listrik. Disamping itu, gelombang merupakan sesuatu yang memiliki panjang gelombang, frekuensi, kecepatan, amplitudo gangguan, intensitas, energi, dan juga momentum. Perbedaan utama dari keduanya ini yaitu bahwa partikel dapat dilokalisasi, sedangkan gelombang lebih menempati suatu ruang yang relatif besar dan tersebar didalamnya (Gautreau dan Savin, 2006:67).

Kemungkinan bahwa partikel seperti elektron berperilaku sebagai partikel juga sebagai gelombang diusulkan pertama kali oleh Louis de Broglie pada tahun 1923 yang menyatakan bahwa seluruh partikel yang bergerak dengan momentum p akan terkait suatu gelombang dengan panjang gelombang λ . Keterkaitan ini dituliskan dalam persamaan (2.1) berikut:

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (2.1)$$

Pada persamaan (2.1) menunjukkan bahwa panjang gelombang λ sebuah partikel yang dihitung menurut persamaan tersebut disebut dengan panjang gelombang de Broglie (Krane, 2012:103).

Panjang gelombang de Broglie hanya dapat diamati untuk partikel-partikel yang berukuran sangat kecil seperti atom atau inti atom, sedangkan kecepatan gelombang de Broglie dapat dituliskan pada persamaan (2.2) berikut:

$$v = \lambda f \quad (2.2)$$

Dalam perambatannya, gelombang memindahkan sejumlah energi dari suatu subsistem ke subsistem yang lain. Gelombang yang merambat dalam arah sumbu- x dalam waktu tertentu memenuhi persamaan gelombang (2.3) sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.3)$$

Berbeda dengan teori klasik yang memiliki fungsi gelombang dengan variabel y , pada mekanika kuantum fungsi gelombangnya memiliki variabel ψ , dimana ψ bukan merupakan suatu kuantitas yang dapat diukur seperti y , namun dapat berupa kuantitas yang kompleks. Fungsi gelombang ψ pada kuantum dapat dituliskan pada persamaan (2.4) berikut:

$$\psi_{(x,t)} = Ae^{-i\omega(t-\frac{x}{v})} \quad (2.4)$$

Apabila ω pada persamaan diatas diganti dengan $2\pi\nu$ dan v diganti dengan $\lambda\nu$, maka akan diperoleh persamaan (2.5) sebagai berikut:

$$\psi_{(x,t)} = Ae^{-2\pi i(\nu t - \frac{x}{\lambda})} \quad (2.5)$$

Telah diketahui bahwa $E = h\nu = 2\pi\hbar\nu$ dan $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar}{p}$ sehingga diperoleh persamaan (2.6) berikut:

$$\psi_{(x,t)} = Ae^{-\left(\frac{i}{\hbar}\right)(Et - px)} \quad (2.6)$$

(Beiser, 2003:171).

Fungsi gelombang ψ merupakan kuantitas kompleks yang memberikan karakteristik dari gelombang de Broglie. Harga fungsi ψ ini tidak memiliki arti fisis secara langsung. Akan tetapi, fungsi ini dapat memberikan informasi fisis bahwa partikel tersebut memiliki gerakan yang tak terbatas. Apabila fungsi gelombang ψ di harga mutlak dan dikuadratkan menjadi $|\psi|^2$ maka akan menyatakan rapat probabilitas dan memiliki makna bahwa terdapat kemungkinan suatu partikel ditemukan pada posisi tertentu dalam sebuah atom (Maulana, 2019:6).

2.2 Persamaan Schrodinger

Dalam kasus mekanika kuantum nonrelativistik, persamaan dasar yang harus dipecahkan adalah persamaan differensial orde kedua yang dikenal dengan Persamaan Schrodinger. Persamaan ini menggambarkan mengenai interaksi partikel dengan lingkungannya yang digambarkan dengan interaksi dalam hal energi potensial terhadap gaya. Tidak seperti Hukum Newton, Persamaan Schrodinger ini tidak memberikan lintasan partikel, namun solusinya adalah berupa fungsi gelombang yang membawa informasi mengenai sifat-sifat serta tingkah laku partikel tersebut (Krane, 2012:134). Persamaan schrodinger harus memenuhi 3 syarat yaitu:

- a. Tidak boleh melanggar hukum kekekalan energi.

Hukum kekekalan energi menyatakan bahwa energi bersifat kekal, tidak dapat diciptakan maupun dimusnahkan, namun hanya dapat berubah dari satu bentuk ke bentuk yang lainnya. Secara matematis, hukum kekekalan energi dapat dituliskan pada persamaan (2.7) berikut:

$$K + V = E \quad (2.7)$$

Persamaan (2.7) menunjukkan bahwa penjumlahan energi kinetik dan energi potensial akan menghasilkan energi total yang bersifat kekal. Dalam mekanika kuantum, energi total dibatasi oleh keadaan non-relativistik sehingga dapat dituliskan pada persamaan (2.8) berikut:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m} \quad (2.8)$$

E hanya menyatakan jumlah energi kinetik dan potensial, bukan energi massa relativistik.

- b. Taat asas terhadap hipotesis de Broglie.

Apapun bentuk persamaan yang dituliskan haruslah taat asas terhadap hipotesis de Broglie dimana pemecahan matematis bagi sebuah parikel yang memiliki momentum p harus berbentuk sebuah fungsi gelombang dengan panjang gelombang λ . Panjang gelombang (λ) tersebut sama dengan h/p . Dengan menggunakan persamaan $p = \hbar k$ maka energi kinetik dari gelombang de Broglie dituliskan pada persamaan (2.9) berikut:

$$K = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (2.9)$$

c. Persamaannya harus berperilaku baik.

Pemecahan dari persamaan schrodinger diharapkan memberikan berbagai informasi mengenai probabilitas untuk menemukan partikelnya. Meskipun probabilitasnya berubah secara tidak kontinu yang berarti partikelnya menghilang secara tiba-tiba di suatu titik namun muncul kembali di titik yang lain, fungsinya haruslah bernilai tunggal, yang berarti tidak boleh ada dua probabilitas untuk menemukan sebuah partikel di titik yang sama. Fungsi tersebut juga harus bersifat linear agar gelombangnya memiliki sifat superposisi sehingga dapat dikatakan berperilaku baik (Krane, 2012: 141).

2.2.1 Persamaan Schrodinger Tidak Bergantung Waktu

Dalam berbagai kondisi, energi potensial dari sebuah partikel tidak bergantung waktu secara eksplisit. Hal ini dikarenakan energi potensial yang diperoleh sumbernya berasal dari interaksi antar partikel dengan gaya konservatif sehingga mengakibatkan perubahan hanya terjadi pada kedudukan partikel. Persamaan schrodinger dapat disederhanakan dengan meniadakan kebergantungan terhadap waktu (t) sehingga biasa disebut dengan Persamaan Schrodinger tidak bergantung waktu dan memiliki sifat yang kekal. Menggunakan persamaan (2.6) kemudian diuraikan variabel x dan t pada persamaan (2.10) dan (2.11) berikut:

$$\psi_{(x,t)} = Ae^{-\frac{iEt+ipx}{\hbar}} \quad (2.10)$$

$$\psi_{(x,t)} = Ae^{\frac{ipx}{\hbar}} e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \quad (2.11)$$

Jika dimisalkan $\psi_{(x)} = Ae^{\left(\frac{ip}{\hbar}\right)x}$

Maka persamaan (2.11) dapat ditulis kembali pada persamaan (2.12) berikut:

$$\psi_{(x,t)} = \psi_{(x)} e^{-\left(\frac{iE}{\hbar}\right)t} \quad (2.12)$$

Dari persamaan (2.12) menandakan bahwa $\psi_{(x,t)}$ adalah hasil kali dari fungsi yang bergantung waktu yaitu $e^{-\left(\frac{iE}{\hbar}\right)t}$ dengan fungsi yang bergantung kedudukan yaitu $\psi_{(x)}$. Pada kenyataannya, perubahan terhadap waktu dari

seluruh fungsi partikel yang mengalami aksi dari gaya tunak akan memiliki bentuk yang sama dengan partikel bebas. Sehingga dengan mensubstitusikan $\psi_{(x,t)}$ ke persamaan schrodinger akan didapatkan persamaan (2.13) berikut:

$$E\psi_{(x)}e^{-\left(\frac{iE}{\hbar}\right)t} = -\frac{\hbar^2}{2m}e^{-\left(\frac{iE}{\hbar}\right)t}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi_{(x)}e^{-\left(\frac{iE}{\hbar}\right)t} \quad (2.13)$$

Apabila persamaan (2.13) dibagi dengan faktor eksponensial yaitu $e^{-\left(\frac{iE}{\hbar}\right)t}$ maka akan berubah menjadi:

$$E\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} + V\psi(x)$$

atau dapat dituliskan kembali menjadi persamaan (2.14) berikut:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} + (E - V(x))\psi(x) = 0 \quad (2.14)$$

(Liboff, 2003:187).

Persamaan (2.14) merupakan persamaan schrodinger tidak bergantung waktu dalam keadaan 1 dimensi, apabila dalam keadaan 3 dimensi maka persamaannya adalah:

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{\partial^2\psi_{(x,y,z)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_{(x,y,z)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi_{(x,y,z)}}{\partial z^2}\right\} + (E - V(x))\psi_{(x,y,z)} &= 0 \\ \frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\}\psi_{(x,y,z)} + (E - V(x))\psi_{(x,y,z)} &= 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

(Beiser, 2003: 176).

Persamaan (2.15) merupakan bentuk umum persamaan schrodinger tidak bergantung waktu untuk partikel yang bermassa (m) dan bergerak pada ruang tiga dimensi dalam medan potensial (V).

2.2.2 Persamaan Schrodinger Atom Berelektron Tunggal

Atom yang paling dikenal memiliki elektron sebanyak satu ialah Hidrogen. Atom ini paling sederhana dan tersusun dari sebuah elektron yang bermuatan $-e$ sedangkan inti atomnya bermuatan $+e$ dan mempunyai massa proton yang jauh lebih besar jika dibandingkan massa elektronnya dengan perbandingan $m_p = 1836 m_e$. Elektron bergerak disekeliling proton dan cenderung melepaskan diri dari inti namun dicegah oleh medan listrik proton (Kurniawan dan Nur, 2005). Karena proton jauh lebih masif daripada elektron, maka dapat diasumsikan bahwa

massa tereduksi sama dengan massa elektron dan proton terletak di pusat massa (Zielinski *et al*, 2005). Persamaannya dapat ditulis pada persamaan (2.16) berikut:

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{mM}{m+M} \\ \mu &= \frac{mM}{M} \\ \mu &= m\end{aligned}\tag{2.16}$$

(Maulana, 2019).

Dari persamaan (2.16), μ adalah massa tereduksi, m adalah massa elektron, dan M adalah massa proton. Persamaan Schrodinger untuk Atom Hidrogen dapat dituliskan dalam persamaan (2.17) berikut:

$$\left(\frac{p^2}{2m} + V(r)\right)\psi = E\psi\tag{2.17}$$

Dengan mengasumsikan bahwa proton diam pada pusat koordinat dan elektron yang mengelilinginya dibawah pengaruh gaya Couloumb, maka energinya dapat dituliskan pada persamaan (2.18) berikut:

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}\tag{2.18}$$

(Purwanto, 2016:136).

Dengan mensubstitusi persamaan (2.18) ke persamaan (2.17), maka akan didapatkan persamaan (2.19) berikut:

$$E\psi = \left(\frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}\right)\psi\tag{2.19}$$

Penyelesaian dari Persamaan Schrodinger untuk atom berelektron tunggal seperti Atom Hidrogen, dapat menggunakan Persamaan Schrodinger dalam koordinat bola atau tiga dimensi seperti persamaan (2.20) berikut:

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}\right\}\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})\tag{2.20}$$

(Gasiorowics,1996:169).

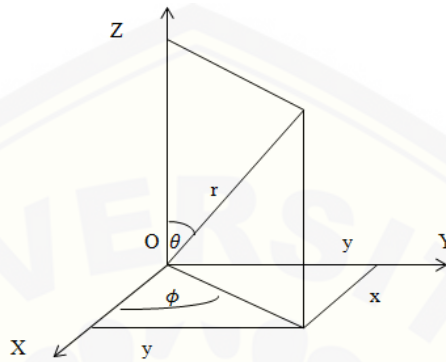
Sehingga persamaan schrodinger tak bergantung waktu dalam tiga dimensi dinyatakan pada persamaan (2.21) berikut:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi_{(x,y,z)} = 0\tag{2.21}$$

atau dapat juga dituliskan:

$$\nabla^2\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi_{(x,y,z)} = 0\tag{2.22}$$

Persamaan (2.20) menunjukkan bahwa Persamaan Schrodinger untuk atom berelektron tunggal dapat diselesaikan dengan menggunakan Persamaan Schrodinger dalam koordinat bola atau tiga dimensi. Koordinat bola tersebut dapat digambarkan pada Gambar 2.1 berikut:



Gambar 2.1 Koordinat polar bola (r, θ, ϕ)

Dari Gambar 2.1 diketahui bahwa:

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

Pada saat keadaan kuantum direpresentasikan oleh fungsi gelombang $\psi_{(r,\theta,\phi)}$ dan diketahui bahwa r merupakan fungsi radial, θ merupakan fungsi polar, dan ϕ merupakan fungsi azimuth, ketergantungan pada fungsi polar θ dan ϕ menentukan bentuk anguler untuk menjelaskan sifat-sifat momentum anguler orbital dari suatu keadaan. Oleh karena suatu sistem hidrogen memiliki bentuk simetri bola, maka akan menjadi lebih sederhana apabila operator Laplace ∇^2 pada persamaan (2.22) dituliskan kembali ke dalam koordinat polar bola pada persamaan (2.23) berikut:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (2.23)$$

(Supriadi *et al*, 2018:2).

Sehingga persamaan schrodinger atom hidrogen dalam tiga dimensi pada persamaan (2.22) dapat dituliskan kembali pada persamaan (2.24) berikut:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right) \right] + E \psi_{(r,\theta,\phi)} = V \psi_{(r,\theta,\phi)} \quad (2.24)$$

Persamaan (2.24) merupakan bentuk umum persamaan schrodinger atom hidrogen untuk partikel yang bermassa (m) dan bergerak pada ruang tiga dimensi dalam medan potensial (V) yang merupakan kuantitas kompleks terdiri dari bagian radial (r) dan bagian angular (θ, ϕ).

2.3 Solusi Persamaan Schrodinger Ion Helium (${}^4\text{He}^+$)

Untuk memisahkan persamaan schrodinger pada koordinat polar bola untuk atom berelektron tunggal (hidrogenik), maka fungsi gelombang dalam ruang posisi umumnya mengandung tiga persamaan sekaligus yaitu r, θ , dan ϕ dipisahkan menjadi hanya mengandung satu koordinat saja. Karena fungsi gelombang $\psi_{(r,\theta,\phi)}$ merupakan hasil perkalian dari tiga fungsi berbeda. Pemisahan variabel dapat dituliskan pada persamaan (2.25) berikut:

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = R(r)Y(\theta, \phi) \quad (2.25)$$

(Maulana, 2019: 10).

Dimana $R(r)$ merupakan fungsi gelombang radial dan $Y(\theta, \phi)$ merupakan $\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ disebut dengan fungsi gelombang angular. Dengan mensubstitusikan persamaan (2.25) dengan (2.24) maka diperoleh persamaan (2.26) berikut:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{Y}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{R}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{R}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right) \right] + ERY = V(\vec{r})RY \quad (2.26)$$

Selanjutnya, apabila persamaan (2.26) dibagi dengan RY dan kemudian dikalikan dengan $2mr^2/\hbar^2$, akan menghasilkan:

$$\left[\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} (V(r) - E) \right] + \frac{1}{Y} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right) \right] = 0$$

atau:

$$\left[\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} (V(r) - E) \right] = -\frac{1}{Y} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right) \right] \quad (2.27)$$

(Griffith, 2005:134).

Pada persamaan (2.27), ruas kiri hanya bergantung pada jarak (r), sedangkan ruas kanan bergantung pada sudut (θ) dan (ϕ). Kedua ruas tersebut merupakan sebuah tetapan atau konstanta yang sama dengan bentuk $l(l+1)$. Pemilihan konstanta tersebut didasarkan pada tujuan agar mendapatkan persamaan diferensial Legendre untuk perhitungan selanjutnya, yaitu:

$$\left[\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} (V_{(r)} - E) \right] = l(l+1) \quad (2.28)$$

$$\frac{1}{Y} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right) \right] = -l(l+1) \quad (2.29)$$

Persamaan (2.28) merupakan persamaan radial untuk atom hidrogenik dan persamaan (2.29) menentukan ketergantungan ψ pada θ dan ϕ . Maka apabila dikalikan dengan $Y \sin^2 \theta$, persamaan (2.29) akan menjadi:

$$\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right) = -l(l+1) Y \sin^2 \theta \quad (2.30)$$

Persamaan (2.30) sudah merupakan persamaan yang tetap, yang artinya tidak mengandung sebuah fungsi atau sebuah operator yang belum diketahui nilainya seperti $V_{(r)}$. Untuk menyelesaikan persamaan (2.30), maka dilakukan pemisahan variabel, yaitu:

$$Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi) \quad (2.31)$$

Persamaan (2.31) disubstitusi dengan persamaan (2.30) dan membaginya dengan $\Phi\Theta$ sehingga menghasilkan:

$$\left\{ \frac{1}{\Theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) \right] + l(l+1) \sin^2 \theta \right\} + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0$$

atau:

$$\left\{ \frac{1}{\Theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) \right] + l(l+1) \sin^2 \theta \right\} = -\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} \quad (2.32)$$

Ruas kiri pada persamaan (2.32) bergantung pada θ , dan pada ruas kanan bergantung pada ϕ , sehingga keduanya dapat memiliki nilai konstanta yang sama. Hal tersebut dapat menjadikan ruas kanan dan ruas kiri memiliki konstanta m^2 . Konstanta tersebut dipilih agar bisa mendapatkan persamaan Legendre.

$$\left\{ \frac{1}{\Theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) \right] + l(l+1) \sin^2 \theta \right\} = m^2 \quad (2.33)$$

$$\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = -m^2 \quad (2.34)$$

Persamaan (2.34) dapat dituliskan menjadi:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = -m^2 \Phi$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + m^2 \Phi = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + m^2 \right) \Phi = 0$$

Bila dimisalkan $\frac{\partial}{\partial \phi} = D$, maka:

$$(D^2 + m^2) \Phi = 0$$

$$D = \pm im$$

Jika kedua ruas dikalikan dengan Φ maka akan menghasilkan:

$$D\Phi = \pm im\Phi$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = \pm im\phi$$

$$\frac{1}{\Phi} d\Phi = \pm im d\phi$$

$$\int \frac{1}{\Phi} d\Phi = \int \pm im d\phi$$

$$\Phi = Ae^{\pm im\phi}$$

Nilai A didapatkan dari hasil normalisasi fungsi ϕ yaitu:

$$\int_0^{2\pi} \Phi^*(\phi)\Phi(\phi) d\Phi = 1$$

$$\int_0^{2\pi} A^2 d\Phi = 1$$

$$A = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}$$

Maka Φ dituliskan pada persamaan (2.35) berikut:

$$\Phi(\phi) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{\pm im\phi} \quad (2.35)$$

(Purwanto, 2016:129).

