



**SIMULASI NUMERIK MASSA PADA PELURUHAN INTI
ZAT RADIOAKTIF DERET THORIUM-232 DENGAN
METODE ALJABAR MATRIKS**

SKRIPSI

Oleh :

Dewi Sinta Tresnowati

NIM 160210102062

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN FISIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MIPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER
2020**



**SIMULASI NUMERIK MASSA PADA PELURUHAN INTI
ZAT RADIOAKTIF DERET THORIUM-232 DENGAN
METODE ALJABAR MATRIKS**

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Studi Pendidikan Fisika (S1)
dan mencapai gelar Sarjana Pendidikan

Oleh :

Dewi Sinta Tresnowati

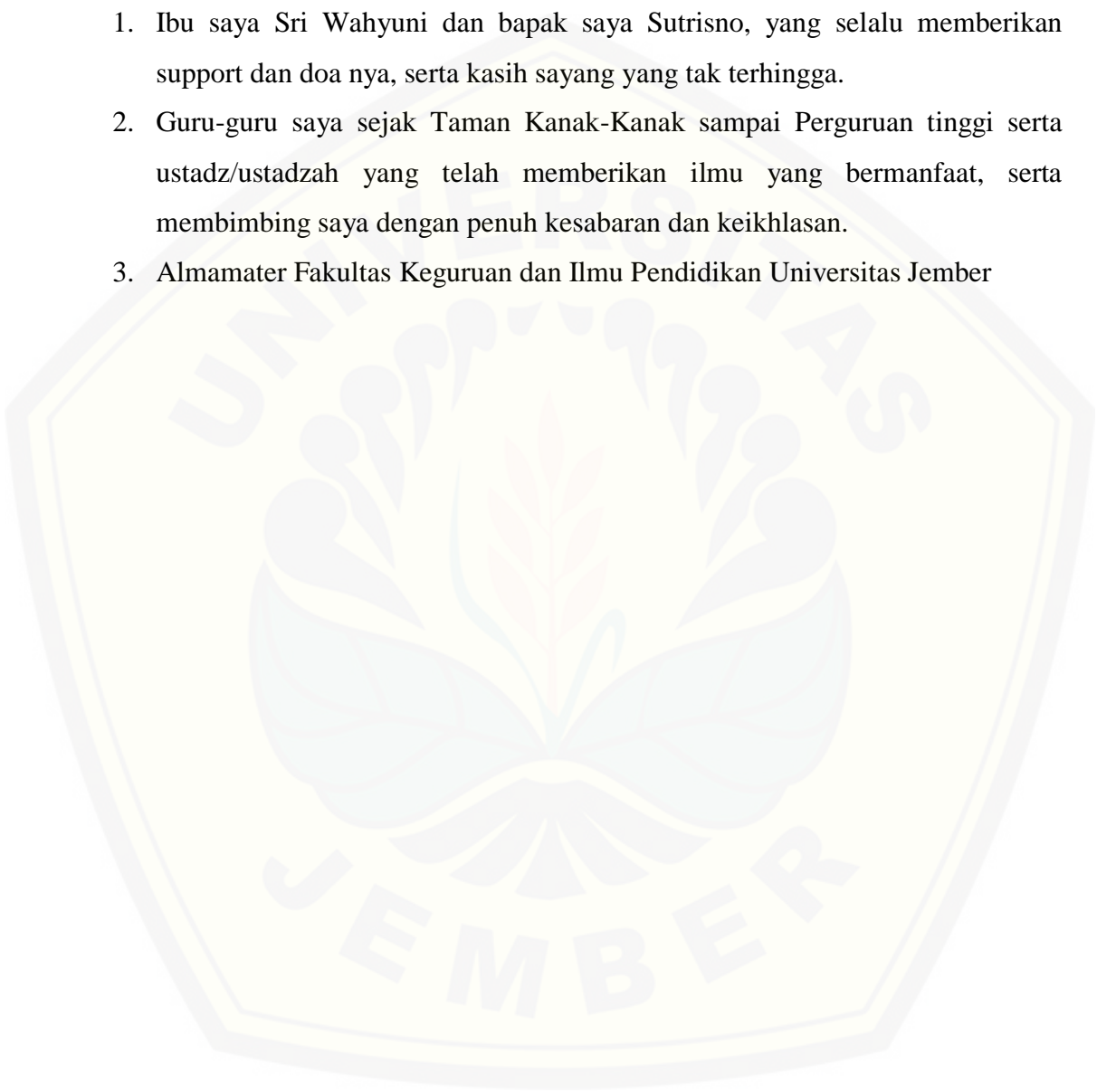
NIM 160210102062

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN FISIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MIPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER
2020**

PERSEMBAHAN

Bismillahirrohamannirrohim, dengan menyebut nama Allah S.W.T Skripsi ini saya persembahkan untuk:

1. Ibu saya Sri Wahyuni dan bapak saya Sutrisno, yang selalu memberikan support dan doanya, serta kasih sayang yang tak terhingga.
2. Guru-guru saya sejak Taman Kanak-Kanak sampai Perguruan tinggi serta ustadz/ustadzah yang telah memberikan ilmu yang bermanfaat, serta membimbing saya dengan penuh kesabaran dan keikhlasan.
3. Almamater Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember



MOTTO

“Tidakkah kamu tahu bahwa Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu?”

(Terjemahan dari Q.S *Al-Baqarah* : 106)^{*)}



^{*)} Departemen Agama Republik Indonesia. 2005. *Al-Qur'an - Terjemah dan Tafsir Perkata*. Bandung: JABAL.

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Dewi Sinta Tresnowati

NIM : 160210102062

Menyatakan dengan sungguh-sungguh bahwa skripsi ini yang berjudul **"Simulasi Numerik Massa pada Peluruhan Inti Zat Radioaktif Deret Thorium-232 dengan Metode Aljabar Matriks"** adalah benar-benar karya sendiri, kecuali kutipan yang telah disebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi mana pun, serta bukan karya jiplakan. Saya yang bertanggung jawab atas kebenaran dan keabsahan isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenar-benarnya, tanpa ada paksaan dan tekanan dari pihak mana pun dan bersedia mendapat sanksi akademik jika di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 15 Januari 2020

Yang menyatakan,

Dewi Sinta Tresnowati

NIM 160210102062

SKRIPSI

**SIMULASI NUMERIK MASSA PADA PELURUHAN INTI
ZAT RADIOAKTIF DERET THORIUM-232 DENGAN
METODE ALJABAR MATRIKS**

Oleh

Dewi Sinta Tresnowati

160210102062

Dosen Pembimbing I : Dr. Yushardi, S.Si., M.Si

Dosen Pembimbing II : Drs. Bambang Supriadi, M.Sc

PENGESAHAN

Skripsi berjudul “Simulasi Numerik Massa pada Peluruhan Inti Zat Radioaktif Deret Thorium-232 dengan Metode Aljabar Matriks” telah diuji dan disahkan pada:

Hari, tanggal : Rabu, 15 Januari 2020

Tempat : Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember

Tim Penguji

Ketua,

Sekretaris,

Dr. Yushari, S.Si., M.Si
NIP. 196504201995121001

Drs. Bambang Suproadi, M.Sc
NIP. 196807101993021001

Anggota I

Anggota II

Drs. Trapsilo Prihandono, M.Si
NIP. 196204011987021001

Drs. Albertus Djoko Lesmono, M.Si
NIP. 196412301993021001

Mengesahkan

Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Universitas Jember

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D
NIP. 19680802199303100

RINGKASAN

Simulasi Numerik Massa pada Peluruhan Inti Zat Radioaktif Deret Thorium-232 dengan Metode Aljabar Matriks; Dewi Sinta Tresnowati, 160210102062; 2019; 52 halaman; Program Studi Pendidikan Fisika; Jurusan Pendidikan MIPA; Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan; Universitas Jember.

Thorium merupakan salah satu unsur radioaktif yang masih dapat ditemukan di alam semesta dalam jumlah yang banyak. Thorium-232 memiliki inti atom tidak stabil sehingga akan mengalami perubahan secara spontan menjadi inti atom stabil melalui proses peluruhan berantai. Deret Thorium-232 akan meluruh secara berantai melalui 11 tahap peluruhan utama tanpa cabang hingga menjadi stabil. Berdasarkan ilmu sains, teknik penyelesaian peluruhan berantai tidak dapat diatasi dengan hanya menggunakan metode analitik.

Metode numerik merupakan teknik yang dapat memformulasikan permasalahan matematis tentang peluruhan berantai agar dapat diselesaikan dengan operasi hitungan. Salah satu metode numerik untuk penyelesaian peluruhan radioaktif berantai adalah menggunakan metode aljabar matriks dengan pendekatan Persamaan Bateman. Metode aljabar matriks dapat menggantikan penyelesaian peluruhan berantai pada umumnya yang menggunakan persamaan diferensial dan integral, dimana membutuhkan kecakapan dan ketelitian yang memadai. Tujuan penelitian ini adalah untuk menghitung besar jumlah atom dan massa sisa peluruhan zat radioaktif pada deret Thorium-232.

Penelitian ini dilaksanakan di Laboratorium Komputer Program Studi Pendidikan Fisika FKIP Universitas Jember pada Semester Gasal Tahun Ajaran 2019-2020. Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini yaitu: (1) Mempersiapkan segala alat dan bahan yang dapat dijadikan sebagai informasi, (2) Menerapkan berbagai teori yang sudah ada, (3) Melakukan perhitungan untuk memperoleh data, (4) Melakukan validasi, (5) Melakukan pembahasan tentang hasil analisa peluruhan deret radioaktif Thorium-232, (6) Membuat suatu kesimpulan dari hasil analisa dan pembahasan.

Hasil penelitian menunjukkan bahwa peluruhan radioaktif berantai pada deret Thorium-232 yang bermassa 7 gram selama $1,34 \times 10^{10}$ tahun yang lalu menunjukkan bahwa nuklida induk memiliki massa sisa terbanyak dibandingkan dengan massa sisa nuklida turunan yang hampir mendekati nol. Hal tersebut dikarenakan waktu paruh yang dimiliki nuklida turunan lebih singkat daripada waktu peluruhannya. Massa sisa peluruhan dipengaruhi oleh waktu peluruhan dan waktu paruh yang dimiliki setiap nuklida pada deret Thorium-232. Semakin lama waktu peluruhan yang dialami nuklida maka semakin banyak yang meluruh sehingga massa yang tersisa selama peluruhan semakin sedikit. Semakin lama waktu paruh yang dimiliki oleh nuklida maka semakin besar massa sisa yang tersisa selama peluruhan, dan begitu sebaliknya. Massa sisa peluruhan diperoleh dari banyaknya jumlah atom yang dimiliki oleh masing-masing nuklida pada deret Thorium-232. Setiap massa nuklida memiliki jumlah atom yang berbeda dengan nuklida lainnya. Dengan menggunakan konsep bilangan Avogadro, terdapat keterkaitan antara massa dengan jumlah atom suatu nuklida. Banyaknya jumlah atom setiap nuklida dapat menunjukkan besarnya massa dalam nuklida tersebut.

Kesimpulan dari penelitian ini adalah (1) Besarnya massa sisa peluruhan pada deret Thorium-232 dengan syarat batas yang telah ditentukan menunjukkan bahwa nuklida induk memiliki massa sisa paling banyak yaitu sebesar 3,596 gram, sedangkan nuklida turunannya memiliki massa sisa yang sangat sedikit atau hampir mendekati nol, (2) Massa sisa peluruhan dipengaruhi oleh waktu paruh yang dimiliki setiap nuklida dan lamanya peluruhan. Semakin lama waktu paruh nuklida maka semakin banyak massa yang tersisa selama peluruhan, dan sebaliknya. Sedangkan apabila semakin lama waktu peluruhan yang terjadi pada nuklida maka akan semakin banyak yang meluruh sehingga massa yang tersisa selama peluruhan semakin sedikit, (3) Besarnya jumlah atom sisa peluruhan pada deret Thorium-232 menunjukkan bahwa nuklida induk memiliki jumlah atom sisa paling banyak dibandingkan nuklida turunannya yaitu sebesar $9,34 \times 10^{21}$ atom, dan banyaknya jumlah atom setiap nuklida dapat menunjukkan besarnya massa dalam nuklida tersebut.

PRAKATA

Syukur Alhamdulillah penulis panjatkan kepada Allah S.W.T atas segala limpahan berkah, rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul “Simulasi Numerik Massa pada Peluruhan Inti Zat Radioaktif Deret Thorium-232 dengan Metode Aljabar Matriks”. Skripsi ini disusun guna memenuhi salah satu syarat menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Program Studi Pendidikan Fisika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terimakasih kepada:

1. Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph. D selaku Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember yang telah membantu menerbitkan surat permohonan izin melakukan penelitian;
2. Dr. Dwi Wahyuni, M.Kes selaku Ketua Jurusan Pendidikan MIPA FKIP Universitas Jember yang telah memfasilitasi proses skripsi ini;
3. Drs. Bambang Supriadi, M.Sc selaku Ketua Program Studi Pendidikan Fisika FKIP Universitas Jember;
4. Drs. Albertus Djoko Lesmono, M.Si selaku Dosen Pembimbing Akademik yang selalu membimbing dan menyetujui rencana studi selama menjadi mahasiswa;
5. Dr. Yushardi, S.Si., M.Si selaku Dosen Pembimbing Utama dan Drs. Bambang Supriadi, M.Sc selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran, tenaga, serta perhatiannya selama penulisan skripsi ini;
6. Drs. Trapsilo Prihandono, M.Si selaku Dosen Penguji Utama dan Drs. Albertus Djoko Lesmono, M.Si selaku Dosen Penguji anggota yang telah memberi masukan dan saran guna memperbaiki skripsi ini;
7. Semua dosen Pendidikan Fisika FKIP Universitas Jember, atas segala ilmu yang telah diberikan selama menjadi mahasiswa;

8. Tim sukses dunia akhirat yaitu Izza, Shahnaz, Puji, Indah, Nur Fadilah, Arum, Dewi, Dika, Fiska, serta seluruh keluarga besar Pendidikan Fisika 2016 Universitas Jember yang telah menjadi saudara dan berkenan memberikan doa, semangat, dukungan serta kenangan terindah;
9. Tim research saya yaitu Amirah, Sindi, Nyuciati, Bagus Hari yang telah menjadi motivasi untuk terus berkarya lebih baik lagi;
10. Tim support saya yaitu Dwi, Elok, Dila, Memey, Agung, Andi, Adit, Ninik, Riscy, Alvi, Nurridha yang telah memberikan semangat untuk penyelesaian tugas akhir ini, serta
11. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih belum sempurna, oleh karena itu penulis berharap agar pembaca memberikan kritik dan saran yang bersifat membangun. Akhir kata, penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua.

