



**KETIDAKPASTIAN MOMENTUM ATOM DEUTERIUM (2_1H) DENGAN
MENGUNAKAN PENDEKATAN KETIDAKPASTIAN HEISENBERG
PADA BILANGAN KUANTUM $n \leq 3$**

SKRIPSI

Oleh

Bagus Hadi Saputra

NIM. 160210102025

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN FISIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MIPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER
2019**



**KETIDAKPASTIAN MOMENTUM ATOM DEUTERIUM (2_1H) DENGAN
MENGUNAKAN PENDEKATAN KETIDAKPASTIAN HEISENBERG
PADA BILANGAN KUANTUM $n \leq 3$**

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Pendidikan Fisika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Pendidikan

Oleh

Bagus Hadi Saputra

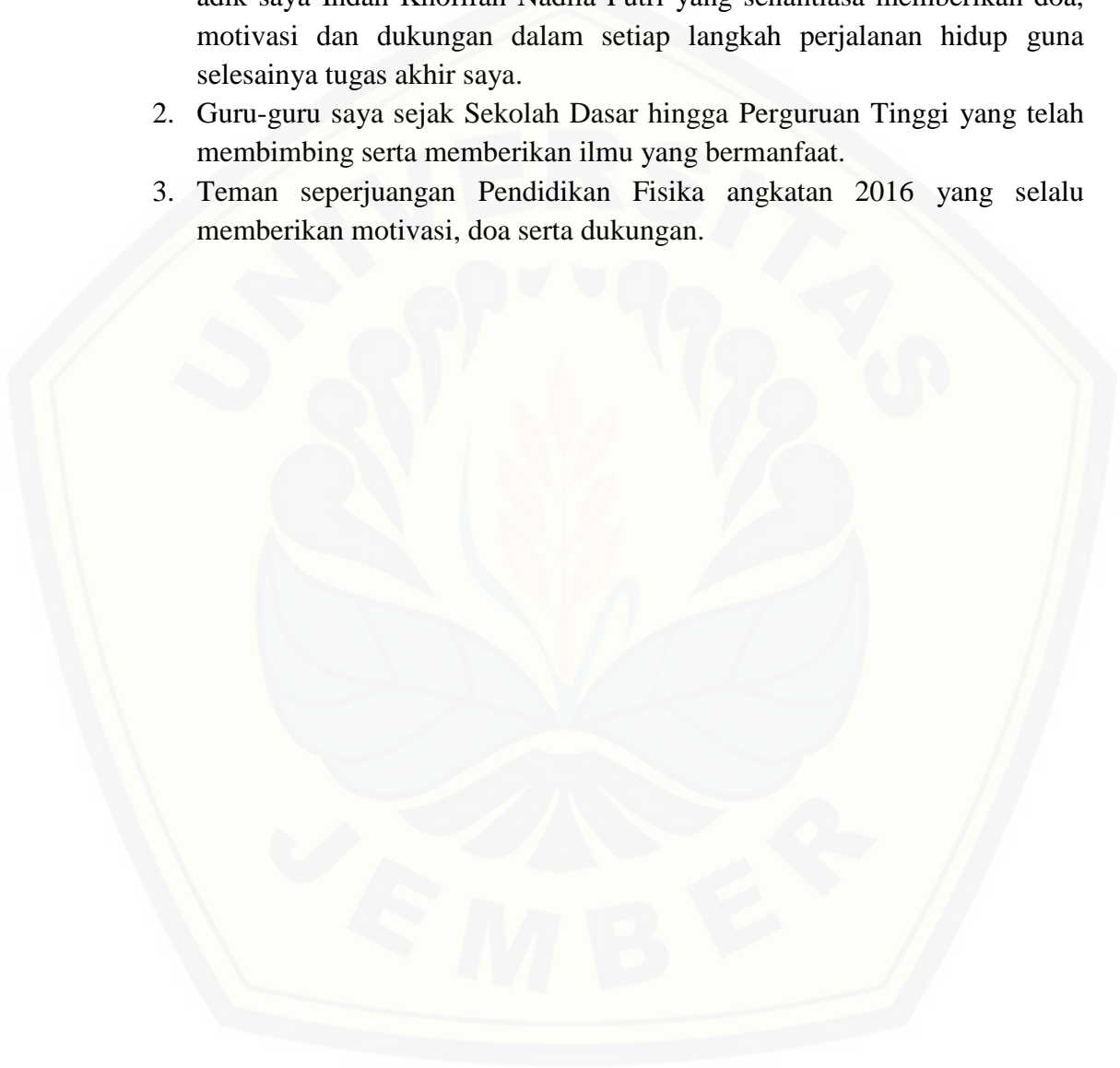
NIM. 160210102025

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN FISIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MIPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER
2019**

HALAMAN PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan untuk:

1. Kedua orang tua saya Drs. Hadi Sucipto dan Evi Ayati Ulinuha, serta adik saya Indah Khofifah Nadila Putri yang senantiasa memberikan doa, motivasi dan dukungan dalam setiap langkah perjalanan hidup guna selesainya tugas akhir saya.
2. Guru-guru saya sejak Sekolah Dasar hingga Perguruan Tinggi yang telah membimbing serta memberikan ilmu yang bermanfaat.
3. Teman seperjuangan Pendidikan Fisika angkatan 2016 yang selalu memberikan motivasi, doa serta dukungan.



HALAMAN MOTTO

Sesungguhnya Allah tidak akan mengubah keadaan suatu kaum sebelum mereka mengubah keadaan mereka sendiri.¹



¹ Departemen Agama Republik Indonesia. 2016. *Al-Qur'an dan Terjemahnya Special for Woman*. Bandung: PT Sigma Examedia Arkanleema

HALAMAN PERNYATAAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama : Bagus Hadi Saputra

NIM : 160210102025

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi berjudul “**Ketidakpastian Momentum Atom Deuterium (2_1H) dengan Menggunakan Pendekatan Ketidakpastian Heisenberg pada Bilangan Kuantum $n \leq 3$** ” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada instansi mana pun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus di junjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenar-benarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 15 September 2019
Yang Menyatakan,

Bagus Hadi Saputra
NIM. 160210102025

HALAMAN PEMBIMBING

**KETIDAKPASTIAN MOMENTUM ATOM DEUTERIUM (2_1H) DENGAN
MENGUNAKAN PENDEKATAN KETIDAKPASTIAN HEISENBERG
PADA BILANGAN KUANTUM $n \leq 3$**

SKRIPSI

Oleh:

Bagus Hadi Saputra

NIM 160210102025

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Drs. Bambang Supriadi, M.Sc

Dosen Pembimbing Anggota : Dr. Sri Handono B.P., M.Si

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN FISIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MIPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER
2019**

HALAMAN PENGAJUAN

**KETIDAKPASTIAN MOMENTUM ATOM DEUTERIUM (2_1H) DENGAN
MENGUNAKAN PENDEKATAN KETIDAKPASTIAN HEISENBERG
PADA BILANGAN KUANTUM $n \leq 3$**

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Pendidikan Fisika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Pendidikan

Oleh

Nama : Bagus Hadi Saputra
NIM : 160210102025
Tempat dan Tanggal Lahir : Jember, 26 Oktober 1997
Jurusan/ Program : Pendidikan MIPA/ P. Fisika

Disetujui oleh,

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Drs. Bambang Supriadi, M.Sc.
NIP. 19680710 199302 1 001

Dr. Sri Handono B.P., M.Si.
NIP. 19580318 198503 1 004

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi berjudul “**Ketidakpastian Momentum Atom Deuterium (2_1H) dengan Menggunakan Pendekatan Ketidakpastian Heisenberg pada Bilangan Kuantum $n \leq 3$** ” telah diuji dan disahkan pada:

Hari, Tanggal:

Tempat:

Tim Penguji

Ketua,

Sekretaris,

Drs. Bambang Supriadi, M.Sc.
NIP. 19680710 199302 1 001
Anggota I

Dr. Sri Handono B.P., M.Si.
NIP. 19580318 198503 1 004
Anggota II

Dr. Yushardi, S.Si., M.Si.
NIP. 196504020 199512 1 001

Dr. Agus Abdul Gani, M.Si.
NIP. 19570801 198403 1 004

Mengesahkan

Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pengetahuan

Universitas Jember,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D.
NIP 19680802 199303 1 004

RINGKASAN

Ketidakpastian Momentum Atom Deuterium (2_1H) dengan Menggunakan Pendekatan Ketidakpastian Heisenberg pada Bilangan Kuantum $n \leq 3$; Bagus Hadi Saputra, 160210102025; 2019; 66 Halaman; Program Studi Pendidikan Fisika Jurusan Pendidikan MIPA Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Atom deuterium disimbolkan dengan (2_1H) merupakan isotop atom Hidrogen dengan komponen penyusun atomnya terdiri dari sebuah proton, elektron dan neutron. Aplikasi atom ini dapat digunakan sebagai bahan pembuatan air sadah dan penentuan genesis air tanah. Dalam mekanika kuantum persamaan yang digunakan untuk menyatakan elektron atau partikel mikroskopis dalam keadaan non-relativistik dapat dijelaskan dengan persamaan Schrodinger. Fungsi persamaan Schrodinger merupakan solusi dari persamaan Schrodinger. Persamaan Schrodinger banyak digunakan pada atom – atom yang sifatnya hidrogenik. Salah satu atom yang sifatnya Hidrogenik adalah atom Deuterium atau isotop Hidrogen.

Fungsi gelombang pada atom Deuterium sama seperti fungsi gelombang pada atom Hidrogen yang terdiri dari dua fungsi gelombang, yakni fungsi gelombang radial dan fungsi gelombang angular. Namun dalam penelitian ini, untuk persamaan – persamaan probabilitas dan ekspektasi pada atom Deuterium tidak bergantung pada fungsi sudut atau fungsi angular (fungsi polar dan azimuth) namun hanya bergantung pada fungsi gelombang radial, sehingga hanya difokuskan pada fungsi gelombang radialnya. Selain meninjau mengenai karakteristik dari probabilitas posisi dan ekspektasi posisi pada atom deuterium, juga meninjau ketidakpastian momentum radialnya dengan menggunakan pendekatan ketidakpastian Heisenberg.

Jenis penelitian ini adalah penelitian non eksperimen pada bidang fisika teori berupa pengembangan teori fisika modern. Teori fisika yang dikembangkan adalah masalah atom berelektron tunggal dengan pendekatan persamaan Schrödinger. Dalam penelitian ini bertujuan untuk menghitung peluang

kebolehjadian (probabilitas) partikel berada pada jarak tertentu dalam suatu ruang pada atom, menghitung nilai ekspektasi terhadap posisi untuk mengetahui seberapa sering elektron dapat muncul, dan mengetahui ketidakpastian momentum radial atom Deuterium (2_1H) dengan menggunakan pendekatan ketidakpastian Heisenberg pada bilangan kuantum $n \leq 3$. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah non eksperimen atau kajian literatur mengenai atom hidrogenik. Sedangkan perhitungan yang digunakan yakni perhitungan secara analitik menggunakan pendekatan persamaan Schrodinger dan secara numerik menggunakan aplikasi MATLAB R2014a.

Hasil yang diperoleh dalam penelitian ini yaitu bahwa integral dari nilai absolute fungsi radial merepresentasikan probabilitas elektron dalam atom. Semakin besar untuk bilangan kuantum utama (n) mengakibatkan nilai probabilitas yang semakin kecil. Serta semakin jauh nilai r (posisi elektron) dari inti ternyata semakin kecil probabilitasnya. Grafik distribusi probabilitas radial bergantung pada bilangan kuantum utama (n) dan bilangan kuantum azimut (l). Dan untuk nilai ekspektasi yang semakin kecil ketika bilangan kuantum semakin besar, serta sebaliknya untuk bilangan kuantum yang semakin besar berarti elektron semakin jarang dijumpai dan bahkan tidak ada. Sedangkan untuk hasil nilai ketidakpastian momentumnya bergantung pada bilangan kuantum utama (n) dan bilangan kuantum azimuth (l), serta jarak elektron dari inti atom (r), maka diperoleh bahwa Semakin meningkat jarak elektron dari inti atom (r) pada bilangan kuantum utama dan azimuth yang sama, sehingga akan menghasilkan kenaikan simultan dalam ketidakpastian posisi radial serta menghasilkan penurunan simultan dalam ketidakpastian momentum radial, sehingga semakin kecil ketidakpastian (semakin besar kepastian) dalam mengukur posisi yang tepat, maka semakin tidak akurat momentum partikelnya. Berdasarkan grafik distribusi ketidakpastian momentum yang dihasilkan pada bilangan kuantum $n \leq 3$ untuk masing masing keadaan dari hasil simulasi, dapat direpresentasikan bahwa grafik tersebut merupakan grafik fungsi eksponensial katagori superkonduktor tipe 2 dengan dua titik medan magnet kritis yang merepresentasikan karakteristik sumikonduktifitasnya pada masing – masing keadaan.

PRAKATA

Puji Syukur kehadirat Allah Swt, atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Ketidakpastian Momentum Atom Deuterium (2_1H) dengan Menggunakan Pendekatan Ketidakpastian Heisenberg pada Bilangan Kuantum $n \leq 3$ ”. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Program Studi Pendidikan Fisika Jurusan Pendidikan MIPA Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Penyusunan ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyatakan terimakasih kepada:

1. Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D., selaku Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember yang telah memberikan fasilitas sehingga skripsi ini dapat selesai;
2. Dr. Dwi Wahyuni, M.Kes, selaku Ketua Jurusan Pendidikan MIPA yang telah memberikan fasilitas sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini;
3. Drs. Bambang Supriadi, M.Sc, selaku Kepala Program Studi Pendidikan Fisika yang telah memberikan fasilitas sehingga skripsi ini dapat selesai;
4. Drs. Alex Harijanto, M.Si, selaku Kepala Laboratorium Pendidikan Fisika yang telah memberikan fasilitas sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini;
5. Dr. Sri Handono B.P., M.Si, selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah membimbing penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini dengan tepat waktu;
6. Drs. Bambang Supriadi, M.Sc, selaku Dosen Pembimbing Utama yang telah membimbing penulis dalam segala aspek sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini;
7. Dr. Sri Handono B.P., M.Si, selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan segala waktu, pikiran, dan perhatian dalam membantu penulisan skripsi ini;

8. Dr. Yushardi, S.Si, M.Si, selaku Dosen Penguji Utama yang telah meluangkan waktu untuk memberikan saran dan kritik yang membangun demi kesempurnaan skripsi ini;
9. Dr. Agus Abdul Gani, M.Si, selaku Dosen Penguji Anggota yang telah membimbing, memberikan saran dan kritik yang membangun demi kesempurnaan skripsi ini;
10. Ibu, Bapak, Adik, Kakek, Nenek, dan Tiara yang selalu memberikan do'a, semangat, dukungan, serta banyak membantu dan membimbing dalam mengerjakan penelitian fisika kuantum ini;
11. Keluarga Pendidikan Fisika angkatan 2016 yang selalu memberikan motivasi;
12. Serta pihak-pihak lain yang tidak dapat disebutkan satu – persatu yang telah memberikan kontribusi dan bantuannya demi kelancaran pengerjaan skripsi ini.

Kritik dan saran sangat penulis harapkan demi kebaikan dan kesempurnaan skripsi ini, semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat.

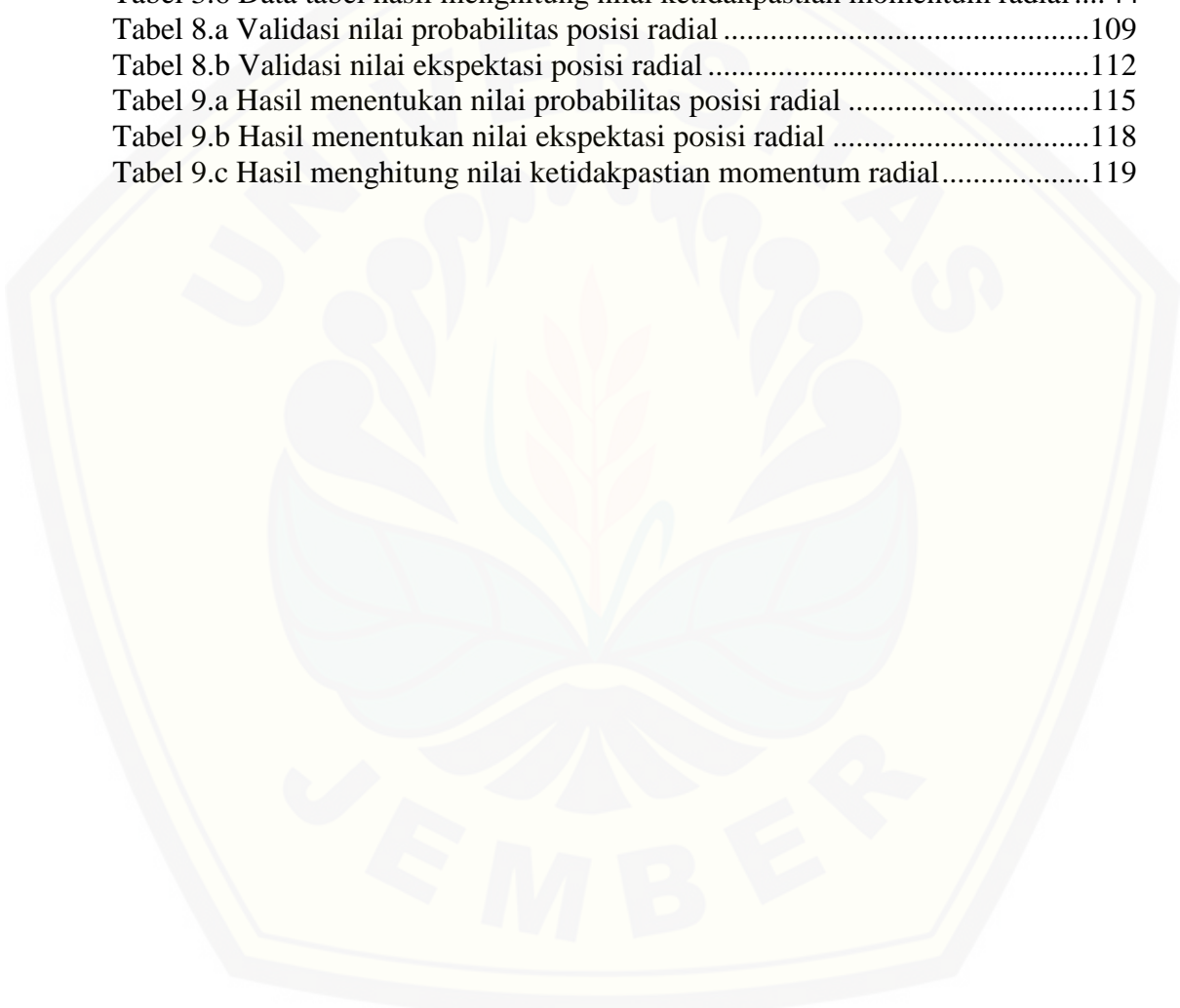
DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSEMBAHAN.....	ii
HALAMAN MOTTO	iii
HALAMAN PERNYATAAN.....	iv
HALAMAN PEMBIMBINGAN.....	v
HALAMAN PENGAJUAN	vi
HALAMAN PENGESAHAN.....	vii
RINGKASAN	viii
PRAKATA	x
DAFTAR ISI.....	xii
DAFTAR TABEL	xiv
DAFTAR GAMBAR.....	xv
DAFTAR NOTASI.....	xvi
DAFTAR LAMPIRAN	xix
BAB 1. PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	4
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Batasan Masalah	5
1.5 Manfaat Penelitian	5
BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA.....	7
2.1 Dualisme Gelombang Partikel.....	7
2.2 Persamaan Schrodinger.....	9
2.2.1 Persamaan Schrodinger Bergantung Waktu.....	9
2.2.2 Persamaan Schrodinger Tidak Bergantung Waktu	11
2.2.3 Persamaan Schrodinger dalam Koordinat Bola.....	13
2.3 Persamaan Schrodinger Atom Hidrogen	14
2.4 Persamaan Schrodinger Atom Deuterium	18
2.5 Fungsi Persamaan Schrodinger Atom Deuterium	18
2.5.1 Fungsi Persamaan Koordinat Azimut (ϕ).....	18
2.5.2 Fungsi Persamaan Koordinat Polar	18
2.5.3 Fungsi Persamaan Koordinat Radial	19
2.6 Bilangan Kuantum Atom Deuterium	19
2.7 Probabilitas dan Nilai Ekspektasi Fungsi Radial Atom Hidrogenik	21
2.8 Ketidakpastian Heisenberg Untuk Atom Hidrogen	24
2.9 Atom Deuterium	30
BAB 3. METODE PENELITIAN.....	33
3.1 Jenis, Waktu dan Tempat Penelitian.....	33
3.1.1 Jenis Penelitian	33
3.1.2 Tempat dan Waktu Penelitian	33
3.1.3 Objek Penelitian	33
3.2 Definisi Operasional	33

3.2.1 Fungsi Gelombang Radial Atom Deuterium.....	34
3.2.2 Bilangan Kuantum Atom Deuterium	34
3.2.3 Probabilitas, Nilai Ekspektasi, dan Ketidakpastian Momentum Fungsi Atom Hidrogenik	34
3.3 Langkah Penelitian	35
3.3.1 Persiapan	35
3.3.2 Pengembangan Teori	35
3.3.3 Validasi Hasil Pengembangan Teori	37
3.3.4 Hasil.....	41
3.3.5 Pembahasan	46
3.3.6 Kesimpulan.....	46
BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN.....	47
4.1 Hasil Penelitian	47
4.1.3 Grafik Distribusi Probabilitas elektron dalam atom Deuterium	47
4.1.4 Grafik Ketidakpastian Momentum Radial Atom Deuterium Menggunakan Pendekatan Ketidakpastian Heisenberg pada Bilangan Kuantum $n \leq 3$	50
4.2 Pembahasan	52
BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN	62
5.1 Kesimpulan	62
5.1 Saran	63
DAFTAR PUSTAKA	64
LAMPIRAN.....	67

DAFTAR TABEL

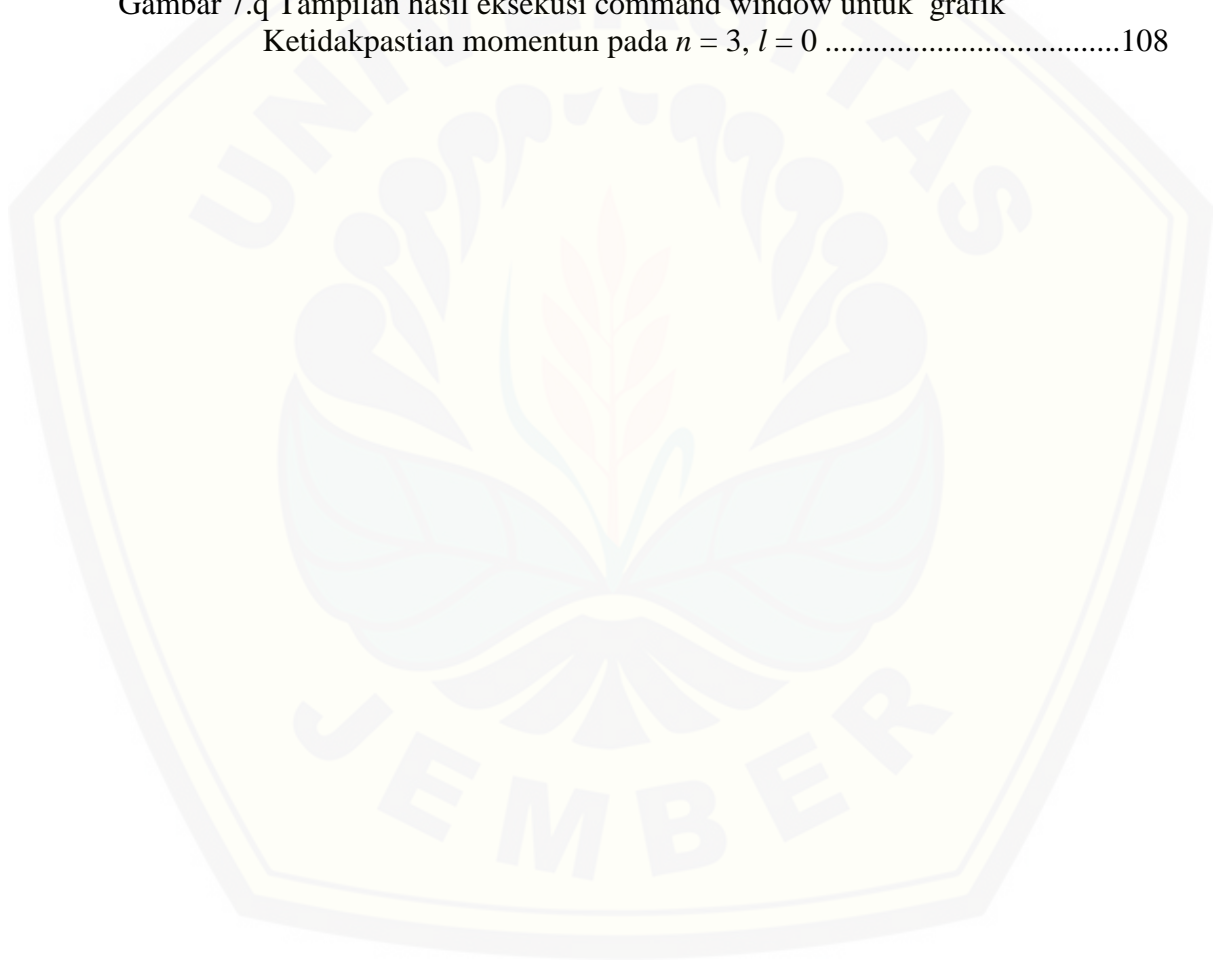
	Halaman
Tabel 2.1 Notasi simbol keadaan atomik bilangan kuantum n dan l	20
Tabel 3.1 Validasi nilai probabilitas posisi radial.....	38
Tabel 3.2 Validasi nilai ekspektasi posisi radial	39
Tabel 3.3 Validasi nilai ketidakpastian momentum radial.....	40
Tabel 3.4 Data tabel hasil menentukan probabilitas posisi radial.....	42
Tabel 3.5 Data tabel hasil menghitung nilai ekspektasi posisi radial	43
Tabel 3.6 Data tabel hasil menghitung nilai ketidakpastian momentum radial ...	44
Tabel 8.a Validasi nilai probabilitas posisi radial	109
Tabel 8.b Validasi nilai ekspektasi posisi radial	112
Tabel 9.a Hasil menentukan nilai probabilitas posisi radial	115
Tabel 9.b Hasil menentukan nilai ekspektasi posisi radial	118
Tabel 9.c Hasil menghitung nilai ketidakpastian momentum radial.....	119



DAFTAR GAMBAR

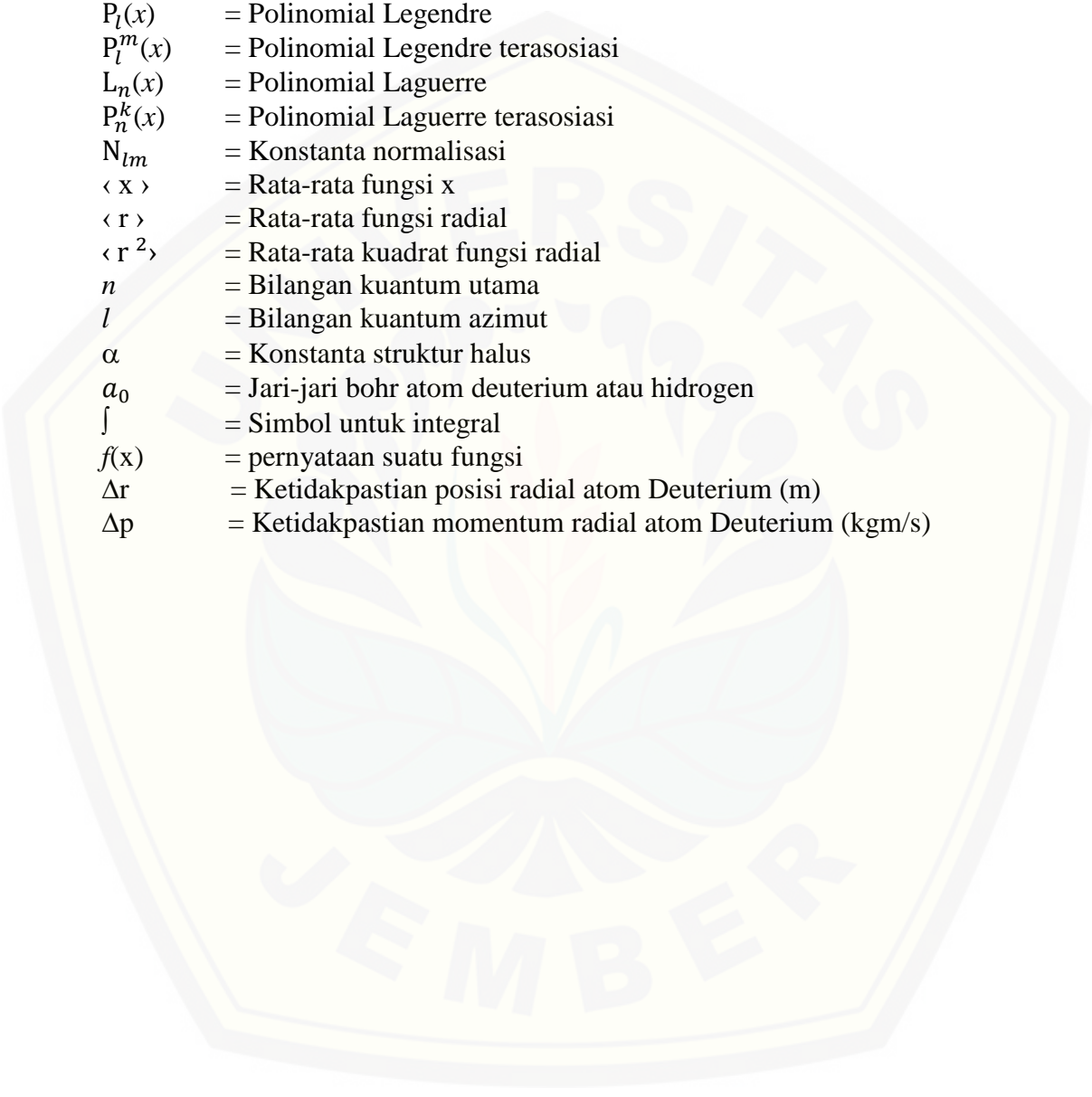
	Halaman
Gambar 2.1 Koordinat Bola: jari-jari, sudut polar, dan sudut azimut.....	13
Gambar 2.2 Grafik rapat probabilitas radial untuk $l = 0$	22
Gambar 2.3 Grafik rapat probabilitas radial untuk $l = 1$	22
Gambar 2.4 Grafik rapat probabilitas radial untuk $l = 2$	22
Gambar 2.5 Grup gelombang de Broglie	24
Gambar 2.6 Produk hasil superposisi dua gelombang	25
Gambar 2.7 Kelompok gelombang yang terisolasi	26
Gambar 2.8 Grafik fungsi gelombang dan transformasi Fourier	27
Gambar 2.9 Grafik Distribusi Gaussian	28
Gambar 3.1 Bagan langkah - langkah Penelitian	35
Gambar 3.2 Validasi Grafik Hasil distribusi rapat probabilitas pada $n = 1,2,3$	40
Gambar 3.3 Validasi Grafik Hasil distribusi rapat probabilitas posisi gabungan atom deuterium	41
Gambar 3.4 Validasi grafik ketidakpastian momentum radial (ΔP_r) pada setiap keadaan posisi elektron (r) untuk atom deuterium $n \leq 3$	41
Gambar 4.1 Hasil Simulasi grafik distribusi rapat probabilitas pada $n \leq 3$	47
Gambar 4.2 Hasil Simulasi grafik ketidakpastian momentum radial (ΔP_r) Pada bilangan kuantum $n = 1, l = 0$	50
Gambar 4.3 Hasil Simulasi grafik ketidakpastian momentum radial (ΔP_r) Pada bilangan kuantum $n = 2, l = 0$	50
Gambar 4.4 Hasil Simulasi grafik ketidakpastian momentum radial (ΔP_r) Pada bilangan kuantum $n = 2, l = 1$	51
Gambar 4.5 Hasil Simulasi grafik ketidakpastian momentum radial (ΔP_r) Pada bilangan kuantum $n = 3, l = 0$	51
Gambar 4.6 Hasil Simulasi grafik ketidakpastian momentum radial (ΔP_r) Pada bilangan kuantum $n = 3, l = 1$	51
Gambar 4.7 Hasil Simulasi grafik ketidakpastian momentum radial (ΔP_r) Pada bilangan kuantum $n = 3, l = 2$	52
Gambar 7.a Tampilan M-file untuk membuat grafik rapat probabilitas	94
Gambar 7.b Tampilan hasil command window grafik rapat probabilitas	94
Gambar 7.c Flowchart untuk program menampilkan grafik probabilitas	95
Gambar 7.d Tampilan cendela M-file untuk mencari nilai probabilitas	96
Gambar 7.e Tampilan command window untuk menghitung nilai probabilitas pada $n = 1$	97
Gambar 7.f Tampilan command window untuk menghitung nilai probabilitas pada $n = 2$	97
Gambar 7.g Tampilan command window untuk menghitung nilai probabilitas pada $n = 3$	98
Gambar 7.h Tampilan cendela M-file untuk mencari harga ekspektasi.....	99
Gambar 7.i Tampilan command window untuk menghitung nilai Ketidakpastian posisi radial pada $n = 1, l = 0$	100
Gambar 7.j Tampilan command window untuk menghitung nilai Ketidakpastian posisi radial pada $n = 2, l = 0$	101

Gambar 7.k Tampilan command window untuk menghitung nilai Ketidakpastian posisi radial pada $n = 3, l = 0$	102
Gambar 7.l Tampilan command window untuk menghitung nilai Ketidakpastian momentum pada $n = 1, l = 0$	104
Gambar 7.m Tampilan command window untuk menghitung nilai Ketidakpastian momentum pada $n = 2, l = 0$	105
Gambar 7.n Tampilan command window untuk menghitung nilai Ketidakpastian momentum pada $n = 3, l = 0$	106
Gambar 7.o Tampilan hasil eksekusi command window untuk grafik Ketidakpastian momentum pada $n = 1, l = 0$	107
Gambar 7.p Tampilan hasil eksekusi command window untuk grafik Ketidakpastian momentum pada $n = 2, l = 0$	107
Gambar 7.q Tampilan hasil eksekusi command window untuk grafik Ketidakpastian momentum pada $n = 3, l = 0$	108



DAFTAR NOTASI

λ	= Panjang gelombang de Broglie
h	= Ketetapan Planck ($6,63 \times 10^{-34}$ Js.)
\hbar	= Ketetapan Planck ($\hbar = \frac{h}{2\pi}$ Js. = $1,054 \times 10^{-34}$ Js)
P	= Peluang
p	= Momentum partikel
v	= Cepat rambat gelombang de Broglie
ν	= Frekuensi gelombang de Broglie
k	= Bilangan gelombang yang menagambarkan arah rambat gelombang
ω	= Frekuensi sudut atau kecepatan sudut
E	= energi total sistem atau energi eksitasi
Ψ	= Psi (simbol untuk menyatakan fungsi gelombang)
$\Psi_{(r,\theta,\phi)}$	= fungsi gelombang gabungan atom deuterium atau hidrogen
B	= Energi ikat deuteron
μ	= Momen magnetik deuteron atau massa tereduksi
μ_p	= Momen magnetik proton
μ_n	= Momen magnetik neutron
m, m_1, m_2	= Massa partikel, massa partikel pertama, massa partikel kedua.
V dan $V(x)$	= Energi potensial partikel sebagai fungsi posisi
K	= Energi kinetik partikel
$\frac{d}{dx}$	= Operator diferensial pertama dari suatu fungsi terhadap variabel posisi x
$\frac{d}{dy}$	= Operator diferensial pertama dari suatu fungsi terhadap variabel posisi y
$\frac{d}{dz}$	= Operator diferensial pertama dari suatu fungsi terhadap variabel posisi z
$\frac{d^2}{dx^2}$	= Operator diferensial orde dua dari suatu fungsi terhadap variabel posisi x
$\frac{d^2}{dy^2}$	= Operator diferensial orde dua dari suatu fungsi terhadap variabel posisi y
$\frac{d^2}{dz^2}$	= Operator diferensial orde dua dari suatu fungsi terhadap variabel posisi z
$\frac{d^2}{dt^2}$	= Operator diferensial orde dua dari suatu fungsi terhadap variabel waktu
r dan r_c	= Posisi elektron dalam atom
∇^2	= Operator laplacian
θ dan φ	= Besaran sudut polar dan sudut azimuth
Θ dan Φ	= Fungsi gelombang polar dan fungsi gelombang azimuth
R dan R_{nl}	= Fungsi gelombang radial



1_1H	= Simbol untuk atom hidrogen
2_1H	= Simbol untuk atom deuterium
e	= Muatan elektron ($1,6 \cdot 10^{-19} \times C$)
$\frac{\partial}{\partial x}$	= Operator diferensial parsial
ϵ_0	= Permittivitas hampa
$P_l(x)$	= Polinomial Legendre
$P_l^m(x)$	= Polinomial Legendre terasosiasi
$L_n(x)$	= Polinomial Laguerre
$P_n^k(x)$	= Polinomial Laguerre terasosiasi
N_{lm}	= Konstanta normalisasi
$\langle x \rangle$	= Rata-rata fungsi x
$\langle r \rangle$	= Rata-rata fungsi radial
$\langle r^2 \rangle$	= Rata-rata kuadrat fungsi radial
n	= Bilangan kuantum utama
l	= Bilangan kuantum azimut
α	= Konstanta struktur halus
a_0	= Jari-jari bohr atom deuterium atau hidrogen
\int	= Simbol untuk integral
$f(x)$	= pernyataan suatu fungsi
Δr	= Ketidakpastian posisi radial atom Deuterium (m)
Δp	= Ketidakpastian momentum radial atom Deuterium (kgm/s)

DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran 1. Matriks Penelitian	67
Lampiran 2. Perhitungan Jari-Jari Atom Bohr	68
Lampiran 3. Probabilitas Posisi Elektron Fungsi Radial Atom Deuterium	69
Lampiran 4. Nilai Ekspektasi Posisi Elektron Fungsi Radial Atom Deuterium	77
Lampiran 5. Nilai Ketidakpastian Posisi Elektron Fungsi Radial Atom Deuterium	84
Lampiran 6. Nilai Ketidakpastian Momentum Posisi Fungsi Radial Atom Deuterium.....	92
Lampiran 7. Program Matlab	94
Lampiran 8. Validasi Nilai Probabilitas dan Ekspektasi Posisi fungsi radial atom Deuterium	109
Lampiran 9. Hasil Nilai Probabilitas, Nilai Ekspektasi, dan Nilai Ketidakpastian Momentum Radial Atom Deuterium	115

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pada awal abad kedua puluh, terdapat banyak fenomena fisika yang tidak dapat dijelaskan oleh kajian teori fisika klasik sehingga terjadi krisis teori fisika klasik. Dalam teori fisika klasik menganggap bahwa partikel dan gelombang adalah dua hal yang berbeda dan merupakan bagian yang tidak saling berhubungan satu sama lain. Beberapa hasil eksperimen yang tidak dapat dijelaskan dengan teori fisika klasik yaitu dalam menjelaskan spektrum radiasi termal dari suatu benda dalam keadaan suhu yang sangat tinggi (radiasi benda hitam), kegagalan dalam menjelaskan peristiwa pelepasan elektron dari suatu permukaan logam yang disinari oleh foton akibat penyerapan radiasi elektromagnetik (efek fotolistrik), dan hamburan foton oleh elektron yang terpantul satu sama lain (efek Compton).