Persamaan (2.35) merupakan fungsi persamaan koordinat azimuth (ϕ) yang mengandung bilangan bulat m atau biasa disebut dengan bilangan kuantum magnetik. Fungsi azimuth merepresentasikan gerakan elektron berotasi berdasarkan sudut (ϕ) secara periodik di sekitar sumbu (z) dalam atom. Pada saat ϕ bernilai lebih dari 2π maka:

$$\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi) \quad (2.36)$$

Nilai eksponensial $[im(\phi + 2\pi)]$ sama dengan nilai eksponensial $(im\phi)$ atau eksponensial $(2\pi im)$ yang bernilai sama dengan 1. Nilai bilangan kuantum magnetik m harus merupakan bilangan bulat yaitu $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.

Selanjutnya, apabila akan menentukan solusi dari persamaan (2.33) maka dikalikan dengan $\frac{\Theta}{\sin^2 \theta}$ sehingga menjadi persamaan (2.37) berikut:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0 \quad (2.37)$$

Persamaan (2.37) juga dapat dituliskan sebagai persamaan (2.38) berikut:

$$(1-x^2) \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial P}{\partial x} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P = 0 \quad (2.38)$$

Berdasarkan rumus Rodrigeus, bentuk eksplisit dari polinomial legendre terasosiasi ini dapat ditentukan pada persamaan (2.39) berikut:

$$P_{(x)} = P_l^m(x) = \frac{1}{2^l l!} (1-x^2)^{|m|/2} \frac{d^{l+|m|}}{dx^{l+|m|}} (x^2-1)^l \quad (2.39)$$

x dalam persamaan tersebut bernilai $\cos \theta$ dan biasa disebut dengan persamaan diferensial Legendre terasosiasi. Persamaan tersebut memiliki solusi yang didapatkan dengan menggunakan metode Frobenius dan diberikan suatu deret yang berhingga atau dikenal dengan sebutan Polinomial Legendre Terasosiasi $P_l^m(x)$. Persamaan (2.39) dapat dituliskan kembali menjadi persamaan (2.40) berikut:

$$P_l^m(\cos \theta) = (1 - \cos^2 \theta)^{\frac{|m|}{2}} \left(\frac{d}{d \cos \theta} \right)^{|m|} P_l(\cos \theta) \quad (2.40)$$

$P_l(\cos \theta)$ disebut sebagai polinomial legendre yang didapat dari rumus Rodrigeus dan dapat dituliskan pada persamaan (2.41) berikut:

$$P_l(\cos \theta) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{d \cos \theta} \right)^l (\cos^2 \theta - 1)^l \quad (2.41)$$

Selanjutnya, normalisasi dari polinomial legendre terasosiasi $P_l^m(x)$ dengan memunculkan konstanta normalisasi N_{lm} maka:

$$\Theta_{lm}(x) = N_{lm} P_l^m(x) \quad (2.42)$$

N_{lm} merupakan suatu konstanta normalisasi yang nilainya dapat dicari menggunakan syarat normalisasi dari fungsi gelombang, sehingga dapat dituliskan menjadi:

$$\Theta_{l,m}, \Theta_{l',m'} = N_{l,m}, N_{l',m'} \int_0^\pi P_l^m(x) P_{l'}^{m'}(x) dx = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

Dengan menggunakan sifat orthogonalitas $P_l^m(x)$ maka:

$$\int_0^\pi P_l^m(x) P_{l'}^{m'}(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!} \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

Karena $l = l'$ maka $\delta_{ll'} = 1$

didapatkan konstanta normalisasi

$$N_{l,m} = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} \quad (2.43)$$

Sehingga

$$\Theta_{lm}(\theta) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^m(\cos \theta) \quad (2.44)$$

Maka didapatkan fungsi gelombang angular ternormalisasi atau yang disebut dengan fungsi harmonik bola pada persamaan (2.45) berikut:

$$\Theta_{lm}(\theta)\Phi_m(\phi) = Y_{lm}(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta) \quad (2.45)$$

(Purwanto, 2016:129).

Persamaan (2.45) disebut juga fungsi angular yang mengandung fungsi polar dan fungsi azimuth. Fungsi polar merepresentasikan bentuk orbital elektron berdasarkan sudut (θ) di dalam atom yang memotong bidang xy , sedangkan fungsi azimuth merepresentasikan gerakan elektron berotasi berdasarkan sudut (ϕ) secara periodik di sekitar sumbu z dalam atom.

2.4 Transformasi Fourier

Dalam fisika matematika, seringkali muncul model transformasi yang biasa digunakan untuk memindahkan suatu domain waktu dari suatu fungsi ke dalam domain frekuensi yang disebut dengan Transformasi Fourier. Transformasi ini memiliki hubungan dengan Deret Fourier yang biasa digunakan sebagai alat bantu dalam penyelesaian persamaan differensial biasa maupun persamaan differensial parsial. Dalam mekanika kuantum, perhitungan Transformasi Fourier pada koordinat posisi dapat digunakan untuk menyelesaikan fungsi gelombang pada ruang momentum

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ikx} dk \quad (2.46)$$

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad (2.47)$$

Apabila variabel k diubah menjadi variabel p , maka didapatkan Transformasi Fourier pada (x) dan (p) seperti pada persamaan (2.48) dan (2.49) berikut:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \varphi(p) e^{\frac{ipx}{\hbar}} dp \quad (2.48)$$

$$\varphi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \psi(x) e^{-\frac{ipx}{\hbar}} dx \quad (2.49)$$

(Mavromatis, 1987:30).

Persamaan (2.49) merupakan invers dari persamaan (2.48) yang dapat digunakan sebagai alat bantu untuk memudahkan penyelesaian solusi persamaan schrodinger dalam ruang momentum.

2.5 Solusi Persamaan Schrodinger Ion Helium (${}^4\text{He}^+$) dalam Representasi Ruang Momentum

Fungsi gelombang dalam ruang posisi $\psi_{(r,\theta,\phi)}$ yang diperoleh dari penyelesaian persamaan schrodinger merupakan fungsi polar dari koordinat r, θ, ϕ . Interpretasi yang diberikan pada fungsi tersebut adalah bahwa kuadrat dari besarnya nilai mutlak dari fungsi gelombang dalam ruang posisi tersebut mewakili probabilitas per satuan volume yang akan memiliki konfigurasi yang dijelaskan oleh r, θ, ϕ . Nilai dari $|r\psi(r)|^2$ dapat dinyatakan sebagai fungsi distribusi elektron pada ruang posisi, sedangkan probabilitas dari elektron dapat ditemukan dalam selang dV dalam daerah yang diberikan oleh nilai-nilai tertentu dari koordinat ruang posisi.

Pada fungsi delta dirac, $\psi_{n,l,m}(r, \theta, \phi)$ merupakan transformasi fungsi dari koordinat kartesian ke bilangan kuantum dan dapat direpresentasikan dengan simbol $(x, y, z / n, l, m)$. Sedangkan untuk transformasi fungsi dari momentum p_x, p_y, p_z dengan bilangan kuantum n, l, m dapat dituliskan seperti simbol dalam ruang posisi $(p_x, p_y, p_z / n, l, m)$.

Fungsi $(p_x, p_y, p_z / n, l, m)$ dapat diperoleh dari transformasi fungsi $(x, y, z / n, l, m)$ dengan menggunakan persamaan (2.50) berikut:

$$(p_x, p_y, p_z / n, l, m) = h^{-3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{2\pi i}{\hbar}\right)(xp_x, yp_y, zp_z)} (x, y, z / n, l, m) dx dy dz \quad (2.50)$$

Dengan memisalkan bahwa (x, y, z) merupakan koordinat polar yang memiliki persamaan

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (2.51)$$

Sehingga dalam ruang momentum p_x, p_y, p_z dapat dituliskan

$$\left. \begin{aligned} p_x &= p \sin \Theta \cos \Phi \\ p_y &= p \sin \Theta \sin \Phi \\ p_z &= p \cos \Theta \end{aligned} \right\} \quad (2.52)$$

p sama besarnya dengan vektor momentum total, dan sudut Θ, Φ memberikan orientasi vektor momentum relatif terhadap sumbu koordinat kartesius. Fungsi $(p_x, p_y, p_z / n, l, m)$ akan menjadi fungsi p, Θ, Φ yang bisa disebut dengan fungsi momentum dan bisa diberikan simbol $\varphi_{n,l,m}(p, \Theta, \Phi)$ sehingga persamaan (2.50) dapat dituliskan kembali menjadi

$$\varphi_{n,l,m}(p, \Theta, \Phi) = h^{-3/2} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{-\left(\frac{2\pi i}{h}\right)(\sin\theta \sin\Theta \cos(\Phi-\phi) + \cos\theta \cos\Theta)rp} \psi_{n,l,m}(r, \theta, \phi) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (2.53)$$

dengan

$$\psi_{n,l,m}(r, \theta, \phi) = \left\{ \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{+im\phi} \right\} \left\{ \left(\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{2(l+|m|)!} \right)^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos\theta) \right\} \left\{ \frac{(2\gamma)^{l+1}}{(n+l)!} \left(\frac{\gamma(n-l-1)!}{n(n+l)!} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\gamma r} r^l L_{n+l}^{2l+1}(2\gamma r) \right\} \quad (2.54)$$

(Podolsky dan Pauling, 1929:110)

Diketahui bahwa $\gamma = \frac{4\pi^2 \mu e^2 Z}{n^2 \hbar^2} = \frac{Z}{na_0}$; $P_l^m(\cos\theta)$ merupakan fungsi Legendre terasosiasi ; dan $L_{n+l}^{2l+1}(2\gamma r)$ merupakan polinomial Laguerre terasosiasi yang dapat didefinisikan dalam bentuk

$$\sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{L_{\alpha+\beta}^{\alpha}(\xi)}{(\alpha+\beta)!} u^{\beta} = (-)^{\alpha} \frac{e^{-\xi u/(1-u)}}{(1-u)^{\alpha+1}} \quad (2.55)$$

Dengan memisahkan persamaan yang bergantung pada θ dan ϕ , maka dapat dibuat menjadi persamaan (2.56) dan (2.57) berikut:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} e^{+im\phi + ib \cos(\Phi-\phi)} d\phi ; b = -\left(\frac{2\pi}{h}\right) rp \sin \theta \sin \Theta \quad (2.56)$$

dan

$$I_2 = \int_0^\pi e^{ic \cos \theta} \cos \theta I_1 P_l^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta ; c = -\left(\frac{2\pi}{h}\right) rp \quad (2.57)$$

Kemudian persamaan (2.53) dapat dituliska kembali menjadi persamaan (2.58) berikut:

$$\varphi_{n,l,m}(p, \theta, \Phi) = -\frac{h^{-\frac{3}{2}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{2(l+|m|)!}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{(2\gamma)^{l+1}}{(n+l)!} \left(\frac{\gamma(n-l-1)!}{n(n+l)!}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty I_2 e^{-\gamma r} \gamma^{l+2} L_{n+l}^{2l+1}(2\gamma r) dr \quad (2.58)$$

Apabila dimisalkan $\phi - \Phi = \omega$ kemudian disubtitusi dalam persamaan (2.56) dan diberikan fungsi Bessel untuk $\pm m$ maka:

$$I_1 = e^{\pm im\Phi} \int_0^{2\pi} e^{\pm im\omega + ib \cos \omega} d\omega = 2\pi i^{\pm m} J_{\pm m}(b) e^{\pm im\Phi} \quad (2.59)$$

Apabila $J_{-m}(b) = i^{2m} J_m(b)$ maka persamaan (2.59) dapat diubah menjadi persamaan (2.60) berikut:

$$I_1 = 2\pi i^m J_m(b) e^{\pm im\Phi} \quad (2.60)$$

Selain itu, dibutuhkan juga hubungan antara fungsi Legendre terasosiasi dan fungsi Gegenbauer C_k^v yang dapat didefinisikan oleh fungsi generator pada polinomial Legendre yang digunakan untuk mengembangkan hubungan rekursi seperti persamaan (2.61) berikut:

$$Q_v = (1 - 2ut + u^2)^{-v} = \sum_{k=0}^\infty C_k^v(t) u^k \quad (2.61)$$

Pada persamaan (2.61), ketika $v = \frac{1}{2}$ maka fungsi tersebut akan tereduksi menjadi polinomial Legendre. Dengan menggunakan $v = \frac{1}{2}$ dan menurunkan persamaan (2.61) terhadap m waktu yang memiliki hubungan dengan t , maka dapat diperoleh hubungan persamaan berikut:

$$P_l^m(t) = 1, 3, 5, \dots (2m - 1) (1 - t^2)^{\frac{m}{2}} C_{l-m}^{m+\frac{1}{2}}(t) \quad (2.62)$$

Dalam fungsi Gegenbauer, diberikan persamaan integral (2.63) sebagai berikut:

$$\int_0^\pi e^{iz \cos \theta \cos \psi} J_{\nu-\frac{1}{2}}(z \sin \theta \sin \psi) C_\nu^v(\cos \theta) \sin^{\nu+1/2} \theta d\theta = \left(\frac{2\pi}{z}\right)^{1/2} i^r \sin^{\nu-1/2} \psi C_\nu^v(\cos \psi) J_{\nu+r}(z) \quad (2.63)$$

Jika digunakan $v = m + \frac{1}{2}$; $z = c$; $x = \Theta$, dan $r = l - m$, maka dengan mensubstitusi persamaan (2.63) dengan persamaan (2.62) akan menghasilkan persamaan (2.64) berikut:

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi e^{ic \cos \theta \cos \Theta} J_m(c \sin \theta \sin \Theta) P_l^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta \\ &= \left(\frac{2\pi}{c}\right)^{\frac{1}{2}} i^{l-m} P_l^m(\cos \Theta) J_{l+\frac{1}{2}}(c) \end{aligned} \quad (2.64)$$

Dalam mensubstitusi persamaan I_1 yang diberikan pada persamaan (2.60) maka dapat terlihat bahwa persamaan I_2 memiliki bentuk persamaan yang sama dengan persamaan I_1 , sehingga dapat dituliskan

$$\begin{aligned} I_2 &= 2\pi i^l e^{\pm im\Phi} P_l^m(\cos \Theta) \left(\frac{2\pi}{c}\right)^{\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(c) \\ &= -2\pi(-i)^l e^{\pm im\Phi} P_l^m(\cos \Theta) \left(\frac{h}{p}\right)^{1/2} r^{-\frac{1}{2}} J_{l+1/2}\left(\frac{2\pi rp}{h}\right) \end{aligned} \quad (2.65)$$

Merujuk pada persamaan (2.58) dan (2.65), dapat dilihat bahwa $\varphi_{n,l,m}(P, \Theta, \Phi)$ mengandung persamaan integral (2.66) berikut:

$$\int_0^\infty e^{-\gamma r} \gamma^{l+3/2} J_{l+1/2}\left(\frac{2\pi rp}{h}\right) L_{n+l}^{2l+1}(2\gamma r) dr \quad (2.66)$$

apabila $\xi = 2\gamma r$ dan $\zeta = 2\pi p/\gamma h$ maka:

$$(2\gamma)^{-(l+\frac{5}{2})} \int_0^\infty e^{-\xi/2} \xi^{l+3/2} J_{l+1/2}\left(\frac{1}{2}\zeta\xi\right) L_{n+l}^{2l+1}(\xi) d\xi \quad (2.67)$$

dengan hanya mengambil persamaan integralnya, persamaan di atas dapat ditulis kembali menjadi persamaan (2.68) berikut:

$$F_{n,l}(\zeta) \equiv \int_0^\infty e^{-\xi/2} \xi^{l+3/2} J_{l+1/2}\left(\frac{1}{2}\zeta\xi\right) L_{n+l}^{2l+1}(\xi) d\xi \quad (2.68)$$

Untuk menyelesaikan persamaan integral (2.68), maka dapat dituliskan fungsi U yang didefinisikan menurut persamaan (2.69) berikut:

$$U \equiv U_l(\zeta, u) \equiv \sum_{n=l+1}^\infty \frac{F_{n,l}(\zeta)}{(n+l)!} u^{n-l-1} \quad (2.69)$$

Fungsi (2.69) dapat diselesaikan menggunakan fungsi generator pada polinomial Laguerre terasosiasi pada persamaan (2.55). Dengan demikian dapat diperoleh $F_{n,l}(\zeta)$ sebagai koefisien dari penjabaran $U_l(\zeta, u)$

$$U = \int_0^\infty e^{-\xi/2} \xi^{l+3/2} J_{l+1/2}\left(\frac{1}{2}\zeta\xi\right) \sum_{n=l+1}^\infty \frac{L_{n+l}^{2l+1}(\xi)}{(n+l)!} u^{n-l-1} d\xi$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{-\xi/2} \xi^{l+3/2} J_{l+1/2} \left(\frac{1}{2} \zeta \xi \right) \frac{(-)^{2l+1} e^{-\xi u/(1-u)}}{(1-u)^{2l+2}} d\xi \\
 &= (1-u)^{-2l-2} \int_0^\infty e^{-\xi(1+u)/2(1-u)} J_{l+1/2} \left(\frac{1}{2} \zeta \xi \right) \xi^{l+3/2} d\xi \quad (2.70)
 \end{aligned}$$

(Podolsky dan Pauling, 1929:113).