Jember, 15 Januari 2020

Penulis

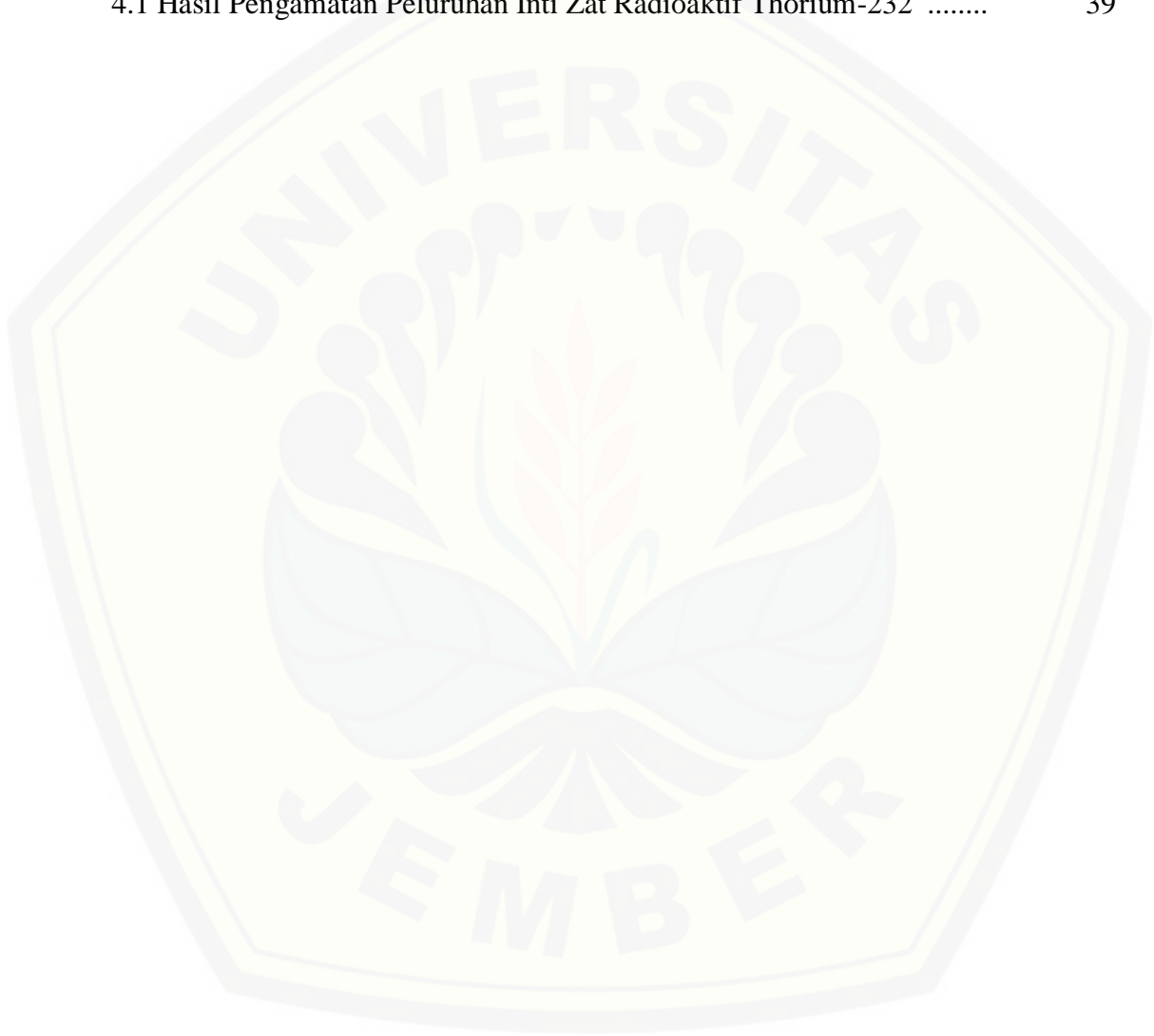
DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
PERSEMBAHAN	ii
MOTTO	iii
PERNYATAAN	iv
PENGESAHAN	vi
RINGKASAN	vii
PRAKATA	ix
DAFTAR ISI	xi
DAFTAR TABEL	xiii
DAFTAR GAMBAR	xiv
DAFTAR LAMPIRAN	xv
BAB 1. PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Tujuan Penelitian	3
1.4 Batasan Masalah	4
1.5 Manfaat Penelitian	4
BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Deret Radioaktif	5
2.1.1 Deret Thorium	6
2.1.2 Deret Neptonium	8
2.1.3 Deret Uranium	9
2.1.4 Deret Aktinium	10
2.2 Kestabilan Inti Atom	11
2.3 Radioaktivitas	12
2.3.1 Peluruhan Radioaktif	14
2.3.2 Aktivitas Radioaktif	16
2.3.3 Waktu Paruh	17
2.4 Peluruhan Berantai	18
2.5 Massa Inti Atom	21
2.6 Metode Aljabar Matriks	23
2.6.1 Penggunaan Nilai Eigen Sebagai Solusi Penyelesaian Persamaan Diferensial Homogen pada Peluruhan Berantai	25
BAB 3. METODE PENELITIAN	30

3.1 Jenis, Tempat dan Waktu Penelitian	30
3.2 Definisi Operasional Variabel	30
3.3 Langkah Penelitian	31
3.4 Alat Penelitian	35
3.5 Teknik Penyajian Data	36
3.5.1 Data Pengamatan Hasil Simulasi.....	37
3.5.2 Data Hasil Visualisasi Gambar.....	37
BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN	39
4.1 Hasil	39
4.1.1 Data Pengamatan Hasil Simulasi.....	39
4.1.2 Data Hasil Visualisasi Gambar.....	39
4.2 Pembahasan	44
BAB 5. PENUTUP	51
5.1 Kesimpulan.....	51
5.2 Saran	52
DAFTAR PUSTAKA	53
LAMPIRAN.....	55

DAFTAR TABEL

	Halaman
2.1 Empat Deret Radioaktif	6
2.2 Waktu Paruh Deret Thorium.....	8
3.1 Validasi jumlah atom dan massa sisa peluruhan Uranium-238	33
3.2 Pengamatan Peluruhan Inti Zat Radioaktif Thorium-232	37
4.1 Hasil Pengamatan Peluruhan Inti Zat Radioaktif Thorium-232	39

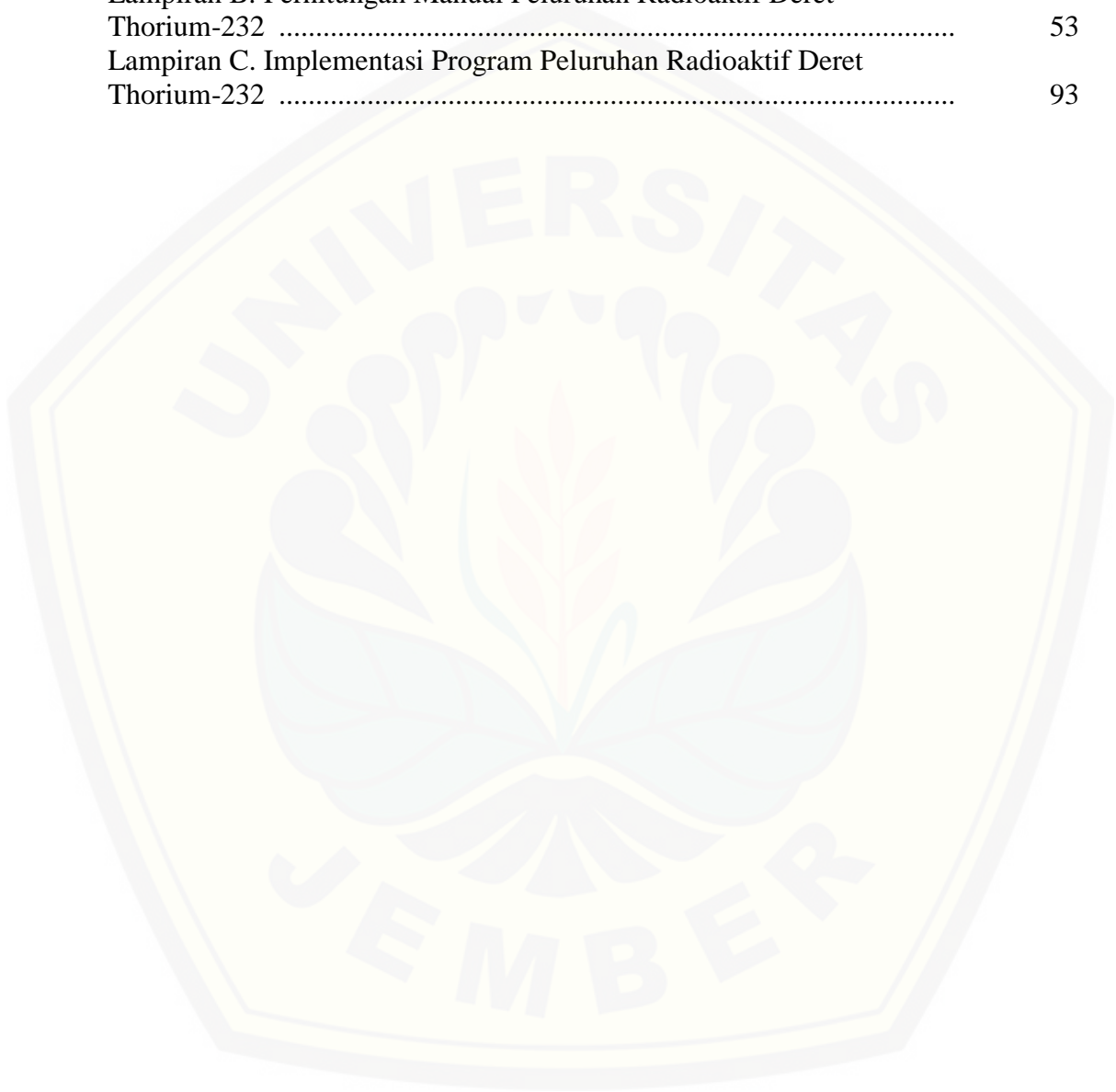


DAFTAR GAMBAR

	Halaman
2.1 Skema Peluruhan Deret Thorium	7
2.2 Skema Peluruhan Deret Neptunium	9
2.3 Skema Peluruhan Deret Uranium.....	10
2.4 Skema Peluruhan Deret Aktinium	11
2.5 Grafik Pita Kestabilan Inti Atom	12
2.6 Skema Peluruhan Berantai Radioaktif	18
3.1 Langkah-langkah Penelitian	31
3.2 Grafik Hubungan Jumlah Atom terhadap Waktu Peluruhan pada Uranium-238	34
3.3 Grafik Hubungan Massa Atom terhadap Waktu Peluruhan pada Uranium-238	34
3.4 Diagram alir simulasi xivumeric peluruhan radioaktif unsur Thorium-232	36
3.5 Grafik Hubungan Jumlah Atom terhadap Waktu Peluruhan	37
3.6 Grafik Hubungan Massa Atom terhadap Waktu Peluruhan	38
4.1 (a) Grafik Hubungan Massa Atom terhadap Waktu Peluruhan pada Deret Thorium-232	40
4.1 (b) Grafik Hubungan Massa Atom terhadap Waktu Peluruhan Nuklida Turunan pada Deret Thorium-232 (Ra^{228} , Th^{228} , Pb^{208})	40
4.1 (c) Grafik Hubungan Massa Atom terhadap Waktu Peluruhan Nuklida Turunan pada Deret Thorium-232 (Ac^{228} , Ra^{224} , Pb^{212} , Bi^{212})	40
4.1 (d) Grafik Hubungan Massa Atom terhadap Waktu Peluruhan Nuklida Turunan pada Deret Thorium-232 (Rn^{220})	41
4.1 (e) Grafik Hubungan Massa Atom terhadap Waktu Peluruhan Nuklida Turunan pada Deret Thorium-232 (Po^{220})	41
4.1 (f) Grafik Hubungan Massa Atom terhadap Waktu Peluruhan Nuklida Turunan pada Deret Thorium-232 (Po^{212})	41
4.2 (a) Grafik Hubungan Jumlah Atom Terhadap Waktu Peluruhan Nuklida Turunan pada Deret Thorium-232	42
4.2 (b) Grafik Hubungan Jumlah Atom terhadap Waktu Peluruhan Nuklida Turunan pada Deret Thorium-232 (Ra^{228} , Th^{228} , Pb^{208})	42
4.2 (c) Grafik Hubungan Jumlah Atom terhadap Waktu Peluruhan Nuklida Turunan pada Deret Thorium-232 (Ac^{228} , Ra^{224} , Pb^{212})	42
4.2 (d) Grafik Hubungan Jumlah Atom terhadap Waktu Peluruhan Nuklida Turunan pada Deret Thorium-232 (Rn^{220})	43
4.2 (e) Grafik Hubungan Jumlah Atom terhadap Waktu Peluruhan Nuklida Turunan pada Deret Thorium-232 (Po^{220})	43
4.2 (f) Grafik Hubungan Jumlah Atom terhadap Waktu Peluruhan Nuklida Turunan pada Deret Thorium-232 (Bi^{212})	43
4.2 (g) Grafik Hubungan Jumlah Atom terhadap Waktu Peluruhan Nuklida Turunan pada Deret Thorium-232 (Po^{212})	43

DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran A. Matrik Penelitian	51
Lampiran B. Perhitungan Manual Peluruhan Radioaktif Deret Thorium-232	53
Lampiran C. Implementasi Program Peluruhan Radioaktif Deret Thorium-232	93



BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Sejarah perkembangan tentang atom dimulai sejak abad ke-5 SM, dan memunculkan gagasan bahwa semua materi yang ada di alam semesta ini terdiri atas unsur, dimana setiap unsur tersusun atas atom yang merupakan partikel terkecil dari suatu materi. Atom terdiri dari inti atom yang merupakan susunan proton dan neutron, serta elektron yang terdapat di sekitar inti dan bergerak mengelilinginya dengan lintasan-lintasan kulit tertentu. Tidak semua unsur yang ada di alam memiliki inti yang stabil, hanya sekitar 270 merupakan inti yang stabil dan kurang lebih $4 \frac{1}{2}$ kali inti stabil tersebut merupakan inti yang tidak stabil (Gautreau dan Savin, 2006).

Secara umum, faktor yang mempengaruhi kestabilan inti atom adalah perbandingan jumlah proton-neutron dan ukuran inti atom. Inti atom yang stabil adalah inti yang memiliki jumlah proton dan jumlah neutronnya sama untuk inti ringan, sedangkan untuk inti berat memiliki jumlah neutron $1 \frac{1}{2}$ kali jumlah protonnya. Inti atom yang tidak stabil akan mengalami perubahan secara spontan dari inti yang tidak stabil menjadi inti yang stabil, dengan cara memancarkan partikel dan radiasi elektromagnetik atau dikenal dengan radioaktivitas. Inti atom yang tidak stabil disebut radionuklida, dan proses perubahannya disebut peluruhan, sedangkan zat yang mengandung radionuklida disebut zat radioaktif.

Unsur yang memiliki nomor atom $Z > 83$ merupakan unsur radioaktif. Sebagian besar unsur radioaktif yang ada di alam merupakan anggota dari empat deret radioaktif yaitu deret Thorium, Neptunium, Uranium, dan Aktinum yang masing-masing deret tersebut terdiri dari nuklida induk dan nuklida turunannya. Thorium dan Uranium merupakan unsur radioaktif yang masih lumenter didapatkan di alam semesta dalam jumlah yang banyak.

Thorium merupakan salah satu unsur radioaktif yang terdapat di bumi dan memiliki kelimpahan 3 kali lebih banyak daripada Uranium. Thorium dapat dijadikan produk sampingan saat mengekstraksi logam langka yang terdapat di bumi melalui pasir monazit. Thorium memiliki beberapa keunggulan selain

sumber dayanya yang lebih besar dibanding Uranium, yaitu rasio konversi Thorium menjadi isotop U-233 lebih tinggi dibanding dengan U-238, karenaampang lintang serap neutron termal Thorium yaitu 7.4 barns kira-kira 3 kali lebih tinggi dibanding Uranium yang hanya memiliki 2.7 barns.

Thorium memiliki 6 buah isotop yang diketahui tidak stabil, yaitu ^{228}Th , ^{229}Th , ^{230}Th , ^{231}Th , ^{232}Th , dan ^{234}Th . Thorium dengan isotop yang paling stabil dimiliki oleh ^{232}Th dengan waktu paruh selama 14,05 miliar tahun atau setara dengan umur alam semesta. Thorium-232 mengalami peluruhan sangat lambat melalui proses peluruhan alfa dan beta hingga kemudian berakhir dengan inti stabil yaitu Timbal-208. Proses peluruhan ini dikenal sebagai deret peluruhan berantai Thorium.

Penyelesaian peluruhan berantai membutuhkan tingkat ketelitian dan kecakapan yang memadai, khususnya permasalahan matematis tentang konsep diferensial (Hamawi, 1971). Persamaan-persamaan yang menggambarkan peristiwa peluruhan berantai cukup rumit dan penyelesaiannya menggunakan persamaan secara khusus. Salah satu solusi penyelesaian peluruhan berantai adalah menggunakan metode numerik. Metode numerik merupakan salah satu teknik yang digunakan untuk memformulasikan permasalahan matematis agar dapat diselesaikan dengan operasi hitungan/aritmatika biasa. Solusi angka yang diperoleh dari metode numerik merupakan solusi yang mendekati nilai sebenarnya atau solusi pendekatan (*approximation*) dengan tingkat ketelitian yang dapat diatur sesuai dengan keinginan (Rahmad, *et al.*, 2018).

Menurut Nugraheni *et al* (2012), unsur radioaktif Thorium-232 memiliki umur paruh $1,4 \times 10^{10}$ tahun. Menurut Moral *et al* (2003) tentang penyelesaian peluruhan berantai deret Uranium-238 pada inti atom anak Radon-222 menjadi Polonium-214 menunjukkan bahwa penyelesaian peluruhan berantai menggunakan persamaan Bateman dengan penyelesaian diferensial dan integral memperoleh persamaan yang kompleks. Persamaan Bateman erat kaitannya dengan fisika nuklir yang merupakan salah satu model matematika. Model matematika ini dirumuskan oleh Ernest Rutherford pada tahun 1905. Solusi analitik dari model ini dirumuskan oleh Harry Bateman pada tahun 1910. Model

matematika ini menggambarkan tentang kelimpahan unsur dan aktivitas radioaktif yang terjadi dalam deret peluruhan sebagai fungsi waktu, berdasarkan kelimpahan unsur awal dan laju peluruhan. Menurut Ridwan *et al* (2015), penyelesaian diferensial peluruhan berantai deret Uranium-238 menunjukkan bahwa penyelesaian peluruhan berantai menggunakan persamaan Bateman dapat diselesaikan menggunakan metode aljabar matriks.