Pada tahun 1900 - 1905 Max Planck dan Einstein membuktikan bahwa gelombang itu dapat berperilaku sebagai partikel yang dibuktikan melalui percobaan radiasi benda hitam dan efek fotolistrik. Max Planck mengemukakan teori yang menyatakan bahwa setiap benda yang mengalami radiasi akan memancarkan energi berupa paket – paket energi secara diskontinu yang disebut kuantum (foton). Kemudian Einstein membuat percobaan efek fotolistrik dan membuat postulat dari hasil percobaannya, bahwa cahaya tersusun dari kuantum yang disebut foton yang memiliki sifat dualitas yang sama. Sehingga dari pernyataan Max Planck dan Einstein dapat disimpulkan bahwa gelombang elektromagnetik merupakan suatu paket atau suatu konstanta yang dicirikan oleh materi.

Berdasarkan kesimetrisan alam, pada tahun 1924 Louis de Broglie mengajukan hipotesis bahwa suatu partikel dengan momentum p dapat berperilaku sebagai gelombang yang dicirikan dengan panjang gelombang $\lambda = \frac{h}{p}$ atau dikenal sebagai panjang gelombang de Broglie dari suatu partikel. Dalam hal ini gelombang dapat berperilaku seperti partikel dan partikel dapat berperilaku seperti gelombang atau biasa dikenal dengan dualisme gelombang partikel (Krone,

1992:126). Hal inilah yang melatar belakangi adanya teori baru yaitu teori mekanika kuantum.

Dalam mekanika kuantum persamaan yang digunakan untuk menyatakan elektron atau partikel mikroskopis dalam keadaan non-relativistik dapat dijelaskan dengan persamaan Schrodinger yang diajukan oleh Erwin Schrodiner (Syarifudin, *et al*). Bentuk persamaan Schrodinger adalah persamaan diferensial orde dua yang taat pada azas (1) hukum kekekalan energi; (2) hipotesis de Broglie; dan (3) berperilaku baik, artinya bersifat konvergen (hingga dan tunggal) serta bersifat kontinuitas pada titik batasnya. Fungsi persamaan Schrodinger merupakan solusi dari persamaan Schrodinger. Persamaan Schrodinger banyak digunakan pada atom – atom yang sifatnya hidrogenik. Salah satu atom yang sifatnya Hidrogenik adalah atom Deuterium atau isotop Hidrogen. Atom hidrogen merupakan atom yang memiliki susunan paling sederhana. Deuterium dengan simbol D atau 2_1H yang merupakan salah satu dari tiga bentuk isotop atom Hidrogen yaitu protium, tritium, dan deuterium, dengan inti dari deuterium adalah satu proton dan satu neutron. Deuterium termasuk isotop stabil dengan kelimpahan alami di bumi (krane, 1992: 419).

Pemanfaatan atom Deuterium di dalam aplikasinya berperan dalam proses produksi air berat. Air berat (D_2O) digunakan sebagai moderator neutron dalam reaksi fisi uranium. Fungsi moderator adalah untuk memperlambat neutron dengan cara menyerap energi dan menumbuk neutron tanpa kecenderungan menyerap partikelnya (Beiser, 1990: 496). Selain itu air berat juga dapat digunakan sebagai pendingin pada bidang reaktor nuklir. Beberapa metode yang dilakukan untuk dapat memperoleh air berat antara lain: destilasi air, destilasi Hidrogen, pemisahan dengan dari air biasa (H_2O), elektrolisa dan pertukaran isotop. Dalam kondisi ultra padat, deuterium juga dapat dimanfaatkan dalam proses induksi laser untuk mengamati sejumlah partikel dengan energi > 10 MeV (Holmlid, 2013). Air berat biasanya terdapat di dalam air alam, gas alam, petroleum, dan sebagainya (Sukarsono et al, 2008:24).

Dalam Fisika kuantum, besaran-besaran fisis yang didapatkan dalam proses pengukuran bersifat ketidakpastian. Salah satu asas ketidakpastian yang paling

penting dalam kuantum adalah asas Ketidakpastian Heisenberg yaitu suatu konsep yang menganggap bahwa perilaku gelombang dan materi tidak dapat muncul secara bersamaan. Pada saat besaran partikel memiliki kepastiannya tinggi maka informasi yang berkaitan dengan perilaku gelombang akan hilang, dan sebaliknya. Asas ketidakpastian menyatakan bahwa posisi dan momentum tidak bisa ditentukan pada saat yang bersamaan, karena semakin kecil ketidakpastian (semakin besar kepastian) dalam mengukur posisi yang tepat, maka semakin tidak akurat momentum partikelnya, demikian sebaliknya. Berbicara tentang ketidakpastian maka berbicara pula tentang probabilitas (kemungkinan), baik probabilitas untuk mendapatkan partikel pada posisi tertentu, atau probabilitas untuk menentukan momentum pada partikel. Untuk memperoleh suatu nilai ketidakpastian ada berbagai cara yang bisa dilakukan, salah satunya dengan menggunakan teori ketidakpastian Heisenberg.

Penelitian sebelumnya mengenai atom hidrogen telah dilakukan oleh beberapa peneliti antara lain: Dalam penelitian Handayani et al (2005) menyimpulkan bahwa fungsi gelombang atom hidrogen merupakan kuantitas kompleks yang terdiri atas bagian radial dan bagian anguler serta distribusi rapat probabilitas menggambarkan penyebaran kedudukan elektron dalam atom; Yusron et al (2007) menyimpulkan bahwa probabilitas untuk menemukan elektron di ruang antar proton pada molekul H_2^+ bergantung pada jarak antar proton serta fungsi gelombang yang membentuk ikatan kovalen pada molekul H_2^+ , dalam hal ini adalah fungsi gelombang simetri; Hermanto (2016) tentang atom Deuterium menggunakan pendekatan Schrodinger dengan bilangan kuantum utama $n = 1,2,3$ menyimpulkan bahwa semakin besar bilangan kuantum utama mengakibatkan semakin kecil nilai probabilitasnya (berbanding terbalik) dan semakin besar nilai suatu ekspektasi fungsi radial serta menuju nilai yang hampir tetap ketika interval posisi (r) elektron semakin besar maka dapat disimpulkan elektron sering muncul dalam atom deuterium pada posisi dimana saja, serta nilai ekspektasi kecil ketika bilangan kuantum semakin besar. Pada bilangan kuantum utama yang semakin besar maka elektron akan semakin jarang dijumpai atau bahkan tidak ada; Supriadi et al (2018) menyimpulkan bahwa fungsi gelombang

atom deuterium terdiri dari 2 fungsi yaitu fungsi radial dan fungsi angular. Fungsi gelombang angular yang telah dinormalisasi dapat digunakan untuk menggambarkan karakteristik dari suatu gelombang.

Yusron et al (2007) mengatakan bahwa nilai probabilitas dari fungsi gelombang radial menunjukkan peluang ditemukannya elektron pada posisi (r) dalam ruang dan nilai ekspektasi dari fungsi gelombang radial atom deuterium menunjukkan keberadaan elektron sering muncul dalam atom deuterium. Menurut Hermanto (2016) dalam penelitiannya mengatakan bahwa semakin besar bilangan kuantum utama n dan bilangan kuantum l mengakibatkan nilai ekspektasi fungsi gelombang radial semakin kecil, hal ini akan menyebabkan elektron semakin sulit bahkan mulai tidak ditemukan lagi untuk bilangan kuantum yang semakin besar. Maka peneliti tertarik untuk mengkaji Probabilitas posisi dan nilai Ekspektasi posisi elektron atom deuterium pada bilangan kuantum utama $n \leq 3$. Oleh karena itu penelitian ini berjudul “Ketidakpastian Momentum Atom Deuterium (2_1H) dengan Menggunakan Pendekatan Ketidakpastian Heisenberg pada Bilangan Kuantum $n \leq 3$ ”

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas maka dapat dirumuskan beberapa permasalahan, antara lain.

- Bagaimanakah probabilitas posisi untuk menemukan elektron atom deuterium pada bilangan kuantum utama ($n \leq 3$) ?
- Bagaimanakah nilai ekspektasi posisi atom Deuterium (2_1H) pada bilangan kuantum ($n \leq 3$) ?
- Bagaimanakah Ketidakpastian momentum dengan pendekatan ketidakpastian Heisenberg Atom Deuterium (2_1H) pada Bilangan Kuantum ($n \leq 3$) ?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini sebagai berikut.

- Mengetahui nilai probabilitas posisi untuk menemukan elektron atom deuterium pada bilangan kuantum utama ($n \leq 3$)

- b. Mengetahui nilai ekspektasi posisi atom Deuterium (2_1H) pada bilangan kuantum ($n \leq 3$)
- c. Menentukan Ketidakpastian momentum dengan pendekatan ketidakpastian Heisenberg Atom Deuterium (2_1H) pada Bilangan Kuantum ($n \leq 3$)

1.4 Batasan Masalah

Agar penelitian lebih terfokus dan dapat menjawab permasalahan yang ada, maka batasan penulis memberi batasan masalah adalah sebagai berikut.

- a. Bilangan kuantum yang dimaksud dalam penelitian ini adalah bilangan kuantum utama ($n \leq 3$)
- b. Atom yang digunakan adalah menggunakan atom Deuterium (2_1H) atau dalam hal ini atom yang sifatnya Hidrogenik
- c. Fungsi gelombang Deuterium menggunakan syarat normalisasi
- d. Fungsi gelombang yang diperoleh mengabaikan efek spin
- e. Persamaan schrodinger yang digunakan adalah persamaan schrodinger pada keadaan tunak dalam koordinat bola
- f. Persamaan schrodinger menggunakan fungsi radial.
- g. Penyelesaian dalam ketidakpastian momentum menggunakan posisi radial dan mengabaikan posisi angular sehingga mengabaikan pengaruh medan magnet

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang dapat diambil dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

- a. Bagi peneliti, dapat memberi wawasan pengetahuan dan pengalaman tentang fisika kuantum yang berkaitan dengan probabilitas, ekspektasi, dan ketidakpastian momentum radial untuk atom deuterium
- b. Bagi pembaca, dapat dijadikan sebagai salah satu referensi dalam mempelajari probabilitas, ekspektasi, dan ketidakpastian momentum radial pada atom deuterium untuk mata kuliah mekanika kuantum, fisika atom, fisika nuklir bagi mahasiswa program sarjana maupun pasca sarjana.

- c. Bagi lembaga, dapat memberikan sumbangan penelitian serta bahan referensi tambahan dalam pembelajaran mata kuliah fisika kuantum dengan pokok bahasan atom hidrogenik.
- d. Bagi guru fisika SMA, dapat dijadikan sebagai tambahan referensi mengenai materi teori atom Bohr pada bab fisika atom di SMA.



BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Dualisme Gelombang Partikel

Berbagai macam penemuan klasik hingga modern yang telah diperoleh sejauh ini diantaranya berkaitan dengan radiasi benda hitam, efek fotolistrik dan efek Compton, Davisson-Gemer, Thomson, dan eksperimen celah ganda yang mengungkapkan bahwa foton, elektron, dan partikel-partikel untuk ukuran yang mikroskopik tidak seperti halnya partikel klasik dan tidak seperti gelombang klasik. Dari penemuan – penemuan tersebut menandakan bahwa pada skala yang mikroskopik secara alami dapat menampilkan suatu perilaku partikel yang sama halnya dalam hal ini seperti gelombang (Zettili, 2009: 26).

Max Planck dengan percobaan radiasi benda hitam, mengemukakan teori yang menyatakan bahwa setiap benda yang mengalami radiasi akan memancarkan energi berupa paket – paket energi secara diskontinu yang disebut kuantum (foton). Energi E setiap kuantum ditentukan oleh frekuensi f menurut persamaan

$$E = nhf \quad (2.1)$$

dengan n dalam hal ini menyatakan jumlah dari kuantum ($n = 1, 2, 3, \dots$) dan h merupakan tetapan Planck yaitu besarnya $6,626 \times 10^{-34}$ Js. Pada tahun 1905 Einstein dengan percobaan efek fotolistrik mengemukakan idenya mengenai terbebaskannya elektron – elektron dari permukaan suatu logam yang disinari oleh cahaya (gelombang elektromagnetik) yang merupakan suatu paket. Dalam hal ini Einstein membuat postulat dari hasil percobaannya yang juga didasarkan pada teori Planck, bahwa cahaya tersusun dari kuantum yang disebut foton yang memiliki sifat dualitas yang sama (Krane, 1992: 102).

Tahun 1924 A.H. Compton melanjutkan adanya ide tersebut melalui suatu eksperimen hamburan sinar-X dan elektron. Foton menumbuk elektron, seperti halnya tumbukan pada dua buah bola bilyard, sehingga dalam hal ini ada pengaruh dari momentum. Maka perilaku dari foton yang dalam hal ini mempunyai momentum linier yang searah dengan arah pergerakannya. Besarnya momentum p dapat dituliskan

$$p = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (2.2)$$

dengan energi hf tersebut dapat diketahui. Dan dari persamaan (2.2) diperoleh suatu bentuk hubungan antara momentum linear p dengan panjang gelombang λ .

De Broglie pada tahun 1924 juga mempostulatkan, jika partikel bergerak dapat mempunyai panjang gelombang dan momentum dimana hal ini biasa disebut panjang gelombang de Broglie dengan keduanya saling berhubungan atau dalam hal ini partikel seperti elektron juga berperilaku sebagai gelombang. Namun dalam hal ini hanya partikel yang berukuran atom atau inti atom saja yang dapat teramati panjang gelombang de Broglie. Dari persamaan (2.2) didapatkan besarnya panjang gelombang de Broglie yaitu :

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (2.3)$$

Dimana h adalah konstanta planck yang nilainya $6,63 \times 10^{-34}$ Js atau $938,2723$ MeV/c². Sedangkan kecepatan gelombang de Broglie dapat dituliskan,

$$v = \lambda f \quad (2.4)$$

Sehingga dalam hal ini gelombang dapat berperilaku seperti partikel dan partikel dapat berperilaku seperti gelombang atau biasa dikenal dengan dualisme gelombang partikel (Krane, 2012:103).

Pada perambatannya, suatu gelombang memindahkan sejumlah energi dari suatu subsistem ke subsistem yang lain. Suatu gelombang yang merambat dalam arah tertentu misalnya ditinjau arah sumbu- x dalam kurun waktu tertentu, dalam hal ini memenuhi persamaan gelombang :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{atau} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.5)$$

Misal sebuah partikel bebas dimana partikel tersebut merambat dalam arah sumbu- x , sehingga solusi dari persamaan (2.5) diatas yaitu berupa fungsi gelombang yang dapat dituliskan

$$\psi(x, t) = Ae^{-i\omega(t-x/v)} \quad (2.6)$$

Sebuah partikel bebas yang dalam hal ini tidak dipengaruhi oleh adanya gaya luar, maka akan memiliki frekuensi yang konstan dan bilangan gelombang yang besar serta arahnya juga tetap.

$$\omega = \frac{E}{\hbar} \quad \text{dan} \quad k = \frac{p}{\hbar} \quad (2.7)$$

sedangkan hubungan energi gelombang yang dimiliki oleh suatu partikel dengan momentum dapat dituliskan yaitu

$$E = pv \quad (2.8)$$

dengan mensubstitusikan $\omega = \frac{E}{\hbar}$ dan persamaan (2.8) ke persamaan (2.6) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= Ae^{-i\omega(t-x/v)} \\ &= Ae^{-i\frac{E}{\hbar}(t-x/v)} \\ \psi(x, t) &= Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et-px)} \end{aligned} \quad (2.9)$$

(Beiser, 2003:166).

Fungsi gelombang Ψ merupakan suatu kuantitas kompleks yang dapat memberikan penafsiran sifat - sifat dari gelombang de Broglie. Harga fungsi Ψ dalam hal ini tidak memiliki arti fisis secara langsung namun dapat menyajikan informasi secara fisis jika partikel tersebut memiliki gerak yang tak terbatas. Kuadrat harga mutlak dari suatu fungsi gelombang $|\Psi|^2$ dikatakan sebagai suatu kerapatan probabilitas $P(r)$, dalam hal ini peluang kebolehdjian atau kemungkinan dari suatu partikel, seperti elektron yang ditemukan pada posisi tertentu dalam sebuah atom (Beiser, 1990:91).

2.2 Persamaan Schrodinger

Persamaan schrodinger merupakan persamaan differensial parsial orde dua yang digunakan untuk memberikan informasi - informasi berkaitan dengan adanya perilaku suatu gelombang dari partikel dan dikembangkan oleh Erwin Schrodinger yaitu seorang ilmuwan fisika yang berasal dari Austria (1887-1961). Persamaan Schrodinger dapat dibagi menjadi dua bila dikategorikan berdasarkan karakteristik fungsi gelombangnya, yaitu persamaan Schrodinger yang bergantung waktu dan persamaan Schrodinger yang tak bergantung waktu (gayut waktu).

2.2.1 Persamaan Schrodinger Bergantung Waktu

Pemecahan persamaan Schrodinger didapatkan dengan mematuhi 3 syarat kriteria:

- a. Taat hukum kekekalan energi.

Hukum kekekalan energi menyatakan bahwa jumlah energi kinetik dan energi potensial adalah sama dengan jumlah dari energi total yang selalu bersifat kekal. Secara matematis tertulis sebagai berikut:

$$K + V = E$$

Dimana K = energi kinetik, V = energi potensial dan E = energi total. Dalam fisika kuantum energi total dibatasi oleh keadaan tidak relativistik, yang dapat ditulis:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}$$

E hanyalah menyatakan jumlah energi kinetik dan potensial, bukan energi massa relativistik. Sehingga dapat dituliskan:

$$K + V = E$$

$$\frac{p^2}{2m} + V(x) = E \quad (2.10)$$

- b. Linier, bernilai tunggal dan berhingga.

Pemecahan suatu persamaan Schrodinger harus mampu memberi informasi mengenai probabilitas kebolehjadian untuk menemukan partikelnya. Fungsi gelombang bernilai tunggal dan berhingga artinya, probabilitas guna menemukan partikel disuatu titik yang sama tidak boleh ada dua kemungkinan (probabilitas). Sedangkan fungsi gelombang harus linear agar tujuannya gelombang tersebut memiliki sifat superposisi yang diharapkan sebagai milik gelombang yang berperilaku baik. Indikator dari sifat gelombang linier adalah fungsi gelombang harus memiliki sifat superposisi gelombang (Krane, 2012:141).

- c. Taat azas terhadap hipotesa deBroglie.

Bagaimanapun bentuk persamaan yang ditulis harus taat pada asas terhadap hipotesis De Broglie. Pemecahan matematika bagi seluruh partikel dengan momentum p , maka haruslah berbentuk sebuah fungsi gelombang dengan panjang gelombang $\lambda = \frac{h}{p}$, variabel h merupakan konstanta planck yang besarnya $6,627 \times 10^{-34}$ J.s. Sesuai dengan persamaan (2.7) dan (2.10) dimana diketahui bahwa $p = \hbar k$ sehingga energi kinetik dari gelombang de Broglie untuk partikel bebas dirumuskan sebagai berikut ini:

$$K = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (2.11)$$

Persamaan Schrodinger dapat dibentuk dalam hal ini dengan mengambil dari turunan kedua fungsi (2.9) terhadap x , sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} &= -\frac{p^2}{\hbar^2} \psi(x,t) \\ p^2 \psi(x,t) &= -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (2.12)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (2.7) ke dalam persamaan (2.12), maka dalam hal ini dapat diperoleh

$$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = -k^2 \psi(x,t) \quad (2.13)$$

persamaan Schrodinger bergantung waktu dapat diperoleh dengan mengambil turunan pertama persamaan (2.9) terhadap variabel t , sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} &= -\frac{iE}{\hbar} \psi(x,t) \\ E\psi(x,t) &= i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.14)$$

pada persamaan (2.10) ruas kanan dan ruas kiri masing-masing dikalikan dengan fungsi $\psi(x,t)$, kemudian substitusi persamaan (2.12) dan persamaan (2.14) didapatkan

$$\begin{aligned} \frac{p^2 \psi(x,t)}{2m} + V\psi(x,t) &= E\psi(x,t) \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + V\psi(x,t) &= i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.15)$$

persamaan (2.15) merupakan persamaan Schrodinger bergantung waktu dalam satu dimensi. Pada kasus tiga dimensi, maka persamaan (2.15) dapat dituliskan

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + V\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (2.16)$$

(Beiser, 2003:168).

2.2.2 Persamaan Schrodinger Tidak Bergantung Waktu (gayut waktu)

Energi potensial pada persamaan Schrodinger pada kebanyakan situasi tidaklah bergantung pada waktu, melainkan dalam hal ini bergantung pada posisi elektron didalam atomnya. Sehingga peninjauan dalam hal ini hanya terfokus pada keberadaan elektron dalam interval waktu yang sngat panjang, namun bukan tertuju pada keberadaan elektron dari waktu ke waktu. Persamaan Schrodinger

gayut waktu dalam satu dimensi dapat diperoleh dengan menghilangkan fungsi gelombang yang dalam hal ini bergantung waktu $\psi(x, t)$ pada persamaan (2.15) dengan menggantinya dengan fungsi gelombang tidak bergantung waktu $\psi(x)$, yaitu dengan cara permisalan untuk $\psi(x) = Ae^{\frac{ipx}{\hbar}}$ pada persamaan (2.9) dan dengan mensubstitusikannya kedalam bentuk persamaan (2.15) yang sesuai langkah - langkah berikut

$$\psi(x, t) = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et-px)} = Ae^{\frac{ipx}{\hbar}} e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \quad (2.17)$$

$$\psi(x, t) = \psi(x)e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \quad (2.18)$$

substitusi persamaan (2.18) ke persamaan (2.15) didapatkan

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + V\psi(x)e^{-\frac{iEt}{\hbar}} &= i\hbar\psi(x) \left(\frac{\partial}{\partial t} e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \right) \\ \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} \right] e^{-\frac{iEt}{\hbar}} + V\psi(x)e^{-\frac{iEt}{\hbar}} &= E\psi(x)e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \end{aligned} \quad (2.19)$$

kemudian ruas kiri dan kanan masing-masing suku pada persamaan (2.19) dibagi dengan $e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$ maka didapatkan

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + V\psi(x) = E\psi(x) \quad (2.20)$$

(Liboff, 2003:187)

persamaan (2.20) ini merupakan solusi persamaan Schrodinger yang tidak bergantung waktu dalam satu dimensi. Pada kasus tiga dimensi, persamaan (2.20) dapat dituliskan

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi_{(x,y,z)} + V\psi_{(x,y,z)} = E\psi_{(x,y,z)} \quad (2.21)$$

Maka secara umum dalam hal ini persamaan Schrodinger yang tidak bergantung waktu dapat dituliskan

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \right) \psi = E\psi \quad (2.22)$$

(Gasiorowics, 1996:169)

atau

$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + [E - V(r)]\psi = 0 \quad (2.23)$$

dimana ∇^2 merupakan Laplacian yang bergantung pada koordinat yang digunakan untuk memecahkan persamaan Schrodinger.

2.2.3 Persamaan Schrodinger dalam Koordinat Bola

Laplacian ∇^2 dalam koordinat bola diberikan oleh

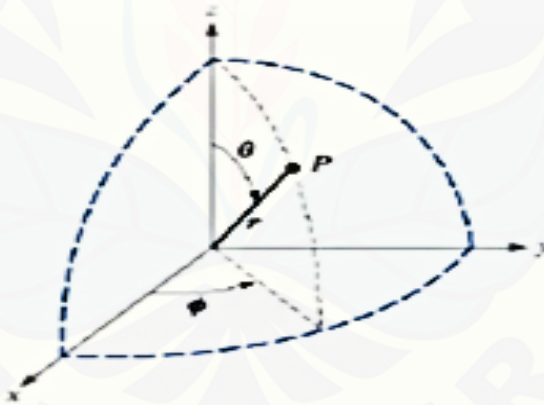
$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (2.24)$$

(Sugiono, 2016:404)

substitusi persamaan (2.24) ke persamaan (2.23) didapatkan

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \psi_{(r,\theta,\phi)} + [E - V(r)] \psi_{(r,\theta,\phi)} = 0 \quad (2.25)$$

dimana fungsi gelombang $\psi_{(r,\theta,\phi)}$ dideskripsikan sebagai fungsi yang bergantung pada jari-jari r dan fungsi yang bergantung pada sudut polar θ dan sudut azimut ϕ .



Gambar 2.1 Koordinat Bola: jari-jari r , sudut polar θ , dan sudut azimut ϕ

Sehingga untuk menyelesaikan persamaan (2.25) dalam hal ini dapat menggunakan metode separasi variabel atau pemisahan variabel

$$\psi_{(r,\theta,\phi)} = R(r)Y(\theta, \phi) \quad (2.26)$$

substitusi persamaan (2.26) kedalam persamaan (2.25) didapatkan

$$\frac{1}{r^2} \left[Y(\theta, \phi) \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + \frac{R(r)}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y(\theta, \phi)}{\partial \theta} \right) + \frac{R(r)}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} \right] + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(r)] R(r) Y(\theta, \phi) = 0 \quad (2.27)$$

kemudian tiap suku pada persamaan (2.27) dikalikan dengan r^2 dan dibagi dengan $R(r)Y(\theta, \phi)$ didapatkan

$$\frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{Y(\theta, \phi) \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y(\theta, \phi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{Y(\theta, \phi) \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} + \frac{2mr^2}{\hbar^2} [E - V(r)] = 0 \quad (2.28)$$

(Griffith, 2005:134)

atau dapat dituliskan

$$\left[\frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + \frac{2mr^2}{\hbar^2} [E - V(r)] \right] + \left[\frac{1}{Y(\theta, \phi) \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y(\theta, \phi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{Y(\theta, \phi) \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} \right] = 0 \quad (2.29)$$

Untuk persamaan (2.29) terbagi atas dua suku, dimana untuk suku pertama hanya bergantung pada arah radial $R(r)$ saja dan untuk suku yang kedua hanya bergantung pada arah angular $Y(\theta, \phi)$ saja. Sehingga dalam hal ini penjumlahan dari masing-masing suku akan selalu tetap (sama dengan konstanta). Apabila dipilih konstanta pemisah berharga $l(l + 1)$, maka persamaan (2.29) dapat dipisah menjadi bagian radial yaitu suku yang hanya bergantung pada jari-jari r sebagai berikut

$$\frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + \frac{2mr^2}{\hbar^2} [E - V(r)] = l(l + 1) \quad (2.30)$$

dan bagian angular yaitu suku yang bergantung sudut θ dan sudut ϕ berikut

$$\frac{1}{Y(\theta, \phi) \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y(\theta, \phi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{Y(\theta, \phi) \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} = -l(l + 1) \quad (2.31)$$

2.3 Persamaan Schrodinger Atom Hidrogen

Atom hidrogen merupakan suatu atom yang paling sederhana dikarenakan hanya memiliki sebuah proton yang dalam hal ini sebagai inti dan sebuah elektron. Elektron atom hidrogen berputar disekeliling inti (proton) yang memiliki massa lebih besar dari pada massa elektron dengan besar perbandingannya adalah m_p (massa proton) = 1836 m_e (massa elektron). Maka mengakibatkan inti (proton) relatif diam tidak bergerak. Pada pembahasan ini, diasumsikan proton diam dipusat koordinat dan elektron bergerak mengelilinginya dibawah pengaruh

medan atau gaya coulomb. Dikarenakan dalam hal ini proton dianggap diam, maka kontribusi energi sistemnya hanya diberikan oleh elektron yaitu energi kinetik ($K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}$) serta energi potensial yang dalam hal ini untuk atom hidrogen yang memiliki nomer atom sama dengan 1 ($Z = 1$) yaitu,

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2.32)$$

Atau dengan kata lain, untuk atom – atom yang sifatnya hidrogenik maka juga dapat ditulis:

$$V(r) = -\frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Variabel V merupakan interaksi energi antara elektron dan nukleus yang diberikan oleh formulasi coulomb (Metiu, 1940:296). Karena $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ maka persamaan 2.32 juga dapat ditulis:

$$V(r) = -\frac{ke^2}{r} \quad (\text{Anderson, 1982:187})$$

$$E = H = \frac{p^2}{2m_e} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2.33)$$

Dengan demikian, persamaan Schrodinger untuk atom hidrogen:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right\} \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad (2.34)$$

Diketahui bahwa suatu sistem hidrogen berbentuk simetri bola, analisis menjadi lebih sederhana bila operator Laplace ∇^2 diungkapkan dalam koordinat bola, dalam hal ini operator Laplace diberikan:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi^2} \quad (2.35)$$

(Supriadi et al, 2018: 2)

Di dalam koordinat bola (r, θ, φ), variabel r merupakan persamaan radial, θ merupakan persamaan polar dan φ merupakan persamaan azimuth. Kemudian persamaan (2.34) menjadi:

$$\frac{\hbar^2}{2m_e r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} \psi_{(r,\theta,\varphi)} +$$

$$(E - V)\psi_{(r,\theta,\varphi)} \quad (2.36)$$

Karena atom Hidrogen terdiri dari sistem 2 partikel dengan gaya sentral, maka persamaan 2.36 dapat dituliskan:

$$\frac{\hbar^2}{2\mu r_c^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r_c} \left(r_c^2 \frac{\partial}{\partial r_c} \right) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} \psi_{(r,\theta,\varphi)} + (E - V)\psi_{(r,\theta,\varphi)} \quad (2.37)$$

Dengan μ adalah massa tereduksinya yang dapat dinyatakan sebagai:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (2.38)$$

(Kozlowski et al, 2010)

Kemudian r_c adalah posisi dari pusat massa sistem yang dalam hal ini dinyatakan sebagai:

$$r_c = \frac{(r_1 m_1 + r_2 m_2)}{(m_1 + m_2)} \quad (2.39)$$

Lalu untuk memperoleh solusi untuk persamaan (2.37) dilakukan pemisahan antara variabel $\psi(\vec{r}) = \psi(r, \theta, \varphi)$:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

atau dituliskan sebagai berikut:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R\Theta\Phi \quad (2.40)$$

Persamaan 2.40 disubstitusikan ke dalam persamaan (2.37) kemudian dikalikan $\left(\frac{2\mu r_c^2}{\hbar^2}\right)$ didapatkan:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial r_c} \left(r_c^2 \frac{\partial}{\partial r_c} \right) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} R\Theta\Phi + \frac{2\mu r_c^2}{\hbar^2} E R\Theta\Phi -$$

$$\frac{2\mu r_c^2}{\hbar^2} V R\Theta\Phi = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r_c} \left(r_c^2 \frac{\partial R\Theta\Phi}{\partial r_c} \right) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial R\Theta\Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 R\Theta\Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{2\mu r_c^2}{\hbar^2} (E - V) R\Theta\Phi = 0$$

$$\frac{d}{dr_c} \left(r_c^2 \frac{dR}{dr_c} \right) \Theta\Phi + \frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) R\Phi + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} R\Theta + \frac{2\mu r_c^2}{\hbar^2} (E - V) R\Theta\Phi = 0$$

Selanjutnya setiap suku dari persamaan diatas dibagi dengan $R\Theta\Phi$ maka diperoleh:

$$\frac{d}{dr_c} \left(r_c^2 \frac{dR}{dr_c} \right) \frac{\Theta\Phi}{R\Theta\Phi} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \frac{R\Phi}{R\Theta\Phi} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} \frac{R\Theta}{R\Theta\Phi} + \frac{2\mu r_c^2}{\hbar^2} (E - V) \frac{R\Theta\Phi}{R\Theta\Phi} = 0$$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr_c} \left(r_c^2 \frac{dR}{dr_c} \right) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \frac{2\mu r_c^2}{\hbar^2} (E - V) = 0 \quad (2.41)$$

Pada persamaan 2.41 dapat diketahui bahwa suku pertama dan suku keempat dalam hal ini hanya bergantung pada jari-jari r , serta suku kedua dan ketiga hanya bergantung sudut θ dan φ . Jika masing masing suku (suku pertama, kedua, ketiga dan keempat) sama dengan konstan maka penjumlahan suku-suku yang hanya bergantung pada jari-jari dan dari dua sudut ini berarti akan selalu sama dengan nol untuk sembarang nilai r , θ , dan φ . Suku yang hanya bergantung jari-jari akan menjadi:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr_c} \left(r_c^2 \frac{dR}{dr_c} \right) + \frac{2\mu r_c^2}{\hbar^2} (E - V) = l(l + 1) \quad (2.42)$$

Sedangkan suku yang hanya mengandung sudut θ dan φ dapat dituliskan menjadi:

$$\frac{1}{\Theta(\theta) \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta(\theta)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\Phi(\varphi) \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} = -l(l + 1) \quad (2.43)$$

Dikalikan dengan $\sin^2 \theta$, persamaan 2.32 menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \theta}{\Theta(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta(\theta)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} &= -l(l + 1) \sin^2 \theta \\ \frac{\sin \theta}{\Theta(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta(\theta)}{\partial \theta} \right) + l(l + 1) \sin^2 \theta &= -\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Berikut suku yang hanya bergantung pada sudut azimut ϕ dan selanjutnya tetapkan masing-masing bagian dengan konstanta m^2 yaitu

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2 \quad (2.45)$$

Atau

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + m^2 \Phi = 0 \quad (2.46)$$

Sehingga

$$\frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + l(l + 1) \sin^2 \theta = m^2 \quad (2.47)$$

Atau setelah dikalikan dengan $\Theta / \sin^2 \theta$ diperoleh:

$$\frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left\{ l(l + 1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right\} \Theta = 0 \quad (2.48)$$

Sehingga dari penjabaran – penjabaran tersebut, untuk persamaan 2.36 dapat dipisah menjadi tiga persamaan differensial biasa. selanjutnya, akan dipaparkan mengenai solusi persamaan azimut, persamaan polar dan persamaan radial (Purwanto, 2016).

2.4 Persamaan Schrodinger Atom Deuterium ${}^2_1\text{H}$

Persamaan Schrodinger atom Deuterium sama seperti persamaan Schrodinger atom Berelektron tunggal dalam hal ini sama seperti atom hidrogen karena deuterium sendiri merupakan salah satu dari tiga bentuk isotop atom hidrogen yang sifatnya hidrogenik dengan terdiri dari 3 persamaan yaitu persamaan radial yang tertulis pada persamaan 2.42, persamaan azimut yang tertulis pada persamaan 2.46 , dan persamaan polar pada persamaan 2.44.

2.5 Fungsi Persamaan Schrodinger Atom Deuterium

Fungsi persamaan Schrodinger atom deuterium merupakan solusi dari persamaan Schrodinger yang terdiri dari fungsi persamaan radial, azimut dan polar yang didapatkan dari metode pemisahan variabel.

2.5.1 Fungsi Persamaan Koordinat Azimut (ϕ)

Persamaan azimut adalah persamaan yang merepresentasikan suatu gerak angular (rotasi) pada sumbu z (sudut ϕ) (Sugiyono, 2016:410).

solusi untuk persamaan azimut ϕ adalah

$$\Phi = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{\pm im\phi} \quad (2.49)$$

Bilangan kuantum m disebut juga *bilangan kuantum magnetik* (Purwanto, 2006:157).

2.5.2 Fungsi Persamaan Koordinat Polar

$$\theta_{lm}(\theta) = (-1)^{(m+|m|)/2} \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} F_l^m(\cos\theta) \quad (2.50)$$

Untuk l tertentu m dapat berharga

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$$

Bilangan bulat l disebut sebagai *bilangan kuantum orbital* (Purwanto, 2006: 160).

Persamaan ini menggambarkan elektron bergerak secara periodik didalam ruang tiga dimensi.

2.5.3 Fungsi Persamaan Koordinat Radial

Solusi persamaan radial didapatkan:

$$R_{nl} = \sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n((n+l)!)^3}} \left(\frac{2r}{na_0}\right)^l e^{-\frac{r}{na_0}} L_{n+l}^{2l+1} \left(\frac{2r}{na_0}\right) \quad (2.51)$$

(Singh, 2009:237).