Integral yang terakhir adalah kasus khusus dari integral umum lainnya yang dapat dituliskan pada persamaan (2.71) sebagai berikut:

$$\int_0^\infty e^{-a\xi} J_\nu(z\xi) \xi^{\mu-1} d\xi = \frac{\left(\frac{z}{2a}\right)^\nu \Gamma(\mu+\nu)}{a^\mu \Gamma(\nu+1)} K\left(\frac{\mu+\nu}{2}, \frac{\mu+\nu+1}{2}; \nu+1; -\frac{z^2}{a^2}\right) \quad (2.71)$$

Dengan memisalkan bahwa $z = \frac{1}{2} \zeta$, $\nu = l + \frac{1}{2}$, $\mu = l + \frac{5}{2}$ dan $a = \frac{1+u}{2(1-u)}$ maka

$$U = \frac{4\zeta^{l+\frac{1}{2}}(2l+2)!}{\Gamma(l+\frac{3}{2})} \frac{(1-u)}{(1+u)^{2l+3}} K\left(l+\frac{3}{2}, l+2; l+\frac{3}{2}; -\frac{\zeta^2(1-u)^2}{(1+u)^2}\right) \quad (2.72)$$

K merupakan hipergeometri terdegenerasi satu yang sama dengan

$$\left\{ 1 + \frac{\zeta^2(1-u)^2}{(1+u)^2} \right\}^{-l-2} \quad (2.73)$$

Sehingga U dapat ditulis dalam bentuk

$$U = A \frac{1-u^2}{(1-2xu+u^2)^{l+2}} \quad (2.74)$$

dengan

$$A = \frac{4(2l+2)! \zeta^{l+\frac{1}{2}}}{\Gamma(l+\frac{3}{2})(\zeta^2+1)^{l+2}} \quad (2.75)$$

dan

$$x = \frac{\zeta^2-1}{\zeta^2+1} \quad (2.76)$$

Kembali pada persamaan (2.61) dan mengalikan kedua ruas dengan $u^{-v+1} \left(\frac{\partial}{\partial u}\right) u^v$ maka diperoleh

$$\frac{v(1-u^2)}{(1-2ut+u^2)} \equiv \sum_{k=0}^\infty (v+k) C_k^v(t) u^k \quad (2.77)$$

apabila dimisalkan $v = l + 1$ dan $t = x$, maka persamaan (2.74) dapat ditulis kembali pada persamaan (2.78) sebagai berikut:

$$U = \frac{A}{l+1} \sum_{k=0}^\infty (l+k+1) C_k^{l+1}(x) u^k = \frac{A}{l+1} \sum_{n=l+1}^\infty n C_{n-l-1}^{l+1}(x) u^{n-l-1} \quad (2.78)$$

jika membandingkan persamaan (2.78) dan (2.69) maka:

$$F_{n,l}(\zeta) = \frac{An(n+l)!}{l+1} C_{n-l-1}^{l+1} \left(\frac{\zeta^2-1}{\zeta^2+1} \right) \quad (2.79)$$

Dengan menuliskan bahwa $\varphi_{n,l,m}(p, \theta, \Phi) = F_{n,l}(p)Y_{lm}(\theta, \phi_p)$ maka solusi persamaan schrodinger dalam ruang momentum dapat ditulis pada persamaan (2.80) berikut:

$$\varphi_{n,l,m}(p, \theta, \Phi) = \left(\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{\pm im\Phi} \right) \left\{ \left(\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{2(l+|m|)!} \right)^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos\theta) \right\} \left(\frac{2}{\pi} \frac{(n-l-1)!}{(n+l)!} \right)^{1/2} n^2 2^{2l+2} l! \times \frac{\zeta^l}{(\zeta^2+1)^{l+2}} C_{n-l-1}^{l+1} \left(\frac{\zeta^2-1}{\zeta^2+1} \right) \quad (2.80)$$

Dari persamaan (2.80) diketahui bahwa $\zeta = np = nZp_0$. $p_0 = \frac{\hbar}{a_0}$ merupakan nilai momentum elektron dalam orbit Bohr dengan \hbar merupakan konstanta planck dan a_0 merupakan jari-jari atom Bohr yang nilainya sebesar $5,29177 \times 10^{-11}m$ sesuai dengan atom Hidrogen dalam keadaan normal. Sehingga persamaan (2.80) dapat dituliskan kembali menjadi

$$\varphi_{n,l,m}(p, \theta, \Phi) = \left(\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{\pm im\Phi} \right) \left\{ \left(\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{2(l+|m|)!} \right)^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos\theta) \right\} \left(\frac{2}{\pi} \frac{(n-l-1)!}{(n+l)!} \right)^{1/2} n^2 2^{2l+2} l! \times \frac{n^l p^l}{(n^2 p^2 + 1)^{l+2}} C_{n-l-1}^{l+1} \left(\frac{n^2 p^2 - 1}{n^2 p^2 + 1} \right) \quad (2.81)$$

(Podolsky dan Pauling, 1929: 114).

Dari persamaan (2.81) terdapat persamaan angular yang mengandung (θ, Φ) dan persamaan radial yang mengandung (p) dan dapat dipisahkan menjadi persamaan (2.82) berikut:

$$F_{n,l}(p) = \left(\frac{2}{\pi} \frac{(n-l-1)!}{(n+l)!} \right)^{1/2} n^2 2^{2l+2} l! \times \frac{n^l p^l}{(n^2 p^2 + 1)^{l+2}} C_{n-l-1}^{l+1} \left(\frac{n^2 p^2 - 1}{n^2 p^2 + 1} \right) \quad (2.82)$$

Untuk C_{n-l-1}^{l+1} merupakan polinomial Gegenbauer yang memenuhi relasi rekurensi:

$$C_0^\alpha(x) = 1$$

$$C_1^\alpha(x) = 2\alpha x$$

$$C_2^\alpha(x) = 2\alpha(\alpha+1)x^2 - \alpha$$

$$C_v^\alpha(x) = [2x(v+\alpha-1)C_{v-1}^\alpha(x) - (v+2\alpha-2)C_{v-2}^\alpha(x)] \text{ jika } n \geq 2 \quad (2.83)$$

(Bethe, 1957: 39).

Fungsi radial (2.82) merepresentasikan bahwa keberadaan elektron dapat ditemukan di sepanjang jarak orbit elektron yang dalam hal ini direpresentasikan

dengan operator momentum (p) ketika mengorbit pada inti (proton) diukur dari pusat atom.

2.6 Bilangan Kuantum

Bilangan kuantum merupakan pusat dari mekanika kuantum dan pada umumnya berbentuk bilangan bulat yang melambangkan nilai-nilai diskrit kuantitas yang penting dalam sebuah atom, seperti energi dan momentum angular.

2.6.1 Bilangan Kuantum Utama (n)

Bilangan kuantum ini pada awalnya diberikan oleh Bohr untuk menentukan energi dari elektron di dalam atom yang berisi satu elektron seperti Hidrogen. Bilangan ini merupakan bilangan bulat positif (1,2,3,...) yang dibutuhkan untuk menetapkan tenaga elektron pada atom yang berisi banyak elektron. Semakin besar nilai n , maka makin besar pula tenaga elektronnya (Sukardjo, 2004: 472).

Teori kuantum atom hidrogen menjelaskan bahwa energi elektron memiliki nilai yang konstan dan berharga positif berapapun. Namun, energi negatifnya dapat ditentukan dengan persamaan $E_n = E_1/n^2$. Sehingga kuantisasi energi elektron dalam atom hidrogen dapat diuraikan oleh bilangan kuantum antara n (Beiser, 1990:213).

2.6.2 Bilangan Kuantum Orbital (l)

Bilangan ini menentukan kecepatan sudut dari elektron, semakin besar nilai l makin tinggi pula kecepatan sudutnya. Besarnya momentum sudut elektron dapat ditulis dalam persamaan berikut:

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar \quad (2.84)$$

l juga menentukan bentuk orbital dari elektron. Untuk harga tertentu dari n , l memiliki harga 0 hingga $n - 1$. Sehingga untuk $n = 2$, $l = 0$ & 1. Orbital atom dengan l bernilai 1,2, dan 3, masing-masing disebut orbital s, p, d, dan f. Tergantung dari bilangan kuantum utamanya, maka masing-masing orbital disebut orbital 1s, 2s, 2p, dan lain sebagainya (Sukardjo, 2004: 472).

2.6.3 Bilangan Kuantum Magnetik (m)

Elektron dapat menimbulkan arus listrik hingga mengakibatkan terjadinya medan magnet dikarenakan oleh gerakan orbitalnya. Momen magnet yang berhubungan dengan medan magnet ini merupakan sebuah besaran vektor yang nantinya akan berorientasi ke arah tertentu disebabkan adanya medan magnet luar. Hanya orientasi tertentu yang memungkinkan masing-masing memiliki tingkatan energi tertentu. Hal ini ditentukan oleh besarnya harga m . Meskipun tidak ada medan magnet luar, m tetap memiliki arti. Harga m berkisar dari +1 melalui 0 hingga -1. Untuk setiap harga l , akan memiliki harga m sebanyak $2l + 1$ (Sukardjo, 2004: 472).

2.7 Ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$)

Helium merupakan unsur golongan VIII A paling melimpah kedua setelah Hidrogen di alam semesta dan merupakan unsur utama planet raksasa gas di dalam tata surya dengan elektron sebanyak dua buah saja (Spake *et al*, 2017). Helium secara kimia bersifat inert dan umumnya dianggap tidak reaktif yang disebabkan oleh konfigurasi elektron yang sangat stabil dan memiliki potensi ionisasi yang tidak tertandingi. Ciri dari Helium diantaranya yaitu memiliki energi ionisasi pertama sebesar 24,57 eV yang merupakan nilai tertinggi dari setiap elemen, kulit elektron dari Helium juga lengkap dan dalam bentuk ini tidak siap menerima elektron tambahan atau bergabung dengan apapun membentuk senyawa kovalen. Selain itu afinitas elektron dari Helium adalah sebesar 0,080 eV dan sangat dekat dengan nol. Helium juga memiliki polarisasi terendah dari semua jenis atom. Pada suhu yang sangat rendah, Helium dapat membentuk molekul Van der Waals (Xiao *et al*, 2014).

Helium adalah insulator listrik yang baik, kecuali jika diionisasikan. Seperti gas mulia pada umumnya, Helium mempunyai aras energi metastabil untuk tetap terionisasi dengan potensial di bawah potensial ionisasinya (Hampel, 1968). Helium dapat membentuk senyawa tidak stabil yang dikenal sebagai eksimer, dengan yodium, sulfur, tungsten, fluorin, dan fosofarus ketika terkena tumbukan elektron, lucutan pijar, ataupun plasma dari sebab lainnya. Senyawa HeNe,

HgHe, Whe_2 , dan ion He^+ , He^{2+} , dan HeD sudah berhasil dibentuk menggunakan cara ini (Hiby, 1993). Cara untuk membuat atom Helium menjadi reaktif adalah mengubahnya menjadi ion. Salah satu ionisasi dari Helium adalah He^+ yang merupakan bahan energi sangat tinggi dan mampu mengekstraksi elektron dari atom lainnya. He^+ memiliki konfigurasi elektron seperti hidrogen, sehingga selain ionik juga dapat membentuk ikatan kovalen (Kana'an *et al*, 1964).

Dalam perkembangannya, teori mekanika yang paling berpengaruh salah satunya yakni mengenai gejala atom hidrogen. Selain atom hidrogen dan isotop-isotopnya, terdapat beberapa atom yang dapat bersifat hidrogenik. Menurut Gautreau dan Savin (2006: 89), atom hidrogenik merupakan atom yang melepaskan elektron-elektron hingga menyisakan satu elektron saja pada orbital terluarnya. Contoh atom yang memiliki satu elektron seperti hidrogen adalah Ion Helium He^+ dan Ion Litium Li^{++} (Sudiarta, 2019: 207).

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Jenis, Tempat, dan Waktu Penelitian

Penelitian yang akan dilakukan tergolong dalam penelitian non eksperimen dalam bidang fisika teoritis mengenai ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$) dan persamaan schrodinger. Penelitian dilaksanakan pada semester Gasal Tahun Pelajaran 2019/2020 di Laboratorium Fisika Lanjut Gedung C FKIP Universitas Jember.

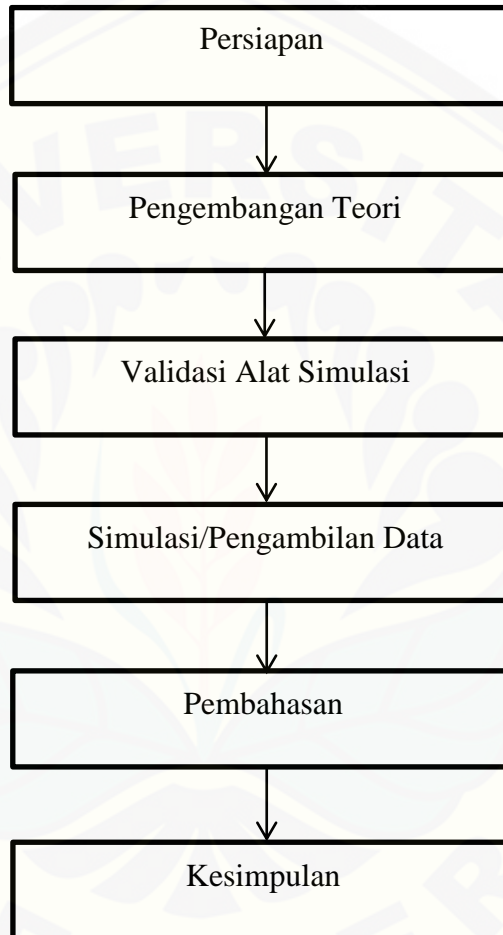
3.2 Definisi Operasional Variabel

Untuk menghindari terjadinya kesalahan dalam mengartikan istilah-istilah dalam penelitian ini, maka akan diberikan definisi operasional mengenai variabel-variabel, antara lain:

- a. Solusi Persamaan Schrodinger Ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$) dalam Ruang Posisi
Solusi Persamaan Schrodinger (ψ) ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$) merupakan sebuah fungsi gelombang tiga dimensi yang di dalamnya terdapat gabungan dari fungsi radial $R_{nl}(r)$ dan fungsi angular $Y_{lm}(\theta, \varphi)$. Fungsi gelombang dapat ditulis dalam beberapa representasi dan pada umumnya ditulis dalam representasi ruang posisi dan ruang momentum.
- b. Solusi Persamaan Schrodinger Ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$) dalam Ruang Momentum
Solusi Persamaan Schrodinger ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$) dalam ruang momentum $\varphi(p, \theta, \phi)$ didapatkan dari fungsi gelombang dalam ruang posisi yang di transformasikan menggunakan transformasi fourier sehingga didapatkan fungsi gelombang dalam ruang momentum.
- c. Fungsi Distribusi Momentum
Fungsi Distribusi Momentum merupakan suatu fungsi yang dapat menunjukkan bahwa sebuah partikel terdapat dalam satuan ruang tiap satuan panjang yang dapat dituliskan $|p \varphi(p)|^2$.
- d. Representasi Ruang Momentum
Representasi ruang momentum (p) bermakna bahwa operator yang digunakan dalam fungsi gelombang adalah p (momentum) itu sendiri sebagai konstanta.

3.3 Desain Penelitian

Pada penelitian ini, terdapat langkah-langkah yang harus dilakukan untuk menemukan nilai dari fungsi gelombang momentum dan probabilitas momentum untuk ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$). Langkah penelitian tersebut disajikan pada Gambar 3.1 berikut:



Gambar 3.1 Bagan langkah-langkah penelitian

Uraian bagan langkah-langkah penelitian pada Gambar 3.1 adalah sebagai berikut:

a. Persiapan

Persiapan merupakan langkah awal yang dilakukan dalam memulai penelitian. Dalam tahapan persiapan ini dikumpulkan segala literatur yang berkaitan dengan tujuan dari penelitian. Literatur tersebut berupa buku,

jurnal, modul, dan informasi-informasi lain dari beberapa website. Selain itu, software matlab juga dipersiapkan sebagai alat simulasi.

b. Pengembangan Teori

Pada tahapan ini dikembangkan teori-teori dan berbagai persamaan yang terdapat di literatur mengenai Persamaan Schrodinger pada atom berelektron tunggal tidak bergantung waktu dalam koordniat bola. Solusi dari Persamaan Schrodinger ini adalah menggunakan separasi variabel dimana persamaan tersebut dapat dipisahkan menjadi tiga persamaan yang bebas, dan masing-masing hanya mengandung satu koordinat saja. Pemisahan seperti itu terjadi karena $\psi(r, \theta, \varphi)$ mengambil bentuk perkalian dari tiga fungsi yang berbeda, yaitu yang hanya bergantung jari-jari (r) dan persamaan yang bergantung sudut (θ, φ). Dalam representasi ruang posisi, persamaan yang bergantung jari-jari (r) disebut sebagai fungsi radial $R_{nl}(r)$, sedangkan dalam ruang momentum, fungsi radialnya dituliskan sebagai $F_{nl}(p)$ dimana hanya bergantung pada bilangan kuantum utama n dan bilangan kuantum orbital l . Fungsi yang bergantung sudut (θ, φ) disebut dengan fungsi angular dan solusinya disebut dengan fungsi angular $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ yang merupakan gabungan dari fungsi polar $\Theta_{lm}(\theta)$ dan fungsi azimut $\Phi_m(\phi)$. Maka dalam representasi ruang momentum, solusi persamaan schrodinger untuk atom berelektron tunggal adalah $\varphi(p, \theta_p, \phi_p) = F_{n,l}(p)Y_{lm}(\theta_p, \phi_p)$.

c. Validasi Alat Simulasi

Setelah pengembangan teori dilakukan dan didapatkan hasil data solusi Persamaan Schrodinger ion Helium (${}^4_2He^+$), maka tahapan selanjutnya adalah validasi terhadap hasil yang sudah didapatkan dari pengembangan teori tersebut, kemudian dicocokkan dengan literatur atau penelitian yang telah dilakukan sebelumnya. Data yang digunakan untuk memvalidasi hasil penelitian ini disajikan pada Tabel 3.1 hingga Tabel 3.2 dan Gambar 3.2 sampai Gambar 3.4 berikut:

Tabel 3.1 Validasi fungsi radial atom hidrogen dalam representasi ruang momentum $F_{nl}(p)$

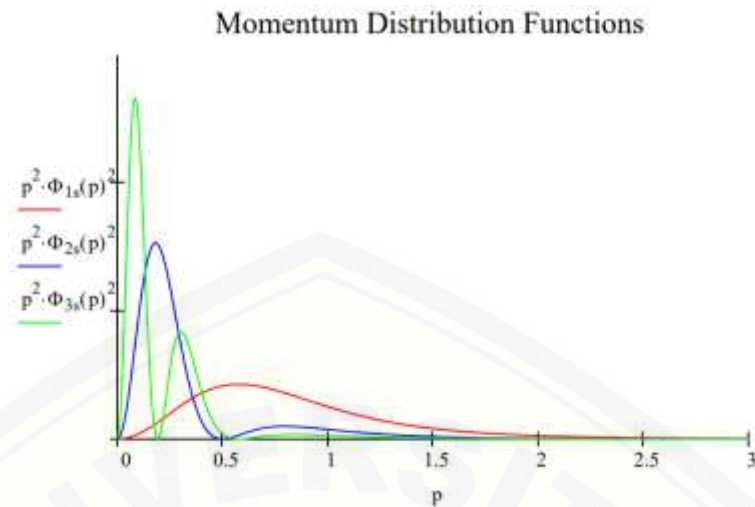
Kulit	n	l	m	$F_{nl}(p)$
K	1	0	0	$\frac{2^{5/2}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(p^2 + 1)^2}$
L	2	0	0	$\frac{32}{\sqrt{\pi}} \frac{(4p^2 - 1)}{(4p^2 + 1)^3}$
			1	$\frac{128}{\sqrt{3\pi}} \frac{p}{(4p^2 + 1)^3}$
			± 1	

(Bethe, 1957:39)

Tabel 3.2 Validasi fungsi angular atom hidrogen dalam representasi ruang momentum $Y_{lm}(\theta, \varphi)$

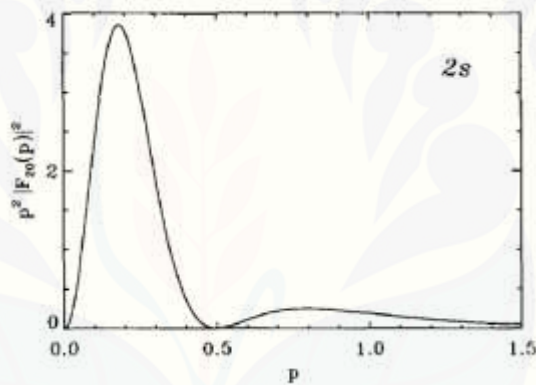
Kulit	n	l	m	$Y_{lm}(\theta, \varphi)$
K	1	0	0	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$
			0	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$
L	2	1	0	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos\theta$
			± 1	$\pm \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\theta e^{\pm i\varphi}$

(Krane, 2012: 275).