Metode aljabar matriks merupakan metode matematis untuk penyelesaian sistem persamaan linier yang dapat dikembangkan menjadi sistem persamaan diferensial. Metode aljabar matriks dapat digunakan untuk membantu menyelesaikan masalah peluruhan radioaktif yang awalnya menggunakan metode penyelesaian diferensial peluruhan berantai, dan selanjutnya dapat diimplementasikan secara komputasi. Berdasarkan uraian tersebut, maka perlu diadakan penelitian pada peluruhan berantai Thorium-232 dengan metode aljabar matriks, untuk mengetahui berapa besarnya massa dan jumlah atom sisa peluruhan yang terjadi pada deret Thorium-232 sebagai bahan bakar nuklir alternatif mulai awal pembentukan alam semesta.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka dapat dirumuskan beberapa permasalahan, antara lain :

- a. Berapakah jumlah atom sisa peluruhan inti zat radioaktif pada deret Thorium-232 secara numerik?
- b. Berapakah massa sisa peluruhan inti zat radioaktif pada deret Thorium-232 secara numerik?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut :

- a. Menghitung besar jumlah atom sisa peluruhan zat radioaktif deret Thorium-232

- b. Menghitung massa sisa peluruhan inti zat radioaktif pada deret Thorium-232 secara numerik

1.4 Batasan Masalah

Adapun batasan-batasan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

- a. Deret radioaktif yang digunakan yaitu peluruhan alami deret Thorium-232
- b. Variabel yang dihitung adalah massa dan jumlah atom sisa yang dihasilkan terhadap waktu yang telah ditentukan
- c. Massa awal yang digunakan adalah 7 gram
- d. Waktu selama peluruhan mulai terbentuknya Bumi yaitu $1,34 \times 10^{10}$ tahun

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang dapat diperoleh dari penelitian ini antara lain :

- a. Bagi peneliti, dapat menambah wawasan dan pengetahuan, serta dapat digunakan sebagai masukan dan pertimbangan untuk melakukan penelitian lebih lanjut tentang pemecahan permasalahan diferensial peluruhan berantai menggunakan solusi aljabar matriks
- b. Bagi lembaga, sebagai tambahan referensi untuk pembelajaran tentang permasalahan peluruhan berantai
- c. Bagi pembaca, sebagai referensi untuk mempelajari penyelesaian solusi peluruhan berantai deret Thorium-232

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Deret Radioaktif

Sebagian besar unsur radioaktif yang terkandung di alam semesta merupakan anggota dari empat deret radioaktif. Masing-masing deret radioaktif terdiri atas urutan produk nuklida-nuklida anak yang berasal dari turunan nuklida induk tunggal. Empat deret radioaktif terjadi karena adanya peluruhan alfa mereduksi nomor massa sebuah inti dengan 4, sehingga nuklida yang memiliki nomor massa

$$A = 4n \quad (1)$$

dapat meluruh menjadi nuklida lain dalam urutan yang menurun dari nomor massa tersebut. Nuklida radioaktif yang bernomor massa $A = 4n$ disebut sebagai anggota dari deret $4n$. Nuklida yang bernomor massa

$$A = 4n + 1 \quad (2)$$

disebut sebagai anggota dari deret $4n + 1$, dan begitu seterusnya dengan nomor massa

$$A = 4n + 2 \quad (3)$$

dan,

$$A = 4n + 3 \quad (4)$$

merupakan anggota dari deret $4n + 2$ dan deret $4n + 3$, yang semuanya dapat meluruh menjadi nuklida lain dalam urutan menurun dari nomor massa. Inti radioaktif membutuhkan waktu untuk meluruh hingga jumlahnya berkurang menjadi setengah dari nilai awal atau yang disebut dengan umur paruh. Umur paruh pada deret radioaktif disajikan dalam Tabel 2.1 berikut.

Tabel 2.1 Empat deret radioaktif

Nomor Massa	Deret	Induk	Umur Paruh (Tahun)	Produk Mantap akhir
$A = 4n$	Thorium	${}_{90}^{232}Th$	$1,39 \times 10^{10}$	${}_{82}^{208}Pb$
$A = 4n + 1$	Neptonium	${}_{93}^{237}Np$	$2,25 \times 10^6$	${}_{83}^{209}Bi$
$A = 4n + 2$	Uranium	${}_{92}^{238}U$	$4,51 \times 10^9$	${}_{82}^{206}Pb$
$A = 4n + 3$	Aktinium	${}_{92}^{235}U$	$7,07 \times 10^8$	${}_{82}^{207}Pb$

(Jumini, 2018).

Umur paroh deret Neptonium sangat singkat dibandingkan dengan perkiraan umur dari alam semesta ini yakni $\sim 10^{10}$ tahun, sehingga anggota-anggota deret tersebut tidak bisa didapatkan di alam semesta. Sebuah inti induk yang tidak stabil dapat berubah menjadi inti anak yang mantab sebagai hasil akhir dari setiap deret radioaktif berlangsung karena adanya peluruhan alfa dan beta. Beberapa nuklida dalam deret radioaktif dapat meluruh melalui pemancaran alfa atau beta, sehingga menyebabkan rantai peluruhannya menjadi bercabang. Misalnya salah satu anggota dari deret Thorium yaitu ${}_{83}^{212}Bi$, memiliki peluang 33,7 % untuk meluruh alfa menjadi ${}_{82}^{208}Tl$ dan 66 % untuk meluruh beta menjadi ${}_{84}^{212}Po$. Peluruhan alfa diikuti dengan peluruhan beta, dan peluruhan beta diikuti dengan peluruhan alfa, sehingga kedua cabang tersebut menuju ke ${}_{82}^{208}Pb$ (Jumini, 2018).

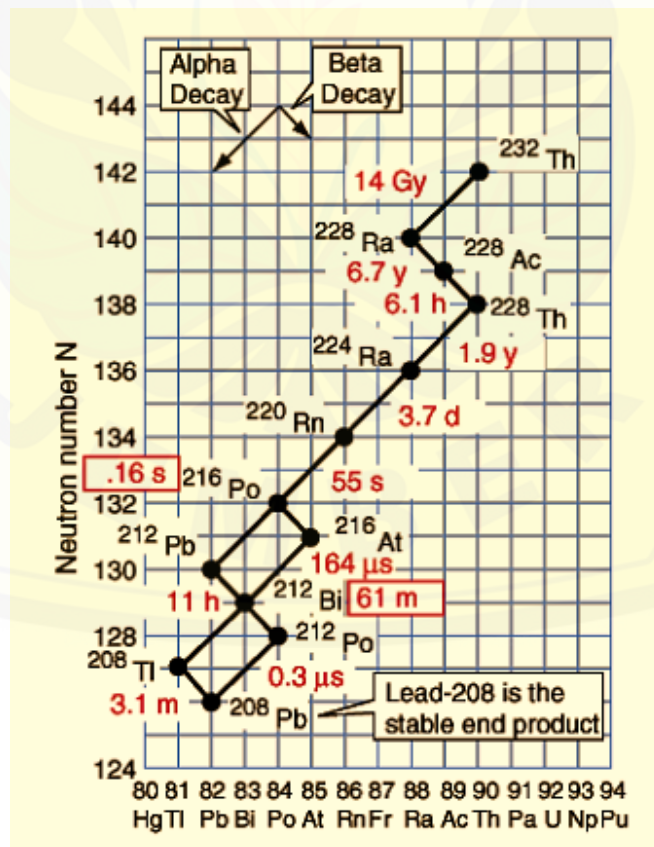
2.1.1 Deret Thorium

Thorium ditemukan oleh Jons Jacob Berzelius pada tahun 1828, yang terdapat pada batuan, tanah, air, tumbuhan, dan hewan. Thorium merupakan bahan metal yang banyak digunakan dalam nuklir dan non nuklir. Penggunaan Thorium dalam 6meric6 non nuklir dapat ditemukan pada keramik, gelas 6umer, lampu kaos, elektroda tungsten, dan berbagai macam logam alloy (Rosidi dan Sukirno, 2004). Thorium yang ditemukan di alam berupa mineral Monazite (Ce, La, Y, Th)PO₄, Thorite (ThSiO₄) dan Thorianite (Th,U)O₂, sedangkan Thorium murni berupa logam putih keperakan. Thorium memiliki beberapa karakteristik yaitu:

- Kerapatan = $11,7 \text{ g/cm}^3$
- Titik lebur = 2115 K (1842 °C atau 3348 °F)

- c. Tiitk didih = 5061 K (4788 °C atau 8650 °F)
- d. Struktur 7umeric = Berbentuk kubus pusat sisi (Nugraheni, *et al.*, 2012).

Thorium merupakan unsur yang memiliki sifat reaktif dan mudah bereaksi dengan Oksigen, Hidrogen, Halogen, dan Sulphur. Thorium dapat bereaksi dengan air namun secara lambat, dan tidak dapat bereaksi sama sekali dengan semua asam kecuali asam Klorida. Sifat fisika unsur Thorium sangat dipengaruhi oleh derajat kontaminasinya dengan oksida. Terdapat 25 isotop Thorium yang dikenal tidak stabil, dengan massa atom antara 212 sampai 236. Isotop Thorium yang paling stabil adalah Thorium-232 yang merupakan sebuah isotop pengemisi alpha (α) dengan waktu paruh yang sangat panjang yaitu sekitar 14.05 miliar tahun atau 1.41×10^{10} tahun (Erlan, 2012). Dalam deret Thorium-232 terdapat 10 proses peluruhan utama yang terdiri dari 6 peluruhan alfa (α) dan 4 peluruhan beta (β). Proses disintegrasi (peluruhan) deret Thorium-232 ditunjukkan pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Skema peluruhan deret Thorium (Dwijananti, *et al.*, 2009)

Deret Thorium dengan isotop ^{232}Th akan mengalami peluruhan hingga stabil menjadi Pb-208 . Deret Thorium disebut juga dengan deret $4n$ karena nomor massa unsur-unsur radioaktifnya selalu habis jika dibagi 4. Setiap nuklida pada deret Thorium-232 memiliki waktu paruh masing-masing, dan nuklida induk memiliki waktu paruh paling lama dibandingkan dengan nuklida-nuklida turunannya. Waktu paruh pada deret Thorium-232 ditunjukkan pada Tabel 2.2.

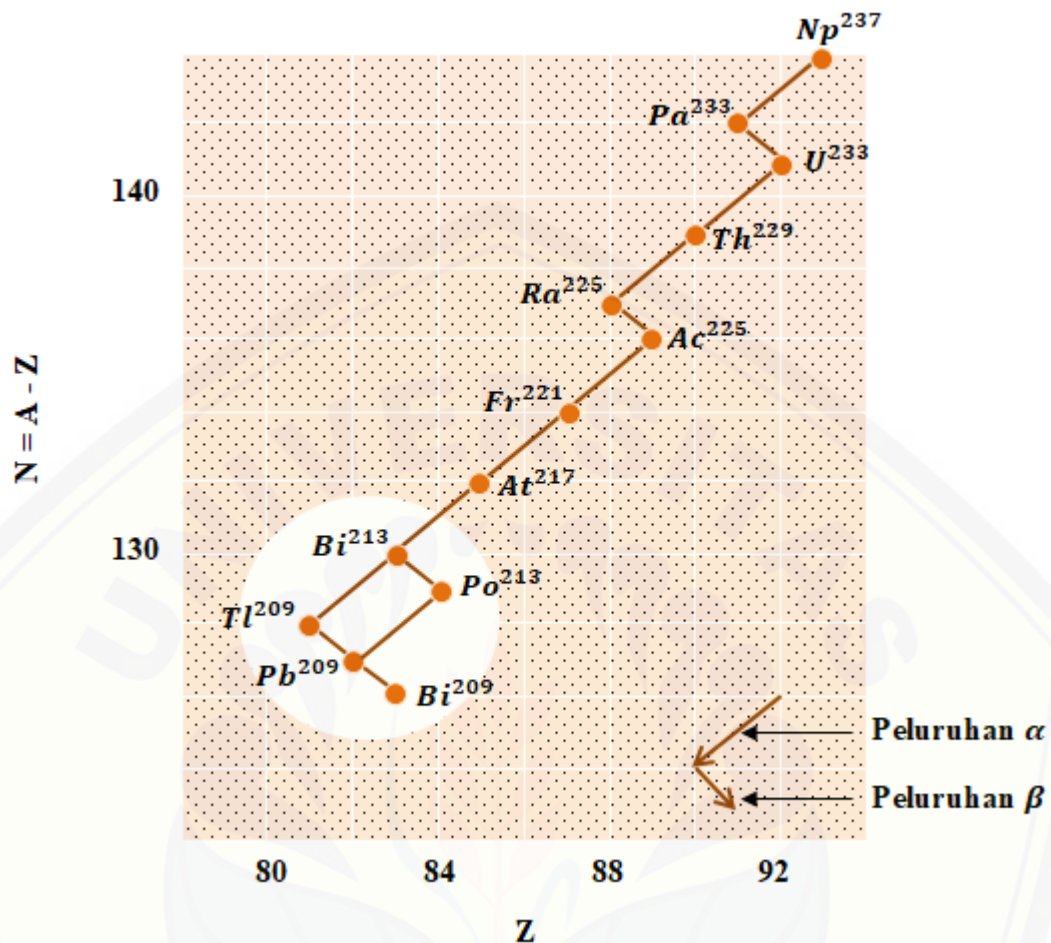
Tabel 2.2 Waktu paruh deret Thorium

Nama Radionuklida	Lambang	Radiasi yang Dipancarkan	Waktu Paruh ($T_{1/2}$)
Thorium (Th)	$^{232}_{90}\text{Th}$	α	$1,39 \times 10^{10}$ tahun
Mesothorium 1 (MsTh1)	$^{228}_{88}\text{Ra}$	β	6,7 tahun
Mesothorium 2 (MsTh 2)	$^{228}_{89}\text{Ac}$	β	6,13 jam
Radiothorium (RdTh)	$^{228}_{90}\text{Th}$	α	1,91 tahun
Thorium X (ThX)	$^{224}_{88}\text{Ra}$	α	3,64 hari
Th Emanation (Tn)	$^{220}_{86}\text{Rn}$	α	51,5 detik
Thorium A (ThA)	$^{216}_{84}\text{Po}$	α dan β	0,16 detik
Thorium B (ThB)	$^{212}_{82}\text{Pb}$	β	10,6 jam
Astatine 216	$^{216}_{85}\text{At}$	α	3×10^{-4} detik
Thorium C (ThC)	$^{212}_{83}\text{Bi}$	α dan β	60,5 menit
Thorium C' (ThC')	$^{212}_{84}\text{Po}$	α	3×10^{-7} detik
Thorium C'' (ThC'')	$^{208}_{84}\text{Tl}$	β	3,10 menit
Thorium D (ThD)	$^{208}_{82}\text{Pb}$	Stabil	-

(Sofyan dan Mukhlis, 2004)

2.1.2 Deret Neptunium

Deret Neptunium merupakan deret tak alami, karena berasal dari buatan manusia melalui penembakan inti berat dengan neutron. Neptunium dengan isotop ^{237}Np akan mengalami peluruhan menjadi inti yang stabil yaitu Bismut-209. Dalam deret Neptunium-237 terdapat 11 proses peluruhan utama yang terdiri dari 7 peluruhan alfa (α) dan 4 peluruhan beta (β). Proses disintegrasi (peluruhan) deret Neptunium-237 ditunjukkan pada Gambar 2.2.

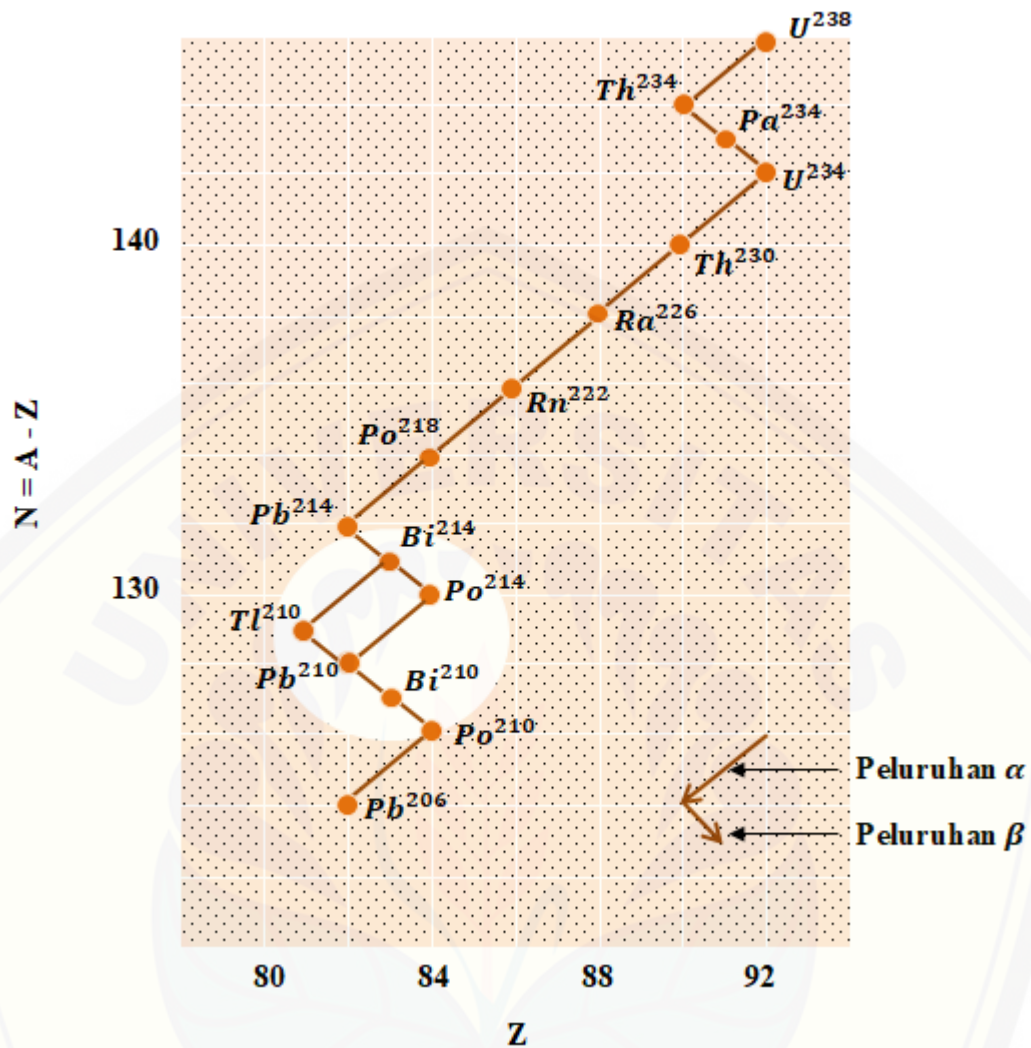


Gambar 2.2 Skema peluruhan deret Neptunium
(Dwijananti, *et al.*, 2009)

Deret Neptunium disebut juga dengan deret $4n+1$ karena setiap nomor massa unsur-unsur radioaktifnya selalu habis jika dibagi 4 dan bersisa 1.