2.6 Bilangan Kuantum Atom Deuterium

Persamaan Schrodinger dalam koordinat bola (r, θ, ϕ) atau tiga dimensi dalam pemecahan persoalannya membutuhkan tiga bilangan kuantum untuk mencirikan semua pemecahannya. Oleh karena itu, semua fungsi atom deuterium akan diperoleh oleh ketiga bilangan kuantum. Bilangan kuantum pertama, n berkaitan dengan pemecahan fungsi radial. Bilangan n ini disebut bilangan kuantum utama yang digunakan pula untuk menamai tingkat-tingkat energi pada atom Bohr. Pemecahan bagi fungsi polar, $\Theta(\theta)$, memberikan bilangan kuantum l , dan bagi fungsi, $\phi(\phi)$, memberikan bilangan kuantum ketiga yaitu m (Krane, 1992:268).

a. Bilangan kuantum utama (n)

Bilangan kuantum utama dalam hal ini berfungsi untuk menentukan energi dari elektron dalam atom yang berisi satu elektron dan banyak elektron. Bilangan kuantum ini memiliki harga positif dan bernilai bulat dari 1 keatas. Semakin besar harga n , maka tenaga elektronnya akan makin besar (Sukardjo, 2013:472). Menentukan bilangan n adalah setara dengan memilih suatu tingkat energi tertentu, seperti halnya dengan atom Bohr. Selanjutnya, bila memecahkan persamaan Schrodinger, akan ditemukan bahwa semua tingkat energi terkuantisasinya sesuai dengan milik model Bohr.

$$E_n = -\frac{me^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 n^2} \quad (2.52)$$

Perhatikan bahwa energi pada persamaan 2.66 hanya bergantung kepada bilangan kuantum n , tidak bergantung pada bilangan kuantum l dan m (Krane, 1992:269).

b. Bilangan kuantum azimut atau sekunder (l)

Bilangan kuantum sekunder adalah bilangan kuantum yang menyatakan bentuk lintasan atau orbital dari elektron dan dapat juga menyatakan kecepatan sudut. Jadi, semakin besar bilangan kuantum sekunder (l) maka semakin besar pula kecepatan sudutnya. Bilangan kuantum ini bernilai bulat dari 0 hingga $n - 1$. Sebagai contoh, untuk $n = 2$ maka $l = 0$ dan $l = 1$. Besar dari momentum sudut elektron dapat dituliskan sebagai berikut :

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar \quad (2.53)$$

(Sukardjo, 2013:472).

Tabel 2.1 Notasi simbol keadaan atomik bilangan kuantum n dan l

Kulit Elektron	Bilangan kuantum utama (n)	Bilangan kuantum Azimuth (l)					
		0	1	2	3	4	5
		S	P	D	F	G	H
K	1	1s					
L	2	2s	2p				
M	3	3s	3p	3d			
N	4	4s	4p	4d	4f		
O	5	5s	5p	5d	5f	5g	

(Ohno, 2004:84).

c. Bilangan kuantum magnetik (m)

Bilangan kuantum magnetik menyatakan orientasi ruang orbital sehingga disebut juga bilangan kuantum orientasi orbital dan juga dapat menyatakan orientasi ruang orbital atau arah dari momentum sudut elektron L yang terkuantisasi. Bilangan kuantum ini memiliki nilai $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ untuk setiap nilai l . Sebagai contoh, untuk nilai $l = 1$ maka nilai m adalah $-1, 0, +1$.

Keadaan dasar memiliki $n = 1$, karena itu $l = 0$ pada keadaan ini nilai m yang diperkenankan hanyalah $m = 0$. Jadi, keadaan dasar memiliki bilangan kuantum $(1, 0, 0)$. Keadaan eksitasi pertama memiliki $n = 2$ maka $l = 0$ dan 1 . Nilai m untuk $l = 0$ adalah $m = 0$, sedangkan untuk $l = 1$ nilai $m = -1, 0, +1$. Dengan demikian himpunan bilangan kuantum yang mungkin bagi tingkat ini adalah $(2, 0, 0)$, $(2, 1, 1)$, $(2, 1, 0)$, dan $(2, 1, -1)$. Semua keadaan ini memiliki $n = 2$ dan karena itu semuanya memiliki energi yang sama, karena energinya hanya bergantung pada n . Dengan demikian semua keadaan ini *tergenerasi*, dan $n = 2$

tergenerasi rangkap empat. Pada umumnya, tingkat ke- n tergenerasi rangkap n^2 (Krane, 1992:2).

2.7 Probabilitas dan Nilai Ekspektasi Fungsi Radial Atom Hidrogenik

Untuk membuktikan bahwa partikel benar-benar berada dalam ruangan maka diperlukan normalisasi terhadap fungsi gelombang Ψ , yaitu

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(r)|^2 dr = 1 \quad (2.54)$$

(Beiser, 1990:169).

Persamaan diatas memiliki arti fisis bahwa peluang kebolehdjian P untuk menentukan partikel adalah 1 (100%), yang dalam hal ini kejadian yang pasti terjadi. karena peluang kebolehdjian $P =$ fungsi gelombang $|\Psi|^2$, Sehingga dalam koordinat bola elemen volum dV dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$dV = r \sin\theta dr d\theta d\phi \quad (\text{Vaughn, 2007: 134}).$$

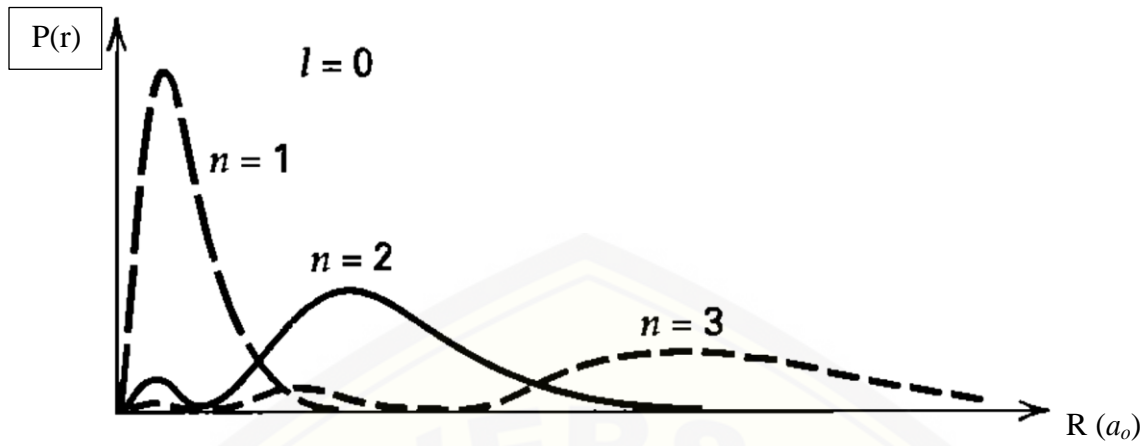
sehingga

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi^* \Psi r^2 dr \quad (2.55)$$

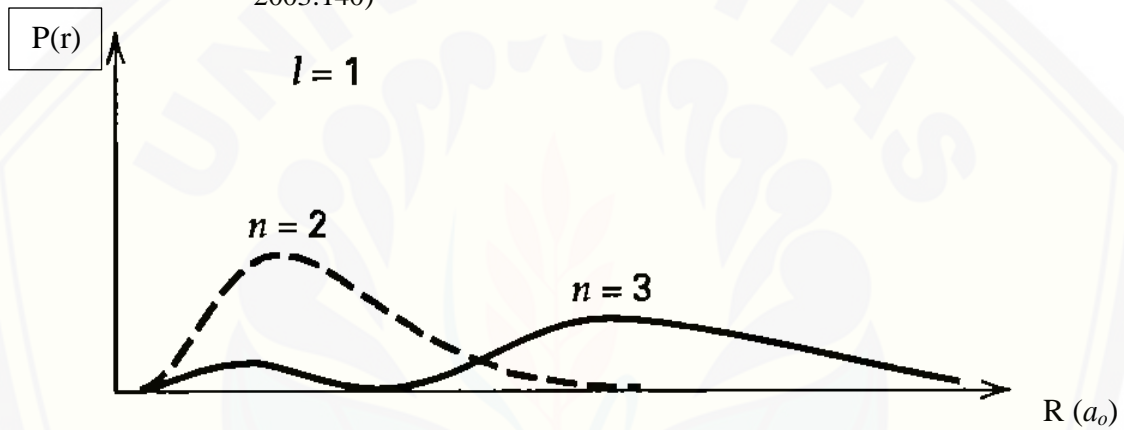
Substitusi persamaan (2.55) maka didapatkan persamaan probabilitas sebagai berikut:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} r^2 R^2 dr \quad (2.56)$$

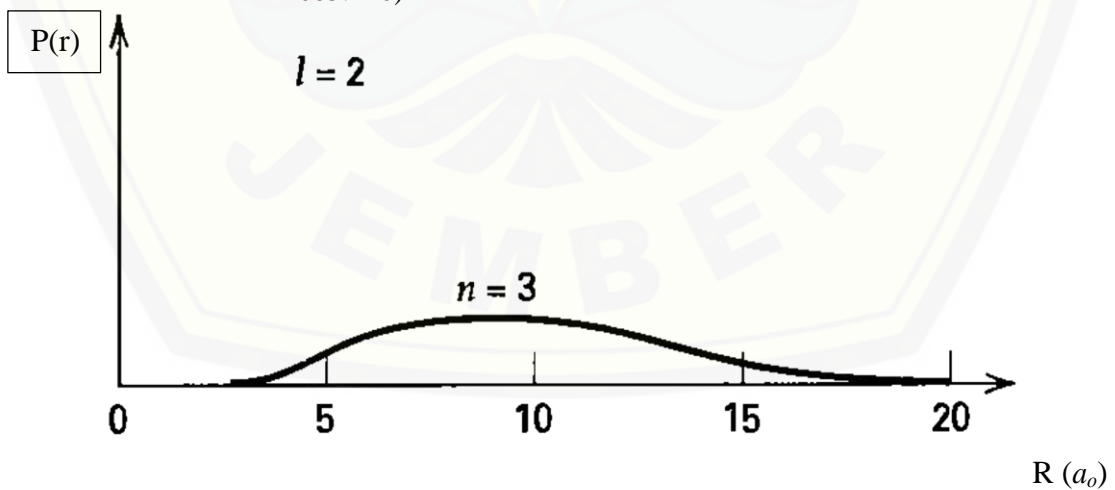
Apabila persamaan diatas sama dengan nol maka artinya partikel tidak dapat ditemukan dalam ruangan tersebut. Berikut ini adalah grafik probabilitas radial untuk atom hidrogen dengan bilangan kuantum $n \leq 3$



Gambar 2.2 Grafik rapat probabilitas radial untuk $l = 0$ (Gasiorowicz, 2003:140)



Gambar 2.3 Grafik rapat probabilitas radial untuk $l = 1$ (Gasiorowicz, 2003:140)



Gambar 2.4 Grafik rapat probabilitas radial untuk $l = 2$ (Gasiorowicz, 2003:140)

Sekali persamaan Schrödinger telah dipecahkan untuk sebuah partikel dalam suatu situasi fisis, fungsi gelombang yang dihasilkannya mengandung semua informasi partikel itu yang diizinkan oleh prinsip ketidakpastian. Informasi mengenai kedudukan sebuah elektron dapat dicari dari harga ekspektasi dengan menggunakan fungsi gelombang Ψ dengan menganggap bahwa elektron berada sepanjang sumbu r maka harga ekspektasi kedudukan elektron adalah

$$\langle r \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\Psi|^2 dx \quad (2.57)$$

(Beiser, 1990:175).

Untuk gerak elektron dalam tiga dimensi maka persamaan harga ekspektasinya adalah :

$$\langle r \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} r |\Psi|^2 dr \quad (2.58)$$

Dengan $dv = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$ dan $\Psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ sehingga persamaan Tersebut menjadi:

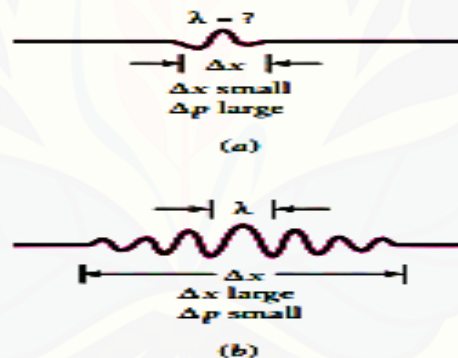
$$\langle r \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} r^3 |\Psi|^2 dr \quad (2.59)$$

Dalam persamaan – persamaan probabilitas dan ekspektasi pada atom hidrogen tersebut memiliki arti fisis bahwa nilai probabilitas dan nilai ekspektasi tidak bergantung pada fungsi sudut (fungsi Azimuth dan fungsi Polar) tetapi hanya bergantung pada fungsi Radial. Semakin besar bilangan kuantum utama n dan bilangan kuantum l mengakibatkan nilai ekspektasi fungsi gelombang radial semakin kecil, hal ini akan menyebabkan elektron semakin sulit bahkan mulai tidak ditemukan lagi untuk bilangan kuantum yang semakin besar (Hermanto, 2016: 801).

Dalam hal ini, setelah diketahui untuk probabilitas dan nilai ekspektasi dari atom hidrogen maka selanjutnya akan mencari probabilitas, nilai ekspektasi dan nilai ekspektasi kuadrat pada atom Deuterium untuk berbagai keadaan terhadap posisi guna merumuskan ketidakpastian momentum dengan pendekatan ketidakpastian Heisenberg pada atom Deuterium (2_1H).

2.8 Ketidakpastian Heisenberg Untuk Atom Hidrogen

Prinsip Ketidakpastian Heisenberg berangkat dari persoalan guna mencari suatu besaran yang dalam hal ini mampu menampung dan merepresentasikan sifat – sifat dari suatu partikel maupun sifat – sifat gelombangnya. Dalam hal ini kuantitas tersebut haruslah bersifat seperti gelombang namun tidak menyebar melainkan terkurung di dalam ruang. Hal ini dipenuhi oleh suatu paket gelombang (gelombang grup) yang merupakan kumpulan gelombang dan terkurung di dalam ruang tertentu serta menganggap partikel yang bergerak sebagai suatu kelompok gelombang (gelombang grup) dimana dalam hal ini bahwa ada batas mendasar pada keakuratan untuk mengukur sifat "partikel" seperti posisi dan momentumnya. Partikel yang sesuai dengan suatu gelombang grup dapat ditemukan di mana saja di dalam grup pada waktu tertentu. Dalam hal ini dapat dilihat berdasarkan gelombang grup de broglie pada gambar 2.5

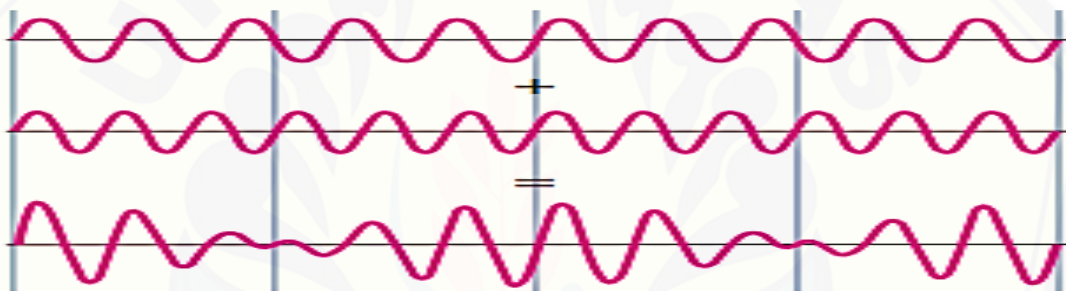


Gambar 2.5 (a). Grup gelombang de Broglie yang sempit (rapat) (b). Grup gelombang lebar (renggang) (Beiser, 2003: 108).

Berdasarkan kedua gelombang grup tersebut, dalam hal ini untuk kedua pulsa memiliki tingkat keakuratan yang berbeda – beda yang disebabkan karena perbedaan kerapatan pulsanya. Dalam hal ini untuk pulsa yang rapat akan memiliki frekuensi tinggi sehingga ketidakpastian posisi dalam mengukur partikel (Δx) akan semakin teliti namun panjang gelombang atau ketidakpastian untuk momentumnya (Δp) tidak akurat karena tidak ada cukup gelombang untuk mengukurnya secara akurat. Sedangkan untuk pulsa yang renggang akan memiliki frekuensi rendah sehingga panjang gelombang atau dalam hal ini ketidakpastian

untuk momentumnya (Δp) dapat ditentukan dengan tepat tetapi tidak pada posisi partikel, sehingga ketidakpastian posisi dalam mengukur partikel (Δx) tidak akurat (Beiser, 2003: 108).

Menurut prinsip ketidakpastian Heisenberg pada pengukuran dalam dimensi partikel, menyatakan bahwa posisi dan momentum tidak bisa ditentukan pada saat yang bersamaan dan secara akurat, karena semakin kecil ketidakpastian (semakin besar kepastian) dalam mengukur posisi yang tepat, maka semakin tidak akurat momentum partikelnya, demikian sebaliknya. Analisis formal mendukung kesimpulan tersebut serta memungkinkan untuk meletakkannya secara kuantitatif. Contoh paling sederhana dari pembentukan gelombang grup yang ditunjukkan dalam gambar 2.6 berikut,



Gambar 2.6 Produk yang dihasilkan oleh superposisi dua gelombang dengan frekuensi berbeda (Beiser, 2003: 100).

Dalam menemukan kecepatan v_g yang digunakan oleh grup gelombang, maka dengan menganggap bahwa kelompok gelombang muncul dari kombinasi dua gelombang yang memiliki amplitudo A yang sama tetapi berbeda dengan jumlah dalam frekuensi sudut ($\Delta\omega$) dan jumlah Δk dalam jumlah gelombang. dapat mewakili gelombang asli dengan persamaan:

$$y_1 = A \cos(\omega t - kx) \quad (2.60)$$

$$y_2 = A \cos[(\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)x] \quad (2.61)$$

Perpindahan yang dihasilkan y setiap saat t dan posisi x adalah jumlah dari y_1 dan y_2 . Dengan bantuan identitas:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \quad (2.62)$$

dan hubungannya,

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta) \quad (2.63)$$

Sehingga didapatkan,

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 \\ &= 2 \cos \frac{1}{2} (2\omega + \Delta\omega) - (2k + \Delta k)x] \cos \frac{1}{2} (\Delta\omega t - \Delta k x) \end{aligned} \quad (2.64)$$

Karena $\Delta\omega$ dan Δk masing-masing kecil dibandingkan dengan ω dan k maka,

$$y = 2 \cos(\omega t - kx) \cos \left[\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x \right] \quad (2.65)$$

Persamaan (2.65) merupakan gelombang frekuensi sudut ω dan bilangan gelombang k yang telah menyimpannya dengan modulasi frekuensi sudut $\frac{1}{2} \Delta\omega$ dan gelombang bilangan $\frac{1}{2} \Delta k$. Efek modulasi adalah untuk menghasilkan kelompok gelombang yang berurutan. Sehingga kecepatan fase v_p adalah

$$v_p = \frac{\omega}{k} \quad (2.66)$$

dan kecepatan dari gelombang grup v_g adalah

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \quad (2.67)$$

Formalisasi untuk paket gelombang yang terlokalisasi dalam hal ini adalah suatu transformasi fourier,

$$f(x) = \int_0^{\infty} g(k) e^{ikx} dk \quad (2.68)$$



Gambar 2.7 Kelompok gelombang yang terisolasi

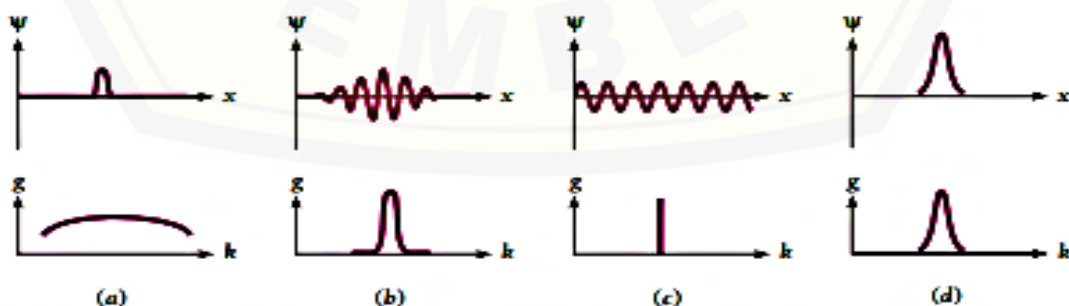
Dari gambar 2.7, diperoleh hasil dari superposisi jumlah gelombang tanpa batas dengan panjang gelombang berbeda. Semakin sempit grup gelombang, semakin besar kisaran panjang gelombang yang terlibat. Gelombang grup de Broglie yang sempit dengan demikian berarti posisi yang terdefinisi dengan baik (x lebih kecil) tetapi panjang gelombangnya tidak jelas dan p ketidakpastian besar dalam momentum partikel yang diwakilkan oleh kelompok. Grup gelombang lebar berarti momentum yang lebih tepat tetapi posisi yang kurang tepat (Beiser, 2003: 109).

Fungsi $g(k)$ menjelaskan bagaimana amplitudo gelombang yang berkontribusi $\Psi(x)$ bervariasi dengan bilangan gelombang k . Fungsi ini disebut transformasi Fourier dari $\Psi(x)$, dan ia menentukan grup gelombang sama lengkapnya dengan $\Psi(x)$. Gambar 2.8 berisi grafik transformasi Fourier dari pulsa dan grup gelombang. Sebagai perbandingan, transformasi Fourier dari kereta gelombang harmonik tanpa batas juga disertakan (Beiser, 2003: 109).

Pada dasarnya, bilangan gelombang yang diperlukan untuk mewakili grup gelombang memanjang dari $k = 0$ hingga $k = \infty$ (tak hingga), tetapi untuk grup yang panjang Δx nya terbatas, gelombang yang amplitudo $g(k)$ cukup besar memiliki bilangan gelombang yang berada dalam interval hingga Δk . Semakin sempit grup, semakin luas kisaran bilangan gelombang yang diperlukan untuk menggambarannya, dan sebaliknya (Beiser, 2003: 109).

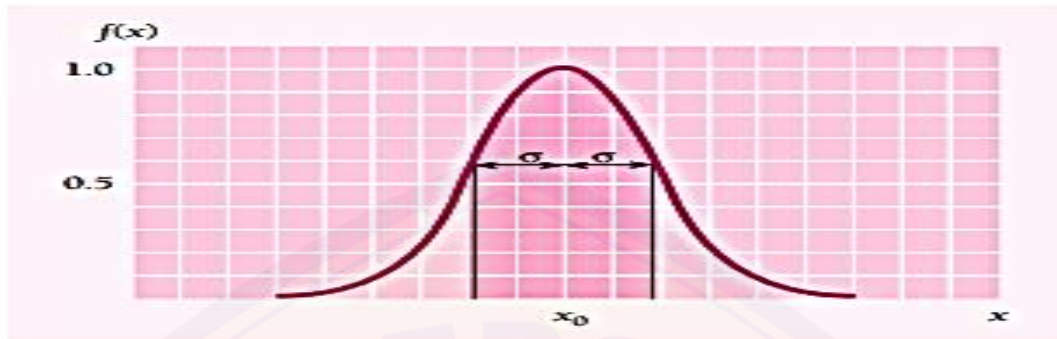
Hubungan antara jarak Δx dan penyebaran bilangan gelombang Δk tergantung pada bentuk grup gelombang dan pada bagaimana Δx dan Δk didefinisikan. Nilai minimum dari produk $\Delta x \Delta k$ terjadi ketika amplop grup memiliki bentuk lonceng yang akrab dengan fungsi Gaussian. Dalam hal ini transformasi Fourier kebetulan juga merupakan fungsi Gaussian. Jika Δx dan Δk diambil sebagai standar deviasi dari masing-masing fungsi $\Psi(x)$ dan $g(k)$, maka nilai minimum ini adalah $\Delta x \Delta k = 1/2$. Karena grup gelombang pada umumnya tidak memiliki bentuk Gaussian, lebih realistis untuk menyatakan hubungan antara Δx dan Δk sebagai

$$\Delta x \cdot \Delta k \geq \frac{1}{2}$$



Gambar 2.8 Fungsi gelombang dan transformasi Fourier untuk (a) pulsa, (b) kelompok gelombang, (c) kereta gelombang, dan (d) distribusi Gaussian. Gangguan singkat membutuhkan rentang frekuensi yang lebih luas untuk menggambarannya daripada gangguan berdurasi

lebih besar. Transformasi Fourier dari fungsi Gaussian juga merupakan fungsi Gaussian.



Gambar 2.9 Distribusi Gaussian. Probabilitas menemukan nilai x diberikan oleh fungsi Gaussian $f(x)$ (Beiser, 2003: 110).

Panjang gelombang de Broglie dari partikel momentum p adalah $\lambda = \frac{h}{p}$ dan nomor gelombang yang sesuai adalah

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi p}{h} \quad (2.69)$$

Karena itu, dalam hal jumlah gelombang, momentum partikel adalah

$$p = \frac{hk}{2\pi} \quad (2.70)$$

Karenanya ketidakpastian Δk dalam jumlah gelombang dari gelombang de Broglie yang terkait dengan partikel menghasilkan Δp ketidakpastian dalam momentum partikel sesuai dengan rumus,

$$\Delta p = \frac{h \Delta k}{2\pi} \quad (2.71)$$

$$\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2}, \Delta k \geq \frac{1}{2\Delta x} \text{ dan, } \Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$$

Semakin kita mengatur hal-hal yang menyebabkan Δx kecil, sesuai dengan grup gelombang sempit, maka Δp akan besar. Jika kita mengurangi Δp dalam beberapa cara, grup gelombang luas tidak dapat dihindari dan Δx akan menjadi besar. Kuantitas $\frac{h}{2\pi}$ sering muncul dalam fisika modern karena ternyata merupakan satuan dasar momentum sudut. Oleh karena itu biasanya disingkat $\frac{h}{2\pi}$ oleh simbol \hbar . \hbar dalam hal ini digunakan sebagai pengganti $\frac{h}{2\pi}$. Dalam hal, prinsip ketidakpastian menjadi

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (2.72)$$

(Beiser, 2003: 111).

Berbicara tentang ketidakpastian maka berbicara pula tentang probabilitas (kemungkinan), baik probabilitas untuk mendapatkan partikel pada posisi tertentu, atau probabilitas untuk menentukan momentum pada partikel. Berdasarkan teori kuantum, kedudukan elektron dalam suatu atom tidak dapat ditentukan dengan pasti, yang dapat ditentukan adalah probabilitas menemukan elektron sebagai fungsi jarak dari inti atom. Heisenberg menyatakan bahwa hubungan ketidakpastian momentum dan posisi sebagai berikut:

$$\Delta P_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}, \text{ dengan } \hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,054 \times 10^{-34} \text{ Js} \quad (2.73)$$

Di mana Δx adalah ketidakpastian dalam pengukuran x , ΔP_x adalah ketidakpastian dalam pengukuran momentum pada komponen x , dan h adalah konstanta Plank h dibagi dengan 2π . Hal ini mengimplikasikan bahwa semakin akurat pengukuran posisi, semakin tidak tepat pengukuran momentum, dan sebaliknya. Karena itu, secara fisik tidak mungkin untuk mengukur dengan tepat posisi dan momentum suatu partikel pada saat yang bersamaan. Dengan kata lain, jika pengukuran dari posisi partikel dilakukan dengan Δx dan sebuah pengukuran yang bersamaan dari komponen x dalam hal ini untuk momentumnya juga dilakukan dengan ketidakpastian ΔP_x , maka hasil kali dari dua ketidakpastian tersebut tidak mungkin lebih kecil dari $\frac{\hbar}{2}$. Selain prinsip ketidakpastian antara posisi partikel dengan momentum partikel, prinsip ketidakpastian juga dapat ditinjau antara hubungan energi dengan waktu yang dinyatakan sebagai berikut,

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}, \text{ dengan } \Delta E = h \Delta f \quad (2.74)$$

(Barukčić, 2016: 883).

Namun dalam penelitian ini lebih dikhususkan untuk membahas hubungan ketidakpastian pada momentum terhadap posisinya dengan pendekatan ketidakpastian Heisenberg pada atom Deuterium (2_1H).

Tetapan Planck berharga sangat kecil hanya $6,63 \times 10^{-34}$ Js sehingga pembatasan yang ditimbulkan oleh prinsip ketidakpastian hanya penting dalam gejala atomik. Dalam skala ini, prinsip ini sangat menolong untuk mengerti banyak gejala seperti gejala pada atom – atom yang sifatnya hidrogenik misalnya

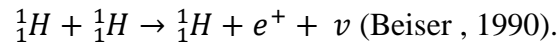
gejala pada atom deuterium. Dengan mengetahui fungsi gelombang dari atom deuterium yang merupakan salah satu dari isotop hidrogen sehingga bersifat hidrogenik, maka dalam hal ini dapat didefinisikan fungsi rapat gelombangnya termasuk dapat menghitung rapat peluangnya, serta dapat menghitung nilai ekspektasi posisi maupun ekspektasi kuadrat posisinya dan momentum linear beserta ketidakpastiannya (Busch, 2007: 168).

Ketidakpastian dalam pengukuran posisi radial dan momentum radial, Δr dan ΔP_r , dan produk dari ketidakpastian, $\Delta r \cdot \Delta P_r$, untuk elektron dalam atom hidrogen yang sifatnya non-relativistik dalam hal ini bergantung pada bilangan kuantum n dan l , berbeda pada kasus osilator harmonik sederhana, di mana hanya satu bilangan kuantum n yang terlibat. Hal ini dapat dibayangkan, karena persamaan Schrodinger yang digunakan untuk deskripsi osilator harmonik sederhana adalah satu dimensi, sedangkan persamaan Schrodinger yang digunakan untuk deskripsi elektron dalam atom mirip hidrogen yang non-relativistik adalah tinjauannya secara tiga dimensi. Hasil dari penelitian untuk mengetahui ketidakpastian pada atom hidrogen ini yaitu diperoleh bahwa nilai dari Δr dan ΔP_r dalam atom hidrogen yang non-relativistik ditemukan bukan nol, tepat, dan pasti jika bilangan kuantum n dan l dari orbit elektronnya diketahui. Dari pengamatan ini menunjukkan bahwa kita dapat mengetahui pada saat yang sama nilai rata-rata posisi radial dan momentum radial, Δr dan ΔP_r , ketidakpastian dalam posisi radial dan momentum radial, Δr dan ΔP_r , dan produk dari ketidakpastian, $\Delta r \cdot \Delta P_r$, untuk elektron dalam atom hidrogen yang non-relativistik (Kuo, 2004: 438).

2.9 Atom Deuterium (2_1H)

Deuterium merupakan salah satu dari tiga bentuk isotop hidrogen yang terdiri dari protium, deuterium dan tritium. Atom deuterium 2_1H terbentuk dari reaksi fusi penggabungan dua buah inti atom dari suatu hidrogen ringan. Dalam proses penggabungan dua atom hidrogen ini dalam hal ini melibatkan perubahan sebuah proton menjadi sebuah neutron yang disertai dengan pancaran positron (partikel menyerupai elektron yang bersifat positif), sehingga atom

deuterium yang terbentuk terdiri dari 1 elektron, 1 proton, dan 1 neutron. Berikut ini reaksi pembentukan atom deuterium:



Deuterium dalam hal ini termasuk salah satu isotop stabil dengan kelimpahan alami di bumi yang kira-kira satu dari 6.500 atom hidrogen. Sehingga dalam hal ini, deuterium merupakan 0,015% dari semua hidrogen yang terbentuk secara alami (Krane, 1992:419). Deuterium memiliki muatan $+1,6 \times 10^{-19}$ C (Gautreau *et al*, 2006:146). Inti atom dari atom deuterium disebut dengan deuteron. Deuteron adalah inti dari atom deuterium sendiri yang dalam hal ini memiliki lebih dari satu penyusun yaitu terdiri atas sebuah proton dan sebuah neutron yang terikat membentuk sistem stabil. Inti atom deuterium bermuatan positif satu (+e) dengan massa rehat yaitu sebesar 2,013 553 u. Berikut adalah perbandingan yang menyatakan hubungan antara jumlah massa proton dan neutron:

Massa proton m_p	= 1,007 277 u
Massa neutron m_n	= 1,008 665 u
$m_p + m_n$	= 2,015 942 u
Massa deuteron m_d	= 2,013 553 u

Selisih massa disini biasa dikenal dengan energi ikat, dengan energi ikat dalam hal ini merupakan suatu energi yang diperlukan oleh atom guna memecah inti menjadi bagian penyusun-penyusunnya. Pada pemaparan massa proton, neutron, dan deuterium jumlah selisih massanya sebesar $= (m_p + m_n) - m_d = 0,002 389$ u. Besarnya Energi ikat deuteron yakni:

$$[(m_p + m_n) - m_d]c^2 = 0,002 389 \text{ u} \times 931,5 \text{ MeV}/c^2 = 2,225 \text{ MeV} \text{ (Kusminarto, 2011:160).}$$

Pemanfaatan atom Deuterium di dalam aplikasinya berperan dalam proses produksi air berat. Air berat ($D_2 O$) digunakan sebagai moderator neutron dalam reaksi fisi uranium. Fungsi moderator dalam hal ini berguna untuk memperlambat neutron dengan cara menyerap energi dan menumbuk neutron tanpa kecenderungan menyerap partikelnya (Beiser, 1990: 496). Salah satu contohnya dalam pembangkit listrik tenaga nuklir dengan reaktor tipe CANDU

menggunakan uranium sebagai bahan bakar dan air berat sebagai moderator neutron. Air berat dalam hal ini dimasukkan kedalam pipa kalandria yang terbuat dari bahan yang tidak menyerap neutron. Aplikasi isotop alam adalah salah satu metode yang digunakan sebagai tinjauan mengenai dinamika air dalam aspek hidrogeologi, khususnya mengenai asal usul air tanah. Isotop yang digunakan untuk mengetahui asal – usul air tanah adalah isotop stabil Deuterium (^2H atau D) dan isotop Oksigen (^{18}O) (Siftianida *et al*, 2016 : 98).



BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Jenis, Waktu dan Tempat Penelitian

3.1.1 Jenis Penelitian

Jenis penelitian ini adalah penelitian non eksperimen. Penelitian ini dilakukan dengan mengembangkan teori – teori yang sudah ada sebelumnya. Penelitian ini dilakukan untuk menghitung peluang kebolehdjian partikel berada pada jarak tertentu dalam suatu ruang pada atom, menghitung nilai ekspektasi terhadap posisi untuk mengetahui seberapa sering elektron dapat muncul, dan mengetahui ketidakpastian momentum radial atom Deuterium (2_1H) dengan menggunakan pendekatan ketidakpastian Heisenberg pada bilangan kuantum $n \leq 3$

3.1.2 Tempat dan Waktu Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan di Laboratorium Fisika Lanjut, Program Studi Pendidikan Fisika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember pada semester 7 yaitu bulan Oktober hingga bulan November 2019.

3.1.3 Objek Penelitian

Objek dalam penelitian ini adalah materi fisika kuantum pokok bahasan ketidakpastian momentum radial dengan pendekatan ketidakpastian Heisenberg untuk atom Deuterium (2_1H) pada bilangan kuantum $n \leq 3$.

3.2 Definisi Operasional

Agar tidak terjadi kesalahan dalam mengartikan istilah-istilah dalam penelitian ini, maka perlu diberikan suatu definisi operasional terkait yang mengenai variabel penelitian ini. Adapun variabel-variabel yang akan diteliti dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

3.2.1 Fungsi Gelombang Radial Atom Deuterium

Fungsi gelombang radial atom deuterium adalah suatu fungsi gelombang 3 dimensi yang merupakan solusi radial $R_{nl}(r)$ yang bergantung pada jari-jari (r) dan mengandung bilangan kuantum utama (n) dan bilangan kuantum azimut (l).

3.2.2 Bilangan Kuantum Atom Deuterium

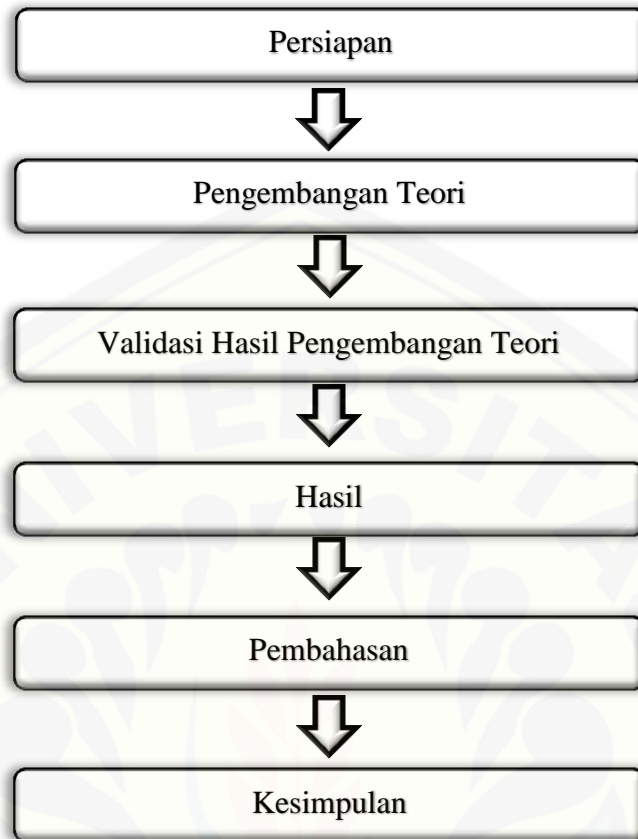
Untuk Persamaan Schrodinger dalam koordinat bola (r, θ, ϕ) atau tiga dimensi dalam pemecahan persoalannya membutuhkan tiga bilangan kuantum untuk mencirikan semua pemecahannya yaitu:

- Bilangan kuantum utama ($n = 1, 2, 3$)
- Bilangan kuantum azimut ($l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$)
- Bilangan kuantum magnetik ($m = -l, \dots, 0, \dots, +l$)

3.2.3 Probabilitas, Nilai Ekspektasi, dan Ketidakpastian Momentum Fungsi Atom Hidrogenik

Dalam menentukan peluang kebolehjadian partikel berada pada jarak tertentu dalam suatu ruang maka akan dicari menggunakan Probabilitas terhadap posisi dan untuk mengetahui seberapa sering elektron dapat muncul dalam hal ini dengan mencari nilai ekspektasi terhadap posisinya. Untuk persamaan – persamaan probabilitas dan ekspektasi pada atom hidrogenik memiliki arti fisis bahwa nilai probabilitas dan nilai ekspektasi tidak bergantung pada fungsi sudut (fungsi Azimuth dan fungsi Polar) tetapi hanya bergantung pada fungsi Radial saja, sehingga dalam penelitian ini lebih difokuskan pada fungsi gelombang radialnya. Dalam penelitian ini selain meninjau mengenai karakteristik dari probabilitas posisi dan ekspektasi posisi pada atom deuterium, juga meninjau ketidakpastian momentum radialnya dengan menggunakan pendekatan ketidakpastian Heisenberg.

3.3 Langkah Penelitian



Gambar 3.1 Bagan Langkah-Langkah Penelitian

3.3.1 Persiapan

Pada tahap ini yaitu mempersiapkan bahan-bahan yang diperlukan untuk dijadikan informasi dengan cara mengumpulkan buku-buku tentang fisika modern, fisika kuantum, fisika matematika, fisika atom, artikel, jurnal, dan berbagai sumber berskala nasional hingga internasional yang relevan dan terkait dengan ketidakpastian momentum atom Deuterium (2_1H) dengan menggunakan pendekatan ketidakpastian Heisenberg pada bilangan kuantum $n \leq 3$.