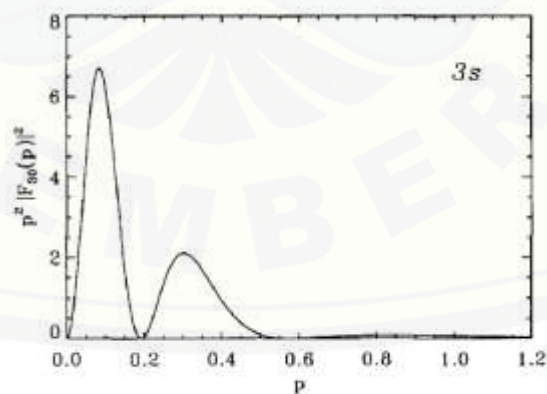


Gambar 3.2 Validasi Grafik Fungsi Distribusi Radial Momentum pada keadaan 1s, 2s, 3s

(Rioux,1997).



Gambar 3.3 Validasi Grafik Fungsi Distribusi Radial Momentum pada Keadaan 2s



Gambar 3.4 Validasi Grafik Fungsi Radial Momentum pada Keadaan 3s

(Hey,1993)

Gambar 3.2 merupakan gabungan grafik fungsi distribusi radial momentum untuk atom Hidrogen pada keadaan 1s, 2s, dan 3s sedangkan Gambar 3.3 dan Gambar 3.4 merupakan grafik fungsi radial momentum pada keadaan 2s dan

3s yang dihasilkan oleh peneliti terdahulu dan digunakan sebagai validasi simulasi grafik fungsi distribusi radial momentum untuk Ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$) pada penelitian ini. Berdasarkan grafik tersebut, dapat dijelaskan bahwa pada sumbu ordinat menyatakan posisi elektron dalam ruang momentum (p) diukur dari inti di dalam atom dalam satuan (p_0), sedangkan pada sumbu absis menyatakan distribusi radial momentum yang dinyatakan sebagai kuadrat nilai mutlak dari fungsi gelombang radial momentum $|p \varphi(p)|^2$ yang merepresentasikan kemungkinan suatu elektron ditemukan pada posisi (p) tertentu dalam atom hidrogen. Hal ini dapat dilihat pada grafik masing-masing keadaan 1s, 2s, dan 3s yang mana nilai simpangannya tidak ada yang bernilai negatif. Seiring dengan meningkatnya bilangan kuantum utama (n) dengan bilangan kuantum orbital ($l = 0$) maka jarak dari nilai titik puncak akan semakin menurun, namun nilai distribusi radial momentum akan semakin meningkat yang menandakan bahwa kemungkinan ditemukannya partikel semakin besar ditandai dengan meningkatnya nilai dari simpangan distribusi radial momentum untuk tiap " p " pada masing-masing keadaan 1s, 2s, dan 3s.

d. Simulasi/Pengambilan Data

Pada tahapan ini digunakan untuk menentukan solusi persamaan schrodinger ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$) dengan bilangan kuantum utama $n \leq 3$ dalam representasi ruang momentum dengan perhitungan secara analitik, kemudian dilakukan perhitungan secara numerik menggunakan program komputer (MATLAB).

e. Pembahasan

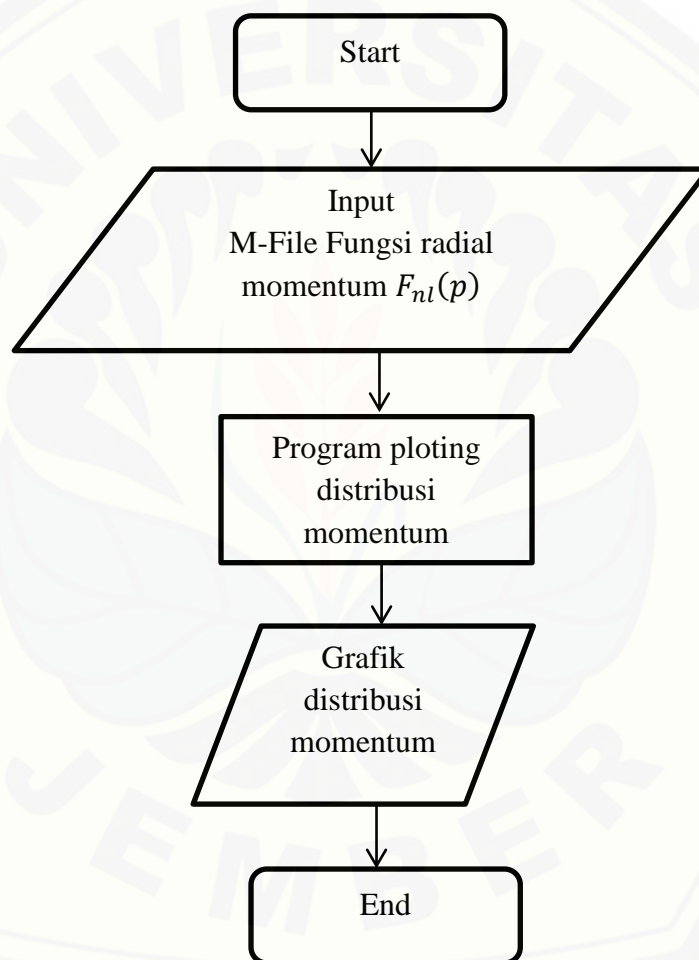
Hasil dari solusi persamaan schrodinger ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$) dengan bilangan kuantum utama $n \leq 3$ dalam representasi ruang momentum akan dibahas secara rinci pada tahapan ini.

f. Kesimpulan

Setelah dilakukan pembahasan, maka tahapan selanjutnya adalah menyimpulkan hasil yang diperoleh untuk menjawab rumusan masalah dalam penelitian.

3.4 Data dan Sumber Data

Sumber data yang ada dalam penelitian ini diambil dari beberapa literatur yang berkaitan dengan tujuan penelitian. Data yang dihasilkan pada penelitian ini merupakan data primer yang diperoleh dari hasil perhitungan secara analitik untuk mencari solusi persamaan schrodinger dan dibuat grafik distribusi momentum secara numerik menggunakan program komputer berupa MATLAB. Flowchart MATLAB digambarkan pada Gambar 3.5 berikut:



Gambar 3.5 Diagram langkah pemrograman komputer untuk menentukan grafik distribusi momentum ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$) dalam representasi ruang momentum

3.5 Teori Hasil Pengembangan

a) Fungsi Radial Momentum ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$)

$$F_{nl}(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{(n-l-1)!}{(n+l)!}} n^2 2^{2l+2} l! \times \frac{n^l p^l}{(n^2 p^2 + 1)^{l+2}} C_{n-l-1}^{l+1} \left(\frac{n^2 p^2 - 1}{n^2 p^2 + 1} \right)$$

b) Fungsi Angular ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$)

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} e^{im\varphi} P_l^m(\cos \theta)$$

c) Solusi Persamaan Schrodinger Ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$) dalam Ruang Momentum

$$\varphi(p, \theta_p, \phi_p) = F_{n,l}(p) Y_{lm}(\theta_p, \phi_p)$$

d) Fungsi Distribusi Momentum

$$D_{n,l} = |p \varphi(p)|^2$$

3.6 Tabel Data

Data dari hasil penelitian akan disajikan seperti Tabel 3.3 berikut ini:

Tabel 3.3 Tabel data untuk menentukan fungsi gelombang ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$)

Kulit	n	l	m	$F_{nl}(p)$	$\Theta_{lm}(\theta)$	$\Phi(\phi)$	$\varphi_{n,l,m}(p, \theta, \phi)$
K	1	0	0				
			L	2	0	0	
		1	0				
			± 1				
		0	0				
			0				
		1	± 1				
M	3	0	0				
			2	± 1			
				± 2			

K = kulit pada bilangan kuantum 1

L = kulit pada bilangan kuantum 2

M = kulit pada bilangan kuantum 3

n = bilangan kuantum utama

l = bilangan kuantum orbital

- m = bilangan kuantum magnetik
- $F_{nl}(p)$ = fungsi radial dalam representasi ruang momentum
- $\theta_{lm}(\theta)$ = fungsi polar
- $\Phi(\phi)$ = fungsi azimuth
- $\varphi(p, \theta_p, \phi_p)$ = solusi persamaan schrodinger atom berelektron tunggal dalam representasi ruang momentum



BAB 5. PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil yang telah diperoleh, maka dapat diambil kesimpulan bahwa solusi Persamaan Schrodinger Ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$) pada bilangan kuantum utama $n \leq 3$ dalam representasi ruang momentum memiliki 14 fungsi gelombang dengan 6 fungsi radial dan 14 fungsi angular. Dari grafik yang diperoleh dapat diketahui bahwa seiring dengan meningkatnya bilangan kuantum utama (n) dengan bilangan kuantum orbital ($l = 0$) maka jarak dari nilai titik puncak akan semakin menurun, tetapi nilai distribusi radial momentum akan semakin meningkat. Apabila ditinjau dari masing-masing bilangan kuantum, untuk keadaan bilangan kuantum $n = 2$ ($l = 0, l = 1$) jarak dari nilai titik puncak semakin meningkat diikuti dengan nilai distribusi radial momentum yang menurun, begitu juga untuk $n = 3$ ($l = 0, l = 1, l = 2$) dapat terlihat bahwa jarak dari nilai titik puncak juga meningkat dengan nilai distribusi radial momentum yang turut menurun.

5.2 Saran

Dalam penelitian ini, yang dikaji yaitu solusi Persamaan Schrodinger berupa fungsi gelombangnya saja. Diharapkan untuk peneliti selanjutnya dapat menentukan nilai probabilitas, nilai ekspektasi, bahkan hingga spektrum energi. Selain itu, diharapkan untuk peneliti selanjutnya dapat mengembangkan solusi Persamaan Schrodinger pada atom berelektron tunggal ini dalam representasi ruang yang lain, misalnya pada ruang fase untuk Ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$).

DAFTAR PUSTAKA

- Azis, S. A. dan Z. Abdullah. 2015. Teknik Pemisahan Operator dan Pendekatan Spektral sebagai Solusi Persamaan Schrodinger Bergantung Waktu pada Atom Hidrogen. *Jurnal Fisika Unand*. 4(3): 255-262
- Beiser, A. 2003. *Concept of Modern Physics*. Six Edition. United States of America: Tata Mcgraw-Hill Companies, Inc.
- Bethe, H. A., dan E.E.Salpeter. 1957. *Quantum Mechanics of One and Two Electron Atoms*. New York: Academic Press Inc.
- Fuadah, F., S.H.B. Prastowo., L. Nuraini. 2018. Solusi Persamaan Schrodinger Atom Deuterium dengan Bilangan Kuantum $n = 4$. *Prosiding Seminar Nasional Pendidikan Sains 2018*. 3(2): 142-147.
- Ganesan, L. R., dan M. Balaji. 2008. Schrodinger Equation for the Hydrogen Atom A Simplified Treatment. *Journal of Chemistry*. 5(3):659-662.
- Gasiorowics, S. 1996. *Quantum Physics Second Edition*. United States of America: John wiley & Sons, Inc.
- Gautreau, W., dan W. Savin. 2006. *Fisika Modern*. Jakarta: Erlangga.
- Griffith, D. J. 2005. *Introduction to Quantum Mechanics*. New York: Prentice Hall, Inc.
- Hampel, C.A. 1968. *The Encyclopedia of the Chemical Elements*. New York: Van Nostrand Reinhold.
- Hassan, M.H. 2008. On the Hydrogen Wave Function in Momentum-Space, Clifford Algebra and the Generating Function of Gegenbauer Polynomial. HAL archives-ouvertes.
- Hermanto, W. 2016. Fungsi Gelombang Atom Deuterium dengan Pendekatan Persamaan Schrodinger. *Prosiding Seminar Nasional Pendidikan Sains 2016*: 794-802.
- Hey, J.D. 1993. On the Momentum Representation of Hydrogenic Wave Functions: Some Properties and Applications. *American Journal of Physics* 61(1): 28-35.
- Hiby, J.W. 1993. Massenspektrographische Untersuchungen an Wasserstoff- und Heliumkanalstrahlen (H^+ , H^- , HeH^+ , HeD^+ , He^-). *Annalen der Physik* 426(5): 473-487.

- Idris-Bey, K., dan M. H. Al-Hashimi. 2018. Modelling of The Wave Function and of the Energy States of Hydrogen Stored in a Spherical Cavity. *Advances in Science, Technology and Engineering Systems Journal*. 3(2):157-163.
- Kana'an, A.S., dan L.J. Margrave. 1964. Chemical Reactions in Electrical Discharges. *Advances in Inorganic Chemistry and Radiochemistry* 6: 182-183.
- Krane, K. S. 2012. *Modern Physics Third Edition*. United States of America: John Wiley & Sons, Inc.
- Kurniawan, Y., dan M. Nur. 2005. Studi Pemodelan Dinamika Proton dalam Ikatan Hidrogen H₂O Padatan Satu Dimensi. *Berkala Fisika* 8(3): 107-117.
- Liboff, L. R. 2003. *Introductory Quantum Mechanics Fourth Edition*. United State of America: Addison-Wesley.
- Maulana, M. 2019. *Solusi Lengkap Fungsi Gelombang Atom Hidrogen (H_1^1) pada Bilangan Kuantum Utama (n) 4*. Tidak diterbitkan. Skripsi. Jember: FKIP Universitas Jember.
- Mavromatis, H. A. 1987. *Exercise in Quantum Mechanics*. Lebanon: Library of Congress Cataloging in Publication Data.
- Ohno, K. 2004. *Quantum Chemistry*. Tokyo: Iwanami Publishing Company.
- Podolsky, B., dan L. Pauling. 1929. The Momentum Distribution in Hydrogen-Like Atoms. *Physical Review* 34: 109-116.
- Purwanto, A. 2016. *Fisika Kuantum Edisi Kedua*. Yogyakarta: Gava Media.
- Ramadani. 2016. Struktur Atom dan Perkembangan Teori Atom. *Jurnal Ilmu Pendidikan*.
- Rioux, F. 1997. *Quantum Fundamentals*. New York: College of Saint Benedict/Saint John's University.
- Siregar, R.E. 2010. *Teori dan Aplikasi Fisika Kuantum*. Bandung: Widya Padjajaran.
- Spake, J.J., D.K. Sing., T.M. Evans., V. Bourrier. 2018. Helium in the Eroding Atmosphere of an Exoplanet. *Journal of Nature* 557(7703): 68-70.
- Sudiarta, I. W. 2019. *Mekanika Kuantum*. Mataram: CV. Garuda Ilmu.

- Sugiyono, V. 2016. *Mekanika Kuantum*. Yogyakarta: CAPS (Center for Academic Publishing Service).
- Sukardjo. 2004. *Kimia Fisika*. Jakarta: PT. Rineka Cipta.
- Suparmi, A., C. Cari, J. Handhika, C. Yanuarief, dan H. Marini. 2018. Aproximate Solution of Schrodinger Equation for Modified Poschl-Teller plus Trigonometric Rosen-Morse Non-Central Potentials in Terms of Finite Romanovski Polynomials. *Journal of Aplied Physics*. 2(2):43-51.
- Supriadi, B., S.H.B. Prastowo., S. Bahri, Z.R. Ridlo, dan T. Prihandono. 2018. The Stark Effect on the Wave Function of Tritium Relativistic Condition. *Journal of Physics*. IOP Publishing.
- Wiyatmo, Y. 2008. *Fisika Atom: Dalam Perspektif, Semiklasik dan Kuantum*. Bandung: Pustaka Pelajar.
- Xiao, D., A.R. Organov., F. Alexnder. 2014. A Stable Compound of Helium and Sodium at High Pressure. *Journal of Nature Chemistry* 9(5): 440-445.
- Yusron, M., K.S. Firdausi., dan Sumariyah. 2007. Review Probabilitas Menemukan Elektron dengan Fungsi Gelombang Simetri dan Antisimetri pada Molekul H_2^+ . *Jurnal Fisika*. 10(1):7-12.
- Zielinski, T. J., E. Harvey., R. Sweeney., dan D. M. Hanson. 2005. Quantum States of Atoms and Molecules. *Journal of Chemical Education* 96(12): 2679-3044.

Lampiran 1. Matriks Penelitian

JUDUL	TUJUAN PENELITIAN	VARIABEL	DATA DAN TEKNIK PENGAMBILAN DATA	METODE PENELITIAN
SOLUSI PERSAMAAN SCHRODINGER ION HELIUM (${}^4_2\text{He}^+$) PADA BILANGAN KUANTUM $n \leq 3$ DALAM REPRESENTASI RUANG MOMENTUM	Untuk mengkaji solusi Persamaan Schrodinger ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$) pada bilangan kuantum utama $n \leq 3$ dalam representasi ruang momentum	Variabel bebas: 1. Bilangan kuantum $n \leq 3$ Variabel kontrol: 1. Ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$). 2. Persamaan Schrodinger. Variabel terikat: 1. Solusi Persamaan Schrodinger ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$) pada bilangan kuantum $n \leq 3$ dalam representasi ruang momentum	1. Data: Primer. 2. Sumber Data: Buku Mekanika Kuantum dan Fisika Modern, jurnal terkait. 3. Teknik Pengambilan Data: Perhitungan dilakukan secara analitik (menggunakan persamaan schrodinger) dan dilakukan secara numerik menggunakan program komputer (MATLAB)	Jenis Penelitian: Non eksperimen yaitu dengan kajian teoritis (<i>study literature</i>).