2.1.3 Deret Uranium

Uranium merupakan salah satu unsur radioaktif alam yang memiliki inti atom tidak stabil. Uranium dengan isotop 238 akan mengalami peluruhan menjadi inti yang stabil yaitu Timbal-206. Dalam deret Uranium-238 terdapat 14 proses peluruhan utama yang terdiri dari 8 peluruhan alfa (α) dan 6 peluruhan beta (β). Proses disintegrasi (peluruhan) deret Uranium-238 ditunjukkan pada Gambar 2.3.



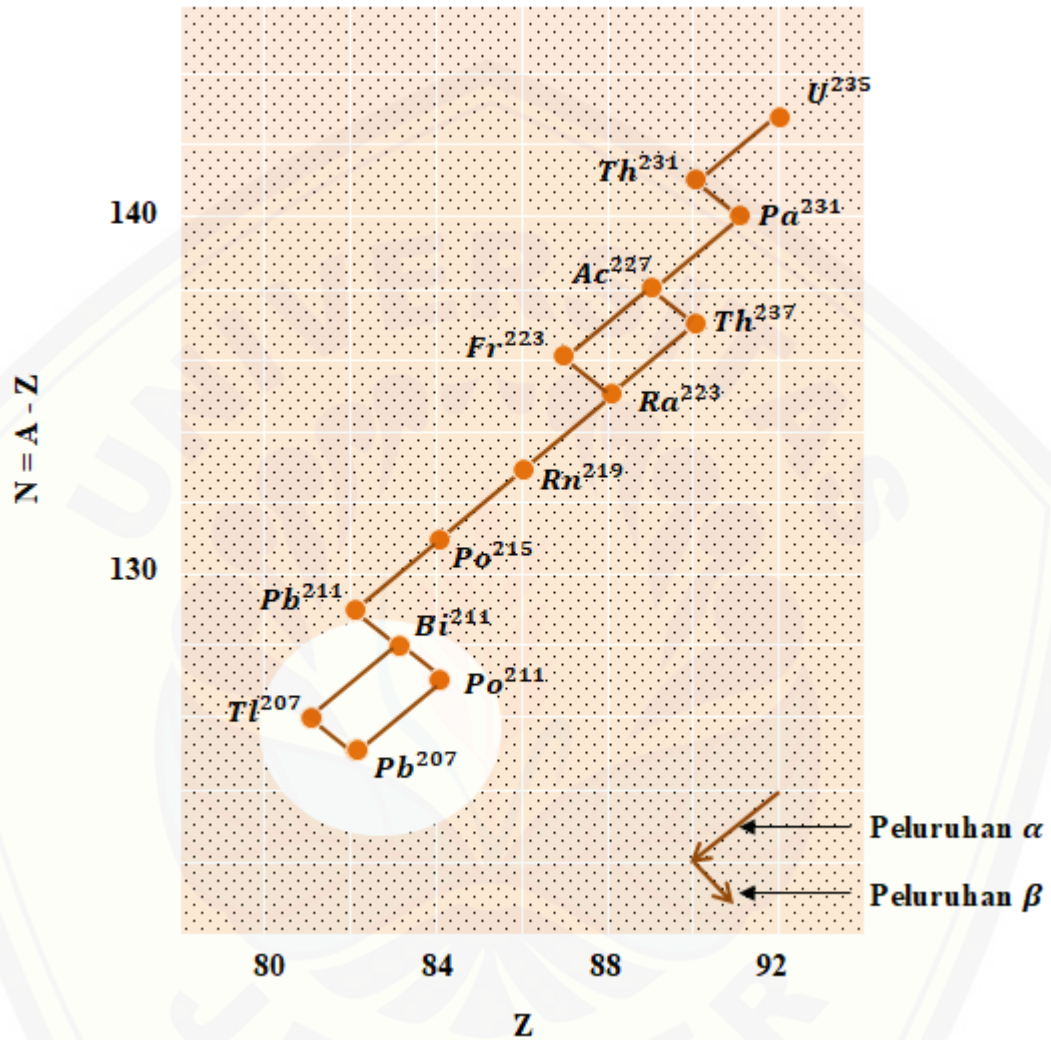
Gambar 2.3 Skema peluruhan deret Uranium
(Dwijananti, *et al.*, 2009)

Deret Uranium disebut juga dengan deret $4n+2$ karena setiap nomor massa unsur-unsur radioaktifnya selalu habis jika dibagi 4 dan bersisa 2.

2.1.4 Deret Aktinium

Deret Aktinium merupakan deret peluruhan dari unsur radioaktif Uranium-235. Uranium dengan isotop 235 akan mengalami peluruhan menjadi inti yang stabil yaitu Timbal-207. Dalam deret Aktinium atau Uranium-235 terdapat 11 proses peluruhan utama yang terdiri dari 7 peluruhan alfa (α) dan 4 peluruhan

beta (β). Proses disintegrasi (peluruhan) deret Aktinium atau Uranium-235 ditunjukkan pada Gambar 2.4.



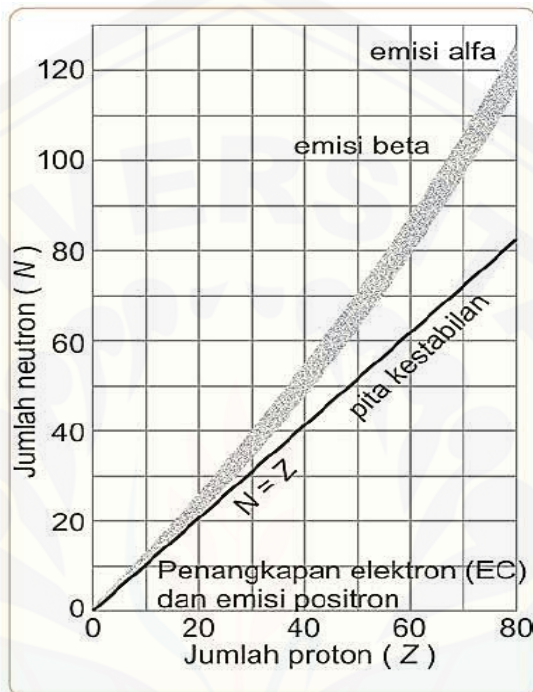
Gambar 2.4 Skema peluruhan deret Aktinium (Dwijananti, *et al.*, 2009)

Deret Aktinium disebut juga dengan deret $4n+2$ karena setiap nomor massa unsur-unsur radioaktifnya selalu habis jika dibagi 4 dan bersisa 2.

2.2 Kestabilan Inti Atom

Berdasarkan ilmu radiokimia, terdapat dua pendekatan untuk menentukan kestabilan inti atom, yaitu menggunakan rasio jumlah neutron terhadap proton

(n/p) dan menggunakan kaitan 12umeri ikat inti per 12umeric (E_b/A). Inti atom dikatakan stabil apabila memiliki perbandingan $\frac{N}{Z} \sim 1$. Hubungan antara jumlah proton dengan jumlah neutron dapat dilihat melalui sebuah gambar/grafik yang biasa disebut dengan pita kestabilan yang disajikan dalam Gambar 2.5.



Gambar 2.5 Grafik Pita Kestabilan Inti Atom
(Suhendar, 2016)

Inti ringan dengan jumlah proton kurang dari 20 dikatakan sangat stabil, karena intinya mengandung komposisi proton dan neutron yang sama. Inti berat dikatakan stabil apabila jumlah neutron intinya adalah 1,6 kali jumlah proton. Inti atom dikatakan tidak stabil apabila komposisi jumlah proton tidak sama dengan jumlah neutron, serta tingkat energinya tidak dalam keadaan dasar. Semakin banyak jumlah proton, maka semakin besar gaya tolak menolak antar proton tersebut, sehingga menyebabkan proton semakin memisahkan diri dari inti. Inti atom yang memiliki jumlah proton lebih dari 83 tergolong dalam inti yang tidak stabil, sehingga inti tersebut bersifat radioaktif.

2.3 Radioaktivitas

Inti atom suatu unsur yang memiliki jumlah neutron lebih banyak daripada jumlah proton, maka inti tersebut cenderung menjadi tidak stabil. Inti atom yang tidak stabil akan meluruh secara spontan melalui pemancaran sinar radioaktif, unsur-unsur tersebut dikatakan bersifat radioaktif (Nelson, *et al.*, 2018). Menurut Suratman (1997), peristiwa peluruhan secara spontan yang terjadi pada inti atom tidak stabil menjadi inti atom yang stabil disebut dengan proses radioaktivitas. Menurut Susetyo (1988), radioaktivitas merupakan proses perubahan keadaan inti atom secara spontan yang disertai dengan radiasi berupa gelombang elektromagnetik. Berdasarkan penyusunnya, sinar radioaktif yang mengenai inti dibedakan menjadi tiga jenis, yaitu sinar Alfa, Beta, dan Gamma.

a. Sinar Alfa (α), memiliki sifat-sifat sebagai berikut :

1. Massa partikel alfa adalah $6,643 \times 10^{-27}$ kg atau setara dengan 4 kali massa proton, sedangkan muatan partikel alfa setara dengan 2 kali muatan proton yaitu $+3,2 \times 10^{-19}$ C
2. Partikel alfa dibelokkan ketika melewati medan magnet atau medan listrik, namun pembelokannya kurang tajam dibandingkan sinar beta, karena partikel alfa memiliki massa yang lebih besar
3. Memiliki daya tembus yang sangat kecil
4. Memiliki nomor atom yang sangat besar dengan kecepatan yang bervariasi antara $\frac{1}{100}$ sampai $\frac{1}{10}$ kecepatan cahaya
5. Memiliki daya ionisasi yang sangat besar yaitu ± 100 kali daya ionisasi partikel beta atau 10.000 kali daya ionisasi partikel gamma

b. Sinar Beta (β), memiliki sifat-sifat sebagai berikut :

1. Massa partikel beta adalah $9,1 \times 10^{-31}$ kg, sedangkan muatannya sebesar $+1,6 \times 10^{-19}$ C
2. Partikel beta dibelokkan ketika melewati medan magnet dan medan listrik, dengan defleksi yang besar karena partikel beta lebih ringan daripada partikel alfa
3. Memiliki daya tembus yang lebih besar daripada partikel alfa

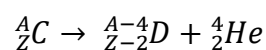
4. Memiliki kecepatan antara $\frac{1}{100}$ sampai $\frac{9}{100}$ kecepatan cahaya
 5. Memiliki daya ionisasi $\frac{1}{100}$ kali dari partikel alfa
- c. Sinar Gamma (γ), memiliki sifat-sifat sebagai berikut :
1. Sinar gamma termasuk dalam gelombang elektromagnetik seperti sinar tampak dan sinar-X, dengan panjang gelombang yang lebih pendek daripada sinar-X
 2. Partikel gamma tidak dibelokkan ketika melewati medan magnet dan medan listrik
 3. Memiliki daya tembus yang tinggi
 4. Memiliki kecepatan sebesar kecepatan cahaya
 5. Memiliki daya ionisasi yang sangat rendah dibandingkan dengan partikel alfa maupun partikel beta

2.3.1 Peluruhan Radioaktif

Peluruhan radioaktif terjadi pada unsur-unsur radioaktif. Terdapat 3 jenis peluruhan radioaktif, yaitu peluruhan alfa, peluruhan beta, dan peluruhan gamma. Adapun sifat-sifat ketiga jenis peluruhan tersebut adalah sebagai berikut :

a. Peluruhan Alfa

Peluruhan alfa terjadi apabila inti atom memancarkan partikel alfa (inti helium) yang terdiri dari 2 proton dan 2 neutron. Inti helium merupakan inti stabil yang memiliki nomor massa dan nomor atom yang kekal. Peluruhan alfa terjadi karena inti nuklida induk memiliki nomor massa yang besar (Wiyatmo, 2012). Melalui peluruhan alfa akan menghasilkan inti ringan berupa unsur baru dengan nomor atom (Z) yang mengalami penurunan sebanyak dua satuan dan nomor massanya (A) mengalami penurunan sebanyak empat satuan. Proses peluruhan alfa dapat dituliskan dalam suatu bentuk reaksi sebagai berikut :

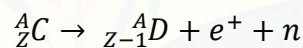


C dan D merupakan jenis inti yang berbeda, karena inti mula-mula akan berubah menjadi inti baru karena peluruhan alfa.

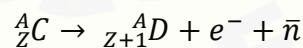
b. Peluruhan Beta

Peluruhan beta terjadi apabila inti atom memancarkan partikel beta yang bermuatan positif (β^+) disertai dengan neutrino (n) atau partikel beta yang bermuatan negatif (β^-) disertai dengan antineutrino (\bar{n}) (Gautreau dan Savin, 2006). Melalui peluruhan beta akan menyebabkan perbandingan jumlah proton dan neutron menjadi seimbang, sehingga inti atom akan tetap stabil. Proses peluruhan sinar beta menghasilkan suatu unsur dengan nomor massa yang tetap dan nomor atom yang berubah. Apabila suatu inti radioaktif memancarkan sinar beta, maka terdapat 2 kemungkinan proses peluruhan beta yang terjadi, yaitu :

1. Proses peluruhan β^+ melibatkan partikel beta bermuatan positif atau identik dengan positron (e^+), akan menyebabkan perubahan proton menjadi neutron di dalam suatu inti atom. Proses peluruhan β^+ dapat dituliskan dalam suatu bentuk reaksi sebagai berikut :



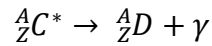
2. Proses peluruhan β^- melibatkan partikel beta bermuatan negatif atau identik dengan elektron (e^-), akan menyebabkan perubahan neutron menjadi proton di dalam suatu inti atom. Proses peluruhan β^- dapat dituliskan dalam suatu bentuk reaksi sebagai berikut :



c. Peluruhan Gamma

Peluruhan gamma dapat terjadi apabila inti atom yang berada dalam keadaan tereksitasi (keadaan inti yang tingkat energinya lebih tinggi dari keadaan dasarnya) ingin kembali ke keadaan dasar (*ground state*) yang lebih stabil. Inti yang berada dalam keadaan tereksitasi biasanya terjadi setelah peluruhan. Atom dikatakan tereksitasi apabila atom tersebut memancarkan sinar alfa ataupun sinar beta. Pemancaran sinar gamma menyertai pemancaran sinar alfa dan sinar beta. Melalui peluruhan gamma tidak menyebabkan

perubahan nomor massa ataupun nomor atom, tetapi hanya menyebabkan perubahan energi. Proses peluruhan gamma dapat dituliskan dalam suatu bentuk reaksi sebagai berikut :



Inti atom yang berada dalam keadaan tereksitasi disimbolkan dengan tanda star (*), dimana keadaan tersebut diperoleh melalui tumbukan dengan partikel lain.

2.3.2 Aktivitas Radioaktif

Aktivitas radioaktif disimbolkan dengan A atau biasa disebut dengan laju peluruhan merupakan banyaknya peluruhan yang terjadi tiap satuan waktu (Wiyatmo, 2012), sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$A = -\frac{dN}{dt} \quad (2.1)$$

Besarnya aktivitas radiasi A bergantung pada jumlah inti atom yang meluruh setiap saat (N) dan konstanta disintegrasi atau peluruhan (λ), sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$A = \lambda N \quad (2.2)$$

Berdasarkan persamaan (2.1) dan (2.2) didapatkan :

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt \quad (2.3)$$

dimana nilai konstanta peluruhannya (λ) berbeda untuk masing-masing inti bergantung pada proses peluruhan tertentu, dan tanda negatif menandakan bahwa jumlah inti radioaktif (N) yang semakin berkurang seiring bertambahnya waktu. Satuan pengukuran untuk laju peluruhan atau aktivitas adalah currie, dengan 1 Ci = $3,700 \times 10^{10}$ Bq (becquerel) dan 1 Bq = 1 disintegrasi per detik (Gautreau dan Savin, 2006).