3.3.2 Pengembangan Teori

Pada tahap ini peneliti mengembangkan teori yang sudah ada dalam buku literatur maupun jurnal mengenai ketidakpastian dalam posisi dan momentum dari sebuah elektron dalam osilator harmonik maupun dalam atom hidrogen. Sehingga dalam hal ini untuk teori yang dikembangkan adalah ketidakpastian momentum

radial atom Deuterium (2_1H) dengan menggunakan pendekatan ketidakpastian Heisenberg pada bilangan kuantum $n \leq 3$. Pengembangan teori diawali dengan mencari nilai probabilitas posisi elektron dari fungsi gelombang radial atom deuterium yang telah ternormalisasi sebagai berikut:

- a. Probabilitas (peluang kebolehjadian) fungsi radial untuk menemukan keberadaan elektron atom hidrogenik

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi^* \Psi r^2 dr$$

Sehingga,

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} r^2 R^2 dr$$

dengan P adalah peluang kebolehjadian, r adalah posisi elektron di dalam atom, dan R adalah fungsi gelombang radial.

Selanjutnya menghitung nilai ekspektasi fungsi radial untuk atom deuterium (2_1H) pada bilangan kuantum $n \leq 3$

- b. Nilai ekspektasi (nilai harap atau nilai rata-rata) terhadap posisi radial untuk mengetahui seberapa sering elektron dapat muncul

$$\langle r \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} r^3 |\Psi|^2 dr$$

dengan $\langle r \rangle$ adalah nilai ekspektasi posisi

Selanjutnya menghitung nilai ketidakpastian posisi terlebih dahulu untuk mengetahui nilai ketidakpastian momentum dengan pendekatan ketidakpastian Heisenberg Atom Deuterium (2_1H) pada Bilangan Kuantum ($n \leq 3$)

- c. Ketidakpastian posisi radial atom Deuterium pada bilangan kuantum $n \leq 3$

$$\Delta r = \sqrt{\langle r^2 \rangle + \langle r \rangle^2}$$

dengan $\langle r^2 \rangle$ adalah nilai ekspektasi posisi kuadrat yang besarnya:

$$\langle r^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} r^4 |R|^2 dr$$

dan $\langle r \rangle^2$ adalah nilai kuadrat dari ekspektasi posisi.

- d. Ketidakpastian momentum radial dengan pendekatan ketidakpastian Heisenberg untuk atom Deuterium (2_1H) pada bilangan kuantum $n \leq 3$

$$\Delta P_r \Delta r \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta P_r = \frac{\hbar}{2\Delta r} \text{ dengan } \hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,054 \times 10^{-34} \text{ Js}$$

3.3.3 Validasi Hasil Pengembangan Teori

Pada tahap ini peneliti membandingkan nilai probabilitas posisi untuk menemukan keberadaan elektron, nilai ekspektasi posisi elektron, dan nilai ketidakpastian momentum radial atom Deuterium (2_1H) dengan menggunakan pendekatan ketidakpastian Heisenberg pada bilangan kuantum $n \leq 3$ dari hasil pengembangan teori dengan teori yang ada dalam literatur. Kemudian peneliti melakukan validasi menggunakan data dari beberapa buku, artikel, jurnal yang berskala nasional maupun internasional, dan dari penelitian sebelumnya yang relevan dengan topik penelitian. Kemudian melakukan tahap simulasi sebagai tahap perhitungan untuk mengetahui nilai probabilitas, nilai ekspektasi, dan nilai ketidakpastian momentum radial atom Deuterium (2_1H) dengan menggunakan pendekatan ketidakpastian Heisenberg pada bilangan kuantum $n \leq 3$ pada atom deuterium dengan menggunakan software MATLAB R2014a. Berikut merupakan beberapa validasi antara hasil perhitungan manual peneliti dengan materi yang terdapat dalam literatur serta dari hasil simulasi, dan untuk lebih lengkapnya terdapat pada lembar lampiran.

a. Validasi Nilai Probabilitas Posisi

Tabel 3.1 Nilai probabilitas posisi radial untuk menemukan keberadaan elektron atom Deuterium (2_1H) pada bilangan kuantum $n \leq 3$

r (posisi elektron)	n = 1	n = 2		n = 3		
	l = 0	l = 0	l = 1	l = 0	l = 1	l = 2
a_o	0.3233235838	0.0343164669	0.0036598468	0.0098663607	0.0012585444	0.0000064984
$5 a_o$	0.9972306042	0.3489458712	0.5595067149	0.0899026550	0.1075738146	0.0532010158
$10 a_o$	0.9999995446	0.9404806921	0.9707473119	0.1783256640	0.2512581909	0.4995391337
$15 a_o$	1.0000000007	0.9980249035	0.9991433588	0.6315089479	0.7185254799	0.8698585791
$20 a_o$	1.0000000026	0.9999583217	0.9999830552	0.9175224491	0.9433451561	0.9787338768
$25 a_o$	1.0000000065	0.9999993180	0.9999997331	0.9878686687	0.9921927883	0.9974214702

b. Validasi Nilai Ekpektasi Posisi

Tabel 3.2 Nilai ekpektasi posisi radial (nilai harap atau nilai rata-rata) untuk mengetahui seberapa sering elektron dapat muncul dalam atom Deuterium (2_1H) pada bilangan kuantum $n \leq 3$

r (posisi elektron)	n = 1		n = 2		n = 3		
	l = 0	l = 0	l = 1	l = 0	l = 1	l = 2	
a_o	0.2143148092 a_o	0.0219590810 a_o	0.0029709240 a_o	0.0062697053 a_o	0.0010202642 a_o	0.0000056307 a_o	
5 a_o	1.4844959240 a_o	1.2514318521 a_o	1.9201967258 a_o	0.3070194213 a_o	0.3251827041 a_o	0.2187806725 a_o	
10 a_o	1.4999951943 a_o	5.3137346617 a_o	4.6645701856 a_o	1.0313769263 a_o	1.5889714943 a_o	3.6934050118 a_o	
15 a_o	1.4999999989 a_o	5.9677591190 a_o	4.9860378533 a_o	6.7585568628 a_o	7.4051820488 a_o	8.1876832106 a_o	
20 a_o	1.4999999987 a_o	5.9991150930 a_o	4.9996404557 a_o	11.6341201376 a_o	11.2230671557 a_o	10.0239291302 a_o	
25 a_o	1.4999999967 a_o	5.9999821232 a_o	4.9999930144 a_o	13.1687476650 a_o	12.2871724579 a_o	10.4299264090 a_o	

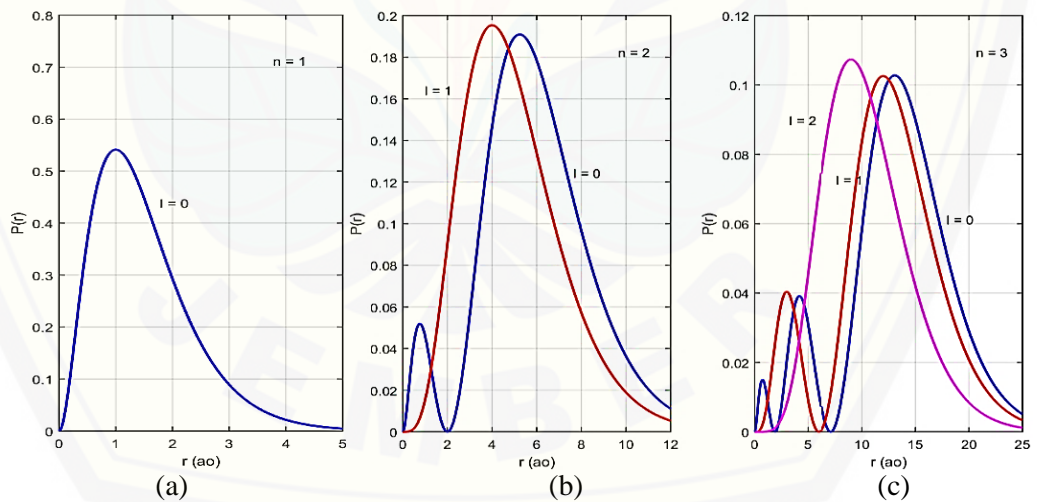
c. Ketidakpastian Momentum Radial

Tabel 3.3 Nilai ketidakpastian momentum radial atom hidrogen dengan menggunakan pendekatan ketidakpastian Heisenberg pada bilangan kuantum $n \leq 3$

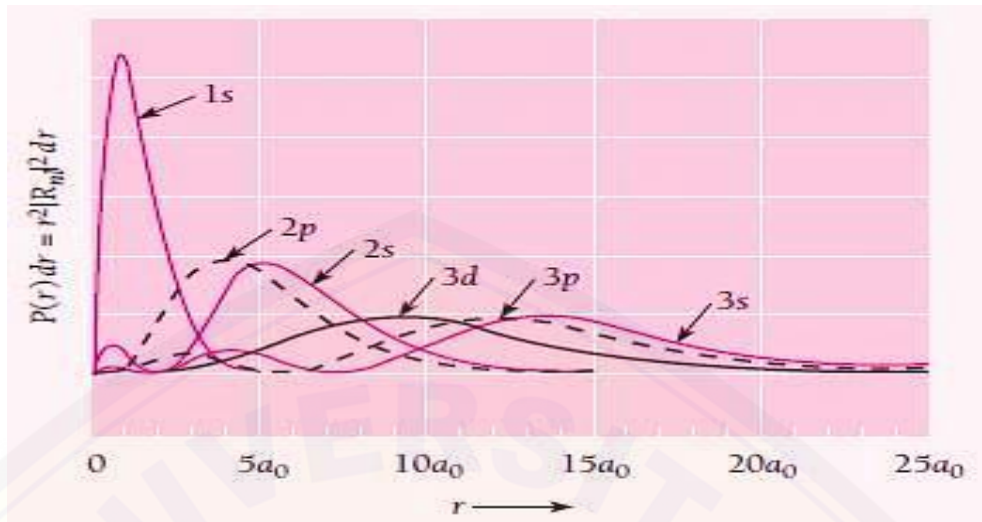
n	l	Δr	ΔPr
1	0	$0.866 \frac{a_0}{Z}$	0.577
2	0	$2.449 \frac{a_0}{Z}$	0.408
	1	$2.236 \frac{a_0}{Z}$	0.447
3	0	$4.975 \frac{a_0}{Z}$	0.369
	1	$4.873 \frac{a_0}{Z}$	0.39
	2	$3.696 \frac{a_0}{Z}$	0.378

(Kuo, 2004: 436).

d. Validasi grafik distribusi rapat probabilitas posisi untuk menemukan keberadaan elektron dan Validasi grafik momentum radial (ΔPr) pada setiap keadaan posisi elektron (r) untuk atom Deuterium (2_1H) pada bilangan kuantum $n \leq 3$

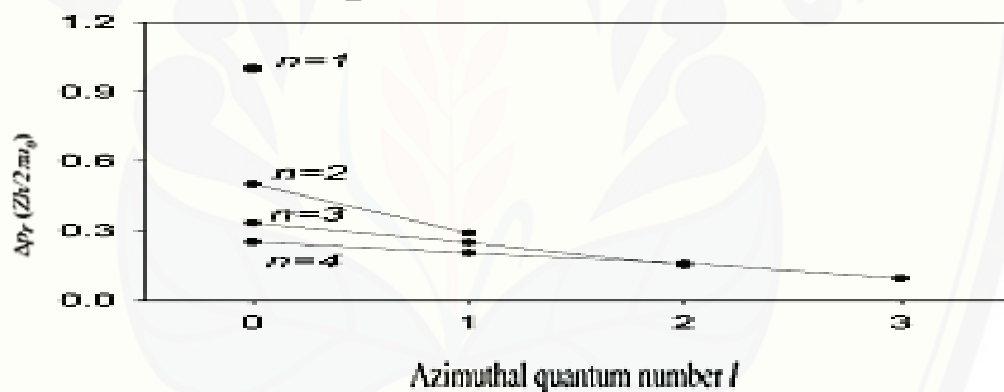


Gambar 3.2 Validasi grafik distribusi rapat probabilitas posisi untuk menemukan keberadaan elektron atom Deuterium pada (a). $n = 1$, (b). $n = 2$, dan (c). $n = 3$



(Beiser, 2003: 214)

Gambar 3.3 Validasi grafik distribusi rapat probabilitas posisi gabungan untuk menemukan keberadaan elektron atom Deuterium pada bilangan kuantum $n \leq 3$



Gambar 3.4 Validasi grafik momentum radial (ΔP_r) pada setiap keadaan bilangan kuantum azimuth (l) untuk atom deuterium $n \leq 3$

3.3.4 Hasil

Pada tahap ini peneliti telah memvalidasi hasil pengembangan teori untuk menghasilkan suatu produk berupa nilai ketidakpastian momentum radial atom Deuterium (2_1H) dengan menggunakan pendekatan ketidakpastian Heisenberg pada bilangan kuantum $n \leq 3$. Data hasil pengembangan teori disajikan dalam bentuk tabel sebagai berikut:

a. Nilai Probabilitas Posisi

Tabel 3.4 Data tabel hasil menentukan probabilitas posisi untuk menemukan keberadaan elektron atom Deuterium pada bilangan kuantum $n \leq 3$

r (posisi elektron)	n = 1	n = 2		n = 3		
	l = 0	l = 0	l = 1	l = 0	l = 1	l = 2
a_0						
$2 a_0$						
$3 a_0$						
$4 a_0$						
$5 a_0$						
$6 a_0$						
$7 a_0$						
$8 a_0$						
$9 a_0$						

b. Nilai Ekpektasi Posisi

Tabel 3.5 Data tabel hasil menghitung nilai ekpektasi posisi radial (nilai harap atau nilai rata-rata) untuk mengetahui seberapa sering elektron dapat muncul dalam atom Deuterium (2_1H) pada bilangan kuantum $n \leq 3$

r (posisi elektron)	n = 1	n = 2		n = 3		
	l = 0	l = 0	l = 1	l = 0	l = 1	l = 2
a_o						
$2 a_o$						
$3 a_o$						
$4 a_o$						
$5 a_o$						
$6 a_o$						
$7 a_o$						
$8 a_o$						
$9 a_o$						

c. Ketidakpastian Momentum Radial

Tabel 3.6 Data tabel hasil menghitung nilai ketidakpastian momentum radial atom Deuterium (2_1H) dengan menggunakan pendekatan ketidakpastian Heisenberg pada bilangan kuantum $n \leq 3$

n	l	r	Δr	Δp_r	$\Delta r \cdot \Delta p_r$	
1	0	a_0				
		$3a_0$				
		$5a_0$				
		$7a_0$				
		$9a_0$				
2	0	a_0				
		$3a_0$				
		$5a_0$				
		$7a_0$				
		$9a_0$				
	1	a_0				
		$3a_0$				
		$5a_0$				
		$7a_0$				
		$9a_0$				
3	0	a_0				
		$3a_0$				
		$5a_0$				
		$7a_0$				
		$9a_0$				
	1	a_0				
		$3a_0$				

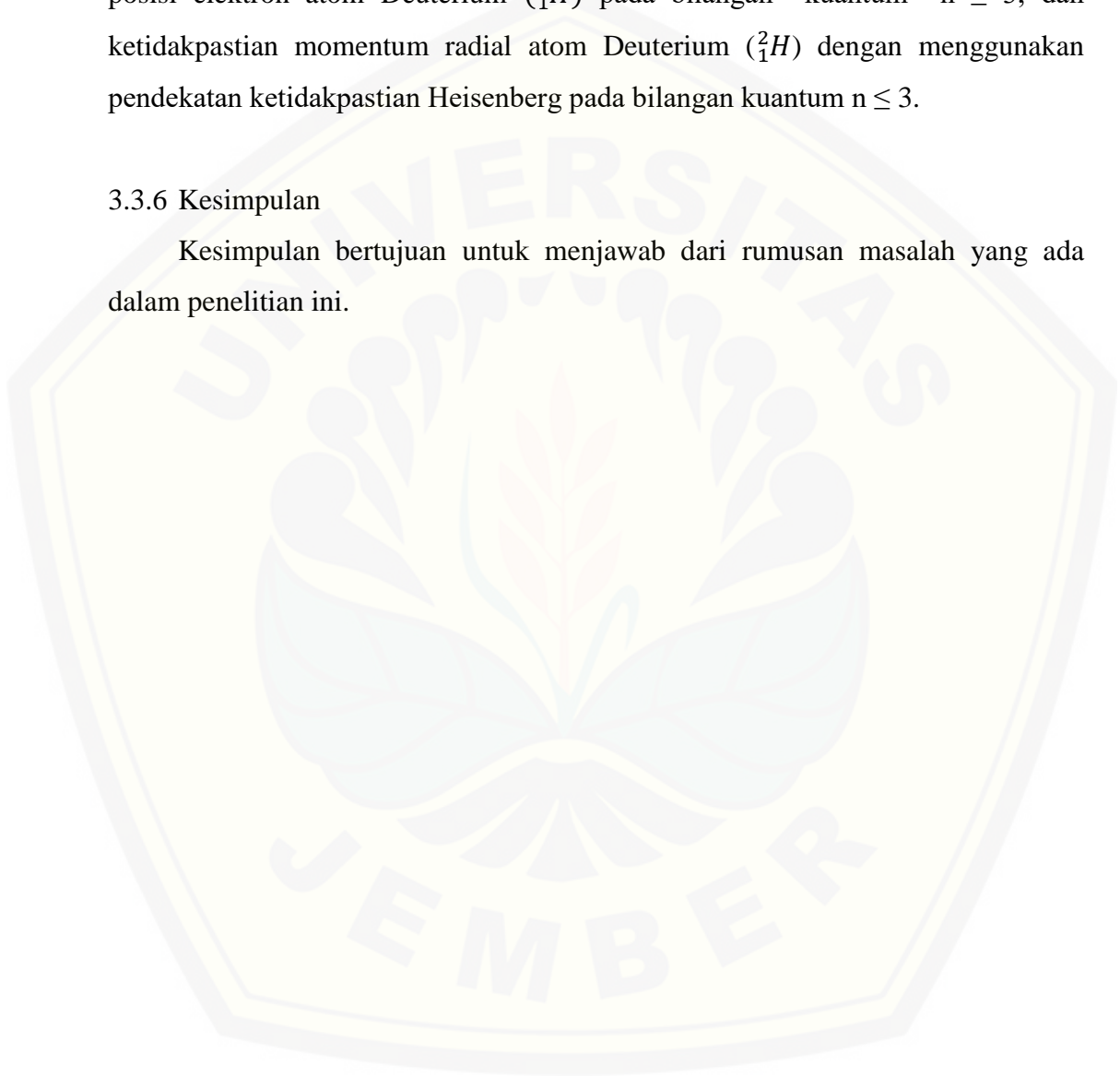
n	l	r	Δr	Δp_r	$\Delta r \cdot \Delta p_r$
		$5a_0$			
		$7a_0$			
		$9a_0$			
	2	a_0			
		$3a_0$			
		$5a_0$			
		$7a_0$			
		$9a_0$			

3.3.5 Pembahasan

Pada tahap ini peneliti mengkaji secara rinci tentang data – data hasil penelitian, yaitu data mengenai probabilitas posisi untuk menemukan keberadaan elektron atom Deuterium (2_1H) pada bilangan kuantum $n \leq 3$, nilai ekspektasi posisi elektron atom Deuterium (2_1H) pada bilangan kuantum $n \leq 3$, dan ketidakpastian momentum radial atom Deuterium (2_1H) dengan menggunakan pendekatan ketidakpastian Heisenberg pada bilangan kuantum $n \leq 3$.

3.3.6 Kesimpulan

Kesimpulan bertujuan untuk menjawab dari rumusan masalah yang ada dalam penelitian ini.



BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang didapatkan mengenai ketidakpastian momentum atom deuterium (2_1H) dengan menggunakan pendekatan ketidakpastian Heisenberg pada bilangan kuantum $n \leq 3$ dapat ditarik sebuah kesimpulan sebagai berikut,

- a. Probabilitas posisi radial elektron atom deuterium pada berbagai keadaan bilangan kuantum utama (n), baik pada $n = 1, 2$, dan 3 telah sesuai dengan teori $n^2 a_0$. Untuk probabilitas pada $n = 1$ kemungkinan terbesar elektron dapat ditemukan yakni pada posisi elektron di (a_0) dengan besarnya probabilitas 32,3%. Sedangkan pada $n = 2$ kemungkinan terbesar elektron dapat ditemukan yakni pada posisi elektron di ($4a_0$) dengan besarnya probabilitas 37,1%. Dan pada $n = 3$ kemungkinan terbesar elektron dapat ditemukan yakni pada posisi elektron di ($6a_0$) dengan besarnya probabilitas 11,06%.
- b. Ekspektasi (nilai rata – rata) posisi elektron atom deuterium pada Δr dari berbagai keadaan bilangan kuantum utama (n), baik pada $n = 1, 2$, dan 3 telah memenuhi syarat bahwa hasil perkalian Δr dengan ΔPr pada setiap titik selalu lebih besar daripada sama dengan $\frac{\hbar}{2}$, dengan besarnya $\frac{\hbar}{2}$ yakni $5,27 \times 10^{-36}$ Js, seperti pada Δr untuk keadaan $n = 1, l = 0$ dari posisi a_0 hingga $9a_0$ didapatkan $1,77 \times 10^{-11}$ m hingga $4,58 \times 10^{-11}$ m. Serta begitupula untuk keadaan bilangan kuantum yang lain. Semakin jauh posisi elektron dari inti atom maka ekspektasi momentum radialnya semakin kecil, dan menyebabkan ketidakpastian posisi radialnya semakin tinggi.
- c. Ketidakpastian momentum radial atom deuterium pada Δp dari berbagai keadaan bilangan kuantum utama (n), baik pada $n = 1, 2$, dan 3 telah memenuhi syarat bahwa hasil perkalian ΔPr dengan Δr pada setiap titik selalu lebih besar daripada sama dengan $\frac{\hbar}{2}$, dengan besarnya $\frac{\hbar}{2}$ yakni $5,27 \times 10^{-36}$ Js. Seperti pada Δp untuk keadaan $n = 1, l = 0$ dari posisi a_0 hingga $9a_0$

diperoleh kisaran $2,97 \times 10^{-24}$ kgm/s hingga $1,15 \times 10^{-24}$ kgm/s. Serta begitupula untuk keadaan bilangan kuantum yang lain. Sehingga, semakin akurat dalam pengukuran momentumnya maka semakin tidak teliti dalam pengukuran posisinya, serta sebaliknya. Berdasarkan grafik ketidakpastian momentum, dapat diketahui bahwa grafik tersebut merupakan grafik fungsi eksponensial katagori superkonduktor tipe 2 dengan dua titik medan magnet kritis yang merepresentasikan karakteristik semikonduktifitasnya pada masing – masing keadaan

5.1 Saran

Saran yang dapat diberikan peneliti adalah perlu diadakan penelitian lebih lanjut dalam bidang fisika teori mengenai atom deuterium dengan tambahan kajian nilai ketidakpastian momentum, posisi, atau energi pada atom deuterium untuk bilangan kuantum yang lain dan juga untuk atom – atom lain yang berelektron tunggal atau berelektron banyak, agar dapat meningkatkan pemahaman yang lebih baik mengenai ketidakpastian pada atom – atom.

DAFTAR PUSTAKA

- Anderson, E. E. 1982. *Introduction to Modern Physics*. 1982. Philadelphia: Saunders College Publishing.
- Barukčić, I. 2016. Anti heisenberg – the end of heisenberg’s uncertainty principle. *Journal of Applied Mathematics and Physics*. (4): 881 – 887.
- Beiser, A. 1990. *Konsep Fisika Modern*. Edisi Keempat. Terjemahan oleh The Howling. Jakarta: Erlangga.
- Beiser, A. 2003. *Concepts of Modern Physics 6th edition*. New York : McGraw-Hill.
- Busch, P. 2007. Heisenberg’s uncertainty principle. *Journal of Applied Physics*. 52: 155 – 176.
- Gasiorowics, S. 1996. *Quantum Physics Second Edition*. United States of America: John wiley & Sons, Inc.
- Gasiorowicz, S. 2003. *Quantum Physics Third Edition*. United States of America : John Wiley and Sons.
- Gautreau, W dan W. Savin. 2006. *Fisika Modern*. Jakarta: Erlangga.
- Griffith, D. J. 2005. *Introduction to Quantum Mechanics*. New York: Prentice Hall, Inc.
- Handayani, R. D. 2005. “Fungsi Gelombang Atom Hidrogen dengan Pendekatan Persamaan Schrodinger.” Tidak diterbitkan. Skripsi. Jember: FKIP Universitas Jember.
- Hermanto, W. 2016. Fungsi Gelombang Atom Deuterium dengan Pendekatan Persamaan Schrodinger. *Jurnal Fisika Prosiding Semnas UNESA*. ISBN 978-602-72071-1-0.
- Holmlid, L. 2013. Direct observation of particles with energy >10 MeV/u from laser-induced processes with energy gain in ultra-dense deuterium. *Laser and Particle Beams*. 10(31):715-722.
- Kozlowski, M., & Marciak, J. 2010. Modified schrodinger equation for particles with mass of the order of human neuron mass. *Neuroquantology*. 8(4):564-570.
- Krane, K. S. 1992. *Fisika Modern*. Jakarta: Universitas Indonesia Press.

- Krane, K. 2012. *Modern Physics Third Edition*. United States of America: John Wiley & Sons, Inc.
- Kuo, C. D. 2004. The uncertainties in radial position and radial momentum of an electron in the non relativistic hydrogen atom. *Annals of Physics Jurnal*. 316: 431 – 439.
- Kusminarto. 2011. *Esensi Fisika Modern*. Yogyakarta: ANDI.
- Liboff, L. R. 2003. *Introductory Quantum Mechanics Fourth Edition*. United State of America: Addison-Wesley.
- Ohno, K. 2004. *Quantum chemistry*. Tokyo: Iwanami Publishing Company.
- Purwanto, A. 2006. *Fisika Kuantum*. Yogyakarta: Gava Media
- Purwanto, A. 2016. *Fisika Kuantum Edisi 2 Revisi*. Yogyakarta: Gava Media.
- Siftianida, I. I., A. B. Wijatna dan B. Pratikno. 2016. Aplikasi isotop alam untuk pendugaan daerah resapan air mata air di kecamatan cijeruk, kabupaten bogor, jawa barat. *Jurnal Ilmiah Aplikasi Isotop Radiasi*. 12(2): 97 -106.
- Singh, R. B. 2009. *Introduction to Modern Physics Volume 1*. New Delhi: New Age International Publishers.
- Siregar, R. E. 2010. *Teori dan Aplikasi Fisika Kuantum*. Bandung: Widya Padjajaran.
- Sukardjo. 2013. *Kimia Fisika*. Cetakan Ketiga. Jakarta: PT. Rineka Cipta.
- Sugiono, V. 2016. *Mekanika Kuantum*. Yogyakarta: CAPS (Center for Acedemic Publishing Service).
- Sukarsono, Dahroni, I., Herhady, D. 2008. Studi status pengayaan D2O. *Jurnal Ganendra*. 11(1):23-35.
- Supriadi, B., S. H. B. Prastowo, S. Bahri, Z. R. Ridlo, and T. Prihandono. 2018. The stark effect on the wave function of tritium in relativistic condition. *Journal of Physics: Conference Series*. 997 012045: 1-7.
- Syaifudin, Suparmi, Cari. 2015. Penyelesaian persamaan schrodinger potensial non sentral scarf hiperbolik plus rosen - morse trigonometrik menggunakan metode supersimetri mekanika kuantum. *Jurnal Fisika dan Aplikasinya*. 16(2): 20-24.

Vaughn, M. T. 2007. *Introduction to Mathematical Physics*. Germany: Wiley.

Yusron, M., Firdausi, K.S., Sumariyah. 2007. Review probabilitas menemukan elektron dengan fungsi gelombang simetri dan antisimetri pada molekul H_2^+ . *Jurnal Fisika*. 10(1):7-12.

Zettili, N. 2009. *Quantum physics concepts and applications*. New Delhi: John Wiley and Son Ltd.



Lampiran 1. Matriks Penelitian

Judul	Tujuan Penelitian	Variabel	Data Dan Teknik Pengambilan Data	Metode Penelitian
Ketidakpastian Momentum Atom Deuterium (2_1H) dengan Menggunakan Pendekatan Ketidakpastian Heisenberg pada Bilangan Kuantum $n \leq 3$	<ol style="list-style-type: none"> Mengetahui probabilitas posisi untuk menemukan keberadaan elektron atom Deuterium (2_1H) pada bilangan kuantum $n \leq 3$ Mengetahui nilai ekspektasi posisi dan ekspektasi posisi kuadrat elektron atom Deuterium (2_1H) pada bilangan kuantum $n \leq 3$ Menentukan Ketidakpastian momentum dengan pendekatan ketidakpastian Heisenberg Atom Deuterium (2_1H) pada Bilangan Kuantum $n \leq 3$ 	<ol style="list-style-type: none"> Variabel Bebas Bilangan kuantum $n \leq 3$ Variabel kontrol : <ol style="list-style-type: none"> Atom Deuterium Persamaan Schrodinger Pendekatan Ketidakpastian Heisenberg Variabel Terikat : <ol style="list-style-type: none"> Fungsi gelombang atom Deterium (2_1H) dengan bilangan kuantum $n \leq 3$ Nilai probabilitas dan ekspektasi posisi elektron atom Deuterium pada bilangan kuantum $n \leq 3$ Ketidakpastian momentum atom Deterium (2_1H) 	<ol style="list-style-type: none"> Data : Primer Sumber data: Buku Fisika Kuantum, Fisika Modern Tenik Pengambilan Data : perhitungan dilakukan secara analitik (menggunakan persamaan Schrodinger) dan secara numerik menggunakan matlab R2013a 	<ol style="list-style-type: none"> Jenis Penelitian: Jenis penelitian ini adalah penelitian non eksperimen (Pengembangan Teori Fisika) Analisis Data : <ol style="list-style-type: none"> Mencari probabilitas posisi Mencari ekspektasi posisi Mencari nilai ekspektasi posisi kuadrat Mencari ketidakpastian posisi Mencari ketidakpastian momentum

Lampiran 2. Perhitungan Jari-Jari Atom Bohr

Dari studi literatur data berbagai ketetapan yaitu :

1. Konstanta Planck ($\hbar = 1,0546 \times 10^{-34}$ J.s)
2. Massa proton ($m_p = 1,6726 \times 10^{-27}$ kg)
3. Massa elektron ($m_e = 9,1094 \times 10^{-31}$ kg)
4. Massa neutron ($m_n = 1,675 \times 10^{-27}$ kg)
5. Konstanta struktur halus ($\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = 2,307113707464 \times 10^{-28}$)

Persamaan dibawah ini menunjukkan rumusan matematis dari jari-jari atom.

$$a_0 = \frac{n^2 \hbar^2 4\pi\epsilon_0}{Ze^2 \mu}$$

Karena Atom Deuterium termasuk sistem 2 partikel, maka massanya menggunakan massa tereduksi sebagaimana berikut :

$$\begin{aligned} m_{deuteron} &= m_{proton} + m_{neutron} \\ &= (1,6726 \times 10^{-27} + 1,675 \times 10^{-27}) \\ &= 3,3476 \times 10^{-27} \text{ kg} \end{aligned}$$

Massa tereduksi deuteron dan elektron sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{m_{deuteron} \times m_{elektron}}{m_{deuteron} + m_{elektron}} \\ &= \frac{3,3476 \times 10^{-27} \times 9,1094 \times 10^{-31}}{3,3476 \times 10^{-27} + 9,1094 \times 10^{-31}} \\ &= \frac{30,49462744 \times 10^{-58}}{3,3476 \times 10^{-27} + 0,0091094 \times 10^{-27}} \\ &= \frac{30,49462744 \times 10^{-58}}{3,3567094 \times 10^{-27}} \\ &= 9,0847 \times 10^{-31} \text{ kg} \end{aligned}$$

Jari-jari Bohr atom Deuterium (2_1D) didapatkan:

$$a_0 = \frac{n^2 \hbar^2 4\pi\epsilon_0}{Ze^2 \mu} \quad \text{dimana, } \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = 2,307 \times 10^{-28}$$

$$a_0 = \frac{n^2 \hbar^2}{Z\mu\alpha}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1 (1,0546 \times 10^{-34})^2}{1.(2,307 \times 10^{-28})(9,0847 \times 10^{-31})} \\ &= \frac{1,11218 \times 10^{-68}}{20,9594 \times 10^{-59}} \end{aligned}$$

$$= 0,0530625 \times 10^{-9} \text{ m} = 0,530625 \times \text{Å}$$

Lampiran 3. Probabilitas Posisi Elektron dalam Fungsi Radial Atom Deuterium

1. Probabilitas Posisi Elektron dalam Atom Deuterium untuk $n=1, l=0$

$$\begin{aligned}
 R_{10} &= 2(a_0)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{2r}{a_0}} \\
 P_{(r)} &= \int_0^{a_0} r^2 |R_{10}|^2 dr \\
 &= \int_0^{a_0} r^2 \left| \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{2r}{a_0}} \right|^2 dr \\
 &= \frac{4}{a_0^3} \int_0^{a_0} r^2 e^{-\frac{2r}{a_0}} dr \\
 &= \frac{4}{a_0^3} \left[r^2 \cdot -\frac{a_0}{2} e^{-\frac{2r}{a_0}} - \int_0^{a_0} -\frac{a_0}{2} e^{-\frac{2r}{a_0}} \cdot 2r \right] dr \\
 &= \frac{4}{a_0^3} \left[r^2 \cdot -\frac{a_0}{2} e^{-\frac{2r}{a_0}} + r \cdot -\frac{a_0^2}{2} e^{-\frac{2r}{a_0}} - \int_0^{a_0} -\frac{a_0^2}{4} e^{-\frac{2r}{a_0}} \cdot 2 \right] dr \\
 &= \frac{4}{a_0^3} \left[r^2 \cdot -\frac{a_0}{2} e^{-\frac{2r}{a_0}} + r \cdot -\frac{a_0^2}{2} e^{-\frac{2r}{a_0}} - \int_0^{a_0} -\frac{a_0^2}{2} e^{-\frac{2r}{a_0}} \right] dr \\
 &= \frac{4}{a_0^3} \left[r^2 \cdot -\frac{a_0}{2} e^{-\frac{2r}{a_0}} + r \cdot -\frac{a_0^2}{2} e^{-\frac{2r}{a_0}} + \left[-\frac{a_0^3}{4} e^{-\frac{2r}{a_0}} \right] \right] dr \\
 &= \frac{4}{a_0^3} \sum_0^{a_0} \left[-\frac{a_0 r^2}{2e^{a_0}} - \frac{a_0^2 r}{2e^{a_0}} - \frac{a_0^3}{4e^{a_0}} \right] dr \\
 &= \frac{2}{a_0^3} \sum_0^{a_0} \left[\frac{-a_0 r^2 - a_0^2 r - a_0^{\frac{3}{2}}}{e^{a_0}} \right] dr \\
 &= \frac{2}{a_0^3} \left[\frac{-a_0(a_0^2) - a_0^2(a_0) - a_0^{\frac{3}{2}}}{e^{a_0}} \right] - \left[-a_0^{\frac{3}{2}} \right] \\
 &= \frac{2}{a_0^3} \left[\frac{-a_0^3 - a_0^3 - \frac{a_0^3}{2}}{e^2} - \left[-\frac{a_0^3}{2} \right] \right] \\
 &= \frac{2}{a_0^3} \left[\frac{-\frac{5}{2}a_0^3}{e^2} + \frac{a_0^3}{2} \right] \\
 &= 2 \left[\frac{1}{2} - \frac{5}{2e^2} \right] \\
 &= 2 \left[\frac{1}{2} - \frac{5}{2(2,71828183)^2} \right] \\
 &= 2 \left[\frac{1}{2} - \frac{5}{2(7,3890561)} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left[\frac{1}{2} - \frac{5}{14,778522} \right] \\
&= 2 [0,5 - 0,33833821] \\
&= 2 [0,16166179] \\
&= 0,32332358
\end{aligned}$$

2. Probabilitas Posisi Elektron dalam Atom Deuterium untuk $n=2, l=0$

$$R_{20} = \frac{1}{2\sqrt{2a_0^3}} \left[2 - \frac{r}{a_0} \right] e^{\frac{-r}{a_0}}$$

$$R_{20} = \frac{\left[2 - \frac{r}{a_0} \right]}{2\sqrt{2a_0^3}} e^{\frac{-r}{a_0}}$$

$$\begin{aligned}
P(r) &= \int_0^{a_0} r^2 |R_{20}|^2 dr \\
&= \int_0^{a_0} r^2 \left[\frac{\left[2 - \frac{r}{a_0} \right]}{2\sqrt{2a_0^3}} e^{\frac{-r}{a_0}} \right]^2 dr \\
&= \frac{1}{8a_0^3} \int_0^{a_0} r^2 \left[4 - \frac{4r}{a_0} + \frac{r^2}{a_0^2} \right] e^{\frac{-r}{a_0}} dr \\
&= \frac{1}{8a_0^3} \int_0^{a_0} \left[4r^2 - \frac{4r^3}{a_0} + \frac{r^4}{a_0^2} \right] e^{\frac{-r}{a_0}} dr \\
&= \frac{1}{8a_0^3} \left[-4r^2 \cdot a_0 e^{\frac{-r}{a_0}} + 4r^3 e^{\frac{-r}{a_0}} - \frac{r^4}{a_0} e^{\frac{-r}{a_0}} - 8r \cdot a_0^3 e^{\frac{-r}{a_0}} + 12r^2 a_0 e^{\frac{-r}{a_0}} \right. \\
&\quad \left. - 4r^3 e^{\frac{-r}{a_0}} - 8a_0^3 e^{\frac{-r}{a_0}} + 24r \cdot a_0^2 e^{\frac{-r}{a_0}} - 12r^2 \cdot a_0 e^{\frac{-r}{a_0}} \right. \\
&\quad \left. + 24a_0^3 e^{\frac{-r}{a_0}} - 24r \cdot a_0^2 e^{\frac{-r}{a_0}} + \left(-24a_0^3 e^{\frac{-r}{a_0}} \cdot \frac{24}{a_0^2} \right) \right] dr \\
&= \frac{1}{8a_0^3} \sum_0^{a_0} \left[\left[-4r^2 \cdot a_0 + 4r^3 - \frac{r^4}{a_0} - 8r \cdot a_0^2 + 12r^2 a_0 - 4r^3 - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 8a_0^3 + 24r \cdot a_0^2 - 12r^2 \cdot a_0 + 24a_0^3 - 24r \cdot a_0^2 - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 24a_0^3 \right] e^{\frac{-r}{a_0}} \right] dr \\
&= \frac{1}{8a_0^3} \sum_0^{a_0} \left[\frac{-4r^2 \cdot a_0 - \frac{r^4}{a_0} - 8r \cdot a_0^2 - 8a_0^3}{e^{\frac{r}{a_0}}} \right] dr \\
&= \frac{1}{8a_0^3} \left[\frac{-4a_0^3 - a_0^3 - 8a_0^3 - 8a_0^3}{e} \right] - [-8a_0^3]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8a_0^3} \left[8 - \frac{21}{e} \right] \\
&= \frac{1}{8} \left[8 - \frac{21}{2,71828183} \right] \\
&= \frac{1}{8} [8 - 7,72546826] \\
&= \frac{1}{8} [0,27453174] \\
&= 0,03431647
\end{aligned}$$