Lampiran 2. Hasil Simulasi Fungsi Gelombang Ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$) pada bilangan kuantum $n \leq 3$

Kulit	n	l	m	$F_{nl}(p)$	$\Theta_{lm}(\theta)$	$\Phi(\phi)$	$\varphi(p, \theta, \phi)$	
K	1	0	0	$\frac{2^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(p^2 + 1)^2}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2\pi}}$	$\frac{2^{\frac{5}{2}}}{2\pi} \frac{1}{(p^2 + 1)^2}$	
L	2	0	0	$\frac{32}{\sqrt{\pi}} \frac{(4p^2 - 1)}{(4p^2 + 1)^3}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2\pi}}$	$\frac{32}{2\pi} \frac{(4p^2 - 1)}{(4p^2 + 1)^3}$	
			1	0		$\sqrt{\frac{3}{2}} \cos \theta$	$\sqrt{\frac{1}{2\pi}}$	$\frac{128\sqrt{3}}{2\pi\sqrt{3}} \frac{p}{(4p^2 + 1)^3} \cos \theta$
				1	$\frac{128}{\sqrt{3\pi}} \frac{p}{(4p^2 + 1)^3}$	$-\sqrt{\frac{3}{4}} \sin \theta$	$\sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i\phi}$	$-\frac{128\sqrt{3}}{2\pi\sqrt{6}} \frac{p}{(4p^2 + 1)^3} \sin \theta e^{i\phi}$
				-1		$\sqrt{\frac{3}{4}} \sin \theta$	$\sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{-i\phi}$	$\frac{128\sqrt{3}}{2\pi\sqrt{6}} \frac{p}{(4p^2 + 1)^3} \sin \theta e^{-i\phi}$
M	3	0	0	$\frac{108\sqrt{2}}{\sqrt{3\pi}} \frac{(81p^4 - 30p^2 + 1)}{(9p^2 + 1)^4}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2\pi}}$	$\frac{108\sqrt{2}}{2\pi\sqrt{3}} \frac{(81p^4 - 30p^2 + 1)}{(9p^2 + 1)^4}$	
			1	0	$\frac{864}{\sqrt{3\pi}} \frac{p(9p^2 - 1)}{(9p^2 + 1)^4}$	$\sqrt{\frac{3}{2}} \cos \theta$	$\sqrt{\frac{1}{2\pi}}$	$\frac{864\sqrt{3}}{2\pi\sqrt{3}} \frac{p(9p^2 - 1)}{(9p^2 + 1)^4} \cos \theta$

Kulit	n	l	m	$F_{nl}(p)$	$\Theta_{lm}(\theta)$	$\Phi(\phi)$	$\varphi(p, \theta_p, \phi_p)$
M	3	1	1	$\frac{864}{\sqrt{3\pi}} \frac{p(9p^2 - 1)}{(9p^2 + 1)^4}$	$-\sqrt{\frac{3}{4}} \sin \theta$	$\sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i\phi}$	$-\frac{864\sqrt{3}}{2\pi\sqrt{6}} \frac{p(9p^2 - 1)}{(9p^2 + 1)^4} \sin \theta e^{i\phi}$
			-1		$\sqrt{\frac{3}{4}} \sin \theta$	$\sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{-i\phi}$	$\frac{864\sqrt{3}}{2\pi\sqrt{6}} \frac{p(9p^2 - 1)}{(9p^2 + 1)^4} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi}$
	2	0	0	$\frac{5184}{\sqrt{15\pi}} \frac{p^2}{(9p^2 + 1)^4}$	$\sqrt{\frac{5}{8}} (3 \cos^2 \theta - 1)$	$\sqrt{\frac{1}{2\pi}}$	$\frac{5184\sqrt{5}}{4\pi\sqrt{15}} \frac{p^2}{(9p^2 + 1)^4} (3 \cos^2 \theta - 1)$
			1		$-\sqrt{\frac{15}{4}} \sin \theta \cos \theta$	$\sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i\phi}$	$-\frac{5184\sqrt{15}}{2\pi\sqrt{30}} \frac{p^2}{(9p^2 + 1)^4} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$
			-1		$\sqrt{\frac{15}{4}} \sin \theta \cos \theta$	$\sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{-i\phi}$	$\frac{5184\sqrt{15}}{2\pi\sqrt{30}} \frac{p^2}{(9p^2 + 1)^4} \sin \theta \cos \theta e^{-i\phi}$
			2		$\sqrt{\frac{15}{16}} \sin^2 \theta$	$\sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{2i\phi}$	$\frac{5184\sqrt{15}}{4\pi\sqrt{30}} \frac{p^2}{(9p^2 + 1)^4} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$
			-2		$\sqrt{\frac{15}{16}} \sin^2 \theta$	$\sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{-2i\phi}$	$\frac{5184\sqrt{15}}{4\pi\sqrt{30}} \frac{p^2}{(9p^2 + 1)^4} \sin^2 \theta e^{-2i\phi}$

Lampiran 3. Perhitungan Jari-Jari Atom Bohr

Berdasarkan study literature didapatkan data ketetapan sebagai berikut:

- Konstanta Planck ($\hbar = 1,05457180 \times 10^{-34} \text{ Js}$)
- Massa proton ($m_p = 1,6726231 \times 10^{-27} \text{ kg}$)
- Massa elektron ($m_e = 9,10938215 \times 10^{-31} \text{ kg}$)
- Massa neutron ($m_n = 1,6749 \times 10^{-27} \text{ kg}$)
- Konstanta struktur halus ($\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = 2,310272932 \times 10^{-28}$)

Jari-jari atom Bohr dapat dituliskan:

$$r = \frac{n^2 \hbar^2 4\pi\epsilon_0}{Ze^2 m}$$

Untuk Ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$) dengan $Z = 1$ dan m menggunakan massa tereduksi (μ) maka:

$$r = \frac{n^2 \hbar^2 4\pi\epsilon_0}{Ze^2 m} = \frac{n^2 \hbar^2 4\pi\epsilon_0}{\mu e^2} = \frac{n^2 \hbar^2}{\mu \alpha}$$

Dari data yang diperoleh dengan study literature, maka massa Ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$) yang didapatkan:

$$\begin{aligned} m_{\text{He}} &= m_p + m_n \\ &= 2m_p + 2m_n \\ &= [2(1,6726231 \times 10^{-27}) + 2(1,6749 \times 10^{-27})] \\ &= 3,34462 \times 10^{-27} + 3,3498 \times 10^{-27} \\ &= 6,695062 \times 10^{-27} \text{ kg} \end{aligned}$$

Massa tereduksi:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{m_{\text{He}} \times m_e}{m_{\text{He}} + m_e} \\ &= \frac{6,695062 \times 10^{-27} \times 9,10938215 \times 10^{-31}}{6,695062 \times 10^{-27} + 9,10938215 \times 10^{-31}} \\ &= \frac{6,098773435 \times 10^{-57}}{6,695957138 \times 10^{-27}} \\ &= 9,108142883 \times 10^{-31} \text{ kg} \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh jari-jari Ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} r &= \frac{n^2 \hbar^2}{\mu \alpha} \\ &= \frac{1^2 (1,05457180 \times 10^{-34})^2}{9,108142883 \times 10^{-31} \times 2,310272932 \times 10^{-28}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(1,05457180 \times 10^{-34})^2}{2,104229596 \times 10^{-58}} \\ &= \frac{1,112121681 \times 10^{-68}}{2,104229596 \times 10^{-58}} \\ &= 5,285172699 \times 10^{-11} \text{ m} \\ &= 0,5285172669 \text{ \AA} \end{aligned}$$



Lampiran 4. Perhitungan Fungsi Radial

Bentuk umum fungsi radial:

$$F_{nl}(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{(n-l-1)!}{(n+l)!}} n^2 2^{2l+2} l! \times \frac{n^l p^l}{(n^2 p^2 + 1)^{l+2}} C_{n-l-1}^{l+1} \left(\frac{n^2 p^2 - 1}{n^2 p^2 + 1} \right)$$

Dengan polinomial gegenbauer sebagai berikut:

$$C_0^\alpha(x) = 1$$

$$C_1^\alpha(x) = 2\alpha x$$

$$C_2^\alpha(x) = 2\alpha(\alpha + 1)x^2 - \alpha$$

1. (n = 1, l = 0)

Polinomial gegenbauer:

$$\begin{aligned} C_{n-l-1}^{l+1} \left(\frac{n^2 p^2 - 1}{n^2 p^2 + 1} \right) &= C_{1-0-1}^{0+1} \left(\frac{1^2 p^2 - 1}{1^2 p^2 + 1} \right) \\ &= C_0^1 \left(\frac{p^2 - 1}{p^2 + 1} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Maka:

$$\begin{aligned} F_{10} &= \left[\frac{2}{\pi} \frac{(1-0-1)!}{(1+0)!} \right]^{1/2} 1^2 \cdot 2^{(2 \cdot 0) + 2} \cdot 0! \times \frac{1^0 p^0}{(1^2 p^2 + 1)^{0+2}} C_{1-0-1}^{0+1} \left(\frac{1^2 p^2 - 1}{1^2 p^2 + 1} \right) \\ &= \left[\frac{2}{\pi} \frac{0!}{1} \right]^{1/2} 1 \cdot 2^2 \cdot 0! \times \frac{1}{(p^2 + 1)^2} C_0^1 \left(\frac{p^2 - 1}{p^2 + 1} \right) \\ &= \left[\frac{2}{\pi} \right]^{1/2} 2^2 \times \frac{1}{(p^2 + 1)^2} C_0^1 \left(\frac{p^2 - 1}{p^2 + 1} \right) \\ &= 2^{1/2} \cdot \pi^{-1/2} \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{(p^2 + 1)^2} \cdot 1 \\ &= \frac{2^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(p^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

2. (n = 2, l = 0)

Polinomial gegenbauer:

$$\begin{aligned} C_{n-l-1}^{l+1} \left(\frac{n^2 p^2 - 1}{n^2 p^2 + 1} \right) &= C_{2-0-1}^{0+1} \left(\frac{2^2 p^2 - 1}{2^2 p^2 + 1} \right) \\ &= C_1^1 \left(\frac{4p^2 - 1}{4p^2 + 1} \right) \\ &= 2 \left(\frac{4p^2 - 1}{4p^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

Maka:

$$F_{20} = \left[\frac{2}{\pi} \frac{(2-0-1)!}{(2+0)!} \right]^{1/2} 2^2 \cdot 2^{(2 \cdot 0) + 2} \cdot 0! \times \frac{2^0 p^0}{(2^2 p^2 + 1)^{0+2}} C_{2-0-1}^{0+1} \left(\frac{2^2 p^2 - 1}{2^2 p^2 + 1} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{2 \cdot 1!}{\pi \cdot 2} \right]^{1/2} 2^2 \cdot 2^2 \cdot 0! \times \frac{1}{(4p^2+1)^2} C_1^1 \left(\frac{4p^2-1}{4p^2+1} \right) \\
&= \left[\frac{1}{\pi} \right]^{1/2} \cdot 16 \cdot \frac{1}{(4p^2+1)^2} \cdot 2 \left(\frac{4p^2-1}{4p^2+1} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{16}{(4p^2+1)^2} \cdot \left(\frac{8p^2-2}{8p^2+2} \right) \\
&= \frac{32}{\sqrt{\pi}} \frac{(4p^2-1)}{(4p^2+1)^3}
\end{aligned}$$

3. ($n = 2, l = 1$)

Polinomial gegenbauer:

$$\begin{aligned}
C_{n-l-1}^{l+1} \left(\frac{n^2 p^2 - 1}{n^2 p^2 + 1} \right) &= C_{1-0-1}^{0+1} \left(\frac{1^2 p^2 - 1}{1^2 p^2 + 1} \right) \\
&= C_0^1 \left(\frac{p^2 - 1}{p^2 + 1} \right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Maka:

$$\begin{aligned}
F_{21} &= \left[\frac{2 \cdot (2-1-1)!}{\pi \cdot (2+1)!} \right]^{1/2} 2^2 \cdot 2^{(2 \cdot 1) + 2} \cdot 1! \times \frac{2^1 p^1}{(2^2 p^2 + 1)^{1+2}} C_{2-1-1}^{1+1} \left(\frac{2^2 p^2 - 1}{2^2 p^2 + 1} \right) \\
&= \left[\frac{2 \cdot 0!}{\pi \cdot 3!} \right]^{1/2} 4 \cdot 16 \cdot 1 \cdot \frac{2p}{(4p^2+1)^3} C_0^2 \left(\frac{4p^2-1}{4p^2+1} \right) \\
&= \left[\frac{2 \cdot 1}{\pi \cdot 6} \right]^{1/2} \cdot 64 \cdot \frac{2p}{(4p^2+1)^3} \cdot 1 \\
&= \sqrt{\frac{1}{3\pi}} \cdot 64 \cdot \frac{2p}{(4p^2+1)^3} \\
&= \frac{128}{\sqrt{3\pi}} \frac{p}{(4p^2+1)^3}
\end{aligned}$$

4. ($n = 3, l = 0$)

Polinomial gegenbauer:

$$\begin{aligned}
C_{n-l-1}^{l+1} \left(\frac{n^2 p^2 - 1}{n^2 p^2 + 1} \right) &= C_{3-0-1}^{0+1} \left(\frac{3^2 p^2 - 1}{3^2 p^2 + 1} \right) \\
&= C_2^1 \left(\frac{3^2 p^2 - 1}{3^2 p^2 + 1} \right) \\
&= 2 \cdot 1 (1 + 1) \left(\frac{3^2 p^2 - 1}{3^2 p^2 + 1} \right)^2 - 1 \\
&= 4 \left(\frac{9p^2 - 1}{9p^2 + 1} \right)^2 - 1 \\
&= \frac{4(9p^2 - 1)(9p^2 - 1) - (9p^2 + 1)^2}{(9p^2 + 1)^2} \\
&= \frac{4(81p^4 - 18p^2 + 1) - (81p^4 + 18p^2 + 1)}{(9p^2 + 1)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{324p^4 - 72p^2 + 4 - (81p^4 + 18p^2 + 1)}{(9p^2 + 1)^2} \\
&= \frac{243p^4 - 90p^2 + 3}{(9p^2 + 1)^2} \\
&= \frac{3(81p^4 - 30p^2 + 1)}{(9p^2 + 1)^2}
\end{aligned}$$

Maka:

$$\begin{aligned}
F_{30} &= \left[\frac{2(3-0-1)!}{\pi(3+0)!} \right]^{\frac{1}{2}} 3^2 \cdot 2^{(2 \cdot 0) + 2} \cdot 0! \times \frac{3^0 p^0}{(3^2 p^2 + 1)^{0+2}} C_{3-0-1}^{0+1} \left(\frac{3^2 p^2 - 1}{3^2 p^2 + 1} \right) \\
&= \left[\frac{2(2)!}{\pi(3)!} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot 9 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{(9p^2 + 1)^2} \cdot \frac{3(81p^4 - 30p^2 + 1)}{(9p^2 + 1)^2} \\
&= \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \cdot 108 \cdot \frac{(81p^4 - 30p^2 + 1)}{(9p^2 + 1)^4} \\
&= \frac{108\sqrt{2}}{\sqrt{3\pi}} \frac{(81p^4 - 30p^2 + 1)}{(9p^2 + 1)^4}
\end{aligned}$$

5. ($n = 3, l = 1$)

Polinomial Gegenbauer:

$$\begin{aligned}
C_{n-l-1}^{l+1} \left(\frac{n^2 p^2 - 1}{n^2 p^2 + 1} \right) &= C_{3-0-1}^{1+1} \left(\frac{3^2 p^2 - 1}{3^2 p^2 + 1} \right) \\
&= C_{3-1-1}^{1+1} \left(\frac{3^2 p^2 - 1}{3^2 p^2 + 1} \right) \\
&= C_1^2 \left(\frac{3^2 p^2 - 1}{3^2 p^2 + 1} \right) \\
&= 2 \cdot 2 \left(\frac{3^2 p^2 - 1}{3^2 p^2 + 1} \right) \\
&= 4 \left(\frac{9p^2 - 1}{9p^2 + 1} \right)
\end{aligned}$$

Maka:

$$\begin{aligned}
F_{31} &= \left[\frac{2(3-1-1)!}{\pi(3+1)!} \right]^{\frac{1}{2}} 3^2 \cdot 2^{(2 \cdot 1) + 2} \cdot 1! \times \frac{3^1 p^1}{(3^2 p^2 + 1)^{1+2}} C_{3-1-1}^{1+1} \left(\frac{3^2 p^2 - 1}{3^2 p^2 + 1} \right) \\
&= \left[\frac{2(1)!}{\pi(4)!} \right]^{\frac{1}{2}} 3^2 \cdot 2^{(2 \cdot 1) + 2} \cdot 1! \times \frac{3^1 p^1}{(3^2 p^2 + 1)^{1+2}} \cdot 4 \left(\frac{9p^2 - 1}{9p^2 + 1} \right) \\
&= \left[\frac{2 \cdot 1}{\pi \cdot 24} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot 9 \cdot 16 \cdot 1 \times \frac{3p}{(9p^2 + 1)^3} \cdot 4 \left(\frac{9p^2 - 1}{9p^2 + 1} \right) \\
&= \sqrt{\frac{1}{12\pi}} \cdot 144 \cdot 4 \cdot \frac{3p}{(9p^2 + 1)^3} \cdot \left(\frac{9p^2 - 1}{9p^2 + 1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{3\pi}} \cdot 576 \cdot \frac{3p(9p^2 - 1)}{(9p^2 + 1)^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{3\pi}} \cdot 1728 \frac{p(9p^2-1)}{(9p^2+1)^4} \\
 &= \frac{864}{\sqrt{3\pi}} \cdot \frac{p(9p^2-1)}{(9p^2+1)^4}
 \end{aligned}$$

6. ($n = 3, l = 2$)