Apabila mengintegalkan kedua ruas pada persamaan (2.3), maka akan didapatkan persamaan sebagai berikut :

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\lambda \int_{N_0}^N dt \quad (2.4)$$

$$\ln N - \ln N_0 = -\lambda t \quad (2.5)$$

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (2.6)$$

Persamaan (2.6) merupakan persamaan dari 17umer peluruhan radioaktif, dimana N menyatakan jumlah inti atom yang meluruh setiap saat dan bergantung pada jumlah inti mula-mula N_0 , konstanta peluruhan (disintegrasi) λ , dan selang waktu peluruhan t (Wiyatmo, 2012).

2.3.3 Waktu Paruh

Waktu paruh radioaktif ($t_{1/2}$) merupakan interval waktu yang dibutuhkan oleh nuklida induk agar jumlah inti di bagian awalnya tereduksi oleh faktor setengah (Gautreau dan Savin, 2006). Maksudnya, jumlah inti nuklida induk yang bersifat radioaktif akan bersisa separuh dari jumlah mula-mula. Berdasarkan persamaan (2.6), jumlah inti induk N yang meluruh selama waktu paruh $t_{1/2}$ sebesar $\frac{1}{2}N_0$, sehingga besarnya waktu paruh $t_{1/2}$ dari unsur radioaktif adalah :

$$\frac{\frac{1}{2}N_0}{N_0} = e^{-\lambda t_{1/2}} \quad (2.7)$$

$$\ln 1 - \ln 2 = -\lambda t_{1/2} \quad (2.8)$$

Apabila $\ln 1 = 0$, maka persamaan (2.8) menjadi :

$$-\ln 2 = -\lambda t_{1/2} \quad (2.9)$$

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad (2.10)$$

$$= \frac{0,693}{\lambda} \quad (2.11)$$

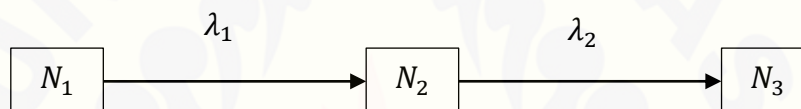
Melalui waktu paruh tersebut, dapat ditentukan besarnya konstanta peluruhan sebesar,

$$\lambda = \frac{0,693}{t_{1/2}} \quad (2.12)$$

Besarnya konstanta peluruhan radioaktif sangat bergantung pada waktu paruh $t_{1/2}$ yang dimiliki masing-masing inti atom.

2.4 Peluruhan Berantai

Inti atom yang bersifat radioaktif pada prinsipnya akan mengalami peluruhan secara terus-menerus disertai dengan pemancaran radiasi sampai mencapai suatu keadaan inti yang stabil, artinya inti tersebut tidak mampu lagi memancarkan radiasi. Inti atom radioaktif (N_1) dengan konstanta peluruhan λ_1 akan mengalami peluruhan menjadi inti atom baru (N_2) dengan konstanta peluruhan λ_2 , kemudian akan meluruh lagi menjadi inti atom yang stabil (N_3). Apabila dianalogikan dalam suatu generasi maka inti atom pertama disebut inti atom induk, generasi kedua disebut inti atom anak, dan generasi ketiga disebut inti atom cucu seperti yang terlihat dalam skema Gambar 2.6.



Gambar 2.6 Skema peluruhan berantai radioaktif

Sistem peluruhan berantai seperti pada Gambar 2.6, dapat diselesaikan menggunakan persamaan diferensial sebagai berikut :

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1 \quad (2.13)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \quad (2.14)$$

$$\frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2 - \lambda_3 N_3 \quad (2.15)$$

$$\frac{dN_n}{dt} = \lambda_{n-1} N_{n-1} - \lambda_n N_n \quad (2.16)$$

Persamaan (2.16) merupakan persamaan Bateman untuk peluruhan radioaktif berantai yang terjadi dalam waktu t , dimana N merupakan jumlah atom dari inti radioaktif dan $n = 1, 2, 3, \dots, n$ yang menyatakan banyaknya peluruhan (Cetnar, 2006).

Apabila menggunakan integral dan persamaan matematis pada persamaan (2.13), (2.14), dan (2.15), maka besarnya jumlah inti atom yang meluruh pada inti induk, inti anak, dan inti cucu adalah sebagai berikut :

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1$$

$$\int_{N_{(0)}}^{N_{(t)}} \frac{dN_1}{N_1} = -\lambda_1 \int_0^t dt \quad (2.17)$$

$$\ln N_1(t) - \ln N_1(0) = -\lambda_1 t \quad (2.18)$$

$$N_1(t) = N_1(0)e^{-\lambda_1 t} \quad (2.19)$$

Dimana $N_1(t)$ merupakan jumlah inti induk selama peluruhan, sedangkan jumlah inti anak adalah :

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \quad (2.20)$$

$$\frac{dN_2}{dt} + \lambda_2 N_2 = \lambda_1 N_1 \quad (2.21)$$

Kedua ruas dikali dengan $e^{\lambda_2 t}$, sehingga

$$\frac{dN_2}{dt} e^{\lambda_2 t} + \lambda_2 N_2 \cdot e^{\lambda_2 t} = \lambda_1 N_1 \cdot e^{\lambda_2 t} \quad (2.22)$$

$$\frac{d}{dt} (N_2 \cdot e^{\lambda_2 t}) = \lambda_1 N_1 \cdot e^{\lambda_2 t} \quad (2.23)$$

Substitusi persamaan (2.19) ke dalam persamaan (2.23)

$$\frac{d}{dt} (N_2 \cdot e^{\lambda_2 t}) = \lambda_1 N_1(0) e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \quad (2.24)$$

Mengintegrasikan kedua ruas pada persamaan (2.24)

$$\int_0^t \frac{d}{dt} (N_2 \cdot e^{\lambda_2 t}) = \int_0^t \lambda_1 N_1(0) e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \quad (2.25)$$

$$N_2 \cdot e^{\lambda_2 t} - N_2(0) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) \cdot (e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} - 1) \quad (2.26)$$

Kedua ruas dikali dengan $e^{-\lambda_2 t}$

$$N_2(t) \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot e^{-\lambda_2 t} - N_2(0) \cdot e^{-\lambda_2 t} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) \cdot (e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} - 1) e^{-\lambda_2 t} \quad (2.27)$$

Sehingga persamaan (2.27) menjadi

$$N_2(t) = N_2(0) \cdot e^{-\lambda_2 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) \cdot (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \quad (2.28)$$

Apabila N_2 menjadi unsur stabil, maka diasumsikan bahwa $N_2(0) = 0$

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) \cdot (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \quad (2.29)$$

Jumlah inti cucu selama peluruhan adalah :

$$\frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2 - \lambda_3 N_3 \quad (2.30)$$

$$\frac{dN_3}{dt} + \lambda_3 N_3 = \lambda_2 N_2 \quad (2.31)$$

Kedua ruas dikali dengan $e^{\lambda_3 t}$, sehingga

$$\frac{dN_3}{dt} e^{\lambda_3 t} + \lambda_3 N_3 \cdot e^{\lambda_3 t} = \lambda_2 N_2 \cdot e^{\lambda_3 t} \quad (2.32)$$

$$\frac{d}{dt} (N_3 \cdot e^{\lambda_3 t}) = \lambda_2 N_2 \cdot e^{\lambda_3 t} \quad (2.33)$$

Substitusi persamaan (2.29) ke dalam persamaan (2.33)

$$\frac{d}{dt} (N_3 \cdot e^{\lambda_3 t}) = \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) \cdot (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \cdot e^{\lambda_3 t} \quad (2.34)$$

Mengintegrasikan kedua ruas pada persamaan (2.34)

$$\int_0^t \frac{d}{dt} (N_3 \cdot e^{\lambda_3 t}) = \int_0^t \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) \cdot (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \cdot e^{\lambda_3 t} \quad (2.35)$$

$$N_3 \cdot e^{\lambda_3 t} - N_3(0) = \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) \cdot \left(\frac{e^{(\lambda_3 - \lambda_1)t}}{(\lambda_3 - \lambda_1)} - \frac{e^{(\lambda_3 - \lambda_2)t}}{(\lambda_3 - \lambda_2)} \right) +$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot N_1(0) \left(\frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \right) \quad (2.36)$$

Kedua ruas dikali dengan $e^{-\lambda_3 t}$

$$\begin{aligned} N_3(t) \cdot e^{\lambda_3 t} \cdot e^{-\lambda_3 t} - N_3(0) \cdot e^{-\lambda_3 t} \\ = \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) \cdot \left(\frac{e^{(\lambda_3 - \lambda_1)t}}{(\lambda_3 - \lambda_1)} - \frac{e^{(\lambda_3 - \lambda_2)t}}{(\lambda_3 - \lambda_2)} \right) e^{-\lambda_3 t} + \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot N_1(0) \left(\frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \right) e^{-\lambda_3 t} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Sehingga persamaan (2.37) menjadi

$$\begin{aligned} N_3(t) = N_3(0) \cdot e^{-\lambda_3 t} + \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) \cdot \left(\frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_3 - \lambda_1)} - \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_3 - \lambda_2)} \right) + \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot N_1(0) \left(\frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \right) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Apabila N_3 menjadi unsur stabil, maka diasumsikan bahwa $N_3(0) = 0$

$$\begin{aligned} N_3(t) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 N_1(0) \cdot \left(\frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)} + \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)} \right) + \\ \left(\frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \right) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Persamaan (2.19), (2.29), dan (2.39) merupakan persamaan untuk mencari jumlah atom inti induk, inti anak, dan inti cucu yang mengalami peluruhan secara eksponensial waktu. Tahapan tersebut akan berjalan secara terus-menerus mengikuti suatu urutan hingga menjadi inti atom yang stabil dan menjadi deret radioaktif.

2.5 Massa Inti Atom

Massa inti atom sangat bergantung pada jumlah elektron, proton, dan neutron dari atom itu sendiri. Atom merupakan partikel yang sangat kecil, sehingga tidak dapat dilakukan perhitungan terhadap massa dari sebuah atom

tunggal. Massa suatu atom dapat ditentukan dengan melakukan perbandingan dengan atom lain, sehingga dibutuhkan suatu unsur yang dapat dijadikan sebagai standar pembanding. Satuan pengukuran untuk massa atom adalah *amu* (*atomic mass unit*) atau sma (satuan massa atom). Satu amu didefinisikan sebagai $\frac{1}{12}$ kali massa 1 atom Karbon-12. Karbon-12 merupakan unsur yang memiliki isotop 6 proton dan 6 neutron. Unsur inilah yang dijadikan standar pembanding dalam perhitungan massa atom, karena termasuk dalam unsur yang sangat stabil dengan waktu paruh yang panjang. Melalui penetapan massa atom Karbon-12 sebesar 12 sma, maka dapat ditentukan massa atom lain.

Berdasarkan sistem SI (Satuan Internasional), mol didefinisikan sebagai kuantitas dalam menunjukkan jumlah atom, molekul, maupun ion dari suatu zat yang sama dengan jumlah atom dari 12 gram isotop Karbon-12. Satu mol Karbon terdiri dari $6,022 \times 10^{23}$ atom, jumlah ini disebut dengan bilangan Avogadro (N_A). Massa atom Karbon-12 merupakan massa molar atau massa (dalam satuan gram/kilogram) dari satu mol entitas zat (Chang, 2004). Melalui pendekatan konsep bilangan Avogadro dan massa molar, dapat ditemukan hubungan antara massa atom, mol atom, dan jumlah atom yang dapat dituliskan dalam persamaan sebagai berikut :

$$N = \frac{m}{Mr} \times N_A \quad (2.40)$$

$$m = Mr \times \frac{N}{N_A} \quad (2.41)$$

Keterangan :

m = massa atom (gram)

Mr = massa molar atom (gram)

N = jumlah atom (atom)

N_A = bilangan Avogadro ($6,0221367 \times 10^{23}$ atom)

Massa inti atom dalam peluruhan radioaktif dapat dihitung dengan menerapkan persamaan (2.6) yang merupakan persamaan dari hukum peluruhan radioaktif pada persamaan (2.40), sehingga didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$\frac{m}{Mr} \times N_A = \frac{m_0}{Mr} \times N_A e^{-\lambda t} \quad (2.42)$$

$$m = m_0 e^{-\lambda t} \quad (2.43)$$

dimana m adalah massa atom yang tersisa selama peluruhan secara eksponensial waktu, dan m_0 adalah massa mula-mula dari sebuah atom. Pengkonversian antara jumlah atom dengan massa atom juga berlaku pada persamaan peluruhan berantai.

2.6 Metode Aljabar Matriks

Matriks didefinisikan sebagai kumpulan angka, variabel, atau fungsi matematik yang disusun dalam bentuk persegi panjang maupun bujur sangkar. Aljabar merupakan salah satu bidang matematika yang mempelajari operasi matematika menggunakan simbol. Aljabar matriks adalah aljabar yang setiap simbolnya mewakili tidak hanya satu angka, tetapi suatu matriks (vektor) yang sering digunakan untuk memudahkan dalam penyelesaian sistem persamaan linier. Metode aljabar matriks dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial linier sebanyak n buah fungsi yang belum diketahui dengan koefisien konstan secara mudah (Ridwan, *et al.*, 2015).

Persamaan (2.1) merupakan persamaan diferensial linier homogen dalam peluruhan radioaktif, sedangkan persamaan Bateman (2.16) merupakan solusi penyelesaian peluruhan berantai yang dapat dituliskan menggunakan bentuk matriks sebagai berikut :

$$N' = AN \quad (2.44)$$

Persamaan (2.44) memiliki komponen yang dituliskan dalam bentuk matriks :

$$N' = \begin{bmatrix} N'_1 \\ N'_2 \\ N'_3 \\ \vdots \\ N'_n \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

$$N = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ \vdots \\ N_n \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

$$A = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & -\lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{n-1} & -\lambda_n \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Substitusi persamaan (2.45), (2.46), dan (2.47) ke dalam persamaan (2.44), sehingga :

$$\begin{bmatrix} N'_1 \\ N'_2 \\ N'_3 \\ \vdots \\ N'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & -\lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{n-1} & -\lambda_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ \vdots \\ N_n \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

$$\begin{bmatrix} N'_1 \\ N'_2 \\ N'_3 \\ \vdots \\ N'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 N_1 \\ \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \\ \lambda_2 N_2 - \lambda_3 N_3 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} N_{n-1} - \lambda_n N_n \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Persamaan (2.49) merupakan persamaan yang identik dengan persamaan Bateman (2.16). Jumlah inti atom N pada peluruhan radioaktif yang meluruh setiap saat bergantung pada jumlah inti atom mula-mula N_0 , waktu peluruhan t , dan konstanta peluruhan λ . Apabila N merupakan matriks yang menyatakan jumlah inti atom mula-mula dan A adalah matriks yang menyatakan konstanta peluruhan λ , maka solusi penyelesaian diferensial matriks dengan kondisi N_0 dapat dianalogikan menggunakan matriks eksponensial (Levy, 2018).

$$N(t) = e^{At}N_0 \quad (2.50)$$

Persamaan (2.50) merupakan persamaan matriks eksponensial yang sama dengan persamaan dari 25umer peluruhan radioaktif (2.6) dan didefinisikan dari ekspansi eksponensial Taylor.

$$e^{At} = 1 + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots \quad (2.51)$$

Persamaan peluruhan berantai merupakan sistem persamaan diferensial yang homogen tidak nol, sehingga membutuhkan solusi khusus dalam penyelesaiannya. Salah satu solusi yang dapat digunakan untuk mencari penyelesaian persamaan diferensial tersebut adalah dengan menggunakan nilai eigen.

2.6.1 Penggunaan Nilai Eigen Sebagai Solusi Penyelesaian Persamaan Diferensial Homogen pada Peluruhan Berantai

Misalkan A merupakan sebuah matriks bujur sangkar dengan ordo $n \times n$, dan X adalah 25umeri kolom dalam ruang Euklidian R^n yang dihubungkan dengan persamaan sebagai berikut :

$$AX = \lambda X \quad (2.52)$$

Dimana λ merupakan suatu skalar dan X adalah suatu matriks tidak nol. Skalar λ inilah yang disebut dengan nilai eigen dari matriks A dan 25umeri X disebut dengan vektor eigen.