3. Probabilitas Posisi Elektron dalam Atom Deuterium untuk $n=2, l=1$

$$\begin{aligned}
R_{21} &= \frac{1}{\sqrt{3} (2a_0)^2} \left[\frac{r}{a_0} \right] e^{\frac{-r}{a_0}} \\
R_{21} &= \frac{r}{2a_0^2 \sqrt{6a_0^3}} e^{\frac{-r}{2a_0}} \\
P_{(r)} &= \int_0^{a_0} r^2 |R_{21}|^2 dr \\
&= \int_0^{a_0} r^2 \left| \frac{r}{2a_0^2 \sqrt{6a_0^3}} e^{\frac{-r}{2a_0}} \right|^2 dr \\
&= \frac{1}{24 a_0^5} \int_0^{a_0} r^2 \cdot r^2 e^{\frac{-2r}{a_0}} dr \\
&= \frac{1}{24 a_0^5} \int_0^{a_0} r^4 e^{\frac{-2r}{a_0}} dr \\
&= \frac{1}{24 a_0^5} \left[-r^4 a_0 e^{\frac{-r}{a_0}} - 4r^3 a_0^2 e^{\frac{-r}{a_0}} - 12r^2 \cdot a_0^3 e^{\frac{-r}{a_0}} - 24 r \cdot a_0^4 e^{\frac{-r}{a_0}} - \right. \\
&\quad \left. 24 \cdot a_0^5 e^{\frac{-r}{a_0}} \right] dr \\
&= \frac{1}{24 a_0^5} \sum_0^{a_0} \left[\left[-r^4 a_0 - 4r^3 a_0^2 - 12r^2 a_0^3 - 24 r a_0^4 - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 24 a_0^5 \right] e^{\frac{-r}{a_0}} \right] dr \\
&= \frac{1}{24 a_0^5} \left[\frac{-a_0^5 - 4a_0^5 - 12a_0^5 - 24a_0^5 - 24a_0^5}{e} \right] - \left[-24a_0^5 \right] \\
&= \frac{1}{24 a_0^5} \left[\frac{-65 a_0^5}{e} + 24a_0^5 \right] \\
&= \frac{1}{24} \left[24 - \frac{65}{e} \right] \\
&= \frac{1}{24} \left[24 - \frac{65}{2,71828183} \right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{24} [24 - 23,9121637]$$

$$= \frac{1}{24} [0,0878363]$$

$$= 0,003659846$$

4. Probabilitas Posisi Elektron dalam Atom Deuterium untuk $n=3, l=0$

$$R_{30} = \frac{2}{81\sqrt{3a_0^3}} \left[27 - \frac{18r}{a_0} + \frac{2r^2}{a_0^2} \right] e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

$$P_{(r)} = \int_0^{a_0} r^2 |R_{30}|^2 dr$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{a_0} r^2 \left| \frac{2}{81\sqrt{3a_0^3}} \left[27 - \frac{18r}{a_0} + \frac{2r^2}{a_0^2} \right] e^{-\frac{r}{3a_0}} \right|^2 dr \\ &= \frac{4}{6561 \times 3a_0^3} \int_0^{a_0} r^2 \left[729 - \frac{972r}{a_0} + \frac{432r^2}{a_0^2} - \frac{72r^3}{a_0^3} + \frac{4r^4}{a_0^4} \right] e^{-\frac{2r}{3a_0}} dr \\ &= \frac{4}{19.683 a_0^3} \int_0^{a_0} \left[729r^2 - \frac{972r^3}{a_0} + \frac{432r^4}{a_0^2} - \frac{72r^5}{a_0^3} + \frac{4r^6}{a_0^4} \right] e^{-\frac{2r}{3a_0}} dr \\ &= \frac{4}{19.683 a_0^3} \left[\left(729r^2 \cdot \frac{-3a_0}{2} e^{-\frac{2r}{3a_0}} - \frac{972r^3}{a_0} \cdot \frac{-3a_0}{2} e^{-\frac{2r}{3a_0}} + \frac{432r^4}{a_0^2} \cdot \frac{-3a_0}{2} e^{-\frac{2r}{3a_0}} - \right. \right. \\ &\quad \left. \frac{72r^5}{a_0^3} \cdot \frac{-3a_0}{2} e^{-\frac{2r}{3a_0}} + \frac{4r^6}{a_0^4} \cdot \frac{-3a_0}{2} e^{-\frac{2r}{3a_0}} \right) + \left(1458r \cdot \frac{-9a_0^2}{4} e^{-\frac{2r}{3a_0}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2916r^2}{a_0} \cdot \frac{-9a_0^2}{4} e^{-\frac{2r}{3a_0}} + \frac{1728r^3}{a_0^2} \cdot \frac{-9a_0^2}{4} e^{-\frac{2r}{3a_0}} - \frac{360r^4}{a_0^3} \cdot \frac{-9a_0^2}{4} e^{-\frac{2r}{3a_0}} + \right. \\ &\quad \left. \frac{24r^5}{a_0^4} \cdot \frac{-9a_0^2}{4} e^{-\frac{2r}{3a_0}} \right) + \left(1458 \cdot \frac{-27a_0^3}{8} e^{-\frac{2r}{3a_0}} - \frac{5832r}{a_0} \cdot \frac{-27a_0^3}{8} e^{-\frac{2r}{3a_0}} + \right. \\ &\quad \left. \frac{5184r^2}{a_0^2} \cdot \frac{-27a_0^3}{8} e^{-\frac{2r}{3a_0}} - \frac{1440r^3}{a_0^3} \cdot \frac{-27a_0^3}{8} e^{-\frac{2r}{3a_0}} + \frac{120r^4}{a_0^4} \cdot \frac{-27a_0^3}{8} e^{-\frac{2r}{3a_0}} \right) + \\ &\quad \left(-\frac{5832}{a_0} \cdot \frac{-81a_0^4}{16} e^{-\frac{2r}{3a_0}} + \frac{10.368r}{a_0^2} \cdot \frac{-81a_0^4}{16} e^{-\frac{2r}{3a_0}} - \frac{4320r^2}{a_0^3} \cdot \frac{-81a_0^4}{16} e^{-\frac{2r}{3a_0}} + \right. \\ &\quad \left. \frac{480r^3}{a_0^4} \cdot \frac{-81a_0^4}{16} e^{-\frac{2r}{3a_0}} \right) + \left(\frac{10.368}{a_0^2} \cdot \frac{-243a_0^5}{32} e^{-\frac{2r}{3a_0}} - \frac{8640r}{a_0^3} \cdot \frac{-243a_0^5}{32} e^{-\frac{2r}{3a_0}} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1440r^2}{a_0^4} \cdot \frac{-243a_0^5}{32} e^{-\frac{2r}{3a_0}} \right) + \left(-\frac{8640}{a_0^3} \cdot \frac{-729a_0^6}{64} e^{-\frac{2r}{3a_0}} + \frac{2880r}{a_0^4} \cdot \frac{-729a_0^6}{64} e^{-\frac{2r}{3a_0}} \right) + \\ &\quad \left(\frac{2880r}{a_0^4} \cdot \frac{-2187a_0^7}{128} e^{-\frac{2r}{3a_0}} \right) \Big] dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4}{19.683 a_0^3} \sum_0^{a_0} \left[\left[729r^2 \cdot \frac{-3a_0}{2} - \frac{972r^3}{a_0} \cdot \frac{-3a_0}{2} + \frac{432r^4}{a_0^2} \cdot \frac{-3a_0}{2} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \frac{72r^5}{a_0^3} \cdot \frac{-3a_0}{2} + \frac{4r^6}{a_0^4} \cdot \frac{-3a_0}{2} + 1458r \cdot \frac{-9a_0^2}{4} - \frac{2916r^2}{a_0} \cdot \frac{-9a_0^2}{4} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{1728r^3}{a_0^2} \cdot \frac{-9a_0^2}{4} - \frac{360r^4}{a_0^3} \cdot \frac{-9a_0^2}{4} + \frac{24r^5}{a_0^4} \cdot \frac{-9a_0^2}{4} + 1458 \cdot \frac{-27a_0^3}{8} - \right. \\
 &\quad \left. \frac{5832r}{a_0} \cdot \frac{-27a_0^3}{8} + \frac{5184r^2}{a_0^2} \cdot \frac{-27a_0^3}{8} - \frac{1440r^3}{a_0^3} \cdot \frac{-27a_0^3}{8} + \frac{120r^4}{a_0^4} \cdot \frac{-27a_0^3}{8} - \right. \\
 &\quad \left. \frac{5832}{a_0} \cdot \frac{-81a_0^4}{16} e^{\frac{-2r}{3a_0}} + \frac{10.368r}{a_0^2} \cdot \frac{-81a_0^4}{16} - \frac{4320r^2}{a_0^3} \cdot \frac{-81a_0^4}{16} + \frac{480r^3}{a_0^4} \cdot \frac{-81a_0^4}{16} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{10.368}{a_0^2} \cdot \frac{-243a_0^5}{32} e^{\frac{-2r}{3a_0}} - \frac{8640r}{a_0^3} \cdot \frac{-243a_0^5}{32} + \frac{1440r^2}{a_0^4} \cdot \frac{-243a_0^5}{32} - \right. \\
 &\quad \left. \frac{8640}{a_0^3} \cdot \frac{-729a_0^6}{64} e^{\frac{-2r}{3a_0}} + \frac{2880r}{a_0^4} \cdot \frac{-729a_0^6}{64} + \frac{2880r}{a_0^4} \cdot \frac{-2187a_0^7}{128} \right] e^{\frac{-2r}{3a_0}} \Bigg] dr \\
 &= \frac{4}{19.683 a_0^3} \left[\frac{\begin{aligned} &- 1093,5a_0^3 + 1458a_0^3 - 648a_0^3 + 108a_0^3 - 6a_0^3 \\ &- 3280,5a_0^3 + 6561 a_0^3 - 3888a_0^3 + 810a_0^3 - 54a_0^3 \\ &- 4920,75a_0^3 + 19683a_0^3 - 17496a_0^3 + 4860a_0^3 - 405a_0^3 \\ &\quad + 29524 a_0^3 - 52488a_0^3 + 21870a_0^3 - 2430a_0^3 \\ &\quad - 78732a_0^3 + 65610a_0^3 - 10935a_0^3 \\ &\quad + 98415a_0^3 - 32805a_0^3 - 49207,5a_0^3 \end{aligned}}{e^{\frac{2}{3}}} \right] - \\
 &\quad \left[- 4920,75a_0^3 + 29524 a_0^3 - 78732a_0^3 + 98415a_0^3 - 49207,5a_0^3 \right] \\
 &= \frac{4}{19.683 a_0^3} \left[- \frac{9489,75 a_0^3}{e} - (-4920,75 a_0^3) \right] \\
 &= \frac{4}{19.683 a_0^3} \left[- 4872,2 a_0^3 + 4920,75 a_0^3 \right] \\
 &= \frac{4}{19.683} [48,55] \\
 &= \frac{194,2}{19.683} \\
 &= 0,0096864
 \end{aligned}$$

5. Probabilitas Posisi Elektron dalam Atom Deuterium untuk $n=3, l=1$

$$\begin{aligned}
 R_{21} &= \frac{4}{81\sqrt{6}a_0^3} \left[6 - \frac{r}{a_0} \right] \frac{r}{a_0} e^{\frac{-r}{3a_0}} & R_{21} &= \frac{4}{81\sqrt{6}a_0^3} \left[\frac{6r}{a_0} - \frac{r}{a_0^2} \right] e^{\frac{-r}{3a_0}} \\
 P_{(r)} &= \int_0^{a_0} r^2 |R_{31}|^2 dr \\
 &= \int_0^{a_0} r^2 \left| \frac{4}{81\sqrt{6}a_0^3} \left[\frac{6r}{a_0} - \frac{r}{a_0^2} \right] e^{\frac{-r}{3a_0}} \right|^2 dr \\
 &= \frac{16}{6561 \times 6 a_0^3} \int_0^{a_0} r^2 \left[\frac{36r^2}{a_0^2} - \frac{12r^3}{a_0^3} + \frac{r^4}{a_0^4} \right] e^{\frac{-2r}{3a_0}} dr \\
 &= \frac{4}{39.366 a_0^3} \int_0^{a_0} \left[\frac{36r^4}{a_0^2} - \frac{12r^5}{a_0^3} + \frac{r^6}{a_0^4} \right] e^{\frac{-2r}{3a_0}} dr \\
 &= \frac{4}{39.366 a_0^3} \left[\left(\frac{36r^4}{a_0^2} \cdot \frac{-3a_0}{2} e^{\frac{-2r}{3a_0}} - \frac{12r^5}{a_0^3} \cdot \frac{-3a_0}{2} e^{\frac{-2r}{3a_0}} + \frac{r^6}{a_0^4} \cdot \frac{-3a_0}{2} e^{\frac{-2r}{3a_0}} \right) + \right. \\
 &\quad \left(\frac{144r^3}{a_0^2} \cdot \frac{-9a_0^2}{4} e^{\frac{-2r}{3a_0}} - \frac{60r^4}{a_0^3} \cdot \frac{-9a_0^2}{4} e^{\frac{-2r}{3a_0}} + \frac{60r^5}{a_0^4} \cdot \frac{-9a_0^2}{4} e^{\frac{-2r}{3a_0}} \right) + \\
 &\quad \left(\frac{432r^2}{a_0^2} \cdot \frac{-27a_0^3}{8} e^{\frac{-2r}{3a_0}} - \frac{240r^3}{a_0^3} \cdot \frac{-27a_0^3}{8} e^{\frac{-2r}{3a_0}} + \frac{30r^4}{a_0^4} \cdot \frac{-27a_0^3}{8} e^{\frac{-2r}{3a_0}} \right) + \\
 &\quad \left(\frac{864r}{a_0^2} \cdot \frac{-81a_0^4}{16} e^{\frac{-2r}{3a_0}} - \frac{720r^2}{a_0^3} \cdot \frac{-81a_0^4}{16} e^{\frac{-2r}{3a_0}} + \frac{120r^3}{a_0^4} \cdot \frac{-81a_0^4}{16} e^{\frac{-2r}{3a_0}} \right) + \\
 &\quad \left(\frac{864}{a_0^2} \cdot \frac{-243a_0^5}{32} e^{\frac{-2r}{3a_0}} - \frac{1440r}{a_0^3} \cdot \frac{-243a_0^5}{32} e^{\frac{-2r}{3a_0}} + \frac{360r^2}{a_0^4} \cdot \frac{-243a_0^5}{32} e^{\frac{-2r}{3a_0}} \right) + \\
 &\quad \left(-\frac{1440}{a_0^3} \cdot \frac{-729a_0^6}{64} e^{\frac{-2r}{3a_0}} + \frac{720r}{a_0^4} \cdot \frac{-729a_0^6}{64} e^{\frac{-2r}{3a_0}} \right) + \\
 &\quad \left. \left(\frac{720}{a_0^4} \cdot \frac{-2187a_0^7}{128} e^{\frac{-2r}{3a_0}} \right) \right] dr \\
 &= \frac{4}{39.366 a_0^3} \sum_0^{a_0} \left[\left[\frac{36r^4}{a_0^2} \cdot \frac{-3a_0}{2} - \frac{12r^5}{a_0^3} \cdot \frac{-3a_0}{2} + \frac{r^6}{a_0^4} \cdot \frac{-3a_0}{2} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \frac{144r^3}{a_0^2} \cdot \frac{-9a_0^2}{4} - \frac{60r^4}{a_0^3} \cdot \frac{-9a_0^2}{4} + \frac{60r^5}{a_0^4} \cdot \frac{-9a_0^2}{4} + \frac{432r^2}{a_0^2} \cdot \frac{-27a_0^3}{8} - \right. \\
 &\quad \left. \frac{240r^3}{a_0^3} \cdot \frac{-27a_0^3}{8} + \frac{30r^4}{a_0^4} \cdot \frac{-27a_0^3}{8} + \frac{864r}{a_0^2} \cdot \frac{-81a_0^4}{16} - \frac{720r^2}{a_0^3} \cdot \frac{-81a_0^4}{16} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{120r^3}{a_0^4} \cdot \frac{-81a_0^4}{16} + \frac{864}{a_0^2} \cdot \frac{-243a_0^5}{32} - \frac{1440r}{a_0^3} \cdot \frac{-243a_0^5}{32} + \frac{360r^2}{a_0^4} \cdot \frac{-243a_0^5}{32} - \right. \\
 &\quad \left. \frac{1440}{a_0^3} \cdot \frac{-729a_0^6}{64} + \frac{720r}{a_0^4} \cdot \frac{-729a_0^6}{64} + \frac{720}{a_0^4} \cdot \frac{-2187a_0^7}{128} \right] e^{\frac{-2r}{3a_0}} \Bigg] dr
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{39.366 a_0^3} \left[\frac{-54a_0^3 + 18a_0^3 - 1,5a_0^3 - 324a_0^3 + 135a_0^3 - 13,5a_0^3 - 1458a_0^3}{e^{\frac{2}{3}}} + 810a_0^3 - 101,25a_0^3 - 273,375a_0^3 + 3645a_0^3 - 607,5a_0^3 - 6561a_0^3 \right. \\
&\quad \left. + 10935a_0^3 - 2733,75a_0^3 + 16402,5a_0^3 - 8201,25a_0^3 - 12301,875a_0^3 \right] - \\
&\quad [-12301,875a_0^3 + 16402,5a_0^3 - 6561a_0^3] \\
&= \frac{4}{39.366 a_0^3} \left[-\frac{4786,125 a_0^3}{e^{\frac{2}{3}}} - (-2460,375 a_0^3) \right] \\
&= \frac{4}{39.366 a_0^3} \left[-\frac{4786,125 a_0^3}{1,9477340411} + 2460,375 a_0^3 \right] \\
&= \frac{4}{39.366 a_0^3} [-2457,27 a_0^3 + 2460,375 a_0^3] \\
&= \frac{4}{39.366} [3,096491] \\
&= 0,001258544328
\end{aligned}$$

6. Probabilitas Posisi Elektron dalam Atom Deuterium untuk $n=3, l=2$

$$\begin{aligned}
R_{32} &= \frac{1}{9\sqrt{30a_0^3}} \left[\frac{r}{3a_0} \right]^2 e^{\frac{-r}{3a_0}} \\
R_{32} &= \frac{1}{a_0^2 \cdot 81\sqrt{30a_0^3}} r^2 \cdot e^{\frac{-r}{3a_0}} \\
P(r) &= \int_0^{a_0} r^2 |R_{32}|^2 dr \\
&= \int_0^{a_0} r^2 \left| \frac{1}{a_0^2 \cdot 81\sqrt{30a_0^3}} r^2 \cdot e^{\frac{-r}{3a_0}} \right|^2 dr \\
&= \frac{16}{196.830 a_0^7} \int_0^{a_0} r^2 \cdot (r^2)^2 e^{\frac{-2r}{3a_0}} dr \\
&= \frac{16}{196.830 a_0^7} \int_0^{a_0} r^6 e^{\frac{-2r}{3a_0}} dr \\
&= \frac{16}{196.830 a_0^7} \left[r^6 \cdot \frac{-3a_0}{2} e^{\frac{-2r}{3a_0}} + 6r^5 \cdot \frac{-9a_0^2}{4} e^{\frac{-2r}{3a_0}} + 30r^4 \cdot \frac{-27a_0^3}{8} e^{\frac{-2r}{3a_0}} \right. \\
&\quad \left. + 120r^3 \cdot \frac{-81a_0^4}{16} e^{\frac{-2r}{3a_0}} + 360r^2 \cdot \frac{-243a_0^5}{32} e^{\frac{-2r}{3a_0}} + 720r \cdot \frac{-729a_0^6}{64} e^{\frac{-2r}{3a_0}} \right. \\
&\quad \left. + 720 \cdot \frac{-2187a_0^7}{128} e^{\frac{-2r}{3a_0}} \right] dr
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{16}{196.830 a_0^7} \sum_0^{a_0} \left[\left[r^6 \cdot \frac{-3a_0}{2} + 6r^5 \cdot \frac{-9a_0^2}{4} + 30r^4 \cdot \frac{-27a_0^3}{8} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 120r^3 \cdot \frac{-81a_0^4}{16} + 360r^2 \cdot \frac{-243a_0^5}{32} + 720r \cdot \frac{-729a_0^6}{64} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 720 \cdot \frac{-2187a_0^7}{128} \right] e^{\frac{-2r}{3a_0}} \right] dr \\
&= \frac{16}{196.830 a_0^7} \left[\frac{-1,5a_0^7 - 13,5a_0^7 - 101,25a_0^7 - 607,5a_0^3 - 2733,75a_0^7}{e^{\frac{2}{3}}} - \right. \\
&\quad \left. [-12301,875a_0^7] \right] \\
&= \frac{16}{196.830 a_0^7} [-1239,79507 + 12301,875a_0^7] \\
&= \frac{16}{196.830 a_0^7} [0,07993] \\
&= 0,000006497383
\end{aligned}$$

Lampiran 4. Nilai Ekspektasi Posisi Elektron dalam Fungsi Radial Atom Deuterium

1. Nilai Ekspektasi Posisi Elektron dalam Atom Deuterium untuk $n=1, l=0$

$$\begin{aligned}
 \langle r \rangle &= \int_0^{a_0} r^3 |R_{10}|^2 dr \\
 &= \int_0^{a_0} r^3 \left| \frac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac{-r}{a_0}} \right|^2 dr \\
 &= \frac{4}{a_0^3} \int_0^{a_0} r^3 e^{\frac{-2r}{a_0}} dr \\
 &= \frac{4}{a_0^3} \left[r^3 \cdot -\frac{a_0}{2} e^{\frac{-2r}{a_0}} - \int_0^{a_0} -\frac{a_0}{2} e^{\frac{-2r}{a_0}} \cdot 3r^2 \right] dr \\
 &= \frac{4}{a_0^3} \left[r^3 \cdot -\frac{a_0}{2} e^{\frac{-2r}{a_0}} + 3r^2 \cdot -\frac{a_0^2}{4} e^{\frac{-2r}{a_0}} - \int_0^{a_0} -\frac{a_0^2}{4} e^{\frac{-2r}{a_0}} \cdot 6r \right] dr \\
 &= \frac{4}{a_0^3} \left[r^3 \cdot -\frac{a_0}{2} e^{\frac{-2r}{a_0}} + 3r^2 \cdot -\frac{a_0^2}{4} e^{\frac{-2r}{a_0}} + 6r \cdot -\frac{a_0^3}{8} e^{\frac{-2r}{a_0}} \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^{a_0} -\frac{a_0^3}{8} e^{\frac{-2r}{a_0}} \cdot 6 \right] dr \\
 &= \frac{4}{a_0^3} \left[r^3 \cdot -\frac{a_0}{2} e^{\frac{-2r}{a_0}} + 3r^2 \cdot -\frac{a_0^2}{4} e^{\frac{-2r}{a_0}} + 6r \cdot -\frac{a_0^3}{8} e^{\frac{-2r}{a_0}} \right. \\
 &\quad \left. 6 \cdot -\frac{a_0^4}{16} e^{\frac{-2r}{a_0}} \right] dr \\
 &= \frac{4}{a_0^3} \sum_0^{a_0} \left[-\frac{a_0 r^3}{2e^{a_0}} - \frac{a_0^2 \cdot 3r^2}{4e^{a_0}} - \frac{a_0^3 \cdot 3r}{4e^{a_0}} - \frac{a_0^4 \cdot 3}{8e^{a_0}} \right] dr \\
 &= \frac{1}{a_0^3} \sum_0^{a_0} \left[\frac{-2a_0 r^3 - a_0^2 \cdot 3r^2 - a_0^3 \cdot 3r - a_0^4 \cdot \frac{3}{2}}{e^{a_0}} \right] dr \\
 &= \frac{1}{a_0^3} \left[\frac{-2a_0^4 - 3a_0^4 - 3a_0^4 - \frac{3}{2}a_0^4}{e^{a_0}} \right] - \left[-\frac{3}{2} a_0^4 \right] \\
 &= \frac{2}{a_0^3} \left[\frac{-\frac{19}{2}a_0^4}{e^2} + \frac{3}{2} a_0^4 \right] \\
 &= a_0 \left[-\frac{19}{2e^2} + \frac{3}{2} \right] \\
 &= \frac{a_0}{2} \left[3 - \frac{19}{7,38905611} \right] \\
 &= \frac{a_0}{2} [3 - 2,571370378] \\
 &= \frac{a_0}{2} [0,428629622]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 0,21431481140 a_0 \\
 &= 0,21431481140 (0,0530625 \times 10^{-9}) \\
 &= 0,01137200797 \times 10^{-9}
 \end{aligned}$$

2. Nilai Ekspektasi Posisi Elektron dalam Atom Deuterium untuk $n=2, l=0$

$$\begin{aligned}
 \langle r \rangle &= \int_0^{a_0} r^3 |R_{20}|^2 dr \\
 &= \int_0^{a_0} r^3 \left[\frac{2-r/a_0}{2\sqrt{2}a_0^3} e^{-r/a_0} \right]^2 dr \\
 &= \frac{1}{8a_0^3} \int_0^{a_0} r^3 \left[4 - \frac{4r}{a_0} + \frac{r^2}{a_0^2} \right] e^{-2r/a_0} dr \\
 &= \frac{1}{8a_0^3} \int_0^{a_0} \left[4r^3 - \frac{4r^4}{a_0} + \frac{r^5}{a_0^2} \right] e^{-r/a_0} dr \\
 &= \frac{1}{8a_0^3} \left[\left(4r^3 \cdot -a_0 e^{-r/a_0} - \frac{4r^4}{a_0} \cdot -a_0 e^{-r/a_0} + \frac{r^5}{a_0^2} \cdot -a_0 e^{-r/a_0} \right) + \right. \\
 &\quad \left(12r^2 \cdot -a_0^2 e^{-r/a_0} - \frac{16r^3}{a_0} \cdot -a_0^2 e^{-r/a_0} + \frac{5r^4}{a_0^2} \cdot -a_0 e^{-r/a_0} \right) + \\
 &\quad \left(24r \cdot -a_0^3 e^{-r/a_0} - \frac{48r^2}{a_0} \cdot -a_0^2 e^{-r/a_0} + \frac{20r^3}{a_0^2} \cdot -a_0 e^{-r/a_0} \right) + \\
 &\quad \left. \left(24 \cdot -a_0^4 e^{-r/a_0} - \frac{96r^3}{a_0} \cdot -a_0^2 e^{-r/a_0} + \frac{60r^2}{a_0^2} \cdot -a_0 e^{-r/a_0} \right) \right] dr \\
 &= \frac{1}{8a_0^3} \left[(-4r^3 \cdot a_0 + 4r^4 - \frac{r^5}{a_0} - 12r^2 \cdot a_0^2 + 16r^3 a_0 - 5r^3 a_0 \right. \\
 &\quad \left. - 8a_0^3 + 24r \cdot a_0^3 + 48r^2 \cdot a_0^2 - 20r^3 a_0 - 24 a_0^4 + 96r \cdot a_0^3 \right. \\
 &\quad \left. + 60r^2 \cdot a_0^2) e^{-r/a_0} \right] dr \\
 &= \frac{1}{8a_0^3} \sum_0^{a_0} \left[\left[-48 a_0^4 - 48r a_0^3 - 24r^2 \cdot a_0^2 - 8r^3 a_0 - r^4 - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \frac{r^5}{a_0} \right] e^{-r/a_0} \right] dr \\
 &= \frac{1}{8a_0^3} \left[\frac{-48 a_0^4 - 48a_0^4 - 24a_0^4 \cdot -8 a_0^4 - a_0^4 - a_0^4}{e} \right] - [-48a_0^4] \\
 &= \frac{1}{8a_0^3} \left[\frac{130 a_0^4}{e} - 48 a_0^4 \right] \\
 &= \frac{1}{8} \left[48 - \frac{130}{e} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8} \left[48 - \frac{130}{2,71828183} \right] \\
&= \frac{1}{8} [48 - 47,8243273523] \\
&= \frac{a_0}{8} [0,175673] \\
&= 0,02195912 a_0 \\
&= 0,02195912 (0,0530625 \times 10^{-9}) \\
&= 0,0011652058 \times 10^{-9}
\end{aligned}$$

3. Nilai Ekspektasi Posisi Elektron dalam Atom Deuterium untuk $n=2, l=1$

$$\begin{aligned}
\langle r \rangle &= \int_0^{a_0} r^3 |R_{21}|^2 dr \\
&= \int_0^{a_0} r^3 \left| \frac{r}{2a_0^2 \sqrt{6a_0^3}} e^{\frac{-r}{2a_0}} \right|^2 dr \\
&= \frac{1}{24 a_0^5} \int_0^{a_0} r^3 \cdot r^2 e^{\frac{-2r}{a_0}} dr \\
&= \frac{1}{24 a_0^5} \int_0^{a_0} r^5 e^{\frac{-2r}{a_0}} dr \\
&= \frac{1}{24 a_0^5} \left[-r^5 a_0 e^{\frac{-r}{a_0}} - 5r^4 a_0^2 e^{\frac{-r}{a_0}} - 20r^3 a_0^3 e^{\frac{-r}{a_0}} - 60r^2 a_0^4 e^{\frac{-r}{a_0}} - \right. \\
&\quad \left. - 120r \cdot a_0^5 e^{\frac{-r}{a_0}} - 120 a_0^6 e^{\frac{-r}{a_0}} \right] dr \\
&= \frac{1}{24 a_0^5} \sum_0^{a_0} \left[\left[-r^5 a_0 - 5r^4 a_0^2 - 20r^3 a_0^3 - 60r^2 a_0^4 - 120r \cdot a_0^5 - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 120 a_0^6 \right] e^{\frac{-r}{a_0}} \right] dr \\
&= \frac{1}{24 a_0^5} \left[\frac{-a_0^6 - 5a_0^6 - 20a_0^6 - 60a_0^6 - 120a_0^6 - 120a_0^6}{e} \right] - [-120a_0^6] \\
&= \frac{1}{24 a_0^5} \left[\frac{-326 a_0^6}{e} + 120 a_0^6 \right] \\
&= \frac{1}{24} \left[-\frac{326 a_0}{2,71828183} + 120 a_0 \right] \\
&= \frac{1}{24} [-119,9286777 a_0 + 120 a_0] \\
&= \frac{1}{24} [0,0713 a_0] \\
&= 0,002970933 a_0 \\
&= 0,002970933 (0,0530625 \times 10^{-9})
\end{aligned}$$

$$= 0,0001576451 \times 10^{-9}$$

4. Nilai Ekspektasi Posisi Elektron dalam Atom Deuterium untuk $n=3, l=0$

$$\begin{aligned} \langle r \rangle &= \int_0^{a_0} r^3 |R_{30}|^2 dr \\ &= \int_0^{a_0} r^3 \left| \frac{2}{81\sqrt{3a_0^3}} \left[27 - \frac{18r}{a_0} + \frac{2r^2}{a_0^2} \right] e^{\frac{-r}{3a_0}} \right|^2 dr \\ &= \frac{4}{6561 \times 3a_0^3} \int_0^{a_0} r^3 \left[729 - \frac{972r}{a_0} + \frac{432r^2}{a_0^2} - \frac{72r^3}{a_0^3} + \frac{4r^4}{a_0^4} \right] e^{\frac{-2r}{3a_0}} dr \\ &= \frac{4}{19.683 a_0^3} \int_0^{a_0} \left[729r^3 - \frac{972r^4}{a_0} + \frac{432r^5}{a_0^2} - \frac{72r^6}{a_0^3} + \frac{4r^7}{a_0^4} \right] e^{\frac{-2r}{3a_0}} dr \\ &= \frac{4}{19.683 a_0^3} \left[\left(729r^3 \cdot \frac{-3a_0}{2} e^{\frac{-2r}{3a_0}} - \frac{972r^4}{a_0} \cdot \frac{-3a_0}{2} e^{\frac{-2r}{3a_0}} + \frac{432r^5}{a_0^2} \cdot \frac{-3a_0}{2} e^{\frac{-2r}{3a_0}} - \right. \right. \\ &\quad \left. \frac{72r^6}{a_0^3} \cdot \frac{-3a_0}{2} e^{\frac{-2r}{3a_0}} + \frac{4r^7}{a_0^4} \cdot \frac{-3a_0}{2} e^{\frac{-2r}{3a_0}} \right) + \left(2187r^2 \cdot \frac{-9a_0^2}{4} e^{\frac{-2r}{3a_0}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{3888r^3}{a_0} \cdot \frac{-9a_0^2}{4} e^{\frac{-2r}{3a_0}} + \frac{2160r^4}{a_0^2} \cdot \frac{-9a_0^2}{4} e^{\frac{-2r}{3a_0}} - \frac{432r^5}{a_0^3} \cdot \frac{-9a_0^2}{4} e^{\frac{-2r}{3a_0}} + \right. \\ &\quad \left. \frac{28r^6}{a_0^4} \cdot \frac{-9a_0^2}{4} e^{\frac{-2r}{3a_0}} \right) + \left(4374r \cdot \frac{-27a_0^3}{8} e^{\frac{-2r}{3a_0}} - \frac{11664r^2}{a_0} \cdot \frac{-27a_0^3}{8} e^{\frac{-2r}{3a_0}} + \right. \\ &\quad \left. \frac{8640r^3}{a_0^2} \cdot \frac{-27a_0^3}{8} e^{\frac{-2r}{3a_0}} - \frac{2160r^4}{a_0^3} \cdot \frac{-27a_0^3}{8} e^{\frac{-2r}{3a_0}} + \frac{168r^5}{a_0^4} \cdot \frac{-27a_0^3}{8} e^{\frac{-2r}{3a_0}} \right) + \\ &\quad \left(4374 \cdot \frac{-81a_0^4}{16} e^{\frac{-2r}{3a_0}} - \frac{23328r}{a_0} \cdot \frac{-81a_0^4}{16} e^{\frac{-2r}{3a_0}} + \frac{25920r^2}{a_0^2} \cdot \frac{-81a_0^4}{16} e^{\frac{-2r}{3a_0}} - \right. \\ &\quad \left. \frac{8640r^3}{a_0^3} \cdot \frac{-81a_0^4}{16} e^{\frac{-2r}{3a_0}} + \frac{840r^4}{a_0^4} \cdot \frac{-81a_0^4}{16} e^{\frac{-2r}{3a_0}} \right) + \left(-\frac{23328}{a_0} \cdot \frac{-243a_0^5}{32} e^{\frac{-2r}{3a_0}} + \right. \\ &\quad \left. \frac{51840r}{a_0^2} \cdot \frac{-243a_0^5}{32} e^{\frac{-2r}{3a_0}} - \frac{25920r^2}{a_0^3} \cdot \frac{-243a_0^5}{32} e^{\frac{-2r}{3a_0}} + \frac{3360r^3}{a_0^4} \cdot \frac{-243a_0^5}{32} e^{\frac{-2r}{3a_0}} \right) + \\ &\quad \left(\frac{51840}{a_0^2} \cdot \frac{-729a_0^6}{64} e^{\frac{-2r}{3a_0}} - \frac{51840r}{a_0^3} \cdot \frac{-729a_0^6}{64} e^{\frac{-2r}{3a_0}} + \frac{10080r^2}{a_0^4} \cdot \frac{-729a_0^6}{64} e^{\frac{-2r}{3a_0}} \right) + \\ &\quad \left(\frac{51840}{a_0^3} \cdot \frac{-2187a_0^7}{128} e^{\frac{-2r}{3a_0}} - \frac{20160r}{a_0^4} \cdot \frac{-2187a_0^7}{128} e^{\frac{-2r}{3a_0}} \right) + \\ &\quad \left. \left(\frac{20160}{a_0^4} \cdot \frac{-6561a_0^8}{256} e^{\frac{-2r}{3a_0}} \right) \right] dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4}{19.683 a_0^3} \sum_0^{a_0} \left[\left(\left(729r^3 \cdot \frac{-3a_0}{2} - \frac{972r^4}{a_0} \cdot \frac{-3a_0}{2} + \frac{432r^5}{a_0^2} \cdot \frac{-3a_0}{2} - \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \frac{72r^6}{a_0^3} \cdot \frac{-3a_0}{2} + \frac{4r^7}{a_0^4} \cdot \frac{-3a_0}{2} \right) + \left(2187r^2 \cdot \frac{-9a_0^2}{4} - \frac{3888r^3}{a_0} \cdot \frac{-9a_0^2}{4} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \frac{2160r^4}{a_0^2} \cdot \frac{-9a_0^2}{4} - \frac{432r^5}{a_0^3} \cdot \frac{-9a_0^2}{4} + \frac{28r^6}{a_0^4} \cdot \frac{-9a_0^2}{4} \right) + \left(4374r \cdot \frac{-27a_0^3}{8} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \frac{11664r^2}{a_0} \cdot \frac{-27a_0^3}{8} + \frac{8640r^3}{a_0^2} \cdot \frac{-27a_0^3}{8} - \frac{2160r^4}{a_0^3} \cdot \frac{-27a_0^3}{8} + \frac{168r^5}{a_0^4} \cdot \frac{-27a_0^3}{8} \right) + \right. \\
 &\quad \left(4374 \cdot \frac{-81a_0^4}{16} - \frac{23328r}{a_0} \cdot \frac{-81a_0^4}{16} + \frac{25920r^2}{a_0^2} \cdot \frac{-81a_0^4}{16} - \frac{8640r^3}{a_0^3} \cdot \frac{-81a_0^4}{16} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{840r^4}{a_0^4} \cdot \frac{-81a_0^4}{16} \right) + \left(-\frac{23328}{a_0} \cdot \frac{-243a_0^5}{32} + \frac{51840r}{a_0^2} \cdot \frac{-243a_0^5}{32} - \frac{25920r^2}{a_0^3} \cdot \frac{-243a_0^5}{32} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{3360r^3}{a_0^4} \cdot \frac{-243a_0^5}{32} \right) + \left(\frac{51840}{a_0^2} \cdot \frac{-729a_0^6}{64} - \frac{51840r}{a_0^3} \cdot \frac{-729a_0^6}{64} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{10080r^2}{a_0^4} \cdot \frac{-729a_0^6}{64} \right) + \left(\frac{51840}{a_0^3} \cdot \frac{-2187a_0^7}{128} - \frac{20160r}{a_0^4} \cdot \frac{-2187a_0^7}{128} \right) + \\
 &\quad \left. \left(\frac{20160}{a_0^4} \cdot \frac{-6561a_0^8}{256} \right) \right] e^{\frac{-2r}{3a_0}} \Bigg] dr
 \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{19.683 a_0^3} \left[\frac{\begin{aligned} &- 1093,5a_0^4 + 1456 a_0^4 - 648a_0^4 + 108a_0^4 - 6a_0^4 \\ &- 4920,75a_0^4 + 8748 a_0^4 - 4860a_0^4 + 972a_0^4 - 63a_0^4 \\ &- 14762,25a_0^4 + 39366a_0^4 - 29160a_0^4 + 7290a_0^4 - 567a_0^4 \\ &- 22143,375a_0^4 + 118098a_0^4 - 131220a_0^4 + 43740a_0^4 - 4252,5a_0^4 \\ &+ 177147a_0^4 - 393660a_0^4 + 196830a_0^4 - 25515a_0^4 \\ &- 590490a_0^4 + 590490a_0^4 - 114817,5a_0^4 \\ &885735a_0^4 - 344452,5a_0^4 - 516678,75a_0^4 \end{aligned}}{e^{\frac{2}{3}}} \right] -$$

$$\begin{aligned}
 &[- 22143,375a_0^4 + 177147a_0^4 - 590490a_0^4 + 885735a_0^4 - \\
 &516678,75a_0^4]
 \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{19.683 a_0^3} \left[-\frac{129328 a_0^4}{e^{\frac{2}{3}}} - (-66430,125 a_0^4) \right]$$

$$= \frac{4}{19.683 a_0^3} \left[-\frac{129328 a_0^4}{1,9477340411} + 66430,125 a_0^4 \right]$$

$$= \frac{4}{19.683 a_0^3} [- 66399,338924103 a_0^4 + 66430,125 a_0^4]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{19.683} [30,786075897 a_0] \\
&= \frac{123,144303588 a_0}{19.683} \\
&= 0,006269705 a_0 \\
&= 0,006269705 (0,0530625 \times 10^{-9}) \\
&= 0,0003326862 \times 10^{-9}
\end{aligned}$$