Polinomial Gegenbauer:

$$\begin{aligned}
 C_{n-l-1}^{l+1} \left(\frac{n^2 p^2 - 1}{n^2 p^2 + 1} \right) &= C_{3-2-1}^{2+1} \left(\frac{3^2 p^2 - 1}{3^2 p^2 + 1} \right) \\
 &= C_0^3 \left(\frac{3^2 p^2 - 1}{3^2 p^2 + 1} \right) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Maka:

$$\begin{aligned}
 F_{31} &= \left[\frac{2 \frac{(3-2-1)!}{(3+2)!}}{\pi} \right]^{\frac{1}{2}} 3^2 \cdot 2^{(2 \cdot 2) + 2} \cdot 2! \times \frac{3^2 p^2}{(3^2 p^2 + 1)^{2+2}} C_{3-2-1}^{2+1} \left(\frac{3^2 p^2 - 1}{3^2 p^2 + 1} \right) \\
 &= \left[\frac{2 \frac{(1)!}{(5)!}}{\pi} \right]^{\frac{1}{2}} 9 \cdot 2^6 \cdot 2! \times \frac{3^2 p^2}{(3^2 p^2 + 1)^{2+2}} \cdot 1 \\
 &= \sqrt{\frac{2}{120\pi}} \cdot 9 \cdot 64 \cdot 2 \cdot \frac{9p^2}{(9p^2+1)^4} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{15\pi}} \cdot 1152 \cdot \frac{9p^2}{(9p^2+1)^4} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{15\pi}} \cdot 10368 \cdot \frac{p^2}{(9p^2+1)^4} \\
 &= \frac{5184}{\sqrt{15\pi}} \frac{p^2}{(9p^2+1)^4}
 \end{aligned}$$

Lampiran 5. Perhitungan Fungsi Legendre

Bentuk umum fungsi legendre:

$$P_l(\cos\theta) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{d\cos\theta} \right)^l (\cos^2\theta - 1)^l$$

1. $l = 0$

$$\begin{aligned} P_0(\cos\theta) &= \frac{1}{2^0 0!} \left(\frac{d}{d\cos\theta} \right)^0 (\cos^2\theta - 1)^0 \\ &= \frac{1}{1} \cdot 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. $l = 1$

$$\begin{aligned} P_1(\cos\theta) &= \frac{1}{2^1 1!} \left(\frac{d}{d\cos\theta} \right)^1 (\cos^2\theta - 1)^1 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{d\cos\theta} \cdot (\cos^2\theta - 1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\cos\theta \\ &= \cos\theta \end{aligned}$$

3. $l = 2$

$$\begin{aligned} P_2(\cos\theta) &= \frac{1}{2^2 2!} \left(\frac{d}{d\cos\theta} \right)^2 (\cos^2\theta - 1)^2 \\ &= \frac{1}{4 \cdot 2!} \left[\left(\frac{d}{d\cos\theta} \right) \left(\frac{d}{d\cos\theta} (\cos^2\theta - 1)^2 \right) \right] \\ &= \frac{1}{8} \left[\left(\frac{d}{d\cos\theta} \right) \left(\frac{d}{d\cos\theta} (\cos^4\theta - 2\cos^2\theta + 1) \right) \right] \\ &= \frac{1}{8} \left[\left(\frac{d}{d\cos\theta} (4\cos^3\theta - 4\cos\theta) \right) \right] \\ &= \frac{1}{8} [12\cos^2\theta - 4] \\ &= \frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Lampiran 6. Perhitungan Fungsi Legendre Terasosiasi

Bentuk umum fungsi legendre terasosiasi:

$$P_l^m(\cos\theta) = (1 - \cos^2\theta)^{\frac{|m|}{2}} \left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{|m|} P_l(\cos\theta)$$

1. ($l = 0, m = 0$)

$$\begin{aligned} P_0^0(\cos\theta) &= (1 - \cos^2\theta)^{\frac{|0|}{2}} \left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{|0|} P_0(\cos\theta) \\ &= 1.1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. ($l = 1, m = -1$)

$$\begin{aligned} P_1^{-1}(\cos\theta) &= (1 - \cos^2\theta)^{\frac{|-1|}{2}} \left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{|-1|} P_1(\cos\theta) \\ &= (1 - \cos^2\theta)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{d\cos\theta} \cos\theta \\ &= \sqrt{(1 - \cos^2\theta)} \\ &= \sqrt{\sin^2\theta} \\ &= \sin\theta \end{aligned}$$

3. ($l = 1, m = 0$)

$$\begin{aligned} P_1^0(\cos\theta) &= (1 - \cos^2\theta)^{\frac{|0|}{2}} \left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{|0|} P_1(\cos\theta) \\ &= 1 \cdot \cos\theta \\ &= \cos\theta \end{aligned}$$

4. ($l = 1, m = 1$)

$$\begin{aligned} P_1^1(\cos\theta) &= (1 - \cos^2\theta)^{\frac{|1|}{2}} \left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{|1|} P_1(\cos\theta) \\ &= (1 - \cos^2\theta)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{d\cos\theta} \cos\theta \\ &= \sqrt{(1 - \cos^2\theta)} \\ &= \sqrt{\sin^2\theta} \\ &= \sin\theta \end{aligned}$$

5. ($l = 2, m = 0$)

$$P_2^0(\cos\theta) = (1 - \cos^2\theta)^{\frac{|0|}{2}} \left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{|0|} P_2(\cos\theta)$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1)
 \end{aligned}$$

6. ($l = 2, m = 1$)

$$\begin{aligned}
 P_2^1(\cos\theta) &= (1 - \cos^2\theta)^{\frac{|1|}{2}} \left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{|1|} P_2(\cos\theta) \\
 &= (1 - \cos^2\theta)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)\right] \\
 &= \sqrt{1 - \cos^2\theta} [3 \cos \theta] \\
 &= \sqrt{\sin^2\theta} \cdot 3 \cos \theta \\
 &= 3 \sin \theta \cos \theta
 \end{aligned}$$

7. ($l = 2, m = -1$)

$$\begin{aligned}
 P_2^{-1}(\cos\theta) &= (1 - \cos^2\theta)^{\frac{|-1|}{2}} \left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{|-1|} P_2(\cos\theta) \\
 &= (1 - \cos^2\theta)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)\right] \\
 &= \sqrt{1 - \cos^2\theta} [3 \cos \theta] \\
 &= \sqrt{\sin^2\theta} \cdot 3 \cos \theta \\
 &= 3 \sin \theta \cos \theta
 \end{aligned}$$

8. ($l = 2, m = 2$)

$$\begin{aligned}
 P_2^2(\cos\theta) &= (1 - \cos^2\theta)^{\frac{|2|}{2}} \left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{|2|} P_2(\cos\theta) \\
 &= (1 - \cos^2\theta) \left[\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)\right] \\
 &= (1 - \cos^2\theta) \left[\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)(3 \cos \theta)\right] \\
 &= (1 - \cos^2\theta) (3) \\
 &= 3 (1 - \cos^2\theta) \\
 &= 3(\sin^2 \theta)
 \end{aligned}$$

9. ($l = 2, m = -2$)

$$\begin{aligned}
 P_2^{-2}(\cos\theta) &= (1 - \cos^2\theta)^{\frac{|-2|}{2}} \left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{|-2|} P_2(\cos\theta) \\
 &= (1 - \cos^2\theta) \left[\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)\right] \\
 &= (1 - \cos^2\theta) \left[\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)(3 \cos \theta)\right]
 \end{aligned}$$

$$= (1 - \cos^2 \theta) (3)$$

$$= 3 (1 - \cos^2 \theta)$$

$$= 3(\sin^2 \theta)$$



Lampiran 7. Perhitungan Fungsi Polar

Bentuk umum fungsi polar:

$$\Theta_{lm}(\theta) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^m(\cos \theta)$$

1. ($l = 0, m = 0$)

$$\begin{aligned} \Theta_{0,0}(\theta) &= (-1)^0 \sqrt{\frac{2 \cdot 0 + 1}{2} \frac{(0 - |0|)!}{(0 + |0|)!}} P_0^0(\cos \theta) \\ &= 1 \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

2. ($l = 1, m = 0$)

$$\begin{aligned} \Theta_{1,0}(\theta) &= (-1)^0 \sqrt{\frac{2 \cdot 1 + 1}{2} \frac{(1 - |0|)!}{(1 + |0|)!}} P_1^0(\cos \theta) \\ &= 1 \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1}} \cos \theta \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \cos \theta \end{aligned}$$

3. ($l = 1, m = 1$)

$$\begin{aligned} \Theta_{1,1}(\theta) &= (-1)^1 \sqrt{\frac{2 \cdot 1 + 1}{2} \frac{(1 - |1|)!}{(1 + |1|)!}} P_1^1(\cos \theta) \\ &= -1 \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}} \sin \theta \\ &= -\sqrt{\frac{3}{4}} \sin \theta \end{aligned}$$

4. ($l = 1, m = -1$)

$$\begin{aligned} \Theta_{1,-1}(\theta) &= (-1)^{-1} \sqrt{\frac{2 \cdot 1 + 1}{2} \frac{(1 - |-1|)!}{(1 + |-1|)!}} P_1^{-1}(\cos \theta) \\ &= 1 \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}} \sin \theta \\ &= \sqrt{\frac{3}{4}} \sin \theta \end{aligned}$$

5. ($l = 2, m = 0$)

$$\begin{aligned}
\Theta_{2,0}(\theta) &= (-1)^0 \sqrt{\frac{2 \cdot 2 + 1}{2} \frac{(2 - |0|)!}{(2 + |0|)!}} P_2^0(\cos \theta) \\
&= \sqrt{\frac{5}{2} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{2}} (3 \cos^2 \theta - 1) \\
&= \sqrt{\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{4}} (3 \cos^2 \theta - 1) \\
&= \sqrt{\frac{5}{8}} (3 \cos^2 \theta - 1)
\end{aligned}$$

6. ($l = 2, m = 1$)

$$\begin{aligned}
\Theta_{2,1}(\theta) &= (-1)^1 \sqrt{\frac{2 \cdot 2 + 1}{2} \frac{(2 - |1|)!}{(2 + |1|)!}} P_2^1(\cos \theta) \\
&= -1 \sqrt{\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{6}} 3 \sin \theta \cos \theta \\
&= -\sqrt{\frac{5}{12}} 3 \sin \theta \cos \theta \\
&= -\sqrt{\frac{45}{12}} \sin \theta \cos \theta \\
&= -\sqrt{\frac{15}{4}} \sin \theta \cos \theta
\end{aligned}$$

7. ($l = 2, m = -1$)

$$\begin{aligned}
\Theta_{2,-1}(\theta) &= (-1)^{-1} \sqrt{\frac{2 \cdot 2 + 1}{2} \frac{(2 - |-1|)!}{(2 + |-1|)!}} P_2^{-1}(\cos \theta) \\
&= \sqrt{\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{6}} 3 \sin \theta \cos \theta \\
&= \sqrt{\frac{5}{12}} 3 \sin \theta \cos \theta \\
&= \sqrt{\frac{45}{12}} \sin \theta \cos \theta \\
&= \sqrt{\frac{15}{4}} \sin \theta \cos \theta
\end{aligned}$$

8. ($l = 2, m = 2$)

$$\Theta_{2,2}(\theta) = (-1)^2 \sqrt{\frac{2 \cdot 2 + 1}{2} \frac{(2 - |2|)!}{(2 + |2|)!}} P_2^2(\cos \theta)$$

$$= \sqrt{\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{24}} 3(\sin^2 \theta)$$

$$= \sqrt{\frac{5}{48}} 3(\sin^2 \theta)$$

$$= \sqrt{\frac{45}{48}} \sin^2 \theta$$

$$= \sqrt{\frac{15}{16}} \sin^2 \theta$$

9. ($l = 2, m = -2$)

$$\Theta_{2,2}(\theta) = (-1)^{-2} \sqrt{\frac{2 \cdot 2 + 1}{2} \frac{(2 - |2|)!}{(2 + |2|)!}} P_{-2}^2(\cos \theta)$$

$$= \sqrt{\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{24}} 3(\sin^2 \theta)$$

$$= \sqrt{\frac{5}{48}} 3(\sin^2 \theta)$$

$$= \sqrt{\frac{45}{48}} \sin^2 \theta$$

$$= \sqrt{\frac{15}{16}} \sin^2 \theta$$

Lampiran 8. Perhitungan Fungsi Azimuth

Bentuk umum fungsi azimuth:

$$\Phi(\phi) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{\pm im\phi}$$

1. ($l = 0, m = 0$)

$$\begin{aligned}\Phi(\phi) &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{\pm im\phi} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{\pm i(0)\phi} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\end{aligned}$$

2. ($l = 1, m = 0$)

$$\begin{aligned}\Phi(\phi) &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{\pm im\phi} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{\pm i(0)\phi} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\end{aligned}$$

3. ($l = 1, m = 1$)

$$\begin{aligned}\Phi(\phi) &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{\pm im\phi} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i(1)\phi} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i\phi}\end{aligned}$$

4. ($l = 1, m = -1$)

$$\begin{aligned}\Phi(\phi) &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{\pm im\phi} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i(-1)\phi} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{-i\phi}\end{aligned}$$

5. ($l = 2, m = 0$)

$$\begin{aligned}\Phi(\phi) &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{\pm im\phi} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i(0)\phi} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\end{aligned}$$

6. ($l = 2, m = 1$)

$$\begin{aligned}\Phi(\phi) &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{\pm im\phi} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i(1)\phi} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i\phi}\end{aligned}$$

7. ($l = 2, m = -1$)

$$\begin{aligned}\Phi(\phi) &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{\pm im\phi} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i(-1)\phi} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{-i\phi}\end{aligned}$$

8. ($l = 2, m = 2$)

$$\begin{aligned}\Phi(\phi) &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{\pm im\phi} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i(2)\phi} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{2i\phi}\end{aligned}$$

9. ($l = 2, m = -2$)

$$\begin{aligned}\Phi(\phi) &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{\pm im\phi} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i(-2)\phi} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{-2i\phi}\end{aligned}$$

Lampiran 9. Perhitungan Fungsi Angular

Bentuk umum fungsi angular:

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \Theta_{lm}(\theta)\Phi(\phi)$$

1. ($l = 0, m = 0$)

$$\begin{aligned} Y_0^0(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

2. ($l = 1, m = 0$)

$$\begin{aligned} Y_1^0(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{3}{2}} \cos \theta \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \\ &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos \theta \end{aligned}$$

3. ($l = 1, m = 1$)

$$\begin{aligned} Y_1^1(\theta, \phi) &= -\sqrt{\frac{3}{4}} \sin \theta \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i\phi} \\ &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi} \end{aligned}$$

4. ($l = 1, m = -1$)

$$\begin{aligned} Y_{-1}^1(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{3}{4}} \sin \theta \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{-i\phi} \\ &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi} \end{aligned}$$

5. ($l = 2, m = 0$)

$$\begin{aligned} Y_2^0(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{5}{8}} (3 \cos^2 \theta - 1) \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \\ &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) \end{aligned}$$

6. ($l = 2, m = 1$)

$$\begin{aligned} Y_2^1(\theta, \phi) &= -\sqrt{\frac{15}{4}} \sin \theta \cos \theta \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i\phi} \\ &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi} \end{aligned}$$

7. ($l = 2, m = -1$)

$$\begin{aligned} Y_2^{-1}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{15}{4}} \sin \theta \cos \theta \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{-i\phi} \\ &= \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{-i\phi} \end{aligned}$$

8. ($l = 2, m = 2$)

$$\begin{aligned} Y_2^2(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{15}{16}} \sin^2 \theta \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{2i\phi} \\ &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi} \end{aligned}$$

9. ($l = 2, m = -2$)

$$\begin{aligned} Y_2^{-2}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{15}{16}} \sin^2 \theta \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{-2i\phi} \\ &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{-2i\phi} \end{aligned}$$

Lampiran 10. Perhitungan Fungsi Gelombang

Bentuk umum fungsi gelombang:

$$\varphi(p, \theta_p, \phi_p) = F_{n,l}(p)Y_{lm}(\theta_p, \phi_p)$$

1. (n = 1, l = 0, m = 0)

$$\begin{aligned}\varphi(p, \theta_p, \phi_p) &= F_{n,l}(p)Y_{lm}(\theta_p, \phi_p) \\ &= \frac{2^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(p^2+1)^2} \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \\ &= \frac{2^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(p^2+1)^2} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \\ &= \frac{2^{\frac{5}{2}}}{2\pi} \cdot \frac{1}{(p^2+1)^2}\end{aligned}$$

2. (n = 2, l = 0, m = 0)

$$\begin{aligned}\varphi(p, \theta_p, \phi_p) &= F_{n,l}(p)Y_{lm}(\theta_p, \phi_p) \\ &= \frac{32}{\sqrt{\pi}} \frac{(4p^2-1)}{(4p^2+1)^3} \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \\ &= \frac{32}{\sqrt{\pi}} \frac{(4p^2-1)}{(4p^2+1)^3} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \\ &= \frac{32}{2\pi} \frac{(4p^2-1)}{(4p^2+1)^3}\end{aligned}$$

3. (n = 2, l = 1, m = 0)

$$\begin{aligned}\varphi(p, \theta_p, \phi_p) &= F_{n,l}(p)Y_{lm}(\theta_p, \phi_p) \\ &= \frac{128}{\sqrt{3\pi}} \frac{p}{(4p^2+1)^3} \sqrt{\frac{3}{2}} \cos \theta \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \\ &= \frac{128}{\sqrt{3\pi}} \frac{p}{(4p^2+1)^3} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos \theta \\ &= \frac{128\sqrt{3}}{2\pi\sqrt{3}} \frac{p}{(4p^2+1)^3} \cos \theta\end{aligned}$$

4. (n = 2, l = 1, m = 1)

$$\begin{aligned}\varphi(p, \theta_p, \phi_p) &= F_{n,l}(p)Y_{lm}(\theta_p, \phi_p) \\ &= \frac{128}{\sqrt{3\pi}} \frac{p}{(4p^2+1)^3} \cdot -\sqrt{\frac{3}{4}} \sin \theta \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i\phi} \\ &= \frac{128}{\sqrt{3\pi}} \frac{p}{(4p^2+1)^3} \cdot -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{128\sqrt{3}}{\sqrt{24}\pi^2} \frac{p}{(4p^2+1)^3} \sin \theta e^{i\phi} \\
&= -\frac{128\sqrt{3}}{2\pi\sqrt{6}} \frac{p}{(4p^2+1)^3} \sin \theta e^{i\phi}
\end{aligned}$$

5. ($n = 2, l = 1, m = -1$)

$$\begin{aligned}
\varphi(p, \theta_p, \phi_p) &= F_{n,l}(p) Y_{lm}(\theta_p, \phi_p) \\
&= \frac{128}{\sqrt{3}\pi} \frac{p}{(4p^2+1)^3} \sqrt{\frac{3}{4}} \sin \theta \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{-i\phi} \\
&= \frac{128}{\sqrt{3}\pi} \frac{p}{(4p^2+1)^3} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi} \\
&= \frac{128\sqrt{3}}{2\pi\sqrt{6}} \frac{p}{(4p^2+1)^3} \sin \theta e^{-i\phi}
\end{aligned}$$