Persamaan (2.52) dapat dianalogikan dengan

$$AV = VD \quad (2.53)$$

$$A \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \dots \\ \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \dots \\ \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

$$A \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 \lambda_1 & x_2 \lambda_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Dimana D adalah matriks diagonal negatif lambda yang merupakan matriks nilai eigen, dan V merupakan matriks vektor eigen dari A , maka dapat dikatakan bahwa VD akan bernilai sama dengan λX , dan A dapat dianalogikan melalui persamaan sebagai berikut :

$$A = VDV^{-1} \quad (2.56)$$

Substitusi persamaan (2.56) ke persamaan (2.51), sehingga menjadi :

$$e^{At} = e^{VDV^{-1}t} \quad (2.57)$$

$$e^{At} = 1 + VDV^{-1}t + \frac{(VDV^{-1}t)^2}{2!} + \dots \quad (2.58)$$

$$e^{At} = VV^{-1} + VDV^{-1}t + \frac{V(Dt)^2V^{-1}}{2!} + \dots \quad (2.59)$$

$$e^{At} = VV^{-1}(1 + Dt + \frac{Dt^2}{2!} + \dots) \quad (2.60)$$

$$e^{At} = Ve^{Dt}V^{-1} \quad (2.61)$$

Dengan V merupakan 26umeri eigen dan V^{-1} merupakan invers dari 26umeri V , sedangkan e^{Dt} merupakan matriks diagonal eksponensial 26umeric26 konstanta peluruhan yang secara matematis dapat dituliskan dalam matriks berikut :

$$e^{Dt} = \begin{bmatrix} e^{-\lambda_1 t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_2 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

Kemudian substitusi persamaan (2.61) ke persamaan (2.50), sehingga diperoleh :

$$N(t) = Ve^{Dt}V^{-1}N_0 \quad (2.63)$$

Persamaan (2.63) merupakan persamaan umum peluruhan radioaktif yang menggunakan solusi nilai eigen pada persamaan diferensial homogen peluruhan berantai yang serupa dengan persamaan Bateman pada peluruhan radioaktif (L. Moral dan A.F. Pacheco, 2003). Nilai vektor eigen V dan invers vektor eigen V^{-1} dapat diselesaikan menggunakan persamaan sebagai berikut :

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{2,1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ S_{3,1} & S_{3,2} & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n,1} & S_{n,2} & S_{n,3} & S_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Berdasarkan matriks V , didapatkan :

$$\det V = 1 \quad (2.65)$$

dan

$$\text{Kofaktor } V = \begin{bmatrix} 1 & -S_{2,1} & -S_{3,1} & \dots & -S_{n,1} \\ 0 & 1 & -S_{3,2} & \dots & -S_{n,2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -S_{n,3} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -S_{n,n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Dimana matriks *Kofaktor* V diperoleh dari hasil minor sebagai berikut :

$$M_{i,j} = -S_{j,i} \quad (2.67)$$

$$M_{(n-1),n} = -S_{n,n-1} \quad (2.68)$$

$$M_{n,n} = 1 \quad (2.69)$$

Ketika *baris*(i) > *kolom*(j), maka :

$$M_{i,j} = 0 \quad (2.70)$$

Sehingga matriks V^{-1} menjadi :

$$V^{-1} = \frac{1}{\det V} \text{Adj } V \quad (2.71)$$

$$= \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S_{2,1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -S_{3,1} & -S_{3,2} & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -S_{n,1} & -S_{n,2} & -S_{n,3} & -S_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

Dengan memisalkan $T_{x,y} = -S_{x,y}$, maka persamaan (2.72) menjadi :

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_{2,1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ T_{3,1} & T_{3,2} & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{n,1} & T_{n,2} & T_{n,3} & T_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

Dimana 28umeri $S_{x,y}$ dan $T_{x,y}$ dapat direpresentasikan dari :

$$F_{q,r}^p = \frac{\lambda_r}{\lambda_q - \lambda_p} \quad (2.74)$$

dengan masing-masing nilai $S_{x,y}$ dan $T_{x,y}$ adalah,

$$S_{x,y} = F_{x,x-1}^y F_{x-1,x-2}^y \dots F_{y+1,y}^y \quad (2.75)$$

$$T_{x,y} = F_{y,y}^x F_{y+1,y+1}^x \dots F_{x-1,x-1}^x \quad (2.76)$$

(L. Moral dan A.F. Pacheco, 2003).

Substitusi persamaan (2.62), (2.64) dan (2.73) ke dalam persamaan (2.63) yang dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} N_1' \\ N_2' \\ N_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ S_{2,1} & 1 & 0 \\ S_{3,1} & S_{3,2} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e^{-\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\lambda_3 t} \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ T_{2,1} & 1 & 0 \\ T_{3,1} & T_{3,2} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} N_1(0) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

dengan menggunakan persamaan (2.74), (2.75), dan (2.76), maka komponen $S_{x,y}$ didapatkan sebagai berikut :

$$S_{2,1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (2.78)$$

$$S_{3,1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \times \frac{\lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2} \quad (2.79)$$

$$S_{3,2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2} \quad (2.80)$$

dan komponen $T_{x,y}$ diperoleh sebagai berikut :

$$T_{2,1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad (2.81)$$

$$T_{3,1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_3} \times \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_3} \quad (2.82)$$

$$T_{3,2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_3} \quad (2.83)$$

Substitusi persamaan (2.78), (2.79), (2.80), (2.81), (2.82), dan (2.83) ke dalam persamaan (2.77), sehingga diperoleh :

$$N'_1 = e^{-\lambda_1 t} \times N_1(0) \quad (2.84)$$

$$N'_2 = (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \times \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} N_1(0) \quad (2.85)$$

$$N'_3 = \lambda_1 \times \lambda_2 \left(\frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)} + \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \right) \times N_1(0) \quad (2.86)$$

Persamaan (2.84), (2.85), dan (2.86) merupakan persamaan peluruhan radioaktif dari atom induk hingga menjadi atom cucu dan begitu seterusnya sampai menghasilkan atom yang stabil, dimana persamaan tersebut identik dengan persamaan (2.19), (2.29), dan (2.39).

BAB 3. METODELOGI PENELITIAN

3.1 Jenis, Tempat dan Waktu Penelitian

Penelitian ini termasuk dalam jenis penelitian non eksperimen. Penelitian ini dilaksanakan di Laboratorium Komputer Program Studi Pendidikan Fisika FKIP Universitas Jember pada semester ganjil tahun ajaran 2019/2020.

3.2 Definisi Operasional Variabel

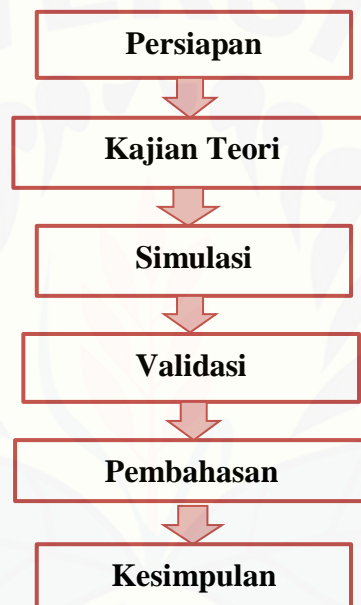
Definisi operasional variabel diperlukan agar peneliti dapat mencapai suatu hasil yang sesuai dengan hakikat variabel yang sudah didefinisikan konsepnya, sehingga tidak terjadi kesalahan pengertian dalam penelitian. Adapun variabel yang perlu didefinisikan yaitu peluruhan radioaktif, deret Thorium-232, dan metode aljabar matriks.

- a. Peluruhan radioaktif merupakan proses perubahan secara spontan yang terjadi pada inti atom tidak stabil sehingga menjadi inti atom yang stabil. Peluruhan radioaktif biasanya terjadi pada unsur-unsur yang memiliki nomor atom lebih dari 83 dengan komposisi jumlah proton dan neutron yang tidak seimbang dan tingkat energinya tidak berada dalam energi dasar. Terdapat 3 jenis peluruhan radioaktif, yaitu peluruhan alfa (α), peluruhan beta (β), dan peluruhan gamma (γ).
- b. Thorium-232 merupakan salah unsur radioaktif yang bernomor atom 90 dan bermassa 232,0381 dalam deret aktanida periode 7 pada tabel periodik unsur yang memiliki waktu paruh sekitar 1.39×10^{10} tahun. Thorium-232 merupakan inti atom tidak stabil yang kemudian meluruh menjadi inti atom stabil yaitu Pb-208 dan dikenal dengan deret radioaktif Thorium-232. Setiap nuklida dalam deret radioaktif memiliki waktu paruh masing-masing yang dapat menunjukkan besarnya jumlah atom dan massa setiap nuklida. Peluruhan berantai pada Thorium-232 terjadi sebanyak 10 kali peluruhan utama yang meliputi 6 peluruhan alfa (α) dan 4 peluruhan beta (β).
- c. Metode aljabar matriks merupakan metode yang digunakan sebagai solusi penyelesaian sistem persamaan linier yang dapat dikembangkan ke sistem

persamaan diferensial linier dengan n buah fungsi yang belum diketahui dengan koefisien konstan secara mudah. Penyelesaian peluruhan radioaktif menggunakan metode aljabar matriks dapat diselesaikan menggunakan persamaan Bateman sebagai solusi sistem persamaan diferensial.

3.3 Langkah Penelitian

Penelitian ini termasuk dalam penelitian simulasi dengan langkah penelitian yang dijelaskan melalui Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Langkah-langkah Penelitian

Langkah-langkah penelitian ini dapat diuraikan sebagai berikut :

a. Persiapan

Langkah pertama yang dilakukan adalah mempersiapkan segala alat dan bahan yang dapat dijadikan sebagai informasi melalui literatur buku serta jurnal untuk menambah pengetahuan dan pemahaman tentang isi dari penelitian ini.

b. Kajian teori

Kajian teori dilakukan dengan menerapkan berbagai teori yang sudah ada dan ditemukan tentang peluruhan radioaktif menggunakan metode aljabar matriks terhadap peluruhan berantai deret Thorium-232.

c. Simulasi

Simulasi dilakukan melalui perhitungan untuk memperoleh data massa sisa peluruhan dan jumlah atom sisa peluruhan nuklida-nuklida pada deret Thorium-232 dengan data sebagai berikut :

- 1) Massa awal yang digunakan 7 gram Thorium-232 yang memiliki jumlah atom sebesar $1,817025519 \times 10^{22}$ atom (Ridwan, *et al.*, 2015).
- 2) Waktu peluruhan deret Thorium-232 sama dengan umur suatu bahan yang mengandung unsur radioaktif tersebut yaitu selama $1,34 \times 10^{10}$ tahun (Hikmayanti, 2010).

Data tersebut disimulasikan menggunakan metode aljabar matriks berbantuan matlab R2013a dengan tahapan sebagai berikut :

1. Persamaan peluruhan dengan metode aljabar matriks

$$N(t) = Ve^{Dt}V^{-1}N_0$$

Keterangan :

$N(t)$ = jumlah atom sisa peluruhan selama waktu t

V = matriks vektor eigen konstanta peluruhan

e^{Dt} = matriks diagonal eksponensial negatif konstanta peluruhan

V^{-1} = matriks invers vektor eigen konstanta peluruhan

N_0 = jumlah atom mula-mula

2. Persamaan peluruhan radioaktif dengan metode aljabar matriks menggunakan bahasa pemrograman matlab

- a. Jumlah atom yang tersisa pada deret Thorium-232 setelah meluruh selama waktu t

$$A = -\text{diag}(\text{lambda}) + \text{diag}(\text{lambda}(1:(\text{end}-1)), -1);$$

$$[V,D] = \text{eig}(A);$$

$$Nt = V * \text{diag}(\text{inv}(V) * N0) * \text{exp}(D * \text{repmat}(t, \text{length}(N0), 1));$$

- b. Massa sisa peluruhan radioaktif deret Thorium-232

$$M = \text{diag}(Mr) * (1/NA) * Nt$$

3. Melakukan kajian dengan sumber data dengan nilai toleransi 10^{-4}

4. Hasil dari perhitungan yaitu jumlah atom sisa peluruhan dan massa sisa atom selama peluruhan

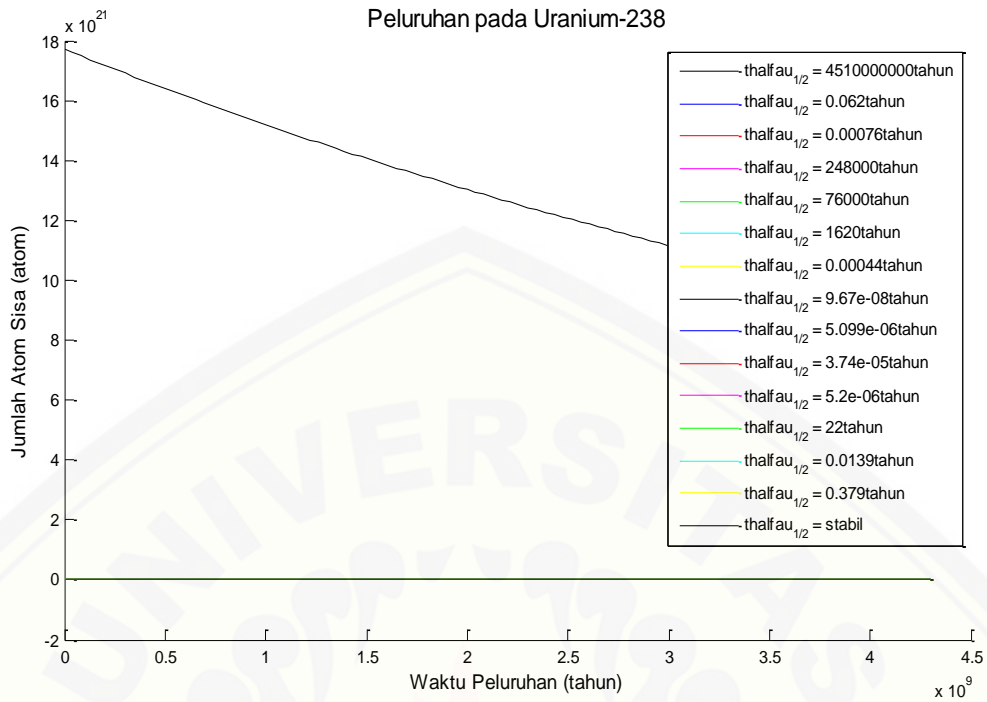
d. Validasi

Validasi dilakukan dengan menggunakan data dan grafik dari penelitian sebelumnya yang relevan dengan pokok bahasan peluruhan radioaktif berantai dengan metode aljabar matriks. Data dan grafik yang digunakan untuk memvalidasi hasil penelitian ini berasal dari penelitian Ridwan *et al* (2015) yang disajikan dalam Tabel 3.1, Gambar 3.2, dan Gambar 3.3 berikut:

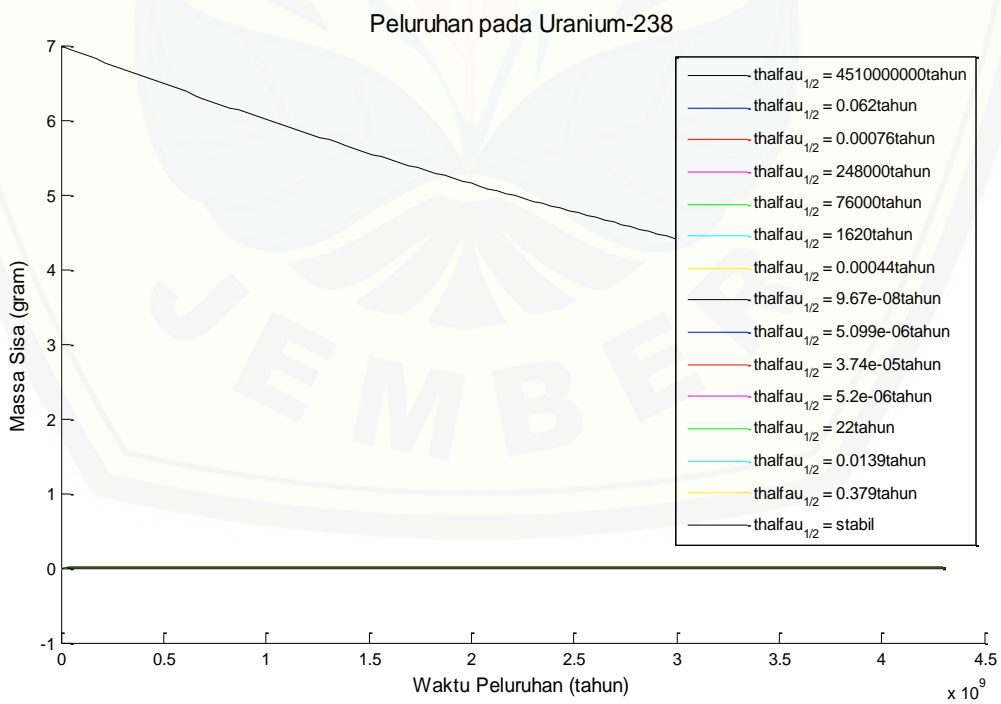
Tabel 3.1 Validasi jumlah atom dan massa sisa peluruhan Uranium-238

No.	Nuklida	Waktu Paruh (tahun)	N_t (atom)	m_t (gram)
1.	Uranium-238	$4,51 \times 10^9$	9,12e+21	3,62
2.	Thorium-234	$6,24 \times 10^{-2}$	1,26e+11	4,89e-11
3.	Proaktinum-234	$7,60 \times 10^{-4}$	1,54e+9	5,98e-13
4.	Uranium-234	$2,48 \times 10^5$	5,03e+17	1,95e-5
5.	Thorium-230	$7,60 \times 10^4$	1,54e+17	5,88e-5
6.	Radium-226	$1,62 \times 10^3$	3,28e+15	1,23e-6
7.	Radon-222	$4,36 \times 10^{-4}$	8,92e+8	3,29e-13
8.	Polonium-218	$9,67 \times 10^{-8}$	1,96e+5	7,09e-17
9.	Timbal-214	$5,09 \times 10^{-6}$	1,03e+7	3,68e-15
10.	Bismut-214	$3,75 \times 10^{-5}$	7,58e+7	2,69e-14
11.	Polonium-214	$5,20 \times 10^{-6}$	1,05e+7	3,75e-15
12.	Timbal-210	$2,2 \times 10^1$	4,5e+13	1,6e-8
13.	Bismut-210	$1,39 \times 10^{-2}$	2,82e+10	9,83e-12
14.	Polonium-210	$3,79 \times 10^{-1}$	7,69e+11	2,68e-10
15.	Timbal-206	Stabil	1,41e+12	4,81e-10

(Ridwan, *et al.*, 2015: 179).