5. Nilai Ekspektasi Posisi Elektron dalam Atom Deuterium untuk $n=3, l = 1$

$$\begin{aligned}
\langle r \rangle &= \int_0^{a_0} r^3 |R_{31}|^2 dr \\
&= \int_0^{a_0} r^3 \left| \frac{4}{81\sqrt{6}a_0^3} \left[\frac{6r}{a_0} - \frac{r}{a_0^2} \right] e^{-\frac{r}{3a_0}} \right|^2 dr \\
&= \frac{16}{6561 \times 6 a_0^3} \int_0^{a_0} r^3 \left[\frac{36r^2}{a_0^2} - \frac{12r^3}{a_0^3} + \frac{r^4}{a_0^4} \right] e^{-\frac{2r}{3a_0}} dr \\
&= \frac{4}{39.366 a_0^3} \int_0^{a_0} \left[\frac{36r^5}{a_0^2} - \frac{12r^6}{a_0^3} + \frac{r^7}{a_0^4} \right] e^{-\frac{2r}{3a_0}} dr \\
&= \frac{4}{39.366 a_0^3} \left[\frac{-54a_0^4 + 18a_0^4 - 1,5a_0^4 - 405a_0^4 + 162a_0^4 - 15,75a_0^4 - 2430a_0^4}{e^{\frac{2}{3}}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1215a_0^4 - 141,75a_0^4 - 10935a_0^4 + 7290a_0^4 - 1063,125a_0^4 - 32805a_0^4}{e^{\frac{2}{3}}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{32805a_0^4 - 6378,75a_0^4 + 49207,5a_0^4 - 98415a_0^4 - 28704,375a_0^4}{e^{\frac{2}{3}}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{147622,5a_0^4 - 8613,125a_0^4 - 129169,6875a_0^4}{e^{\frac{2}{3}}} \right] \\
&\quad - \left[-129169,6875a_0^4 + 147622,5a_0^4 - 49207,5a_0^4 \right] \\
&= \frac{4}{39.366 a_0^3} \left[-\frac{59897,0625 a_0^4}{e^{\frac{2}{3}}} - (-30754,6875 a_0^4) \right] \\
&= \frac{4}{39.366 a_0^3} \left[-\frac{59897,0625 a_0^4}{1,9477340411} + 30754,6875 a_0^4 \right] \\
&= \frac{4}{39.366 a_0^3} [-30752,17727a_0^4 + 30754,6875 a_0^4] \\
&= \frac{4}{39.366} [2,51023a_0] \\
&= 0,001020263171 a_0 \\
&= 0,001020263171 (0,0530625 \times 10^{-9}) \\
&= 0,0000541377145 \times 10^{-9}
\end{aligned}$$

6. Nilai Ekspektasi Posisi Elektron dalam Atom Deuterium untuk $n=3, l=2$

$$\begin{aligned}
 \langle r \rangle &= \int_0^{a_0} r^3 |R_{32}|^2 dr \\
 &= \int_0^{a_0} r^3 \left| \frac{1}{a_0^2 \cdot 81\sqrt{30a_0^3}} r^2 \cdot e^{\frac{-r}{3a_0}} \right|^2 dr \\
 &= \frac{16}{196.830 a_0^7} \int_0^{a_0} r^3 \left[\frac{36r^2}{a_0^2} - \frac{12r^3}{a_0^3} + \frac{r^4}{a_0^4} \right] e^{\frac{-2r}{3a_0}} dr \\
 &= \frac{16}{196.830 a_0^7} \int_0^{a_0} r^3 \cdot (r^2)^2 e^{\frac{-2r}{3a_0}} dr \\
 &= \frac{16}{196.830 a_0^7} \int_0^{a_0} r^7 e^{\frac{-2r}{3a_0}} dr \\
 &= \frac{16}{196.830 a_0^7} \sum_0^{a_0} \left[\left[r^7 \cdot \frac{-3a_0}{2} + 7r^6 \cdot \frac{-9a_0^2}{4} + 42r^5 \cdot \frac{-27a_0^3}{8} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. 210r^4 \cdot \frac{-81a_0^4}{16} + 840r^3 \cdot \frac{-243a_0^5}{32} + 2520r^2 \cdot \frac{-729a_0^6}{64} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. 5040r \cdot \frac{-2187a_0^7}{128} + 5040 \cdot \frac{-6561a_0^8}{256} \right] e^{\frac{-2r}{3a_0}} \right] dr \\
 &= \frac{16}{196.830 a_0^7} \left[\frac{-1,5a_0^8 - 15,75a_0^8 - 141,75a_0^8 - 1063,125a_0^3 - 6378,75a_0^8}{e^{\frac{2}{3}}} - \right. \\
 &\quad \left. [-129169,6875a_0^3] \right] \\
 &= \frac{16}{196.830 a_0^7} \left[-\frac{251588,0625 a_0^8}{e^{\frac{2}{3}}} - (-129169,6875 a_0^8) \right] \\
 &= \frac{16}{196.830 a_0^7} \left[-\frac{251588,0625 a_0^8}{1,9477340411} + 129169,6875 a_0^8 \right] \\
 &= \frac{16}{196.830 a_0^7} [-129169,6209544 a_0^8 + 129169,6875 a_0^8] \\
 &= \frac{16}{196.830 a_0^7} [0.0665456 a_0] \\
 &= 0,0000054094 a_0 \\
 &= 0,0000054094 (0,0530625 \times 10^{-9}) \\
 &= 0,0000002870362875 \times 10^{-9}
 \end{aligned}$$

Lampiran 5. Nilai Ketidakpastian Posisi Fungsi Radial Atom Deuterium

1. Nilai Ketidakpastian Posisi Fungsi Radial Atom Deuterium untuk $n=1, l=0$,

$$r = a_0$$

$$\begin{aligned}
 \langle r^2 \rangle &= \int_0^{a_0} r^4 |R_{10}|^2 dr \\
 &= \int_0^{a_0} r^4 \left| \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{r}{a_0}} \right|^2 dr \\
 &= \frac{4}{a_0^3} \int_0^{a_0} r^4 e^{-\frac{2r}{a_0}} dr \\
 &= \frac{4}{a_0^3} \left[r^4 \cdot -\frac{a_0}{2} e^{-\frac{2r}{a_0}} - \int_0^{a_0} -\frac{a_0}{2} e^{-\frac{2r}{a_0}} \cdot 4r^3 dr \right] \\
 &= \frac{4}{a_0^3} \left[r^4 \cdot -\frac{a_0}{2} e^{-\frac{2r}{a_0}} + 4r^3 \cdot -\frac{a_0^2}{4} e^{-\frac{2r}{a_0}} \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^{a_0} -\frac{a_0^2}{4} e^{-\frac{2r}{a_0}} \cdot 12r^2 dr \right] \\
 &= \frac{4}{a_0^3} \left[r^4 \cdot -\frac{a_0}{2} e^{-\frac{2r}{a_0}} + 4r^3 \cdot -\frac{a_0^2}{4} e^{-\frac{2r}{a_0}} + 12r^2 \cdot -\frac{a_0^3}{8} e^{-\frac{2r}{a_0}} \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^{a_0} -\frac{a_0^3}{8} e^{-\frac{2r}{a_0}} \cdot 24r dr \right] \\
 &= \frac{4}{a_0^3} \left[r^4 \cdot -\frac{a_0}{2} e^{-\frac{2r}{a_0}} + 4r^3 \cdot -\frac{a_0^2}{4} e^{-\frac{2r}{a_0}} + 12r^2 \cdot -\frac{a_0^3}{8} e^{-\frac{2r}{a_0}} + \right. \\
 &\quad \left. 24r \cdot -\frac{a_0^4}{16} e^{-\frac{2r}{a_0}} - \int_0^{a_0} -\frac{a_0^4}{16} e^{-\frac{2r}{a_0}} \cdot 24 dr \right] \\
 &= \frac{4}{a_0^3} \sum_0^{a_0} \left[-\frac{a_0 r^4}{2e^{a_0}} - \frac{a_0^2 4r^3}{4e^{a_0}} - \frac{a_0^3 \cdot 12r^2}{8e^{a_0}} - \frac{a_0^4 \cdot 24r}{16e^{a_0}} - \frac{a_0^5 \cdot 24}{32e^{a_0}} \right] dr \\
 &= \frac{4}{a_0^3} \left[\left[-\frac{a_0^5}{2} - \frac{4a_0^5}{4} - \frac{12a_0^5}{8} - \frac{24a_0^5}{16} - \frac{24a_0^5}{32} \right] e^{-2} - \right. \\
 &\quad \left[-\frac{24a_0^5}{32} \right] \\
 &= \frac{4}{a_0^3} \left[\left[-\frac{a_0^5}{2} - a_0^5 - \frac{3a_0^5}{2} - \frac{3a_0^5}{2} - \frac{3a_0^5}{4} \right] e^{-2} + \left[\frac{3a_0^5}{4} \right] \right] \\
 &= \frac{4}{a_0^3} \left[\left[-\frac{2a_0^5}{4} - \frac{4a_0^5}{4} - \frac{6a_0^5}{4} - \frac{6a_0^5}{4} - \frac{3a_0^5}{4} \right] e^{-2} + \left[\frac{3a_0^5}{4} \right] \right] \\
 &= \frac{4}{a_0^3} \left[\left[-\frac{21a_0^5}{4} \right] e^{-2} + \left[\frac{3a_0^5}{4} \right] \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\left[-\frac{21a_0^2}{e^2} \right] + [3 a_0^2] \right] \\
&= -2,842a_0^2 + 3 a_0^2 \\
&= 0,158 a_0^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta r &= \sqrt{\langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2} \\
&= \sqrt{(0,158 a_0^2) - (0,21431481140 a_0)^2} \\
&= \sqrt{(0,158 a_0^2) - (0,04579308384 a_0^2)} \\
&= \sqrt{0,1122 a_0^2} \\
&= 0,33496 a_0 \\
&= 0,33496 (0,0530625 \times 10^{-9} \text{ m}) \\
&= 1,77738151148778 \times 10^{-11} \text{ m}
\end{aligned}$$

2. Nilai Ketidakpastian Posisi Fungsi Radial Atom Deuterium untuk $n=2, l=0$,

$$r = a_0$$

$$\langle r^2 \rangle = \int_0^{a_0} r^4 |R_{20}|^2 dr$$

$$= \int_0^{a_0} r^4 \left| \frac{\left[2 - \frac{r}{a_0}\right]}{2\sqrt{2}a_0^3} e^{-\frac{r}{2a_0}} \right|^2 dr$$

$$= \frac{1}{8a_0^3} \int_0^{a_0} r^4 \left[4 - \frac{4r}{a_0} + \frac{r^2}{a_0^2} \right] e^{-\frac{r}{a_0}} dr$$

$$= \frac{1}{8a_0^3} \int_0^{a_0} \left[4r^4 - \frac{4r^5}{a_0} + \frac{r^6}{a_0^2} \right] e^{-\frac{r}{a_0}} dr$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8a_0^3} \left[\left(-4r^4 a_0 e^{-\frac{r}{a_0}} + \frac{4r^5}{a_0} a_0 e^{-\frac{r}{a_0}} - \frac{r^6}{a_0^2} a_0 e^{-\frac{r}{a_0}} \right) + \right. \\
&\quad \left(-16r^3 a_0^2 e^{-\frac{r}{a_0}} + \frac{20r^4}{a_0} a_0^2 e^{-\frac{r}{a_0}} - \frac{6r^5}{a_0^2} a_0^2 e^{-\frac{r}{a_0}} \right) + \\
&\quad \left(-48r^2 a_0^3 e^{-\frac{r}{a_0}} + \frac{80r^3}{a_0} a_0^3 e^{-\frac{r}{a_0}} - \frac{30r^4}{a_0^2} a_0^3 e^{-\frac{r}{a_0}} \right) + \\
&\quad \left. \left(-96r a_0^4 e^{-\frac{r}{a_0}} + \frac{240r^2}{a_0} a_0^4 e^{-\frac{r}{a_0}} - \frac{120r^3}{a_0^2} a_0^4 e^{-\frac{r}{a_0}} \right) \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(-96a_0^5 e^{\frac{-r}{a_0}} + \frac{480r}{a_0} a_0^5 e^{\frac{-r}{a_0}} - \frac{360r^2}{a_0^2} a_0^5 e^{\frac{-r}{a_0}} \right) + \\
& \left(\frac{480}{a_0} a_0^6 e^{\frac{-r}{a_0}} - \frac{720r}{a_0^2} a_0^6 e^{\frac{-r}{a_0}} \right) + \left(-\frac{720r}{a_0^2} a_0^6 e^{\frac{-r}{a_0}} \right) \Big] dr \\
& = \frac{1}{8a_0^3} \sum_0^{a_0} \left[-4r^4 a_0 + \frac{4r^5}{a_0} a_0 - \frac{r^6}{a_0^2} a_0 - 16r^3 a_0^2 + \frac{20r^4}{a_0} a_0^2 - \right. \\
& \quad \frac{6r^5}{a_0^2} a_0 - 48r^2 a_0^3 + \frac{80r^3}{a_0} a_0^3 - \frac{30r^4}{a_0^2} a_0^3 - \\
& \quad 96r a_0^4 + \frac{240r^2}{a_0} a_0^4 - \frac{120r^3}{a_0^2} a_0^4 - 96a_0^5 + \\
& \quad \frac{480r}{a_0} a_0^5 - \frac{360r^2}{a_0^2} a_0^5 + \frac{480}{a_0} a_0^6 - \\
& \quad \left. \frac{720r}{a_0^2} a_0^6 - \frac{720r}{a_0^2} a_0^6 \right] e^{\frac{-r}{a_0}} \Big] dr \\
& = \frac{1}{8a_0^3} \left[\frac{-4a_0^5 + 4a_0^5 - a_0^5 - 16a_0^5 + 20a_0^5 - 6a_0^5}{e} \right. \\
& \quad \left. \frac{-48a_0^5 + 80a_0^5 - 30a_0^5 - 96a_0^5 + 240a_0^5 - 120a_0^5}{e} \right. \\
& \quad \left. \frac{-96 + 480a_0^5 - 360a_0^5 + 480a_0^5 - 720a_0^5 - 720a_0^5}{e} \right] - [-96a_0^5 + \\
& \quad 480a_0^5 - 720a_0^5] \\
& = \frac{1}{8a_0^3} \left[\frac{-913a_0^5}{e} + 336a_0^5 \right] \\
& = \frac{1}{8} \left[\frac{-913a_0^2}{2,71828183} + 336a_0^2 \right] \\
& = \frac{1}{8} [-335,873929599 a_0^2 + 336 a_0^2] \\
& = \frac{a_0}{8} [0,126074 a_0^2] \\
& = 0,01575925 a_0^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta r & = \sqrt{\langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2} \\
& = \sqrt{(0,01575925 a_0^2) - (0,02195912 a_0)^2} \\
& = \sqrt{(0,01575925 a_0^2) - (0,0004821977 a_0^2)} \\
& = \sqrt{0,0152570523 a_0^2} \\
& = 0,123519441 a_0 \\
& = 0,123519441 (0,0530625 \times 10^{-9} \text{ m})
\end{aligned}$$

$$= 6,54173978636 \times 10^{-12} \text{ m}$$

3. Nilai Ketidakpastian Posisi Fungsi Radial Atom Deuterium untuk $n=2, l=1$,

$$r = a_0$$

$$\begin{aligned} \langle r^2 \rangle &= \int_0^{a_0} r^4 |R_{20}|^2 dr \\ &= \int_0^{a_0} r^4 \left| \frac{r}{2a_0^2 \sqrt{6a_0^3}} e^{\frac{-r}{2a_0}} \right|^2 dr \\ &= \frac{1}{24 a_0^5} \int_0^{a_0} r^4 \cdot r^2 e^{\frac{-2r}{a_0}} dr \\ &= \frac{1}{24 a_0^5} \int_0^{a_0} r^6 e^{\frac{-2r}{a_0}} dr \\ &= \frac{1}{24 a_0^5} \left[-r^6 a_0 e^{\frac{-r}{a_0}} - 6r^5 a_0^2 e^{\frac{-r}{a_0}} - 30r^4 a_0^3 e^{\frac{-r}{a_0}} - 120r^3 a_0^4 e^{\frac{-r}{a_0}} - \right. \\ &\quad \left. - 360r^2 \cdot a_0^5 e^{\frac{-r}{a_0}} - 720r \cdot a_0^6 e^{\frac{-r}{a_0}} - 720 a_0^7 e^{\frac{-r}{a_0}} \right] dr \\ &= \frac{1}{24 a_0^5} \sum_0^{a_0} \left[\left[-r^6 a_0 - 6r^5 a_0^2 - 30r^4 a_0^3 - 120r^3 a_0^4 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. 360r^2 \cdot a_0^5 - 720r \cdot a_0^6 - 720 a_0^7 \right] e^{\frac{-r}{a_0}} \right] dr \\ &= \frac{1}{24 a_0^5} \left[\frac{-a_0^7 - 6a_0^7 - 30a_0^7 - 120a_0^7 - 360a_0^7 - 720a_0^7 - 720a_0^7}{e} \right] - \\ &\quad \left[-720a_0^7 \right] \\ &= \frac{1}{24 a_0^5} \left[-\frac{1957 a_0^7}{e} + 720 a_0^7 \right] \\ &= \frac{1}{24} \left[-\frac{1957 a_0^2}{2,71828183} + 720 a_0^2 \right] \\ &= \frac{1}{24} \left[-719,94 a_0^2 + 720 a_0^2 \right] \\ &= \frac{1}{24} \left[0,06 a_0^2 \right] \\ &= 0,0025 a_0^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta r &= \sqrt{\langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2} \\ &= \sqrt{(0,0025 a_0^2) - (0,002970933 a_0)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{(0,0025 a_0^2) - (0,000088264 a_0^2)} \\
 &= \sqrt{0,002411736 a_0^2} \\
 &= 0,049911658 a_0 \\
 &= 0,049911658 (0,0530625 \times 10^{-9} \text{ m}) \\
 &= 2,64022578338 \times 10^{-12} \text{ m}
 \end{aligned}$$

4. Nilai Ketidakpastian Posisi Fungsi Radial Atom Deuterium untuk $n=3, l=0$,

$$r = a_0$$

$$\langle r^2 \rangle = \int_0^{a_0} r^4 |R_{30}|^2 dr$$

$$= \int_0^{a_0} r^4 \left| \frac{2}{81\sqrt{3}a_0^{\frac{3}{2}}} \left[27 - \frac{18r}{a_0} + \frac{2r^2}{a_0^2} \right] e^{\frac{-r}{3a_0}} \right|^2 dr$$

$$= \frac{4}{6561 \times 3 a_0^3} \int_0^{a_0} r^4 \left[729 - \frac{972r}{a_0} + \frac{432r^2}{a_0^2} - \frac{72r^3}{a_0^3} + \frac{4r^4}{a_0^4} \right] e^{\frac{-2r}{3a_0}} dr$$

$$= \frac{4}{19.683 a_0^3} \int_0^{a_0} \left[729r^4 - \frac{972r^5}{a_0} + \frac{432r^6}{a_0^2} - \frac{72r^7}{a_0^3} + \frac{4r^8}{a_0^4} \right] e^{\frac{-r}{a_0}} dr$$

$$= \frac{4}{19.683 a_0^3} \left[\begin{aligned} &- 1093,5a_0^5 + 1458 a_0^5 - 648a_0^5 + 108a_0^5 - 6a_0^5 \\ &- 6561a_0^5 + 10935 a_0^5 - 5832a_0^5 + 1134a_0^5 - 72a_0^5 \\ &- 29524,5a_0^5 + 65778 a_0^5 - 43740a_0^5 + 10206a_0^5 - 756a_0^5 \\ &- 88573,5a_0^5 + 295245a_0^5 - 262440a_0^5 + 76545a_0^5 - 6804a_0^5 \\ &- 132860,25a_0^5 + 885735a_0^5 - 1180980a_0^5 + 459270a_0^5 - 51030a_0^5 \\ &+ 1328602,5a_0^5 - 3542940a_0^5 + 20667150a_0^5 - 306180a_0^5 \\ &- 5314410a_0^5 + 6200145a_0^5 - 1377810a_0^5 \\ &+ 9300217,5a_0^5 - 4133430a_0^5 - 6200145a_0^5 \end{aligned} \right] e^{\frac{2}{3}}$$

$$\left[- 132860,25a_0^5 + 1328602,5a_0^5 - 5314410a_0^5 + 9300217,5a_0^5 - 6200145a_0^5 \right]$$

$$= \frac{4}{19.683 a_0^3} \left[- \frac{1479939,25 a_0^5}{e^{\frac{2}{3}}} - (-1018595,25 a_0^5) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{19.683 a_0^3} \left[-\frac{1479939,25 a_0^5}{1,9477340411} + 1018595,25 a_0^5 \right] \\
&= \frac{4}{19.683 a_0^3} [-1018486,61 a_0^5 + 1018595,25 a_0^5] \\
&= \frac{4}{19.683} [109,25 a_0^2] \\
&= \frac{437 a_0^2}{19.683} \\
&= 0,022082 a_0^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta r &= \sqrt{\langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2} \\
&= \sqrt{(0,022082 a_0^2) - (0,006269705 a_0)^2} \\
&= \sqrt{(0,022082 a_0^2) - (0,0000393092 a_0^2)} \\
&= \sqrt{0,0220427 a_0^2} \\
&= 0,1488636 a_0 \\
&= 0,1488636 (0,0530625 \times 10^{-9} \text{ m}) \\
&= 3,521512569746 \times 10^{-11} \text{ m}
\end{aligned}$$

5. Nilai Ketidakpastian Posisi Fungsi Radial Atom Deuterium untuk $n=3, l=1,$

$$r = a_0$$

$$\langle r^2 \rangle = \int_0^{a_0} r^4 |R_{31}|^2 dr$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{a_0} r^4 \left| \frac{4}{81\sqrt{6}a_0^3} \left[\frac{6r}{a_0} - \frac{r}{a_0^2} \right] e^{\frac{-r}{3a_0}} \right|^2 dr \\
&= \frac{16}{6561 \times 6 a_0^3} \int_0^{a_0} r^4 \left[\frac{36r^2}{a_0^2} - \frac{12r^3}{a_0^3} + \frac{r^4}{a_0^4} \right] e^{\frac{-2r}{3a_0}} dr \\
&= \frac{16}{39.366 a_0^3} \int_0^{a_0} \left[\frac{36r^6}{a_0^2} - \frac{12r^7}{a_0^3} + \frac{r^8}{a_0^4} \right] e^{\frac{-2r}{3a_0}} dr
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{16}{39.366 a_0^3} \left[\frac{-54a_0^5 + 18a_0^5 - 1,5a_0^5 - 486a_0^5 + 189a_0^5 - 18a_0^5 - 3645a_0^5}{e^{\frac{2}{3}}} \right. \\
&\quad \left. + 1701 a_0^5 - 189 a_0^5 - 21870 a_0^5 - 12757,5 a_0^5 - 1701 a_0^5 - 98415 a_0^5 \right. \\
&\quad \left. + 76545 a_0^5 - 1257,5 a_0^5 - 295245 a_0^5 + 344452,5 a_0^5 - 229635 a_0^5 \right. \\
&\quad \left. - 442867,5 a_0^5 + 1033357,5 a_0^5 - 344452,5 a_0^5 + 1550036,25 a_0^5 \right. \\
&\quad \left. - 1033357,5 a_0^5 - 1550036,25 a_0^5 \right] \\
&= \frac{16}{39.366 a_0^3} \left[- \frac{862584 a_0^5}{e^{\frac{2}{3}}} - (-442867,5 a_0^5) \right] \\
&= \frac{16}{39.366 a_0^3} \left[- \frac{862584 a_0^5}{1,9477340411} + 442867,5 a_0^5 \right] \\
&= \frac{16}{39.366 a_0^3} \left[- 442865,3922 a_0^5 + 442867,5 a_0^5 \right] \\
&= \frac{16}{39.366} \left[2,1077963905 a_0^2 \right] \\
&= 0,000856697 a_0^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta r &= \sqrt{\langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2} \\
&= \sqrt{(0,000856697 a_0^2) - (0,0061020263 a_0)^2} \\
&= \sqrt{(0,000856697 a_0^2) - (0,0000010409 a_0^2)} \\
&= \sqrt{0,0006431879 a_0^2} \\
&= 0,0253611494 a_0 \\
&= 0,0253611494 (0,0530625 \times 10^{-9} \text{ m}) \\
&= 1,548210233168 \times 10^{-12} \text{ m}
\end{aligned}$$

6. Nilai Ketidakpastian Posisi Fungsi Radial Atom Deuterium untuk $n=3, l=2,$

$$r = a_0$$

$$\begin{aligned}
\langle r^2 \rangle &= \int_0^{a_0} r^4 |R_{32}|^2 dr \\
&= \int_0^{a_0} r^4 \left| \frac{1}{a_0^2 \cdot 81\sqrt{30}a_0^3} r^2 \cdot e^{\frac{-r}{3a_0}} \right|^2 dr \\
&= \frac{16}{196.830 a_0^7} \int_0^{a_0} r^4 \left[\frac{36r^2}{a_0^2} - \frac{12r^3}{a_0^3} + \frac{r^4}{a_0^4} \right] e^{\frac{-2r}{3a_0}} dr
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{16}{196.830 a_0^7} \int_0^{a_0} r^4 \cdot (r^2)^2 e^{\frac{-2r}{3a_0}} dr \\
&= \frac{16}{196.830 a_0^7} \int_0^{a_0} r^8 e^{\frac{-2r}{3a_0}} dr \\
&= \frac{16}{196.830 a_0^7} \sum_0^{a_0} \left[\left[r^8 \cdot \frac{-3a_0}{2} + 8r^7 \cdot \frac{-9a_0^2}{4} + 56r^6 \cdot \frac{-27a_0^3}{8} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 336r^5 \cdot \frac{-81a_0^4}{16} + 1680r^4 \cdot \frac{-243a_0^5}{32} + 6720r^3 \cdot \frac{-729a_0^6}{64} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 20160r^2 \cdot \frac{-2187a_0^7}{128} + 40320r \cdot \frac{-6561a_0^8}{256} + 40320 \cdot \frac{-19683a_0^9}{512} \right] e^{\frac{-2r}{3a_0}} \right] dr \\
&= \frac{16}{196.830 a_0^7} \left[\frac{-1,5a_0^9 - 18a_0^9 - 189a_0^9 - 1701a_0^9 - 12757a_0^9}{e^{\frac{2}{3}}} - \right. \\
&\quad \left. [-1550036,25a_0^9] \right] \\
&= \frac{16}{196.830 a_0^7} \left[-\frac{3019058,25 a_0^9}{e^{\frac{2}{3}}} - (-1550036,25a_0^9) \right] \\
&= \frac{16}{196.830 a_0^7} \left[-\frac{3019058,25 a_0^9}{1,9477340411} + 1550036,25a_0^9 \right] \\
&= \frac{16}{196.830 a_0^7} [-1550036,2215785 a_0^9 + 1550036,25a_0^9] \\
&= \frac{16}{196.830 a_0^7} [0,0284215 a_0^9] \\
&= 0,0000023103 a_0^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta r &= \sqrt{\langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2} \\
&= \sqrt{(0,0000023103 a_0^2) - (0,0000054094 a_0)^2} \\
&= \sqrt{(0,0000023103 a_0^2) - (0,292616 \times 10^{-12} a_0^2)} \\
&= \sqrt{(0,23103 \times 10^{-5} a_0^2) - (0,0000000292616 \times 10^{-5} a_0^2)} \\
&= \sqrt{0,23102997 \times 10^{-5} a_0^2} \\
&= 1,519967 \times 10^{-3} a_0 \\
&= 0,001519967 a_0 \\
&= 0,001519967 (0,0530625 \times 10^{-9} \text{ m}) \\
&= 1,17947963462 \times 10^{-13} \text{ m}
\end{aligned}$$

Lampiran 6. Nilai Ketidakpastian Momentum Posisi Fungsi Radial Atom**Deuterium**

1. Nilai Ketidakpastian Momentum Posisi Fungsi Radial Atom Deuterium untuk

$$n=1, l=0, r = a_0$$

$$\Delta P_r \cdot \Delta r \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta P_r \geq \frac{\hbar}{2\Delta r}$$

$$\begin{aligned} \Delta P_r &\geq \frac{1,054 \times 10^{-34} \text{ J.S}}{2(1,77738151148778 \times 10^{-11} \text{ m})} \\ &= 2,97486075380 \times 10^{-24} \text{ Kg.m/s} \end{aligned}$$

2. Nilai Ketidakpastian Momentum Posisi Fungsi Radial Atom Deuterium untuk

$$n=2, l=0, r = a_0$$

$$\Delta P_r \cdot \Delta r \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta P_r \geq \frac{\hbar}{2\Delta r}$$

$$\begin{aligned} \Delta P_r &\geq \frac{1,054 \times 10^{-34} \text{ J.S}}{2(6,54173978636 \times 10^{-12} \text{ m})} \\ &= 8,05596090964 \times 10^{-24} \text{ Kg.m/s} \end{aligned}$$

3. Nilai Ketidakpastian Momentum Posisi Fungsi Radial Atom Deuterium untuk

$$n=2, l=1, r = a_0$$

$$\Delta P_r \cdot \Delta r \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta P_r \geq \frac{\hbar}{2\Delta r}$$

$$\begin{aligned} \Delta P_r &\geq \frac{1,054 \times 10^{-34} \text{ J.S}}{2(2,64022578338 \times 10^{-12} \text{ m})} \\ &= 198,9852582508 \times 10^{-25} \text{ Kg.m/s} \end{aligned}$$

4. Nilai Ketidakpastian Momentum Posisi Fungsi Radial Atom Deuterium untuk

$$n=3, l=0, r = a_0$$

$$\Delta P_r \cdot \Delta r \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta P_r \geq \frac{\hbar}{2\Delta r}$$

$$\begin{aligned}\Delta P_r &\geq \frac{1,054 \times 10^{-34} \text{ J.S}}{2(3,521512569746 \times 10^{-11} \text{ m})} \\ &= 1,49498215164 \times 10^{-23} \text{ Kg.m/s}\end{aligned}$$

5. Nilai Ketidakpastian Momentum Posisi Fungsi Radial Atom Deuterium untuk $n=3, l=1, r = a_0$

$$\begin{aligned}\Delta P_r \cdot \Delta r &\geq \frac{\hbar}{2} \\ \Delta P_r &\geq \frac{\hbar}{2\Delta r} \\ \Delta P_r &\geq \frac{1,054 \times 10^{-34} \text{ J.S}}{2(1,548210233168 \times 10^{-12} \text{ m})} \\ &= 3,40393047862 \times 10^{-23} \text{ Kg.m/s}\end{aligned}$$

6. Nilai Ketidakpastian Momentum Posisi Fungsi Radial Atom Deuterium untuk $n=3, l=2, r = a_0$

$$\begin{aligned}\Delta P_r \cdot \Delta r &\geq \frac{\hbar}{2} \\ \Delta P_r &\geq \frac{\hbar}{2\Delta r} \\ \Delta P_r &\geq \frac{1,054 \times 10^{-34} \text{ J.S}}{2(1,17947963462 \times 10^{-13} \text{ m})} \\ &= 4,468072059312 \times 10^{-22} \text{ Kg.m/s}\end{aligned}$$

Lampiran 7. Program Matlab

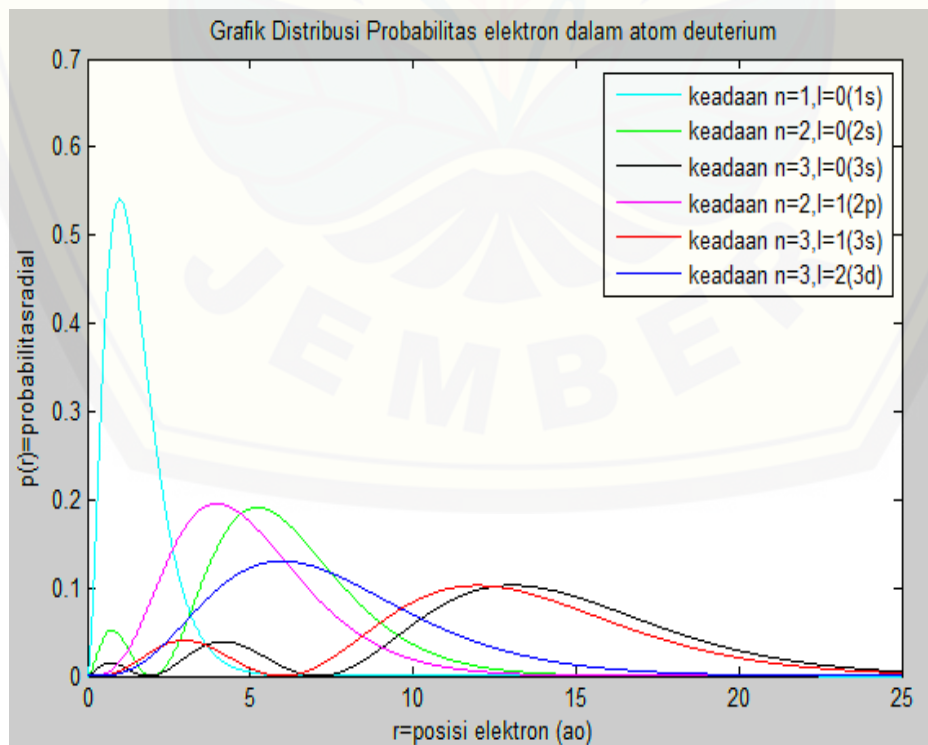
7.1 Menentukan Grafik Rapat Probabilitas

```

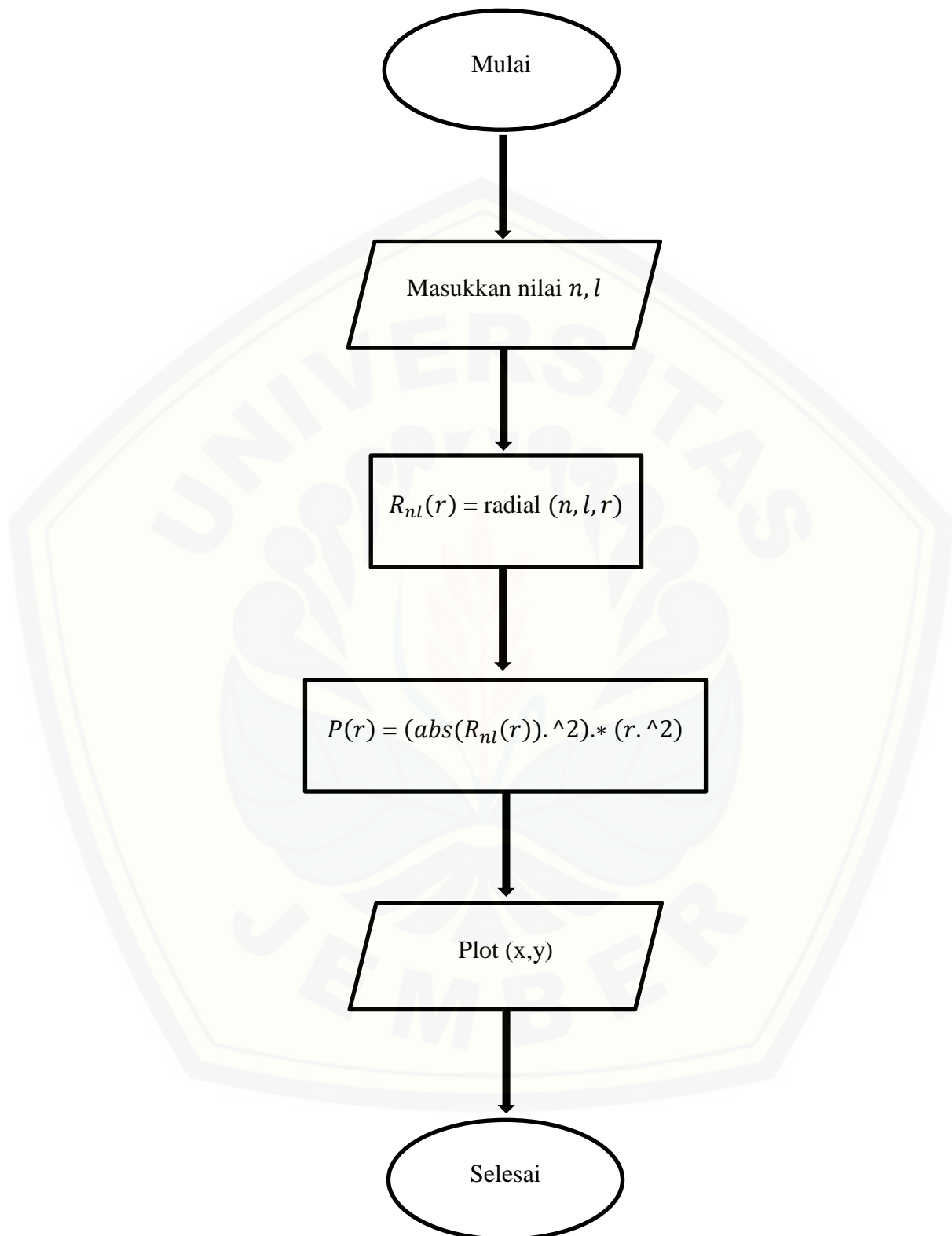
1 function p=rapatprobabilitas(ao)
2     ao=0.0530625.*(10.^-9);
3     n=0:0.001:25;r=n.*ao;x=r/ao;
4     R10=2.*(1./ao)^1.5).*exp(-r./ao);
5     R20=(1/(2*(sqrt(2)))).*(1./ao)^1.5).* (2-(r/ao)).*exp(-r./ (2*ao));
6     R30=(2/(81*(sqrt(3)))).*(1./ao)^1.5).* (27-(18.*(r/ao))+2.*(r/ao).^2)).*exp(-r./ (3*ao));
7     R21=(1/(2*(sqrt(6)))).*(1./ao)^1.5).* (r/ao).*exp(-r./ (2*ao));
8     R31=(4/(81*(sqrt(6)))).*(1./ao)^1.5).* (6-(r/ao)).* (r/ao).*exp(-r./ (3*ao));
9     R32=(4/(81*(sqrt(30)))).*(1./ao)^1.5).* (r/ao).^2).*exp(-r./ (3*ao));
10    y10=(x.^2).* (abs(R10)).^2;y20=(x.^2).* (abs(R20)).^2;
11    y30=(x.^2).* (abs(R30)).^2;y21=(x.^2).* (abs(R21)).^2;
12    y31=(x.^2).* (abs(R31)).^2;y32=(x.^2).* (abs(R32)).^2;
13    sum(y10);sum(y20);sum(y30);sum(y21);sum(y31);sum(y32);
14    p10=(y10./sum(y10)).*10e+2;p20=(y20./sum(y20)).*10e+2;p30=(y30./sum(y30)).*10e+2;
15    p21=(y21./sum(y21)).*10e+2;p31=(y31./sum(y31)).*10e+2;p32=(y32./sum(y32)).*10e+2;
16    plot(x,p10,'c-',x,p20,'g-',x,p30,'k',x,p21,'m-',x,p31,'r-',x,p32,'b-');
17    title('Grafik Distribusi Probabilitas elektron dalam atom deuterium');
18    xlabel('r=posisi elektron (ao)');ylabel('p(r)=probabilitasradial');
19    legend('keadaan n=1,l=0(1s)','keadaan n=2,l=0(2s)','keadaan n=3,l=0(3s)','keadaan n=2,l=1(2p)',