6. ($n = 3, l = 0, m = 0$)

$$\begin{aligned}
\varphi(p, \theta_p, \phi_p) &= F_{n,l}(p) Y_{lm}(\theta_p, \phi_p) \\
&= \frac{108\sqrt{2}}{\sqrt{3}\pi} \frac{(81p^4-30p^2+1)}{(9p^2+1)^4} \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \\
&= \frac{108\sqrt{2}}{\sqrt{3}\pi} \frac{(81p^4-30p^2+1)}{(9p^2+1)^4} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \\
&= \frac{108\sqrt{2}}{2\pi\sqrt{3}} \frac{(81p^4-30p^2+1)}{(9p^2+1)^4}
\end{aligned}$$

7. ($n = 3, l = 1, m = 0$)

$$\begin{aligned}
\varphi(p, \theta_p, \phi_p) &= F_{n,l}(p) Y_{lm}(\theta_p, \phi_p) \\
&= \frac{864}{\sqrt{3}\pi} \frac{p(9p^2-1)}{(9p^2+1)^4} \sqrt{\frac{3}{2}} \cos \theta \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \\
&= \frac{864}{\sqrt{3}\pi} \frac{p(9p^2-1)}{(9p^2+1)^4} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos \theta \\
&= \frac{864\sqrt{3}}{2\pi\sqrt{3}} \frac{p(9p^2-1)}{(9p^2+1)^4} \cos \theta
\end{aligned}$$

8. ($n = 3, l = 1, m = 1$)

$$\begin{aligned}
\varphi(p, \theta_p, \phi_p) &= F_{n,l}(p) Y_{lm}(\theta_p, \phi_p) \\
&= \frac{864}{\sqrt{3}\pi} \frac{p(9p^2-1)}{(9p^2+1)^4} \cdot -\sqrt{\frac{3}{4}} \sin \theta \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i\phi} \\
&= -\frac{864}{\sqrt{3}\pi} \frac{p(9p^2-1)}{(9p^2+1)^4} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}
\end{aligned}$$

$$= -\frac{864\sqrt{3}}{2\pi\sqrt{6}} \frac{p(9p^2-1)}{(9p^2+1)^4} \sin \theta e^{i\phi}$$

9. ($n = 3, l = 1, m = -1$)

$$\begin{aligned} \varphi(p, \theta_p, \phi_p) &= F_{n,l}(p) Y_{lm}(\theta_p, \phi_p) \\ &= \frac{864}{\sqrt{3\pi}} \frac{p(9p^2-1)}{(9p^2+1)^4} \sqrt{\frac{3}{4}} \sin \theta \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{-i\phi} \\ &= \frac{864}{\sqrt{3\pi}} \frac{p(9p^2-1)}{(9p^2+1)^4} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi} \\ &= \frac{864\sqrt{3}}{2\pi\sqrt{6}} \frac{p(9p^2-1)}{(9p^2+1)^4} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi} \end{aligned}$$

10. ($n = 3, l = 2, m = 0$)

$$\begin{aligned} \varphi(p, \theta_p, \phi_p) &= F_{n,l}(p) Y_{lm}(\theta_p, \phi_p) \\ &= \frac{5184}{\sqrt{15\pi}} \frac{p^2}{(9p^2+1)^4} \sqrt{\frac{5}{8}} (3 \cos^2 \theta - 1) \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \\ &= \frac{5184}{\sqrt{15\pi}} \frac{p^2}{(9p^2+1)^4} \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) \\ &= \frac{5184\sqrt{5}}{4\pi\sqrt{15}} \frac{p^2}{(9p^2+1)^4} (3 \cos^2 \theta - 1) \end{aligned}$$

11. ($n = 3, l = 2, m = 1$)

$$\begin{aligned} \varphi(p, \theta_p, \phi_p) &= F_{n,l}(p) Y_{lm}(\theta_p, \phi_p) \\ &= \frac{5184}{\sqrt{15\pi}} \frac{p^2}{(9p^2+1)^4} \cdot -\sqrt{\frac{15}{4}} \sin \theta \cos \theta \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i\phi} \\ &= -\frac{5184}{\sqrt{15\pi}} \frac{p^2}{(9p^2+1)^4} \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi} \\ &= -\frac{5184\sqrt{15}}{2\pi\sqrt{30}} \frac{p^2}{(9p^2+1)^4} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi} \end{aligned}$$

12. ($n = 3, l = 2, m = -1$)

$$\begin{aligned} \varphi(p, \theta_p, \phi_p) &= F_{n,l}(p) Y_{lm}(\theta_p, \phi_p) \\ &= \frac{5184}{\sqrt{15\pi}} \frac{p^2}{(9p^2+1)^4} \sqrt{\frac{15}{4}} \sin \theta \cos \theta \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{-i\phi} \\ &= \frac{5184}{\sqrt{15\pi}} \frac{p^2}{(9p^2+1)^4} \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{-i\phi} \\ &= \frac{5184\sqrt{15}}{2\pi\sqrt{30}} \frac{p^2}{(9p^2+1)^4} \sin \theta \cos \theta e^{-i\phi} \end{aligned}$$

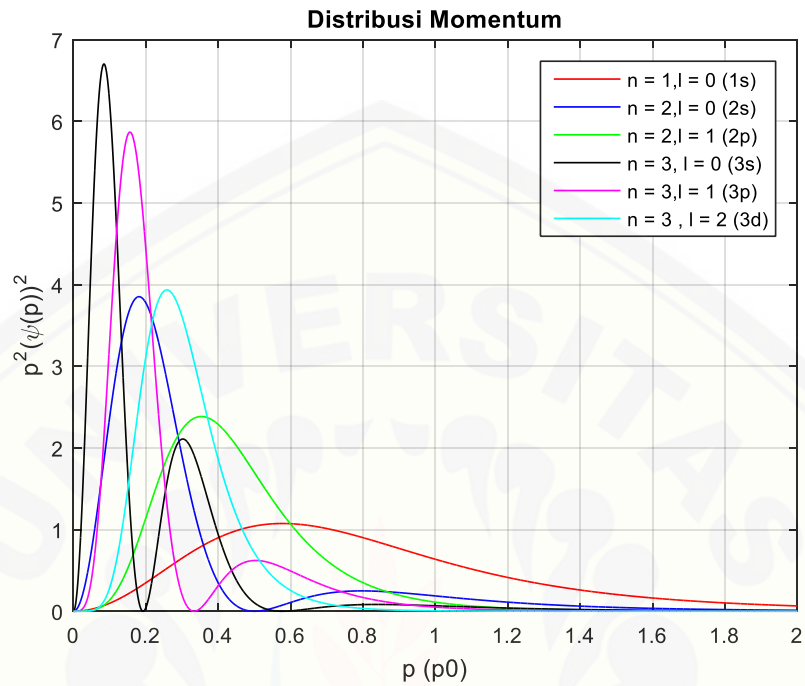
13. ($n = 3, l = 2, m = 2$)

$$\begin{aligned}\varphi(p, \theta_p, \phi_p) &= F_{n,l}(p)Y_{lm}(\theta_p, \phi_p) \\ &= \frac{5184}{\sqrt{15\pi}} \frac{p^2}{(9p^2+1)^4} \sqrt{\frac{15}{16}} \sin^2 \theta \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{2i\phi} \\ &= \frac{5184}{\sqrt{15\pi}} \frac{p^2}{(9p^2+1)^4} \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi} \\ &= \frac{5184\sqrt{15}}{4\pi\sqrt{30}} \frac{p^2}{(9p^2+1)^4} \sin^2 \theta e^{2i\phi}\end{aligned}$$

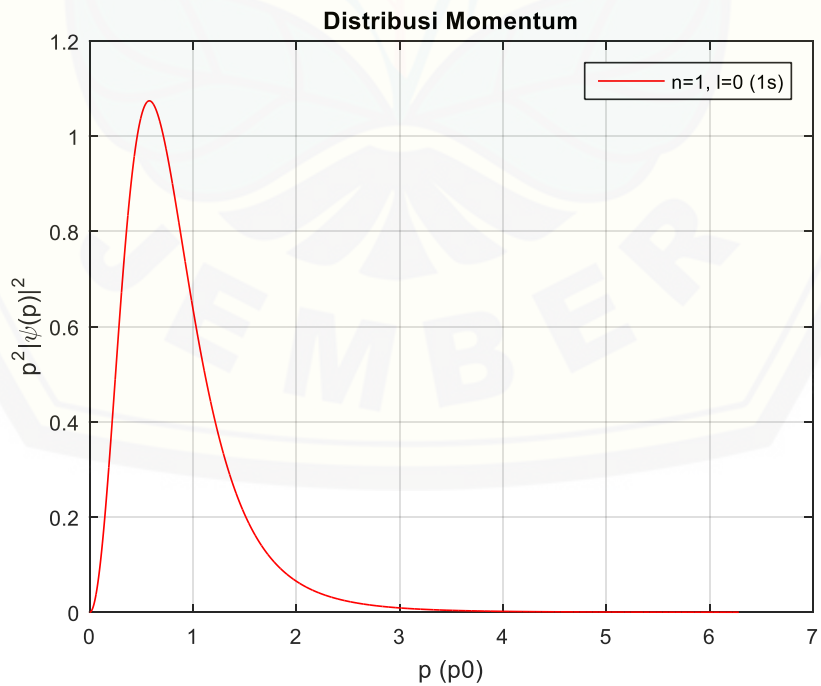
14. ($n = 3, l = 2, m = -2$)

$$\begin{aligned}\varphi(p, \theta_p, \phi_p) &= F_{n,l}(p)Y_{lm}(\theta_p, \phi_p) \\ &= \frac{5184}{\sqrt{15\pi}} \frac{p^2}{(9p^2+1)^4} \sqrt{\frac{15}{16}} \sin^2 \theta \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{-2i\phi} \\ &= \frac{5184}{\sqrt{15\pi}} \frac{p^2}{(9p^2+1)^4} \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{-2i\phi} \\ &= \frac{5184\sqrt{15}}{4\pi\sqrt{30}} \frac{p^2}{(9p^2+1)^4} \sin^2 \theta e^{-2i\phi}\end{aligned}$$

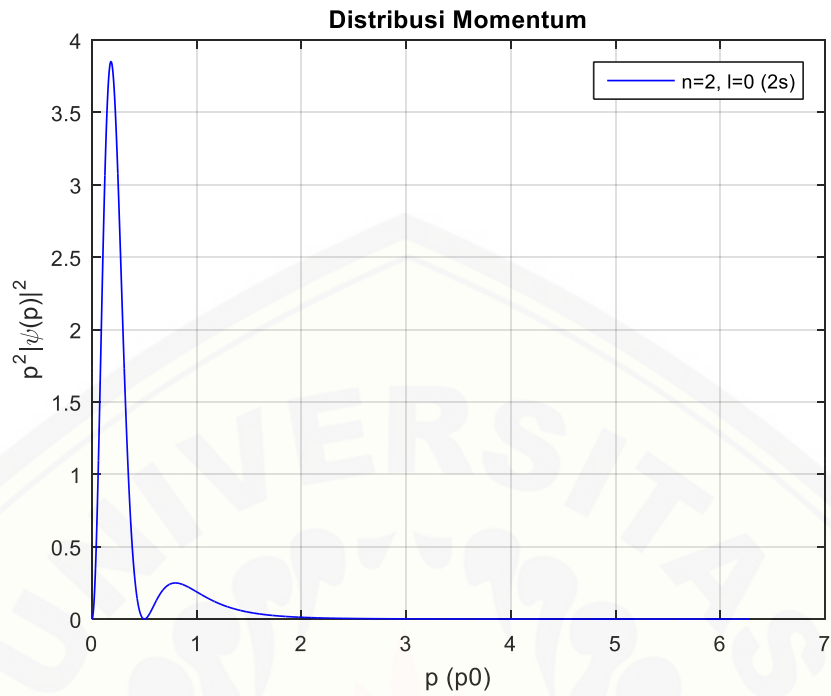
Lampiran 11. Grafik Distribusi Radial Momentum Ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$) pada bilangan kuantum $n \leq 3$



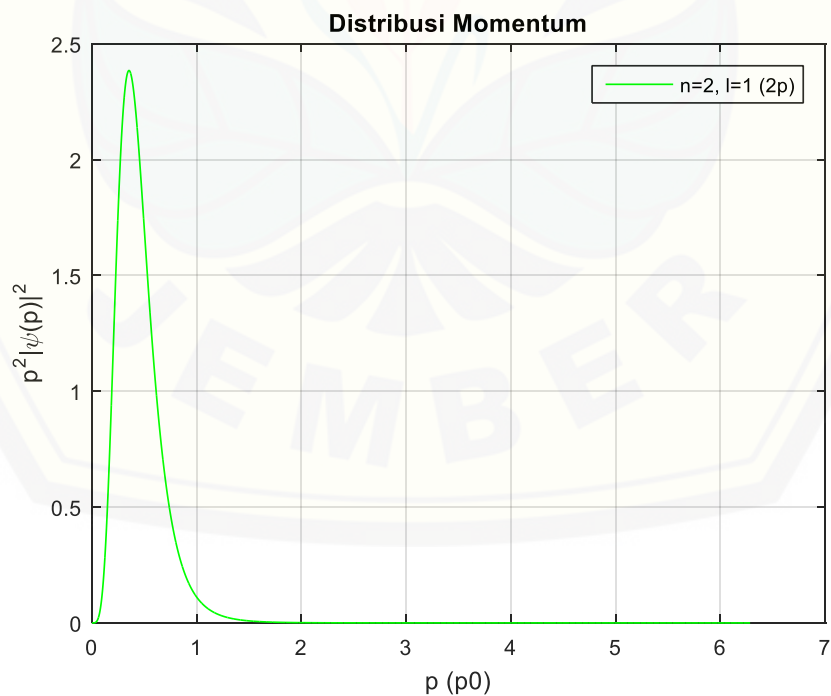
Gambar 1. Hasil Gabungan Grafik Distribusi Radial Momentum Ion Helium (${}^4_2\text{He}^+$) pada bilangan kuantum $n \leq 3$



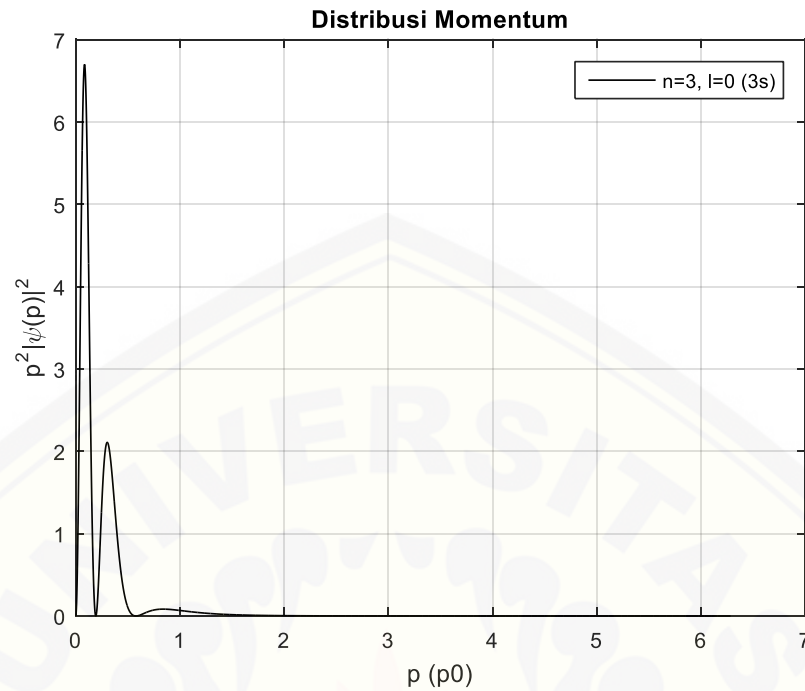
Gambar 2. Hasil Grafik Distribusi Radial Momentum untuk $n = 1, l = 0$



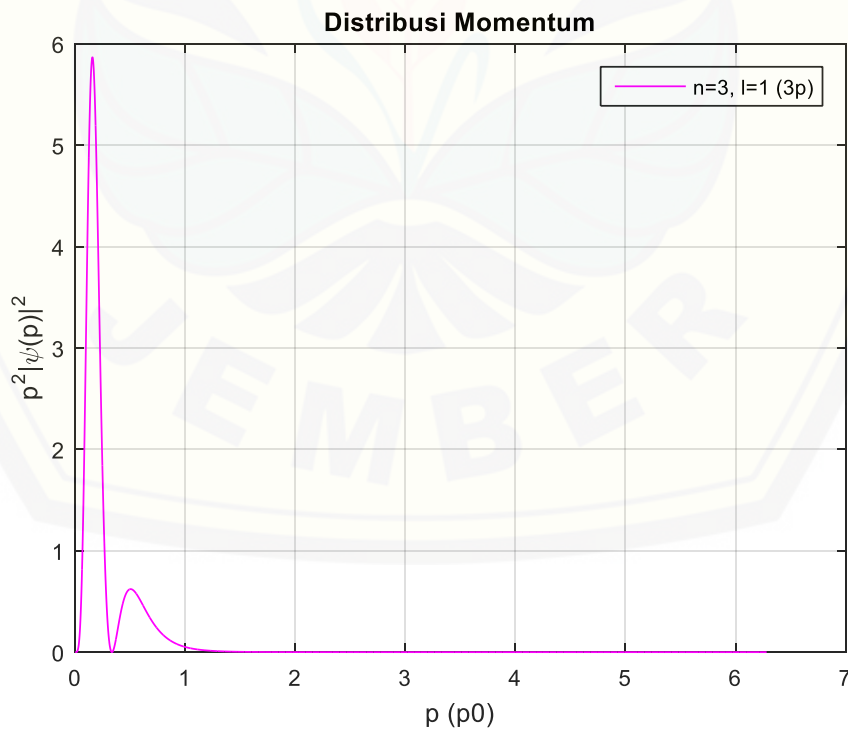
Gambar 3. Hasil Grafik Distribusi Radial Momentum untuk $n = 2, l = 0$