Gambar 3.2 Grafik Hubungan Jumlah Atom terhadap Waktu Peluruhan pada Uranium-238 (Ridwan, *et al.*, 2015: 179)



Gambar 3.3 Grafik Hubungan Massa Atom terhadap Waktu Peluruhan pada Uranium-238 (Ridwan, *et al.*, 2015: 179)

e. Pembahasan

Pembahasan dilakukan secara runtun tentang hasil analisa peluruhan deret radioaktif Thorium-232.

f. Kesimpulan

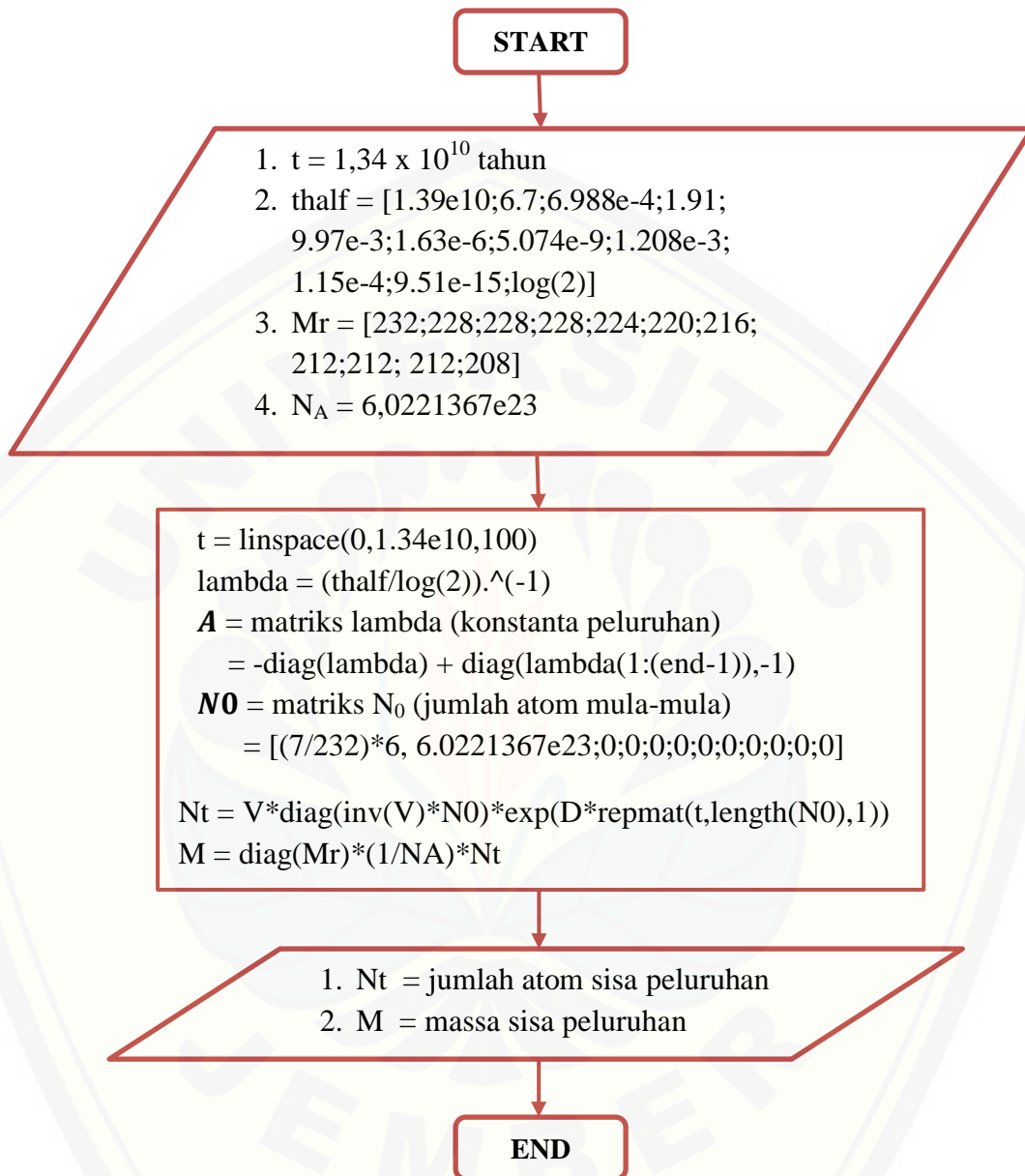
Hasil dari analisa dan pembahasan dijadikan bahan untuk membuat suatu kesimpulan yang dapat menjawab rumusan masalah dalam penelitian.

3.4 Alat Penelitian

Alat penelitian merupakan alat yang dibutuhkan selama penelitian berlangsung, yang meliputi :

- a. Komputer dengan spesifikasi *Personal Computer* (PC)
Intel(R) Celeron(R) 1.10 GHz, O.S Windows 10, Ram 2 GB.
- b. Bahasa pemrograman komputer MATLAB R2013a versi 6.1
 1. Fungsi matriks A untuk menampilkan diagonal matriks lambda ($n \times n$)
 2. Fungsi matriks N_t untuk menampilkan jumlah atom sisa yang terdapat pada deret Thorium-232
 3. Fungsi matriks M untuk menampilkan massa sisa yang terdapat pada deret Thorium-232
 4. Metode aljabar matriks digunakan untuk mencari jumlah inti atom yang meluruh selama waktu t , yang kemudian dapat dikonversi menjadi massa sisa atom selama peluruhan

Berikut *flowchart* simulasi numerik peluruhan radioaktif unsur Thorium-232



Gambar 3.4 Diagram alir simulasi numerik peluruhan radioaktif unsur Thorium-232

3.5 Teknik Penyajian Data

Teknik penyajian data menjelaskan tentang data hasil simulasi dan data hasil visualisasi gambar.

3.5.1 Data Pengamatan Hasil Simulasi

Data hasil simulasi diperoleh melalui hasil perhitungan setelah peluruhan selama waktu t . Data hasil penelitian ini disajikan dalam Tabel 3.2.

Tabel 3.2 Pengamatan peluruhan inti zat radioaktif Thorium-232

No.	Nuklida	Waktu Paruh	N_t (atom)	M (gram)
1.	Thorium-232	$1,39 \times 10^{10}$ tahun		
2.	Radium-228	6,7 tahun		
3.	Actinium-228	6,13 jam		
4.	Thorium-228	1,91 tahun		
5.	Radium-224	3,64 hari		
6.	Radon-220	51,5 detik		
7.	Polonium-216	0,16 detik		
8.	Timbal-212	10,6 jam		
9.	Bismut-212	60,5 menit		
10.	Polonium-212	3×10^{-7} detik		
11.	Timbal-208	Stabil		

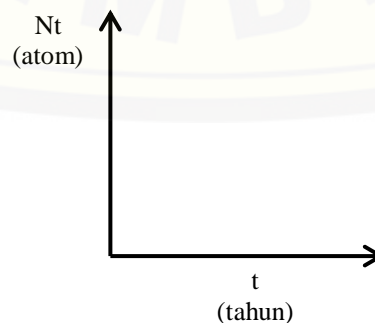
Keterangan :

N_t = jumlah atom sisa peluruhan (atom)

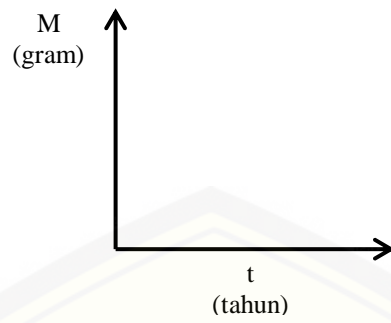
M = massa sisa peluruhan (gram)

3.5.2 Data Hasil Visualisasi Gambar

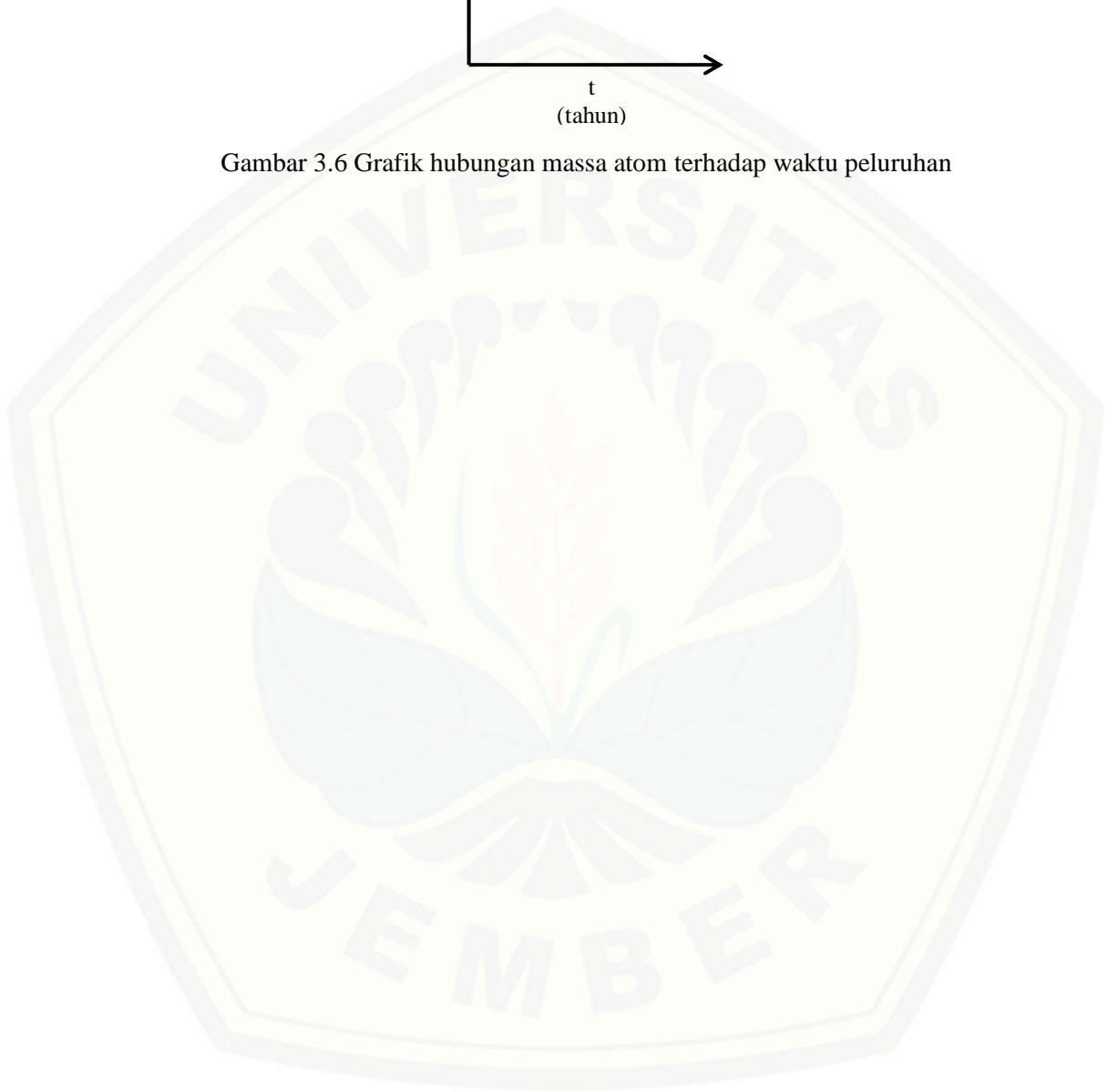
Data hasil visualisasi gambar digunakan untuk melihat hubungan antar variabel dalam penelitian. Grafik hubungan antar variabel penelitian disajikan dalam Gambar 3.5 dan Gambar 3.6 berikut:



Gambar 3.5 Grafik hubungan jumlah atom terhadap waktu peluruhan



Gambar 3.6 Grafik hubungan massa atom terhadap waktu peluruhan



BAB 5. PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan data yang diperoleh pada hasil dan pembahasan yang telah diuraikan pada bab sebelumnya, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut :

- a. Besarnya jumlah atom sisa peluruhan pada deret Thorium-232 yang berlangsung selama $1,34 \times 10^{10}$ tahun menunjukkan bahwa nuklida induk memiliki jumlah atom sisa paling banyak dibandingkan nuklida turunannya yaitu sebesar $9,34 \times 10^{21}$ atom. Jumlah atom sisa peluruhan dipengaruhi oleh waktu paruh setiap nuklida dan lamanya peluruhan. Semakin lama waktu paruh yang dimiliki nuklida maka semakin banyak jumlah atom yang tersisa selama peluruhan, dan sebaliknya. Sedangkan apabila semakin lama waktu peluruhan yang terjadi pada nuklida, maka akan semakin banyak jumlah atom yang meluruh sehingga atom yang tersisa selama peluruhan semakin sedikit. Banyaknya jumlah atom setiap nuklida dapat menunjukkan besarnya massa dalam nuklida tersebut.
- b. Besarnya massa sisa peluruhan pada deret Thorium-232 yang berlangsung selama $1,34 \times 10^{10}$ tahun menunjukkan bahwa nuklida induk memiliki massa sisa paling banyak yaitu sebesar 3,596 gram, sedangkan nuklida turunannya memiliki massa sisa yang sangat sedikit atau hampir mendekati nol. Nuklida yang memiliki waktu paruh lebih singkat daripada waktu peluruhan ($t_{1/2} \ll t_{\text{peluruhan}}$) maka nuklida tersebut akan lebih cepat habis atau mendekati nol. Massa sisa peluruhan dipengaruhi oleh waktu paruh yang dimiliki setiap nuklida dan lamanya peluruhan. Semakin lama waktu paruh nuklida maka semakin banyak massa yang tersisa selama peluruhan, dan sebaliknya. Sedangkan apabila semakin lama waktu peluruhan yang terjadi pada nuklida maka akan semakin banyak yang meluruh sehingga massa yang tersisa selama peluruhan semakin sedikit.

5.2 Saran

Hasil penelitian ini diharapkan dapat menjadi tolak ukur untuk penelitian yang serupa. Melalui hasil yang didapatkan pada penelitian ini diharapkan dapat menjadi sumber informasi mengenai bahan bakar alternatif nuklir yang tersisa di alam semesta. Diharapkan penelitian ini juga mendapatkan respon bagi penelitian selanjutnya guna melanjutkan dengan metode-metode lain maupun variabel yang berbeda.



DAFTAR PUSTAKA

- Cetnar, J. 2006. General solution of bateman equations for nuclear transmutations. *Annals of Nuclear Energi*. 33: 640-645.
- Chang, R. 2004. *Kimia Dasar: Konsep-konsep Inti Jilid 1 Edisi 3*. Jakarta: Erlangga.
- Dewita, E. 2012. Analisis potensi thorium sebagai bahan bakar nuklir alternatif PLTN. *Jurnal Pengembangan Energi Nuklir*. 14(1): 45-56
- Dwijananti, P., D. Yulianti., dan A. Mashudi. 2009. Modifikasi kamera obscura sebagai detektor radiasi pengion untuk alat pembelajaran fisika di SMA. *Jurnal Pendidikan Fisika Indonesia*. 5: 124-128.
- Gautreau, R. dan W. Savin. 2006. *Schaum's Outline of Modern Physics*. New Jersey: Published John Wiley & Sons.
- Hamawi, J. N. 1971. A useful recurrence formula for the equations of radioactive decay. *Nuclear Technology*. 11(1): 84-88.
- Jumini, S. 2018. *Fisika Inti*. Mojotengah: CV. Mangku Bumi Media.
- Levy, E. 2018. A matrix exponential approach to radioactive decay equations. *American Journal of Physics*. 86(12): 909-913.
- Moral, L. dan A. F. Pacheco. 2003. Algebraic approach to the radioactive decay equations. *American Association of Physics Teachers*. Zaragoza, Spain: Faculty of Sciences, University of Zaragoza. 71(7): 684-686.
- Nelson, C. R. B., K. Buessler, dan M. D. M. A. Nuria. 2018. Radioactivity in the marine environment: understanding the basics of radioactivity. *Limnology and Oceanography e-Lectures*. 8(1): 1-58.
- Nugraheni, A., P. Dwijananti, dan Sayono. 2012. Penentuan aktivitas unsur radioaktif thorium yang terkandung dalam prototipe sumber radiasi kaos lampu petromaks. *Jurnal MIPA*. 35(1): 31-37.