```

Gambar 7.a Tampilan M-file untuk membantu membuat grafik rapat probabilitas



Gambar 7.b Tampilan hasil eksekusi comand windows grafik rapat probabilitas

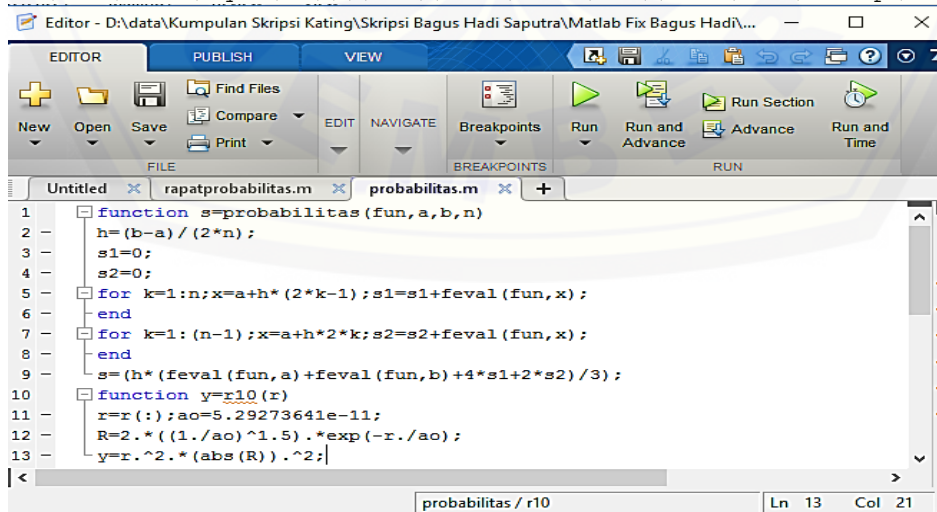


Gambar 7.c Flowchart untuk Program Menampilkan Grafik Probabilitas Radial

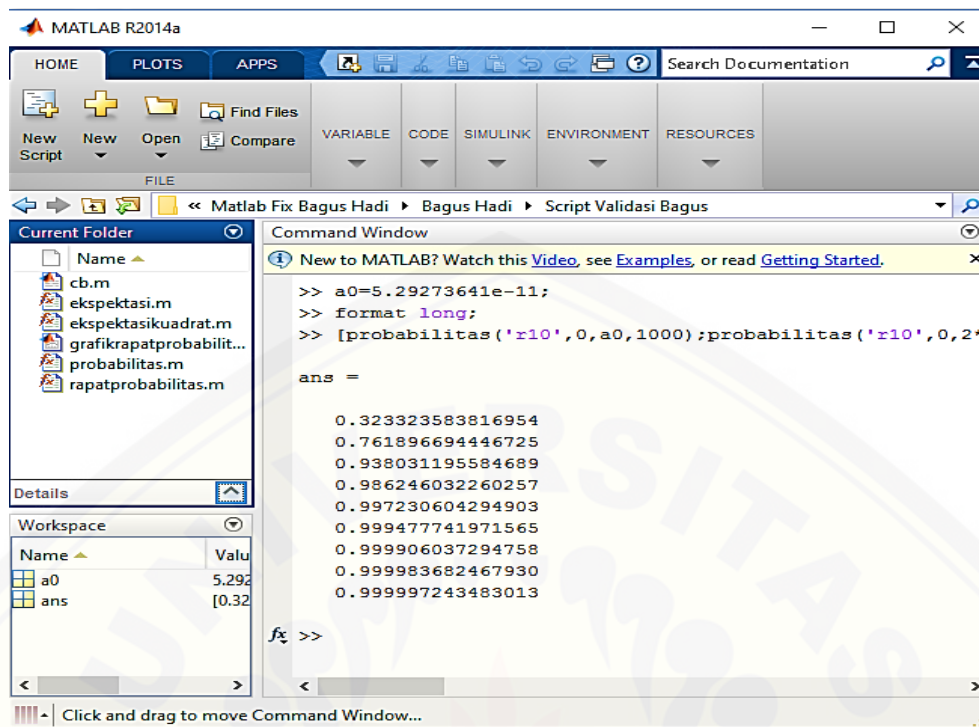
7.2 Menentukan Probabilitas

Berikut adalah skrip pada M-file untuk mencari probabilitas

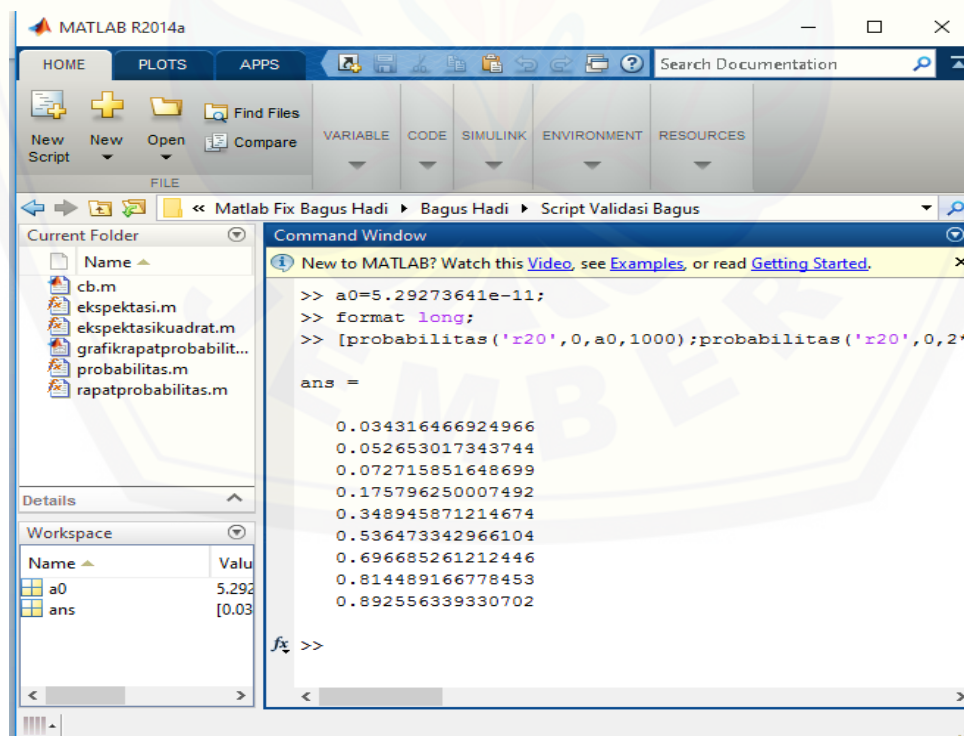
```
function s=probabilitas(fun,a,b,n)
h=(b-a)/(2*n);
s1=0;
s2=0;
for k=1:n;x=a+h*(2*k-1);s1=s1+feval(fun,x);
end
for k=1:(n-1);x=a+h*2*k;s2=s2+feval(fun,x);
end
s=(h*(feval(fun,a)+feval(fun,b)+4*s1+2*s2)/3);
function y=r10(r)
r=r(:);ao=5.29273641e-11;
R=2.*((1./ao)^1.5).*exp(-r./ao);
y=r.^2.*(abs(R)).^2;
function y=r20(r)
r=r(:);ao=5.29273641e-11;
R=(1./(2*(sqrt(2)))).*((1./ao)^1.5.*(2-(r/ao)).*exp(-r./(2.*ao)));
y=r.^2.*(abs(R)).^2;
function y=r21(r)
r=r(:);ao=5.29273641e-11;
R=(1./(2*(sqrt(6)))).*((1./ao)^1.5.*(r/ao).*exp(-r./(2.*ao)));
y=r.^2.*(abs(R)).^2;
function y=r30(r)
r=r(:);ao=5.29273641e-11;
R=(2./(81.*(sqrt(3)))).*((1./ao).^1.5.*(27-
(18.*(r/ao))+2.*((r/ao).^2))).*exp(-r./(3.*ao));
y=r.^2.*(abs(R)).^2;
function y=r31(r)
r=r(:);ao=5.29273641e-11;
R=(4./(81*(sqrt(6)))).*((1./ao).^1.5.*(6-(r/ao)).*(r/ao).*exp(-
r/(3.*ao)));
y=r.^2.*(abs(R)).^2;
function y=r32(r)
r=r(:);ao=5.29273641e-11;
R=(4./(81.*(sqrt(30)))).*((1./ao)^1.5).*((r/ao).^2).*exp(-r./(3*ao));
```



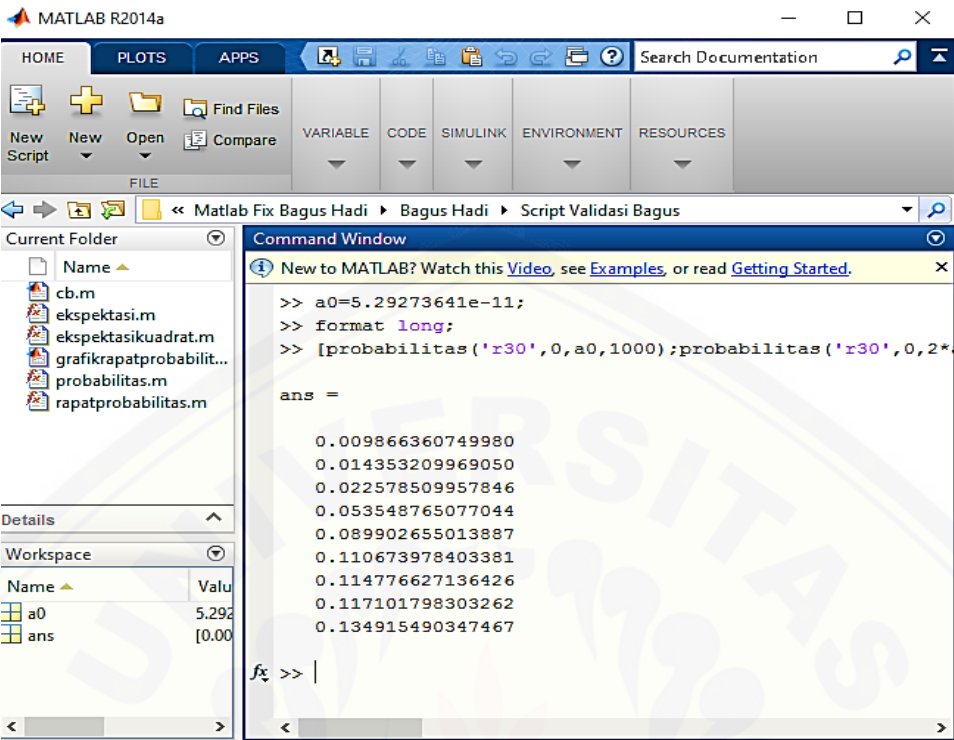
Gambar 7.d Tampilan cendela M-file dalam Matlab untuk mencari probabilitas



Gambar 7.e Tampilan comand windows untuk menghitung nilai probabilitas $n = 1$



Gambar 7.f Tampilan comand windows untuk menghitung nilai probabilitas $n = 2$



The screenshot shows the MATLAB R2014a interface. The Command Window displays the following code and output:

```
>> a0=5.29273641e-11;  
>> format long;  
>> [probabilitas('r30',0,a0,1000);probabilitas('r30',0,2*  
  
ans =  
  
0.009866360749980  
0.014353209969050  
0.022578509957846  
0.053548765077044  
0.089902655013887  
0.110673978403381  
0.114776627136426  
0.117101798303262  
0.134915490347467  
  
f2 >> |
```

The Workspace window shows the following variables:

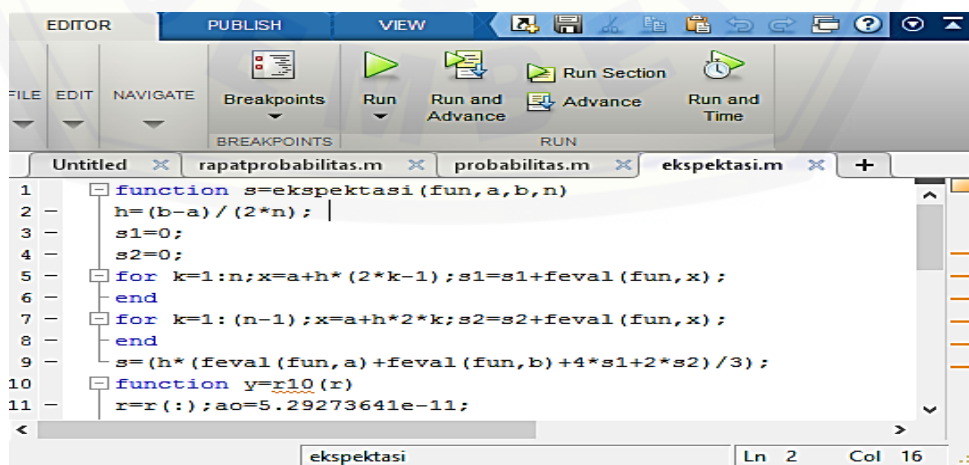
Name	Value
a0	5.29273641e-11
ans	[0.009866360749980 0.014353209969050 0.022578509957846 0.053548765077044 0.089902655013887 0.110673978403381 0.114776627136426 0.117101798303262 0.134915490347467]

Gambar 7.g Tampilan comand windows untuk menghitung nilai probabilitas $n = 3$

7.3 Menentukan Harga Ekspektasi

Berikut adalah skrip M-file untuk mencari harga ekspektasi

```
function s=ekspektasi (fun,a,b,n)
h=(b-a)/(2*n);
s1=0;
s2=0;
for k=1:n;x=a+h*(2*k-1);s1=s1+feval (fun,x);
end
for k=1:(n-1);x=a+h*2*k;s2=s2+feval (fun,x);
end
s=(h*(feval (fun,a)+feval (fun,b)+4*s1+2*s2)/3);
function y=r10(r)
r=r(:);ao=5.29273641e-11;
R=2.*(1./ao)^1.5).*exp(-r./ao);
y=r.^3.*(abs(R)).^2;
function y=r20(r)
r=r(:);ao=5.29273641e-11;
R=(1./(2*(sqrt(2)))).*(1./ao)^1.5.*(2-(r/ao)).*exp(-r./(2.*ao));
y=r.^3.*(abs(R)).^2;
function y=r21(r)
r=r(:);ao=5.29273641e-11;
R=(1./(2*(sqrt(6)))).*(1./ao)^1.5.*(r/ao).*exp(-r./(2.*ao));
y=r.^3.*(abs(R)).^2;
function y=r30(r)
r=r(:);ao=5.29273641e-11;
R=(2./(81.*(sqrt(3)))).*(1./ao).^1.5.*(27-
(18.*(r/ao))+2.*(r/ao).^2)).*exp(-r./(3.*ao));
y=r.^3.*(abs(R)).^2;
function y=r31(r)
r=r(:);ao=5.29273641e-11;
R=(4./(81*(sqrt(6)))).*(1./ao).^1.5.*(6-(r/ao)).*(r/ao).*exp(-
r/(3.*ao));
y=r.^3.*(abs(R)).^2;
function y=r32(r)
r=r(:);ao=5.29273641e-11;
R=(4./(81.*(sqrt(30)))).*(1./ao)^1.5.*(r/ao).^2).*exp(-r./(3*ao));
y=r.^3.*(abs(R)).^2;
```



Gambar 7.h Tampilan cendela M-file dalam matlab untuk mencari harga ekspektasi

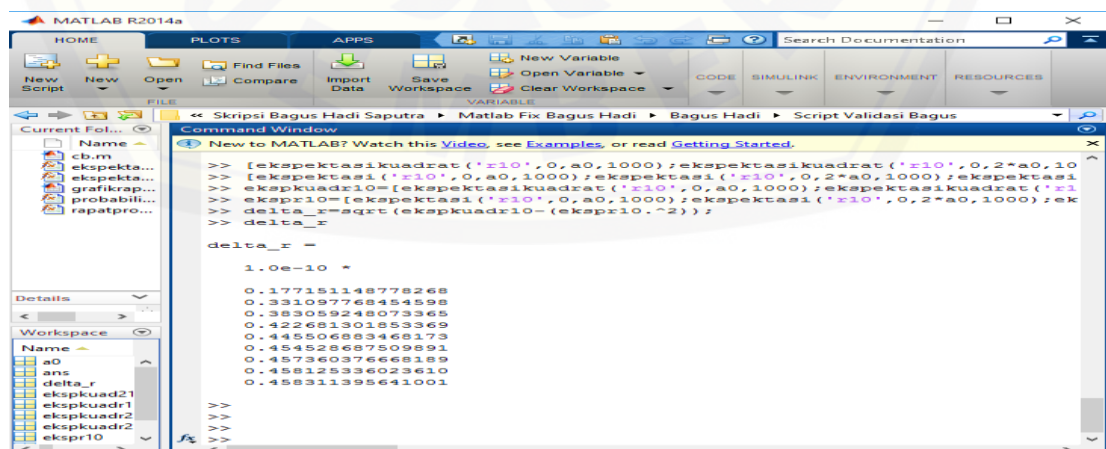
7.4 Menentukan Nilai Ketidakpastian Posisi Radial Atom Deuterium

pada $n \leq 3$

Berikut adalah skrip M-file untuk mencari nilai ketidakpastian posisi

a. Skrip M-file untuk menghitung nilai ketidakpastian posisi pada $n = 1, l = 0$

```
>> a0=5.29273641e-11;
>> format long
>>
[ekspektasikuadrat('r10',0,a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,2*a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,3*a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,4*a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,5*a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,6*a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,7*a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,8*a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,9*a0,1000)];
>>
[ekspektasi('r10',0,a0,1000);ekspektasi('r10',0,2*a0,1000);ekspektasi('r10',0,3*a0,1000);ekspektasi('r10',0,4*a0,1000);ekspektasi('r10',0,5*a0,1000);ekspektasi('r10',0,6*a0,1000);ekspektasi('r10',0,7*a0,1000);ekspektasi('r10',0,8*a0,1000);ekspektasi('r10',0,9*a0,1000)];
>>
ekspkuadr10=[ekspektasikuadrat('r10',0,a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,2*a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,3*a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,4*a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,5*a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,6*a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,7*a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,8*a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,9*a0,1000)];
>>
ekspr10=[ekspektasi('r10',0,a0,1000);ekspektasi('r10',0,2*a0,1000);ekspektasi('r10',0,3*a0,1000);ekspektasi('r10',0,4*a0,1000);ekspektasi('r10',0,5*a0,1000);ekspektasi('r10',0,6*a0,1000);ekspektasi('r10',0,7*a0,1000);ekspektasi('r10',0,8*a0,1000);ekspektasi('r10',0,9*a0,1000)];
>> delta_r=sqrt(ekspkuadr10-(ekspr10.^2));
>> delta_r
```



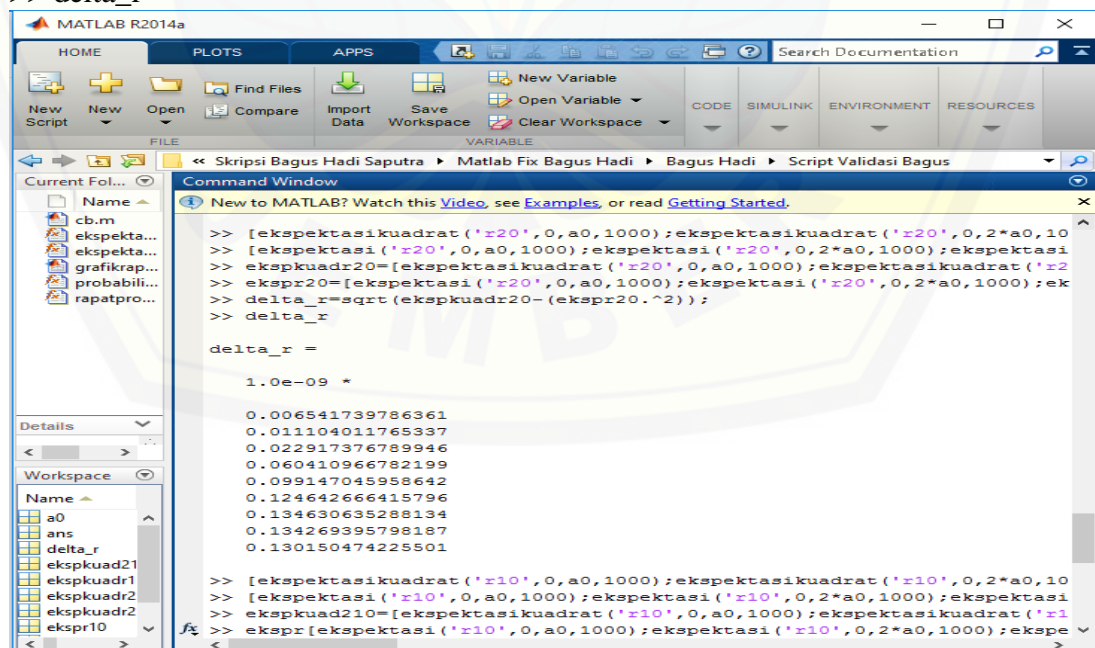
```
MATLAB R2014a
HOME PLOTS APPS
New Script New Open Compare Import Data Save Workspace New Variable Open Variable CODE SIMULINK ENVIRONMENT RESOURCES
FILE VARIABLE
Current Folder: Skripsi Bagus Hadi Saputra > Matlab Fix Bagus Hadi > Bagus Hadi > Script Validasi Bagus
Command Window
New to MATLAB? Watch this Video, see Examples, or read Getting Started.
>> [ekspektasikuadrat('r10',0,a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,2*a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,3*a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,4*a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,5*a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,6*a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,7*a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,8*a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,9*a0,1000)];
>> [ekspektasi('r10',0,a0,1000);ekspektasi('r10',0,2*a0,1000);ekspektasi('r10',0,3*a0,1000);ekspektasi('r10',0,4*a0,1000);ekspektasi('r10',0,5*a0,1000);ekspektasi('r10',0,6*a0,1000);ekspektasi('r10',0,7*a0,1000);ekspektasi('r10',0,8*a0,1000);ekspektasi('r10',0,9*a0,1000)];
>> ekspkuadr10=[ekspektasikuadrat('r10',0,a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,2*a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,3*a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,4*a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,5*a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,6*a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,7*a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,8*a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,9*a0,1000)];
>> ekspr10=[ekspektasi('r10',0,a0,1000);ekspektasi('r10',0,2*a0,1000);ekspektasi('r10',0,3*a0,1000);ekspektasi('r10',0,4*a0,1000);ekspektasi('r10',0,5*a0,1000);ekspektasi('r10',0,6*a0,1000);ekspektasi('r10',0,7*a0,1000);ekspektasi('r10',0,8*a0,1000);ekspektasi('r10',0,9*a0,1000)];
>> delta_r=sqrt(ekspkuadr10-(ekspr10.^2));
>> delta_r

delta_r =
1.0e-10 *
0.177151148778268
0.331097768454598
0.383059248073365
0.422681301853369
0.445906893468173
0.454528687509891
0.457360376668189
0.45812536023610
0.458311395641001
>>
>>
>>
```

Gambar 7.i Tampilan comand windows untuk menghitung nilai ketidakpastian posisi pada $n = 1, l = 0$

b. Skrip M-file untuk menghitung nilai ketidakpastian posisi pada $n = 2, l = 0$

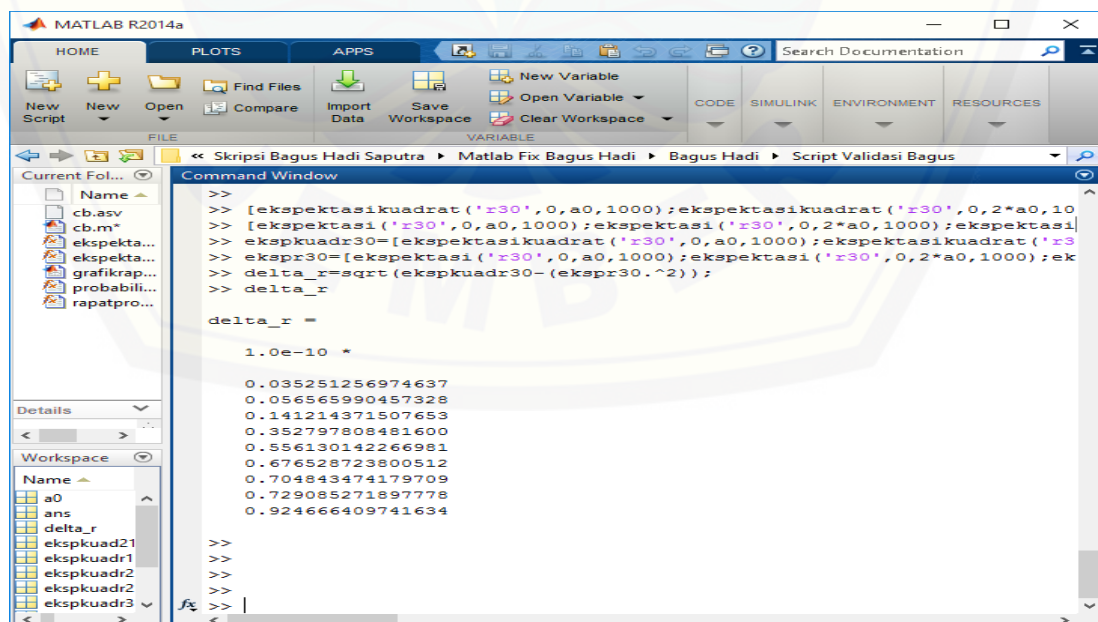
```
>> a0=5.29273641e-11;
>> format long
>>
[ekspektasikuadrat('r20',0,a0,1000);ekspektasikuadrat('r20',0,2*a0,1000);ekspektasikuadrat('r20',0,3*a0,1000);ekspektasikuadrat('r20',0,4*a0,1000);ekspektasikuadrat('r20',0,5*a0,1000);ekspektasikuadrat('r20',0,6*a0,1000);ekspektasikuadrat('r20',0,7*a0,1000);ekspektasikuadrat('r20',0,8*a0,1000);ekspektasikuadrat('r20',0,9*a0,1000)];
>>
[ekspektasi('r20',0,a0,1000);ekspektasi('r20',0,2*a0,1000);ekspektasi('r20',0,3*a0,1000);ekspektasi('r20',0,4*a0,1000);ekspektasi('r20',0,5*a0,1000);ekspektasi('r20',0,6*a0,1000);ekspektasi('r20',0,7*a0,1000);ekspektasi('r20',0,8*a0,1000);ekspektasi('r20',0,9*a0,1000)];
>>
ekspkuadr20=[ekspektasikuadrat('r20',0,a0,1000);ekspektasikuadrat('r20',0,2*a0,1000);ekspektasikuadrat('r20',0,3*a0,1000);ekspektasikuadrat('r20',0,4*a0,1000);ekspektasikuadrat('r20',0,5*a0,1000);ekspektasikuadrat('r20',0,6*a0,1000);ekspektasikuadrat('r20',0,7*a0,1000);ekspektasikuadrat('r20',0,8*a0,1000);ekspektasikuadrat('r20',0,9*a0,1000)];
>>
ekspr20=[ekspektasi('r20',0,a0,1000);ekspektasi('r20',0,2*a0,1000);ekspektasi('r20',0,3*a0,1000);ekspektasi('r20',0,4*a0,1000);ekspektasi('r20',0,5*a0,1000);ekspektasi('r20',0,6*a0,1000);ekspektasi('r20',0,7*a0,1000);ekspektasi('r20',0,8*a0,1000);ekspektasi('r20',0,9*a0,1000)];
>> delta_r=sqrt(ekspkuadr20-(ekspr20.^2));
>> delta_r
```



Gambar 7.j Tampilan comand windows untuk menghitung nilai ketidakpastian posisi pada $n = 2, l = 0$

c. Skrip M-file untuk menghitung nilai ketidakpastian posisi pada $n = 3, l = 0$

```
>> a0=5.29273641e-11;
>> format long
>>
[ekspektasikuadrat('r30',0,a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,2*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,3*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,4*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,5*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,6*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,7*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,8*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,9*a0,1000)];
>>
[ekspektasi('r30',0,a0,1000);ekspektasi('r30',0,2*a0,1000);ekspektasi('r30',0,3*a0,1000);ekspektasi('r30',0,4*a0,1000);ekspektasi('r30',0,5*a0,1000);ekspektasi('r30',0,6*a0,1000);ekspektasi('r30',0,7*a0,1000);ekspektasi('r30',0,8*a0,1000);ekspektasi('r30',0,9*a0,1000)];
>>
ekspkuadr30=[ekspektasikuadrat('r30',0,a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,2*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,3*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,4*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,5*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,6*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,7*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,8*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,9*a0,1000)];
>>
ekspr30=[ekspektasi('r30',0,a0,1000);ekspektasi('r30',0,2*a0,1000);ekspektasi('r30',0,3*a0,1000);ekspektasi('r30',0,4*a0,1000);ekspektasi('r30',0,5*a0,1000);ekspektasi('r30',0,6*a0,1000);ekspektasi('r30',0,7*a0,1000);ekspektasi('r30',0,8*a0,1000);ekspektasi('r30',0,9*a0,1000)];
>> delta_r=sqrt(ekspkuadr30-(ekspr30.^2));
>> delta_r
```



```
MATLAB R2014a
HOME PLOTS APPS Search Documentation
New Script New Open Find Files Compare Import Data Save Workspace Open Variable Clear Workspace CODE SIMULINK ENVIRONMENT RESOURCES
FILE VARIABLE
<< Skripsi Bagus Hadi Saputra >> Matlab Fix Bagus Hadi >> Bagus Hadi >> Script Validasi Bagus
Current Fol...
Name
cb.asv
cb.m*
ekspekta...
grafikrap...
probabili...
rapatpro...
Details
Workspace
Name
a0
ans
delta_r
ekspkuadr21
ekspkuadr1
ekspkuadr2
ekspkuadr3
>>
>> [ekspektasikuadrat('r30',0,a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,2*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,3*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,4*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,5*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,6*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,7*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,8*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,9*a0,1000)];
>> [ekspektasi('r30',0,a0,1000);ekspektasi('r30',0,2*a0,1000);ekspektasi('r30',0,3*a0,1000);ekspektasi('r30',0,4*a0,1000);ekspektasi('r30',0,5*a0,1000);ekspektasi('r30',0,6*a0,1000);ekspektasi('r30',0,7*a0,1000);ekspektasi('r30',0,8*a0,1000);ekspektasi('r30',0,9*a0,1000)];
>> ekspkuadr30=[ekspektasikuadrat('r30',0,a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,2*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,3*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,4*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,5*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,6*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,7*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,8*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,9*a0,1000)];
>> ekspr30=[ekspektasi('r30',0,a0,1000);ekspektasi('r30',0,2*a0,1000);ekspektasi('r30',0,3*a0,1000);ekspektasi('r30',0,4*a0,1000);ekspektasi('r30',0,5*a0,1000);ekspektasi('r30',0,6*a0,1000);ekspektasi('r30',0,7*a0,1000);ekspektasi('r30',0,8*a0,1000);ekspektasi('r30',0,9*a0,1000)];
>> delta_r=sqrt(ekspkuadr30-(ekspr30.^2));
>> delta_r

delta_r =

1.0e-10 *

0.035251256974637
0.056565990457328
0.141214371507653
0.352797808481600
0.556130142266981
0.676528723800512
0.704843474179709
0.729085271897778
0.924666409741634

>>
>>
```

Gambar 7.k Tampilan comand windows untuk menghitung nilai ketidakpastian posisi pada $n = 3, l = 0$

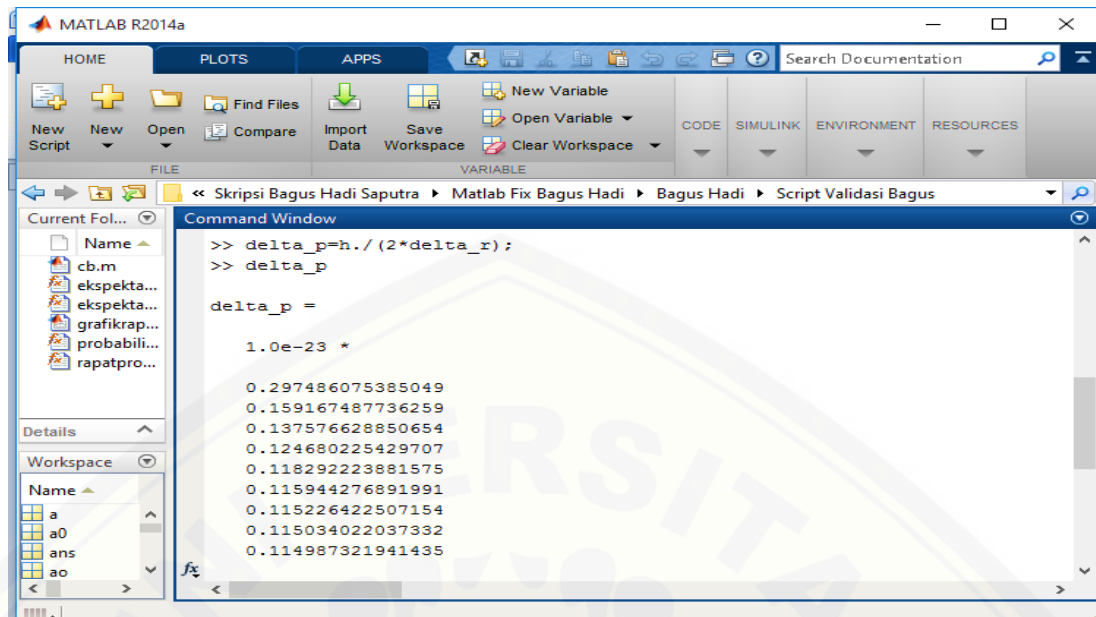
7.5 Menentukan Nilai Ketidakpastian Momentum Radial Atom Deuterium

pada $n \leq 3$

Berikut adalah skrip M-file untuk mencari nilai ketidakpastian momentum

a. Skrip M-file untuk menghitung nilai ketidakpastian momentum pada $n = 1$, $l = 0$

```
>> a0=5.29273641e-11;
>> h=1.054*(10^-34);
>> format long
>>
[ekspektasikuadrat('r10',0,a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,2*a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,3*a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,4*a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,5*a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,6*a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,7*a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,8*a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,9*a0,1000)];
>>
[ekspektasi('r10',0,a0,1000);ekspektasi('r10',0,2*a0,1000);ekspektasi('r10',0,3*a0,1000);ekspektasi('r10',0,4*a0,1000);ekspektasi('r10',0,5*a0,1000);ekspektasi('r10',0,6*a0,1000);ekspektasi('r10',0,7*a0,1000);ekspektasi('r10',0,8*a0,1000);ekspektasi('r10',0,9*a0,1000)];
>>
ekspkuadr10=[ekspektasikuadrat('r10',0,a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,2*a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,3*a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,4*a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,5*a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,6*a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,7*a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,8*a0,1000);ekspektasikuadrat('r10',0,9*a0,1000)];
>>
ekspr10=[ekspektasi('r10',0,a0,1000);ekspektasi('r10',0,2*a0,1000);ekspektasi('r10',0,3*a0,1000);ekspektasi('r10',0,4*a0,1000);ekspektasi('r10',0,5*a0,1000);ekspektasi('r10',0,6*a0,1000);ekspektasi('r10',0,7*a0,1000);ekspektasi('r10',0,8*a0,1000);ekspektasi('r10',0,9*a0,1000)];
>> delta_r=sqrt(ekspkuadr10-(ekspr10.^2));
>> delta_r
>> delta_p=h./(2*delta_r);
>> delta_p
```