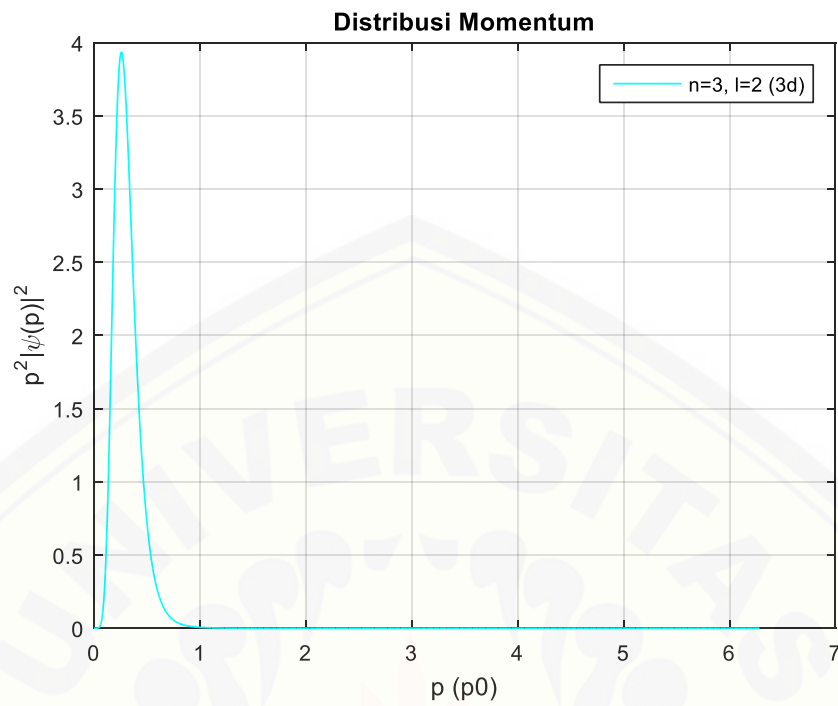
Gambar 4. Hasil Grafik Distribusi Radial Momentum untuk $n = 2, l = 1$



Gambar 5. Hasil Grafik Distribusi Radial Momentum untuk $n = 3, l = 0$

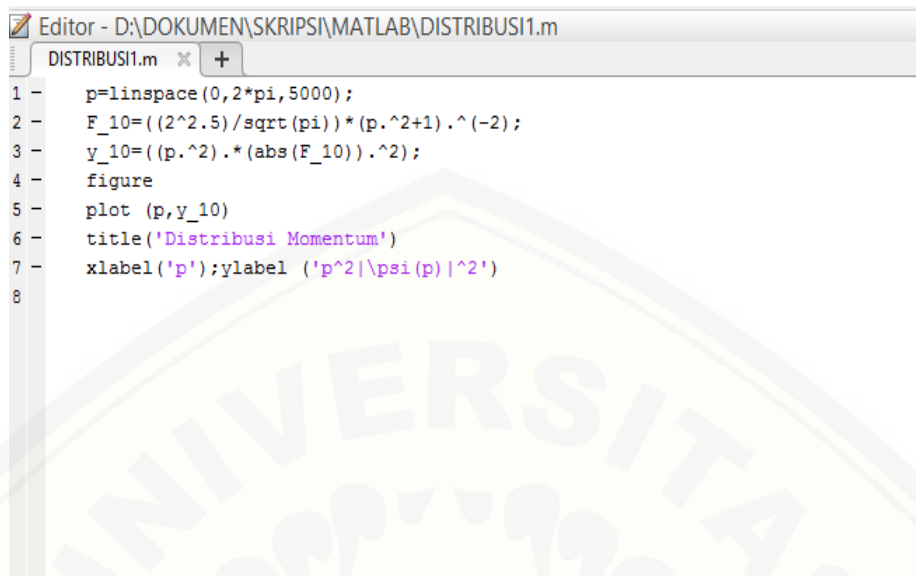


Gambar 6. Hasil Grafik Distribusi Radial Momentum untuk $n = 3, l = 1$



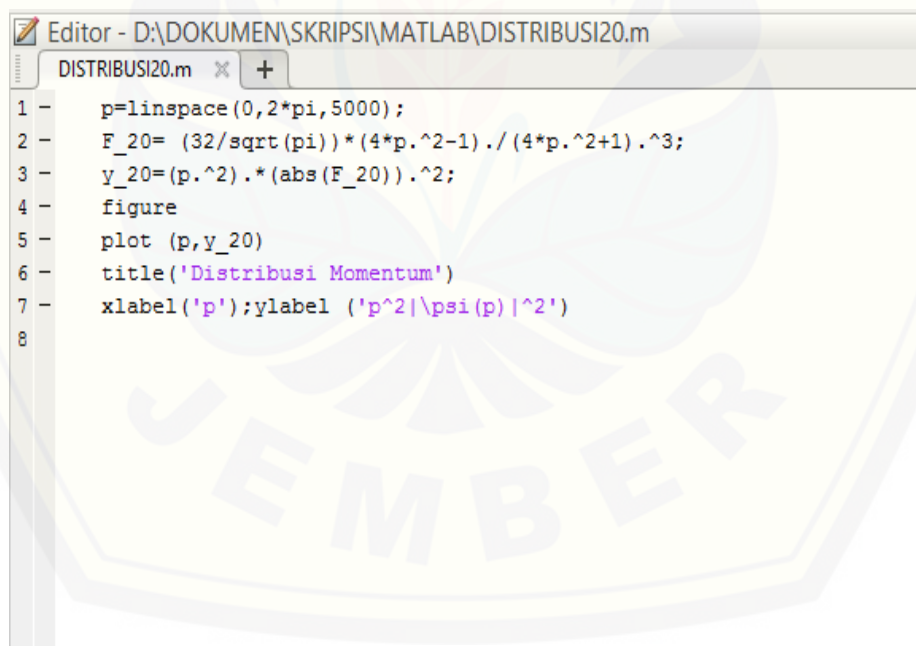
Gambar 7. Hasil Grafik Distribusi Radial Momentum untuk $n = 3, l = 2$

Lampiran 12. Screenshoot Pemrograman MATLAB



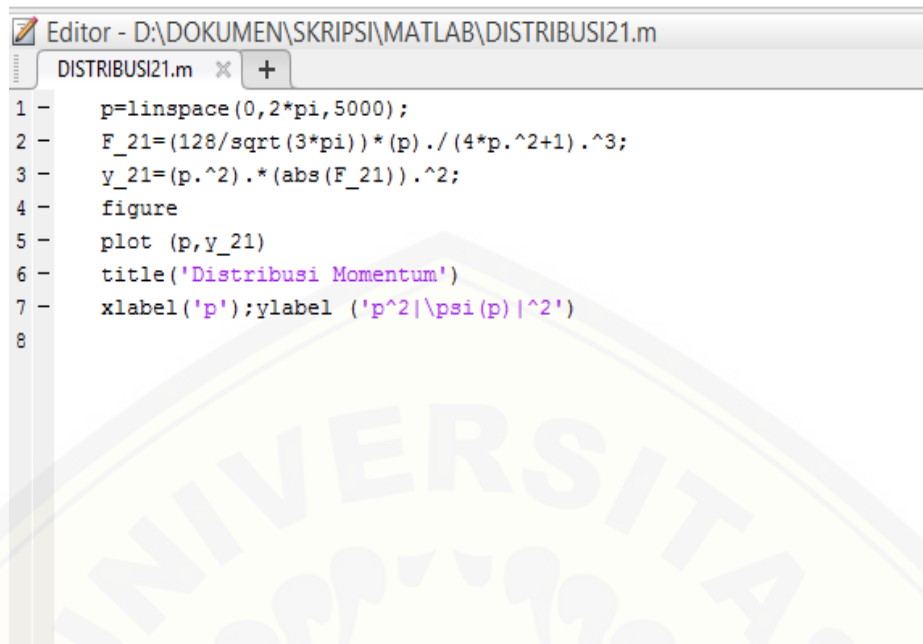
```
Editor - D:\DOKUMEN\SKRIPSI\MATLAB\DISTRIBUSI1.m
DISTRIBUSI1.m x +
1 - p=linspace(0,2*pi,5000);
2 - F_10=((2^2.5)/sqrt(pi))*(p.^2+1).^(-2);
3 - y_10=(p.^2).*(abs(F_10)).^2;
4 - figure
5 - plot (p,y_10)
6 - title('Distribusi Momentum')
7 - xlabel('p');ylabel ('p^2|\psi(p)|^2')
8
```

Gambar 1. Tampilan M-File untuk membuat Grafik Distribusi Radial Momentum untuk $n = 1, l = 0$



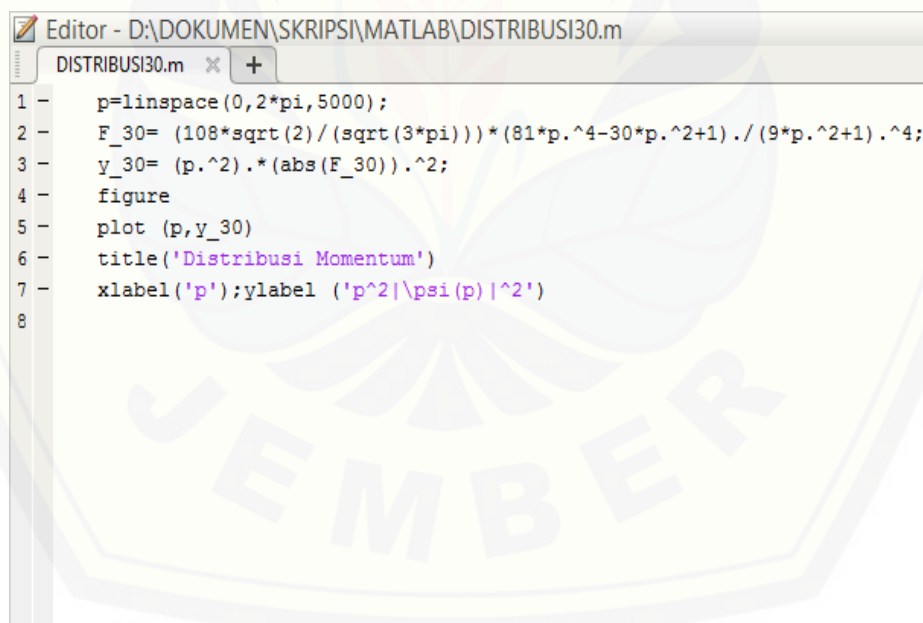
```
Editor - D:\DOKUMEN\SKRIPSI\MATLAB\DISTRIBUSI20.m
DISTRIBUSI20.m x +
1 - p=linspace(0,2*pi,5000);
2 - F_20= (32/sqrt(pi))*(4*p.^2-1)./(4*p.^2+1).^3;
3 - y_20=(p.^2).*(abs(F_20)).^2;
4 - figure
5 - plot (p,y_20)
6 - title('Distribusi Momentum')
7 - xlabel('p');ylabel ('p^2|\psi(p)|^2')
8
```

Gambar 2. Tampilan M-File untuk membuat Grafik Distribusi Radial Momentum untuk $n = 2, l = 0$



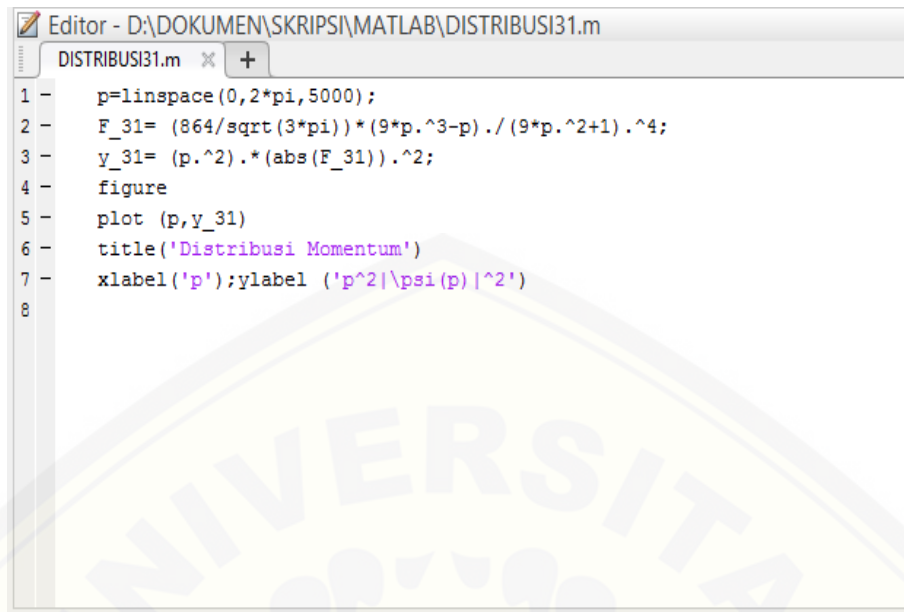
```
Editor - D:\DOKUMEN\SKRIPSI\MATLAB\DISTRIBUSI21.m
DISTRIBUSI21.m x +
1 - p=linspace(0,2*pi,5000);
2 - F_21=(128/sqrt(3*pi))*(p)/(4*p.^2+1).^3;
3 - y_21=(p.^2).*(abs(F_21)).^2;
4 - figure
5 - plot(p,y_21)
6 - title('Distribusi Momentum')
7 - xlabel('p');ylabel('p^2|\psi(p)|^2')
8
```

Gambar 3. Tampilan M-File untuk membuat Grafik Distribusi Radial Momentum untuk $n = 2, l = 1$



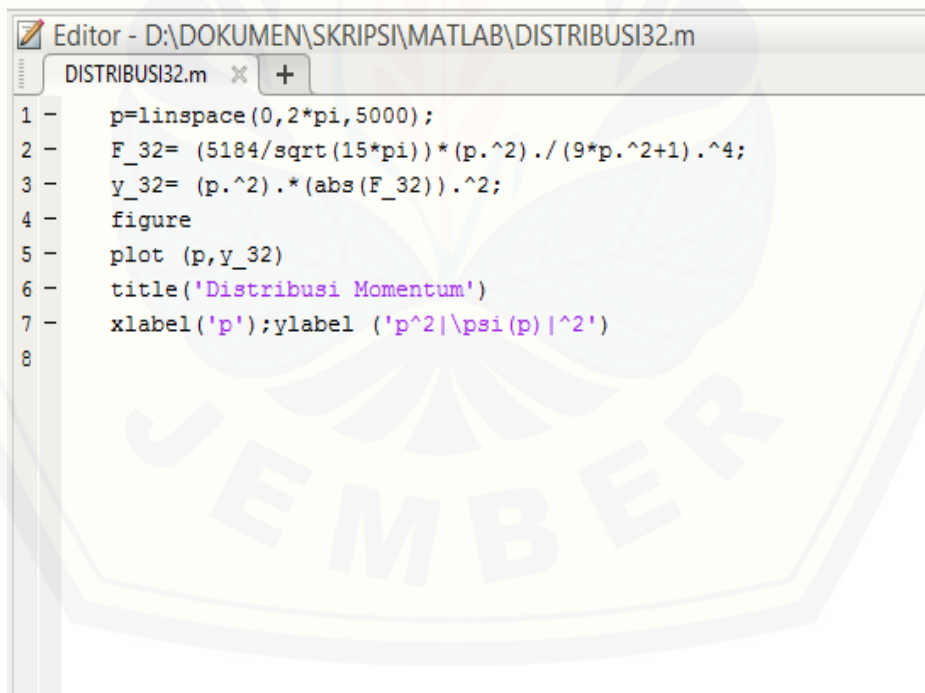
```
Editor - D:\DOKUMEN\SKRIPSI\MATLAB\DISTRIBUSI30.m
DISTRIBUSI30.m x +
1 - p=linspace(0,2*pi,5000);
2 - F_30=(108*sqrt(2)/(sqrt(3*pi)))*(81*p.^4-30*p.^2+1)/(9*p.^2+1).^4;
3 - y_30=(p.^2).*(abs(F_30)).^2;
4 - figure
5 - plot(p,y_30)
6 - title('Distribusi Momentum')
7 - xlabel('p');ylabel('p^2|\psi(p)|^2')
8
```

Gambar 4. Tampilan M-File untuk membuat Grafik Distribusi Radial Momentum untuk $n = 3, l = 0$



```
Editor - D:\DOKUMEN\SKRIPSI\MATLAB\DISTRIBUSI31.m
DISTRIBUSI31.m x +
1 - p=linspace(0,2*pi,5000);
2 - F_31= (864/sqrt(3*pi))*(9*p.^3-p)/(9*p.^2+1).^4;
3 - y_31= (p.^2).*(abs(F_31)).^2;
4 - figure
5 - plot (p,y_31)
6 - title('Distribusi Momentum')
7 - xlabel('p');ylabel ('p^2|\psi(p)|^2')
8
```

Gambar 5. Tampilan M-File untuk membuat Grafik Distribusi Radial Momentum untuk $n = 3, l = 1$



```
Editor - D:\DOKUMEN\SKRIPSI\MATLAB\DISTRIBUSI32.m
DISTRIBUSI32.m x +
1 - p=linspace(0,2*pi,5000);
2 - F_32= (5184/sqrt(15*pi))*(p.^2)/(9*p.^2+1).^4;
3 - y_32= (p.^2).*(abs(F_32)).^2;
4 - figure
5 - plot (p,y_32)
6 - title('Distribusi Momentum')
7 - xlabel('p');ylabel ('p^2|\psi(p)|^2')
8
```

Gambar 6. Tampilan M-File untuk membuat Grafik Distribusi Radial Momentum untuk $n = 3, l = 2$

```
Editor - D:\DOKUMEN\SKRIPSI\MATLAB\GABUNGANDISTRIBUSI.m
GABUNGANDISTRIBUSI.m x +
1 - p=linspace(0,2,5000);
2 - F_10=(2^2.5)/sqrt(pi)*(p.^2+1).^(-2);
3 - F_20=(32/sqrt(pi))*(4*p.^2-1)/(4*p.^2+1).^3;
4 - F_21=(128/sqrt(3*pi))*(p)/(4*p.^2+1).^3;
5 - F_30=(108*sqrt(2)/(sqrt(3*pi)))*(81*p.^4-30*p.^2+1)/(9*p.^2+1).^4;
6 - F_31=(864/sqrt(3*pi))*(9*p.^3-p)/(9*p.^2+1).^4;
7 - F_32=(5184/sqrt(15*pi))*(p.^2)/(9*p.^2+1).^4;
8 - y_10=(p.^2).*(abs(F_10)).^2;
9 - y_20=(p.^2).*(abs(F_20)).^2;
10 - y_21=(p.^2).*(abs(F_21)).^2;
11 - y_30=(p.^2).*(abs(F_30)).^2;
12 - y_31=(p.^2).*(abs(F_31)).^2;
13 - y_32=(p.^2).*(abs(F_32)).^2;
14 - sum(y_10);sum(y_20);sum(y_21);sum(y_30);sum(y_31);sum(y_32)
15 - figure
16 - plot(p,y_10,'-r',p,y_20,'b',p,y_21,'-g',p,y_30,'-y',p,y_31,'-m',p,y_32,'-c');
17 - title('Distribusi Momentum')
18 - xlabel('p');ylabel('p^2|\psi(p)|^2')
19 - legend('n = 1, l = 0 (1s)', 'n = 2, l = 0 (2s)', 'n = 2, l = 1 (2p)', 'n = 3, l = 0 (3s)', 'n = 3, l = 1 (3p)')
20
```

Gambar 7. Tampilan M-File untuk membuat Grafik Gabungan Distribusi Radial Momentum untuk $n = 1,2,3$