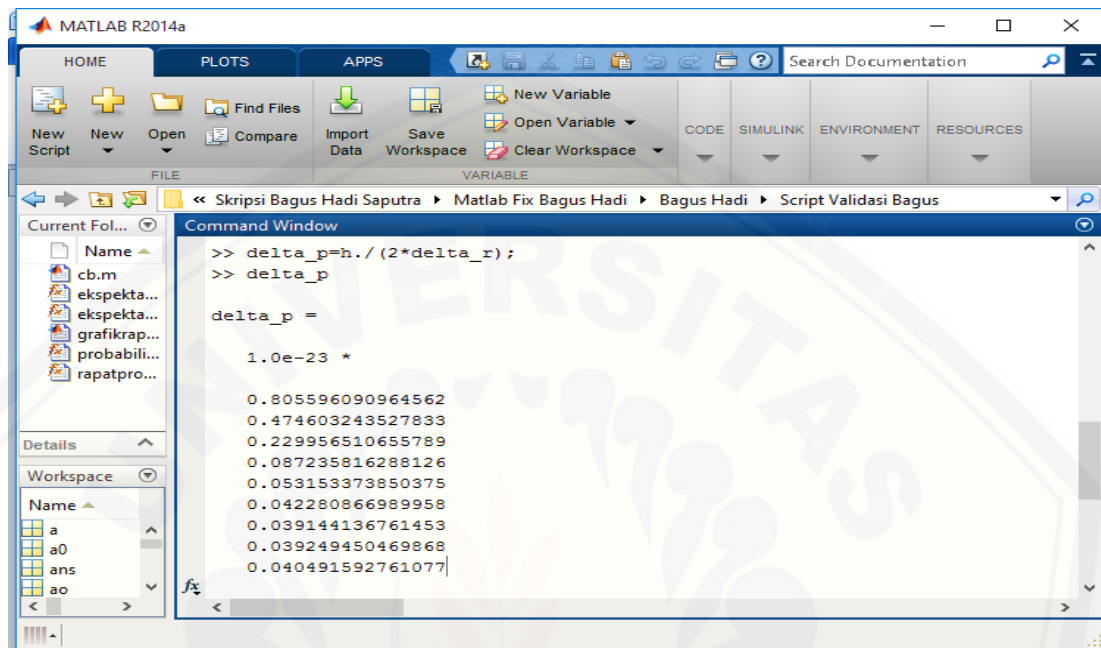


Gambar 7.1 Tampilan comand windows untuk menghitung nilai ketidakpastian momentum pada $n = 1, l = 0$

b. Skrip M-file untuk menghitung nilai ketidakpastian momentum pada $n = 2, l = 0$

```
>> a0=5.29273641e-11;
>> h=1.054*(10^-34);
>> format long
>>
[ekspektasikuadrat('r20',0,a0,1000);ekspektasikuadrat('r20',0,2*a0,1000);ekspektasikuadrat('r20',0,3*a0,1000);ekspektasikuadrat('r20',0,4*a0,1000);ekspektasikuadrat('r20',0,5*a0,1000);ekspektasikuadrat('r20',0,6*a0,1000);ekspektasikuadrat('r20',0,7*a0,1000);ekspektasikuadrat('r20',0,8*a0,1000);ekspektasikuadrat('r20',0,9*a0,1000)];
>>
[ekspektasi('r20',0,a0,1000);ekspektasi('r20',0,2*a0,1000);ekspektasi('r20',0,3*a0,1000);ekspektasi('r20',0,4*a0,1000);ekspektasi('r20',0,5*a0,1000);ekspektasi('r20',0,6*a0,1000);ekspektasi('r20',0,7*a0,1000);ekspektasi('r20',0,8*a0,1000);ekspektasi('r20',0,9*a0,1000)];
>>
ekspkuadr20=[ekspektasikuadrat('r20',0,a0,1000);ekspektasikuadrat('r20',0,2*a0,1000);ekspektasikuadrat('r20',0,3*a0,1000);ekspektasikuadrat('r20',0,4*a0,1000);ekspektasikuadrat('r20',0,5*a0,1000);ekspektasikuadrat('r20',0,6*a0,1000);ekspektasikuadrat('r20',0,7*a0,1000);ekspektasikuadrat('r20',0,8*a0,1000);ekspektasikuadrat('r20',0,9*a0,1000)];
>>
ekspr20=[ekspektasi('r20',0,a0,1000);ekspektasi('r20',0,2*a0,1000);ekspektasi('r20',0,3*a0,1000);ekspektasi('r20',0,4*a0,1000);ekspektasi('r20',0,5*a0,1000);ekspektasi('r20',0,6*a0,1000);ekspektasi('r20',0,7*a0,1000);ekspektasi('r20',0,8*a0,1000);ekspektasi('r20',0,9*a0,1000)];
```

```
>> delta_r=sqrt(ekspkuadr20-(ekspr20.^2));
>> delta_r
>> delta_p=h./(2*delta_r);
>> delta_p
```



Gambar 7.m Tampilan comand windows untuk menghitung nilai ketidakpastian momentum pada $n = 2, l = 0$

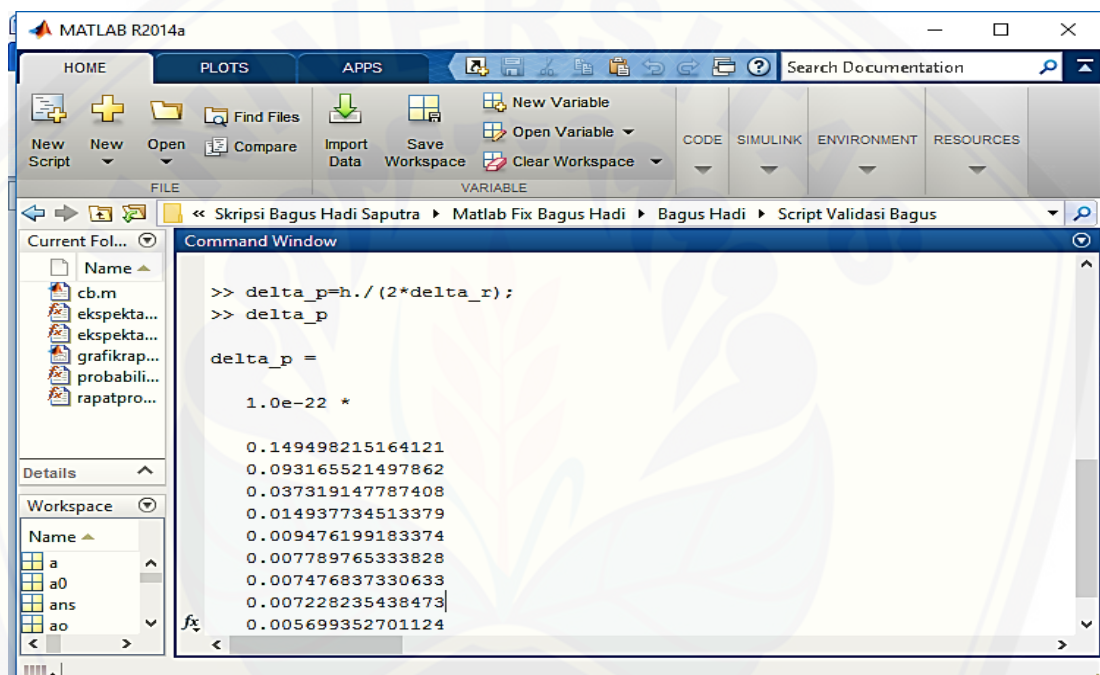
c. Skrip M-file untuk menghitung nilai ketidakpastian momentum pada $n = 3, l = 0$

```
>> a0=5.29273641e-11;
>> h=1.054*(10^-34);
>> format long
>>
[ekspektasikuadrat('r30',0,a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,2*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,3*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,4*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,5*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,6*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,7*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,8*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,9*a0,1000)];
>>
[ekspektasi('r30',0,a0,1000);ekspektasi('r30',0,2*a0,1000);ekspektasi('r30',0,3*a0,1000);ekspektasi('r30',0,4*a0,1000);ekspektasi('r30',0,5*a0,1000);ekspektasi('r30',0,6*a0,1000);ekspektasi('r30',0,7*a0,1000);ekspektasi('r30',0,8*a0,1000);ekspektasi('r30',0,9*a0,1000)];
>>
ekspkuadr30=[ekspektasikuadrat('r30',0,a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,2*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,3*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,4*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,5*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,6*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,7*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,8*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,9*a0,1000)];
```

```

('r30',0,7*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,8*a0,1000);ekspektasikuadrat('r30',0,9*
a0,1000)];
>>
ekspr30=[ekspektasi('r30',0,a0,1000);ekspektasi('r30',0,2*a0,1000);ekspektasi('r30',0,
3*a0,1000);ekspektasi('r30',0,4*a0,1000);ekspektasi('r30',0,5*a0,1000);ekspektasi('r
30',0,6*a0,1000);ekspektasi('r30',0,7*a0,1000);ekspektasi('r30',0,8*a0,1000);ekspekt
asi('r30',0,9*a0,1000)];
>> delta_r=sqrt(eksprkuadr30-(ekspr30.^2));
>> delta_r
>> delta_p=h./(2*delta_r);
>> delta_p

```



```

MATLAB R2014a
HOME PLOTS APPS Search Documentation
New Script New Open Find Files Import Data Save Workspace New Variable Open Variable Clear Workspace CODE SIMULINK ENVIRONMENT RESOURCES
FILE VARIABLE
<< Skripsi Bagus Hadi Saputra >> Matlab Fix Bagus Hadi >> Bagus Hadi >> Script Validasi Bagus
Current Fol...
Name
cb.m
ekspekta...
ekspekta...
grafikrap...
probabili...
rapatpro...
Details
Workspace
Name
a
a0
ans
ao
Command Window
>> delta_p=h./(2*delta_r);
>> delta_p

delta_p =

    1.0e-22 *

    0.149498215164121
    0.093165521497862
    0.037319147787408
    0.014937734513379
    0.009476199183374
    0.007789765333828
    0.007476837330633
    0.007228235438473
    0.005699352701124
fx

```

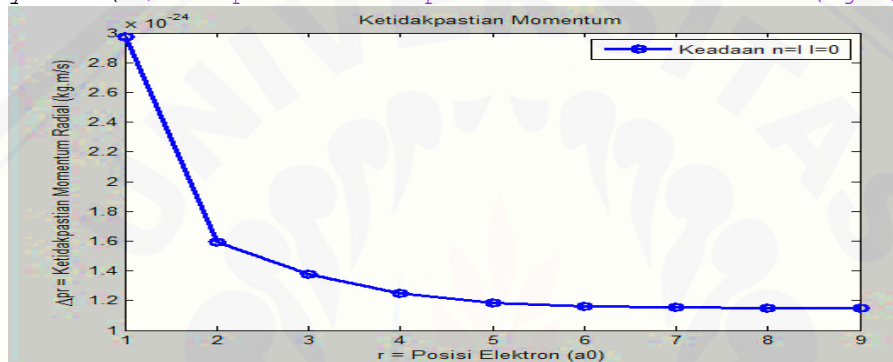
Gambar 7.n Tampilan comand windows untuk menghitung nilai ketidakpastian momentum pada $n = 3$, $l = 0$

7.6 Menentukan Grafik Ketidakpastian Momentum Radial Atom Deuterium

pada $n \leq 3$

- a. Skrip M-file untuk membantu membuat grafik ketidakpastian momentum atom deuterium pada $n = 1, l = 0$

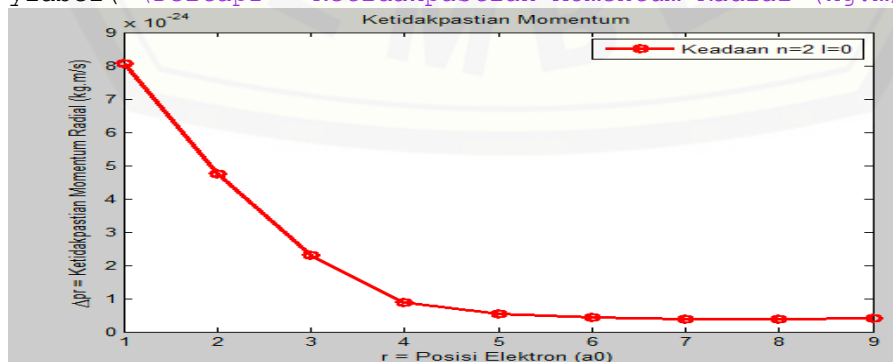
```
x=[1:1:9];
y1=[2.974860753850487e-24 1.591674877362588e-24 1.375766288506543e-
24 1.246802254297071e-24 1.182922238815757e-24 1.159442768919908e-24
1.152264225071545e-24 1.150340220373317e-24 1.149873219414346e-24];
plot(x,y1,'b-o','linewidth',2.5)
legend('Keadaan n=1 l=0');
title('Ketidakpastian Momentum')
xlabel('r = Posisi Elektron (a0)')
ylabel('\Delta p = Ketidakpastian Momentum Radial (kg.m/s)')
```



Gambar 7.o Tampilan hasil eksekusi comand windows grafik ketidakpastian momentum atom deuterium pada $n = 1, l = 0$

- b. Skrip M-file untuk membantu membuat grafik ketidakpastian momentum atom deuterium pada $n = 2, l = 0$

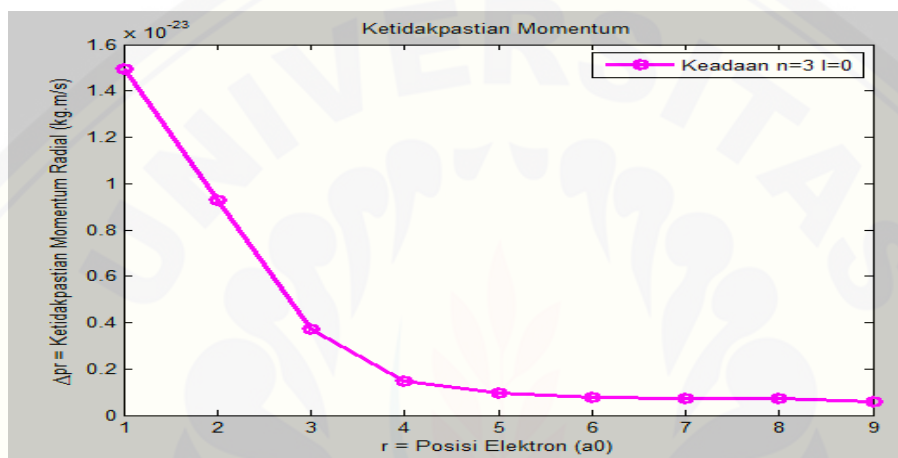
```
x=[1:1:9];
y2=[8.055960909642683e-24 4.746032435278079e-24 2.299565106557966e-
24 8.723581628812634e-25 5.315337385037468e-25 4.228086698995822e-25
3.914413676145286e-25 3.924945046986790e-25 4.049159276107691e-25];
plot(x,y2,'r-o','linewidth',2.5)
legend('Keadaan n=2 l=0');
title('Ketidakpastian Momentum')
xlabel('r = Posisi Elektron (a0)')
ylabel('\Delta p = Ketidakpastian Momentum Radial (kg.m/s)')
```



Gambar 7.p Tampilan hasil eksekusi comand windows grafik ketidakpastian momentum atom deuterium pada $n = 2, l = 0$

c. Skrip M-file untuk membantu membuat grafik ketidakpastian momentum atom deuterium pada $n = 3$, $l = 0$

```
x=[1:1:9];
y4=[1.494982151641301e-23 9.275589686654217e-24 3.702740658659600e-
24 1.493773451337884e-24 9.476199183373943e-25 7.789765333827806e-25
7.476837330633133e-25 7.228235438472672e-25 5.699352701124424e-25];
plot(x,y4,'m-o','linewidth',2.5)
legend('Keadaan n=3 l=0');
title('Ketidakpastian Momentum')
xlabel('r = Posisi Elektron (a0)')
ylabel('\Delta pr = Ketidakpastian Momentum Radial (kg.m/s)')
```



Gambar 7.q Tampilan hasil eksekusi comand windows grafik ketidakpastian momentum atom deuterium pada $n = 3$, $l = 0$

Lampiran 8. Validasi Nilai Probabilitas Posisi Radial dan Nilai Ekspektasi Deuterium (2_1H) pada bilangan kuantum $n \leq 3$

Deuterium

a. Validasi Nilai Probabilitas Posisi

Tabel 8.a Validasi nilai probabilitas posisi radial untuk menemukan keberadaan elektron atom Deuterium (2_1H) pada bilangan kuantum $n \leq 3$

r (posisi elektron)	$n = 1$	$n = 2$		$n = 3$		
	$l = 0$	$l = 0$	$l = 1$	$l = 0$	$l = 1$	$l = 2$
a_o	0.3233235838	0.0343164669	0.0036598468	0.0098663607	0.0012585444	0.0000064984
$2 a_o$	0.7618966944	0.0526530173	0.0526530173	0.0143532099	0.0169244974	0.0004682578
$3 a_o$	0.9380311955	0.0727158516	0.1847367555	0.0225785099	0.0526530173	0.0045338055
$4 a_o$	0.9862460322	0.1757962500	0.3711630648	0.0535487651	0.0887935335	0.0193884511
$5 a_o$	0.9972306042	0.3489458712	0.5595067149	0.0899026550	0.1075738146	0.0532010158
$6 a_o$	0.9994777419	0.5364733430	0.7149434997	0.1106739784	0.1106739784	0.1106739784

$7 a_o$	0.9999060372	0.6966852612	0.8270083921	0.1147766271	0.1137934176	0.1908771177
$8 a_o$	0.9999836824	0.8144891668	0.9003675995	0.1171017983	0.1336791581	0.2879993072
$9 a_o$	0.9999972434	0.8925563393	0.9450363585	0.1349154903	0.1795330295	0.3936972176
$10 a_o$	0.9999995446	0.9404806921	0.9707473119	0.1783256640	0.2512581909	0.4995391337
$11 a_o$	0.999999263	0.9682229266	0.9848953993	0.2479575825	0.3420685343	0.5986865663
$12 a_o$	0.999999885	0.9835519436	0.9923996093	0.3373867626	0.4423492915	0.6866257225
$13 a_o$	0.999999986	0.9917076991	0.9962598141	0.4370500380	0.5428227989	0.7611506963
$14 a_o$	1.0000000003	0.9959130364	0.9981947512	0.5375365667	0.6363544071	0.8219189267
$15 a_o$	1.0000000007	0.9980249035	0.9991433588	0.6315089479	0.7185254799	0.8698585791
$16 a_o$	1.0000000010	0.9990617944	0.9995995623	0.7143517332	0.7874015538	0.9066095479

17 a_o	1.0000000013	0.9995610581	0.9998153018	0.7839760088	0.8429236548	0.9340854995
18 a_o	1.0000000017	0.9997973958	0.9999158239	0.8402197578	0.8862276198	0.9541776931
19 a_o	1.0000000021	0.9999076067	0.9999620483	0.8841613008	0.9190588625	0.9685842475
20 a_o	1.0000000026	0.9999583217	0.9999830552	0.9175224491	0.9433451561	0.9787338768
21 a_o	1.0000000032	0.9999813832	0.9999925013	0.9422293576	0.9609267427	0.9857720816
22 a_o	1.0000000039	0.9999917584	0.9999967083	0.9601328765	0.9734136203	0.9905832499
23 a_o	1.0000000046	0.9999963814	0.9999985658	0.9728589222	0.9821321908	0.9938295005
24 a_o	1.0000000055	0.9999984233	0.9999993793	0.9817507836	0.9881271764	0.9959939553
25 a_o	1.0000000065	0.9999993180	0.9999997331	0.9878686687	0.9921927883	0.9974214702

b. Validasi Nilai Ekpektasi Posisi

Tabel 8.b Validasi nilai ekpektasi posisi radial (nilai harap atau nilai rata-rata) untuk mengetahui seberapa sering elektron dapat muncul dalam atom Deuterium (2_1H) pada bilangan kuantum $n \leq 3$

r (posisi elektron)	$n = 1$	$n = 2$		$n = 3$		
	$l = 0$	$l = 0$	$l = 1$	$l = 0$	$l = 1$	$l = 2$
a_o	0.2143148092 a_o	0.0219590810 a_o	0.0029709240 a_o	0.0062697053 a_o	0.0010202642 a_o	0.0000056307 a_o
2 a_o	0.8497948194 a_o	0.0452475376 a_o	0.0828180424 a_o	0.0118497487 a_o	0.0264235224 a_o	0.0008026474 a_o
3 a_o	1.2731941758 a_o	0.1002323984 a_o	0.4195897101 a_o	0.0341393179 a_o	0.1168215838 a_o	0.0115155491 a_o
4 a_o	1.4364298320 a_o	0.4686770556 a_o	1.0743480648 a_o	0.1440807854 a_o	0.2423556382 a_o	0.0647685712 a_o
5 a_o	1.4844959240 a_o	1.2514318521 a_o	1.9201967258 a_o	0.3070194213 a_o	0.3251827041 a_o	0.2187806725 a_o
6 a_o	1.4965623132 a_o	2.2818717350 a_o	2.7716017932 a_o	0.4195812269 a_o	0.3414683843 a_o	0.5369029658 a_o
7 a_o	1.4992886272 a_o	3.3199789032 a_o	3.4964586191 a_o	0.4453391056 a_o	0.3625168189 a_o	1.0599343981 a_o
8 a_o	1.4998602875 a_o	4.1999075387 a_o	4.0438196896 a_o	0.4634095251 a_o	0.5135883573 a_o	1.7894315326 a_o

9 a_o	1.4999736597 a_o	4.8605264264 a_o	4.4215473958 a_o	0.6166855617 a_o	0.9056366936 a_o	2.6882125152 a_o
10 a_o	1.4999951943 a_o	5.3137346617 a_o	4.6645701856 a_o	1.0313769263 a_o	1.5889714943 a_o	3.6934050118 a_o
11 a_o	1.4999991464 a_o	5.6037103945 a_o	4.8124009295 a_o	1.7645076638 a_o	2.5436849626 a_o	4.7336698524 a_o
12 a_o	1.4999998516 a_o	5.7792138733 a_o	4.8982948529 a_o	2.7942134244 a_o	3.6972929125 a_o	5.7439115003 a_o
13 a_o	1.4999999745 a_o	5.8807229822 a_o	4.9463305502 a_o	4.0404435336 a_o	4.9528901332 a_o	6.6743175016 a_o
14 a_o	1.4999999954 a_o	5.9372594950 a_o	4.9723397515 a_o	5.3967344935 a_o	6.2147627187 a_o	7.4935660481 a_o
15 a_o	1.4999999989 a_o	5.9677591190 a_o	4.9860378533 a_o	6.7585568628 a_o	7.4051820488 a_o	8.1876832106 a_o
16 a_o	1.4999999993 a_o	5.9837690517 a_o	4.9930810749 a_o	8.0415708385 a_o	8.4716274902 a_o	8.7564690905 a_o
17 a_o	1.4999999993 a_o	5.9919763763 a_o	4.9966272928 a_o	9.1892389926 a_o	9.3866633274 a_o	9.2091301741 a_o
18 a_o	1.4999999991 a_o	5.9960975308 a_o	4.9983800327 a_o	10.1724205457 a_o	10.1435317418 a_o	9.5602027831 a_o
19 a_o	1.4999999989 a_o	5.9981294250 a_o	4.9992321965 a_o	10.9843797051 a_o	10.7501170629 a_o	9.8263141376 a_o
20 a_o	1.4999999987 a_o	5.9991150930 a_o	4.9996404557 a_o	11.6341201376 a_o	11.2230671557 a_o	10.0239291302 a_o

21 a_o	1.4999999984 a_o	5.9995863417 a_o	4.9998334735 a_o	12.1399703363 a_o	11.5830021857 a_o	10.1679936158 a_o
22 a_o	1.4999999980 a_o	5.9998087192 a_o	4.9999236421 a_o	12.5244008978 a_o	11.8511052083 a_o	10.2712788002 a_o
23 a_o	1.4999999977 a_o	5.9999124227 a_o	4.9999653083 a_o	12.8103658929 a_o	12.0470066744 a_o	10.3442115669 a_o
24 a_o	1.4999999972 a_o	5.9999602663 a_o	4.9999843717 a_o	13.0190534533 a_o	12.1876984787 a_o	10.3950022999 a_o
25 a_o	1.4999999967 a_o	5.9999821232 a_o	4.9999930144 a_o	13.1687476650 a_o	12.2871724579 a_o	10.4299264090 a_o

Lampiran 9. Hasil Nilai Probabilitas Posisi Radial, Nilai Ekspektasi Posisi Radial, dan Nilai Ketidakpastian Momentum Radial Atom Deuterium (2_1H) dengan Menggunakan Pendekatan Ketidakpastian Heisenberg pada Bilangan Kuantum $n \leq 3$

Tabel 9.a Hasil menentukan probabilitas posisi menemukan keberadaan elektron atom Deuterium pada bilangan kuantum $n \leq 3$

r (posisi elektron)	n = 1	n = 2		n = 3		
	l = 0	l = 0	l = 1	l = 0	l = 1	l = 2
a_o	0.3233235838	0.0343164669	0.0036598468	0.0098663607	0.0012585444	0.0000064984
$2 a_o$	0.7618966944	0.0526530173	0.0526530173	0.0143532099	0.0169244974	0.0004682578
$3 a_o$	0.9380311955	0.0727158516	0.1847367555	0.0225785099	0.0526530173	0.0045338055
$4 a_o$	0.9862460322	0.1757962500	0.3711630648	0.0535487651	0.0887935335	0.0193884511
$5 a_o$	0.9972306042	0.3489458712	0.5595067149	0.0899026550	0.1075738146	0.0532010158
$6 a_o$	0.9994777419	0.5364733430	0.7149434997	0.1106739784	0.1106739784	0.1106739784
$7 a_o$	0.9999060372	0.6966852612	0.8270083921	0.1147766271	0.1137934176	0.1908771177
$8 a_o$	0.9999836824	0.8144891668	0.9003675995	0.1171017983	0.1336791581	0.2879993072
$9 a_o$	0.9999972434	0.8925563393	0.9450363585	0.1349154903	0.1795330295	0.3936972176

r (posisi elektron)	n = 1	n = 2		n = 3		
	l = 0	l = 0	l = 1	l = 0	l = 1	l = 2
10 a_o	0.9999995446	0.9404806921	0.9707473119	0.1783256640	0.2512581909	0.4995391337
11 a_o	0.9999999263	0.9682229266	0.9848953993	0.2479575825	0.3420685343	0.5986865663
12 a_o	0.9999999885	0.9835519436	0.9923996093	0.3373867626	0.4423492915	0.6866257225
13 a_o	0.9999999986	0.9917076991	0.9962598141	0.4370500380	0.5428227989	0.7611506963
14 a_o	1.0000000003	0.9959130364	0.9981947512	0.5375365667	0.6363544071	0.8219189267
15 a_o	1.0000000007	0.9980249035	0.9991433588	0.6315089479	0.7185254799	0.8698585791
16 a_o	1.0000000010	0.9990617944	0.9995995623	0.7143517332	0.7874015538	0.9066095479
17 a_o	1.0000000013	0.9995610581	0.9998153018	0.7839760088	0.8429236548	0.9340854995
18 a_o	1.0000000017	0.9997973958	0.9999158239	0.8402197578	0.8862276198	0.9541776931
19 a_o	1.0000000021	0.9999076067	0.9999620483	0.8841613008	0.9190588625	0.9685842475
20 a_o	1.0000000026	0.9999583217	0.9999830552	0.9175224491	0.9433451561	0.9787338768
21 a_o	1.0000000032	0.9999813832	0.9999925013	0.9422293576	0.9609267427	0.9857720816

r (posisi elektron)	<i>n</i> = 1	<i>n</i> = 2		<i>n</i> = 3		
	<i>l</i> = 0	<i>l</i> = 0	<i>l</i> = 1	<i>l</i> = 0	<i>l</i> = 1	<i>l</i> = 2
22 a_o	1.0000000039	0.9999917584	0.9999967083	0.9601328765	0.9734136203	0.9905832499
23 a_o	1.0000000046	0.9999963814	0.9999985658	0.9728589222	0.9821321908	0.9938295005
24 a_o	1.0000000055	0.9999984233	0.9999993793	0.9817507836	0.9881271764	0.9959939553
25 a_o	1.0000000065	0.9999993180	0.9999997331	0.9878686687	0.9921927883	0.9974214702

Tabel 9.b Hasil menentukan nilai ekpektasi posisi radial (nilai harap atau nilai rata-rata) untuk mengetahui seberapa sering elektron dapat muncul dalam atom Deuterium (2_1H) pada bilangan kuantum $n \leq 3$

r (posisi elektron)	n = 1	n = 2		n = 3		
	l = 0	l = 0	l = 1	l = 0	l = 1	l = 2
a_o	0.2143148092 a_o	0.0219590810 a_o	0.0029709240 a_o	0.0062697053 a_o	0.0010202642 a_o	0.0000056307 a_o
$2 a_o$	0.8497948194 a_o	0.0452475376 a_o	0.0828180424 a_o	0.0118497487 a_o	0.0264235224 a_o	0.0008026474 a_o
$3 a_o$	1.2731941758 a_o	0.1002323984 a_o	0.4195897101 a_o	0.0341393179 a_o	0.1168215838 a_o	0.0115155491 a_o
$4 a_o$	1.4364298320 a_o	0.4686770556 a_o	1.0743480648 a_o	0.1440807854 a_o	0.2423556382 a_o	0.0647685712 a_o
$5 a_o$	1.4844959240 a_o	1.2514318521 a_o	1.9201967258 a_o	0.3070194213 a_o	0.3251827041 a_o	0.2187806725 a_o
$6 a_o$	1.4965623132 a_o	2.2818717350 a_o	2.7716017932 a_o	0.4195812269 a_o	0.3414683843 a_o	0.5369029658 a_o
$7 a_o$	1.4992886272 a_o	3.3199789032 a_o	3.4964586191 a_o	0.4453391056 a_o	0.3625168189 a_o	1.0599343981 a_o
$8 a_o$	1.4998602875 a_o	4.1999075387 a_o	4.0438196896 a_o	0.4634095251 a_o	0.5135883573 a_o	1.7894315326 a_o
$9 a_o$	1.4999736597 a_o	4.8605264264 a_o	4.4215473958 a_o	0.6166855617 a_o	0.9056366936 a_o	2.6882125152 a_o

Tabel 9.c Hasil menghitung nilai ketidakpastian momentum radial atom Deuterium (2_1H) dengan menggunakan pendekatan ketidakpastian Heisenberg pada bilangan kuantum $n \leq 3$

n	l	r	Δr	Δp_r	$\Delta r \cdot \Delta p_r$
1	0	a_0	$1.771511487782686 \cdot 10^{-11}$	$2.974860753850487 \cdot 10^{-24}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		$2a_0$	$3.310977684545987 \cdot 10^{-11}$	$1.591674877362588 \cdot 10^{-24}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		$3a_0$	$3.830592480733646 \cdot 10^{-11}$	$1.375766288506543 \cdot 10^{-24}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		$4a_0$	$4.226813018533680 \cdot 10^{-11}$	$1.246802254297071 \cdot 10^{-24}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		$5a_0$	$4.455068834681714 \cdot 10^{-11}$	$1.182922238815757 \cdot 10^{-24}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		$6a_0$	$4.545286875098913 \cdot 10^{-11}$	$1.159442768919908 \cdot 10^{-24}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		$7a_0$	$4.573603766681885 \cdot 10^{-11}$	$1.152264225071545 \cdot 10^{-24}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		$8a_0$	$4.581253360236104 \cdot 10^{-11}$	$1.150340220373317 \cdot 10^{-24}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		$9a_0$	$4.583113956410012 \cdot 10^{-11}$	$1.149873219414346 \cdot 10^{-24}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
2	0	a_0	$6.541739786363669 \cdot 10^{-12}$	$8.055960909642683 \cdot 10^{-24}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		$2a_0$	$1.110401176533725 \cdot 10^{-11}$	$4.746032435278079 \cdot 10^{-24}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		$3a_0$	$2.291737678994546 \cdot 10^{-11}$	$2.299565106557966 \cdot 10^{-24}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		$4a_0$	$6.041096678219883 \cdot 10^{-11}$	$8.723581628812634 \cdot 10^{-25}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		$5a_0$	$9.914704595864239 \cdot 10^{-11}$	$5.315337385037468 \cdot 10^{-25}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		$6a_0$	$1.246426664157959 \cdot 10^{-10}$	$4.228086698995822 \cdot 10^{-25}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		$7a_0$	$1.346306352881340 \cdot 10^{-10}$	$3.914413676145286 \cdot 10^{-25}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		$8a_0$	$1.342693957981862 \cdot 10^{-10}$	$3.924945046986790 \cdot 10^{-25}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
	1	a_0	$1.301504742255004 \cdot 10^{-10}$	$4.049159276107691 \cdot 10^{-25}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		a_0	$2.640225783385968 \cdot 10^{-12}$	$1.996041411746789 \cdot 10^{-23}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		$2a_0$	$1.902113575859526 \cdot 10^{-11}$	$2.770602169546366 \cdot 10^{-23}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		$3a_0$	$4.819589531159852 \cdot 10^{-11}$	$1.093454113867609 \cdot 10^{-24}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		$4a_0$	$7.789490455272418 \cdot 10^{-11}$	$6.765525974080797 \cdot 10^{-25}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		$5a_0$	$9.827031894952862 \cdot 10^{-11}$	$5.362758619626195 \cdot 10^{-25}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		$6a_0$	$1.075499149230877 \cdot 10^{-10}$	$4.900050366166018 \cdot 10^{-25}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		$7a_0$	$1.095410465684172 \cdot 10^{-10}$	$4.810981969857719 \cdot 10^{-25}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
$8a_0$	$1.090649727808271 \cdot 10^{-10}$	$4.831982134713768 \cdot 10^{-25}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$		

n	l	r	Δr	Δp_r	$\Delta r \cdot \Delta p_r$
3	0	$9a_0$	$1.090675340211314 \cdot 10^{-10}$	$4.831868664949331 \cdot 10^{-25}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		a_0	$3.525125697463484 \cdot 10^{-12}$	$1.494982151641301 \cdot 10^{-23}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		$2a_0$	$5.681579476917260 \cdot 10^{-12}$	$9.275589686654217 \cdot 10^{-24}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		$3a_0$	$1.423270081763639 \cdot 10^{-11}$	$3.702740658659600 \cdot 10^{-24}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		$4a_0$	$3.527978084815990 \cdot 10^{-11}$	$1.493773451337884 \cdot 10^{-24}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		$5a_0$	$5.561301422669809 \cdot 10^{-11}$	$9.476199183373943 \cdot 10^{-25}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		$6a_0$	$6.765287238005126 \cdot 10^{-11}$	$7.789765333827806 \cdot 10^{-25}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		$7a_0$	$7.048434741797091 \cdot 10^{-11}$	$7.476837330633133 \cdot 10^{-25}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		$8a_0$	$7.290852718977777 \cdot 10^{-11}$	$7.228235438472672 \cdot 10^{-25}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
	$9a_0$	$9.246664097416331 \cdot 10^{-11}$	$5.699352701124424 \cdot 10^{-25}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$	
	1	a_0	$1.548210233168920 \cdot 10^{-12}$	$3.403930478623188 \cdot 10^{-23}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		$2a_0$	$1.090452829383936 \cdot 10^{-11}$	$4.832854625153614 \cdot 10^{-24}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		$3a_0$	$2.704461832694719 \cdot 10^{-11}$	$1.948631678321371 \cdot 10^{-24}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		$4a_0$	$4.283461108009061 \cdot 10^{-11}$	$1.230313493484590 \cdot 10^{-24}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		$5a_0$	$5.225325481203528 \cdot 10^{-11}$	$1.008549614556485 \cdot 10^{-24}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		$6a_0$	$5.422152676607458 \cdot 10^{-11}$	$9.719386956284201 \cdot 10^{-25}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		$7a_0$	$5.741645546193984 \cdot 10^{-11}$	$9.178553356525764 \cdot 10^{-25}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		$8a_0$	$7.839067183055534 \cdot 10^{-11}$	$6.722738658741593 \cdot 10^{-25}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		$9a_0$	$1.182657091580728 \cdot 10^{-10}$	$4.456067644219822 \cdot 10^{-25}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
	2	a_0	$1.179479634625976 \cdot 10^{-13}$	$4.468072059312128 \cdot 10^{-22}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		$2a_0$	$1.982484738124363 \cdot 10^{-12}$	$2.658280237247106 \cdot 10^{-23}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		$3a_0$	$9.134495700866098 \cdot 10^{-12}$	$5.769338749045904 \cdot 10^{-24}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		$4a_0$	$2.469997244521101 \cdot 10^{-11}$	$2.133605619070956 \cdot 10^{-24}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		$5a_0$	$4.960378774832040 \cdot 10^{-11}$	$1.062418867433857 \cdot 10^{-24}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		$6a_0$	$8.205496303449806 \cdot 10^{-11}$	$6.422524372821121 \cdot 10^{-25}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		$7a_0$	$1.181812988493220 \cdot 10^{-10}$	$4.459250364746041 \cdot 10^{-25}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
		$8a_0$	$1.533489761078935 \cdot 10^{-10}$	$3.436605925749465 \cdot 10^{-25}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$
$9a_0$		$1.835106222704137 \cdot 10^{-10}$	$2.871768366756636 \cdot 10^{-25}$	$5.2700 \cdot 10^{-35}$	