- Rahmad, C., D. Sandhya, dan Y. Watequlis S. 2018. *Metode Numerik*. Malang: UPT Percetakan dan Penerbitan Polinema.
- Ridwan, J., B. Supriyadi, dan R. D. Handayani. 2015. Simulasi numerik massa peluruhan inti zat radioaktif unsur uranium-238 dengan metode aljabar matriks. *Jurnal Pembelajaran Fisika*. 4(2): 176-180.
- Rosidi, dan Sukirno. 2004. Analisis uranium dan thorium dalam sedimen laut dan sungai di sekitar calon tapak PLTN Lemahabang. *Ganendra*. VII(1): 9-14.
- Sofyan, H. dan M. Akhadi. 2004. Radionuklida primordial untuk penanggalan geologi dan arkeologi. *Buletin Alara*. 6(2): 85-96.
- Suhender, D. 2016. Menentukan kestabilan nuklida-nuklida berdasarkan massa inti per nukleon. *Chimica et Natura Acta*. 4(2): 60-71.
- Suratman. 1997. *Pengukuran Radioaktivitas Beta*. Pusat Penelitian Nuklir BATAN: Yogyakarta.
- Susetyo, W. 1988. *Spektrometri Gamma dan Penerapannya dalam Analisis Pengaktifan Neutron*. Gadjah Mada University Press: Yogyakarta.
- Wiyatmo, Y. 2012. *Fisika Nuklir dalam Telaah Semi Klasik dan Kuantum*. Yogyakarta: Pustaka Pelajar.

LAMPIRAN A. MATRIK PENELITIAN

MATRIK

Judul	Rumusan Masalah	Variabel	Sumber Data	Teknik Pengambilan Data	Analisis Data	Alur Penelitian
Simulasi Numerik Massa Pada Peluruhan Inti Zat Radioaktif Deret Thorium-232 dengan Metode Aljabar Matriks	<p>1. Berapakah massa sisa peluruhan inti zat radioaktif pada deret Thorium-232 secara numerik?</p> <p>2. Berapakah jumlah atom sisa peluruhan inti zat radioaktif pada deret</p>	<p>1. Variabel kontrol : Inti zat radioaktif pada deret Thorium-232, massa awal yang digunakan, jumlah atom mula-mula unsur, dan waktu peluruhan</p> <p>2. Variabel bebas</p>	<p>1. Waktu paruh setiap nuklida</p> <p>2. Nomor massa setiap nuklida</p> <p>3. Konstanta peluruhan setiap nuklida</p>	<p>1. Menghitung massa sisa atom selama peluruhan dan jumlah atom sisa peluruhan deret Thorium-232 melalui simulasi numerik menggunakan bahasa</p>	<p>Data yang diperoleh melalui tabel akan dianalisis sesuai dengan teori, serta akan dilakukan pembahasan secara deskriptif. Analisis juga dilakukan terhadap hubungan antar</p>	<p>1. Persiapan</p> <p>2. Kajian teori</p> <p>3. Simulasi</p> <p>4. Validasi</p> <p>5. Pembahasan</p> <p>6. Kesimpulan</p>

	Thorium-232?	: waktu paruh yang dimiliki deret Thorium-232 sampai menjadi nuklida stabil 3. Variabel terikat : Massa sisa terhadap waktu yang telah ditentukan, jumlah atom sisa peluruhan		pemrograman matlab	variabel dalam penelitian yang dinyatakan dalam bentuk grafik.	
--	--------------	--	--	--------------------	--	--

LAMPIRAN B**PERHITUNGAN MANUAL**

Lampiran perhitungan manual ini terbagi dalam beberapa langkah yaitu menuliskan matriks keseluruhan (Langkah 1), menguraikan masing-masing komponen dalam matriks (Langkah 2), menghasilkan persamaan N' (Langkah 3), memasukkan hasil akhir dari persamaan N' ke dalam persamaan m (Langkah 4).

Langkah 1

$$\begin{bmatrix} N'_1 \\ N'_2 \\ N'_3 \\ N'_4 \\ N'_5 \\ N'_6 \\ N'_7 \\ N'_8 \\ N'_9 \\ N'_{10} \\ N'_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{2,1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{3,1} & S_{3,2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{4,1} & S_{4,2} & S_{4,3} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{5,1} & S_{5,2} & S_{5,3} & S_{5,4} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{6,1} & S_{6,2} & S_{6,3} & S_{6,4} & S_{6,5} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{7,1} & S_{7,2} & S_{7,3} & S_{7,4} & S_{7,5} & S_{7,6} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{8,1} & S_{8,2} & S_{8,3} & S_{8,4} & S_{8,5} & S_{8,6} & S_{8,7} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ S_{9,1} & S_{9,2} & S_{9,3} & S_{9,4} & S_{9,5} & S_{9,6} & S_{9,7} & S_{9,8} & 1 & 0 & 0 \\ S_{10,1} & S_{10,2} & S_{10,3} & S_{10,4} & S_{10,5} & S_{10,6} & S_{10,7} & S_{10,8} & S_{10,9} & 1 & 0 \\ S_{11,1} & S_{11,2} & S_{11,3} & S_{11,4} & S_{11,5} & S_{11,6} & S_{11,7} & S_{11,8} & S_{11,9} & S_{11,10} & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} e^{-\lambda_1 t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_2 t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\lambda_3 t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda_4 t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda_5 t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda_6 t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda_7 t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda_8 t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda_9 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda_{10} t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda_{11} t} \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_{2,1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_{3,1} & T_{3,2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_{4,1} & T_{4,2} & T_{4,3} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_{5,1} & T_{5,2} & T_{5,3} & T_{5,4} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_{6,1} & T_{6,2} & T_{6,3} & T_{6,4} & T_{6,5} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_{7,1} & T_{7,2} & T_{7,3} & T_{7,4} & T_{7,5} & T_{7,6} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_{8,1} & T_{8,2} & T_{8,3} & T_{8,4} & T_{8,5} & T_{8,6} & T_{8,7} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ T_{9,1} & T_{9,2} & T_{9,3} & T_{9,4} & T_{9,5} & T_{9,6} & T_{9,7} & T_{9,8} & 1 & 0 & 0 \\ T_{10,1} & T_{10,2} & T_{10,3} & T_{10,4} & T_{10,5} & T_{10,6} & T_{10,7} & T_{10,8} & T_{10,9} & 1 & 0 \\ T_{11,1} & T_{11,2} & T_{11,3} & T_{11,4} & T_{11,5} & T_{11,6} & T_{11,7} & T_{11,8} & T_{11,9} & T_{11,10} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} N_1(0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Langkah 2

Diketahui bahwa :

$$F_{q,r}^p = \frac{\lambda_r}{\lambda_q - \lambda_r}$$

$$S_{x,y} = F_{x,x-1}^y F_{x-1,x-2}^y \cdots F_{y+1,y}^y$$

$$T_{x,y} = F_{y,y}^x F_{y+1,y+1}^x \cdots F_{x-1,x-1}^x$$

- Komponen $S_{x,y}$ dapat diuraikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} S_{2,1} &= F_{2,1}^1 \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{3,1} &= F_{3,2}^1 F_{2,1}^1 \\ &= \frac{\lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_1} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{3,2} &= F_{3,2}^2 \\ &= \frac{\lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{4,1} &= F_{4,3}^1 F_{3,2}^1 F_{2,1}^1 \\ &= \frac{\lambda_3}{\lambda_4 - \lambda_1} \frac{\lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_1} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{4,2} &= F_{4,3}^2 F_{3,2}^2 \\ &= \frac{\lambda_3}{\lambda_4 - \lambda_2} \frac{\lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2} \end{aligned}$$

$$S_{4,3} = F_{4,3}^3$$

$$= \frac{\lambda_3}{\lambda_4 - \lambda_3}$$

$$S_{5,1} = F_{5,4}^1 F_{4,3}^1 F_{3,2}^1 F_{2,1}^1$$

$$= \frac{\lambda_4}{\lambda_5 - \lambda_1} \frac{\lambda_3}{\lambda_4 - \lambda_1} \frac{\lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_1} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$$S_{5,2} = F_{5,4}^2 F_{4,3}^2 F_{3,2}^2$$

$$= \frac{\lambda_4}{\lambda_5 - \lambda_2} \frac{\lambda_3}{\lambda_4 - \lambda_2} \frac{\lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2}$$

$$S_{5,3} = F_{5,4}^3 F_{4,3}^3$$

$$= \frac{\lambda_4}{\lambda_5 - \lambda_3} \frac{\lambda_3}{\lambda_4 - \lambda_3}$$

$$S_{5,4} = F_{5,4}^4$$

$$= \frac{\lambda_4}{\lambda_5 - \lambda_4}$$

$$S_{6,1} = F_{6,5}^1 F_{5,4}^1 F_{4,3}^1 F_{3,2}^1 F_{2,1}^1$$

$$= \frac{\lambda_5}{\lambda_6 - \lambda_1} \frac{\lambda_4}{\lambda_5 - \lambda_1} \frac{\lambda_3}{\lambda_4 - \lambda_1} \frac{\lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_1} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$$S_{6,2} = F_{6,5}^2 F_{5,4}^2 F_{4,3}^2 F_{3,2}^2$$

$$= \frac{\lambda_5}{\lambda_6 - \lambda_2} \frac{\lambda_4}{\lambda_5 - \lambda_2} \frac{\lambda_3}{\lambda_4 - \lambda_2} \frac{\lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2}$$

$$S_{6,3} = F_{6,5}^3 F_{5,4}^3 F_{4,3}^3$$

$$= \frac{\lambda_5}{\lambda_6 - \lambda_3} \frac{\lambda_4}{\lambda_5 - \lambda_3} \frac{\lambda_3}{\lambda_4 - \lambda_3}$$

$$\begin{aligned}
 S_{6,4} &= F_{6,5}^4 F_{5,4}^4 \\
 &= \frac{\lambda_5}{\lambda_6 - \lambda_4} \frac{\lambda_4}{\lambda_5 - \lambda_4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{6,5} &= F_{6,5}^5 \\
 &= \frac{\lambda_5}{\lambda_6 - \lambda_5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{7,1} &= F_{7,6}^1 F_{6,5}^1 F_{5,4}^1 F_{4,3}^1 F_{3,2}^1 F_{2,1}^1 \\
 &= \frac{\lambda_6}{\lambda_7 - \lambda_1} \frac{\lambda_5}{\lambda_6 - \lambda_1} \frac{\lambda_4}{\lambda_5 - \lambda_1} \frac{\lambda_3}{\lambda_4 - \lambda_1} \frac{\lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_1} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{7,2} &= F_{7,6}^2 F_{6,5}^2 F_{5,4}^2 F_{4,3}^2 F_{3,2}^2 \\
 &= \frac{\lambda_6}{\lambda_7 - \lambda_2} \frac{\lambda_5}{\lambda_6 - \lambda_2} \frac{\lambda_4}{\lambda_5 - \lambda_2} \frac{\lambda_3}{\lambda_4 - \lambda_2} \frac{\lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{7,3} &= F_{7,6}^3 F_{6,5}^3 F_{5,4}^3 F_{4,3}^3 \\
 &= \frac{\lambda_6}{\lambda_7 - \lambda_3} \frac{\lambda_5}{\lambda_6 - \lambda_3} \frac{\lambda_4}{\lambda_5 - \lambda_3} \frac{\lambda_3}{\lambda_4 - \lambda_3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{7,4} &= F_{7,6}^4 F_{6,5}^4 F_{5,4}^4 \\
 &= \frac{\lambda_6}{\lambda_7 - \lambda_4} \frac{\lambda_5}{\lambda_6 - \lambda_4} \frac{\lambda_4}{\lambda_5 - \lambda_4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{7,5} &= F_{7,6}^5 F_{6,5}^5 \\
 &= \frac{\lambda_6}{\lambda_7 - \lambda_5} \frac{\lambda_5}{\lambda_6 - \lambda_5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{7,6} &= F_{7,6}^6 \\
 &= \frac{\lambda_6}{\lambda_7 - \lambda_6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{8,1} &= F_{8,7}^1 F_{7,6}^1 F_{6,5}^1 F_{5,4}^1 F_{4,3}^1 F_{3,2}^1 F_{2,1}^1 \\
 &= \frac{\lambda_7}{\lambda_8 - \lambda_1} \frac{\lambda_6}{\lambda_7 - \lambda_1} \frac{\lambda_5}{\lambda_6 - \lambda_1} \frac{\lambda_4}{\lambda_5 - \lambda_1} \frac{\lambda_3}{\lambda_4 - \lambda_1} \frac{\lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_1} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{8,2} &= F_{8,7}^2 F_{7,6}^2 F_{6,5}^2 F_{5,4}^2 F_{4,3}^2 F_{3,2}^2 \\
 &= \frac{\lambda_7}{\lambda_8 - \lambda_2} \frac{\lambda_6}{\lambda_7 - \lambda_2} \frac{\lambda_5}{\lambda_6 - \lambda_2} \frac{\lambda_4}{\lambda_5 - \lambda_2} \frac{\lambda_3}{\lambda_4 - \lambda_2} \frac{\lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{8,3} &= F_{8,7}^3 F_{7,6}^3 F_{6,5}^3 F_{5,4}^3 F_{4,3}^3 \\
 &= \frac{\lambda_7}{\lambda_8 - \lambda_3} \frac{\lambda_6}{\lambda_7 - \lambda_3} \frac{\lambda_5}{\lambda_6 - \lambda_3} \frac{\lambda_4}{\lambda_5 - \lambda_3} \frac{\lambda_3}{\lambda_4 - \lambda_3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{8,4} &= F_{8,7}^4 F_{7,6}^4 F_{6,5}^4 F_{5,4}^4 \\
 &= \frac{\lambda_7}{\lambda_8 - \lambda_4} \frac{\lambda_6}{\lambda_7 - \lambda_4} \frac{\lambda_5}{\lambda_6 - \lambda_4} \frac{\lambda_4}{\lambda_5 - \lambda_4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{8,5} &= F_{8,7}^5 F_{7,6}^5 F_{6,5}^5 \\
 &= \frac{\lambda_7}{\lambda_8 - \lambda_5} \frac{\lambda_6}{\lambda_7 - \lambda_5} \frac{\lambda_5}{\lambda_6 - \lambda_5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{8,6} &= F_{8,7}^6 F_{7,6}^6 \\
 &= \frac{\lambda_7}{\lambda_8 - \lambda_6} \frac{\lambda_6}{\lambda_7 - \lambda_6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{8,7} &= F_{8,7}^7 \\
 &= \frac{\lambda_7}{\lambda_8 - \lambda_7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{9,1} &= F_{9,8}^1 F_{8,7}^1 F_{7,6}^1 F_{6,5}^1 F_{5,4}^1 F_{4,3}^1 F_{3,2}^1 F_{2,1}^1 \\
 &= \frac{\lambda_8}{\lambda_9 - \lambda_1} \frac{\lambda_7}{\lambda_8 - \lambda_1} \frac{\lambda_6}{\lambda_7 - \lambda_1} \frac{\lambda_5}{\lambda_6 - \lambda_1} \frac{\lambda_4}{\lambda_5 - \lambda_1} \frac{\lambda_3}{\lambda_4 - \lambda_1} \frac{\lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_1} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{9,2} &= F_{9,8}^2 F_{8,7}^2 F_{7,6}^2 F_{6,5}^2 F_{5,4}^2 F_{4,3}^2 F_{3,2}^2 \\
 &= \frac{\lambda_8}{\lambda_9 - \lambda_2} \frac{\lambda_7}{\lambda_8 - \lambda_2} \frac{\lambda_6}{\lambda_7 - \lambda_2} \frac{\lambda_5}{\lambda_6 - \lambda_2} \frac{\lambda_4}{\lambda_5 - \lambda_2} \frac{\lambda_3}{\lambda_4 - \lambda_2} \frac{\lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{9,3} &= F_{9,8}^3 F_{8,7}^3 F_{7,6}^3 F_{6,5}^3 F_{5,4}^3 F_{4,3}^3 \\
 &= \frac{\lambda_8}{\lambda_9 - \lambda_3} \frac{\lambda_7}{\lambda_8 - \lambda_3} \frac{\lambda_6}{\lambda_7 - \lambda_3} \frac{\lambda_5}{\lambda_6 - \lambda_3} \frac{\lambda_4}{\lambda_5 - \lambda_3} \frac{\lambda_3}{\lambda_4 - \lambda_3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{9,4} &= F_{9,8}^4 F_{8,7}^4 F_{7,6}^4 F_{6,5}^4 F_{5,4}^4 \\
 &= \frac{\lambda_8}{\lambda_9 - \lambda_4} \frac{\lambda_7}{\lambda_8 - \lambda_4} \frac{\lambda_6}{\lambda_7 - \lambda_4} \frac{\lambda_5}{\lambda_6 - \lambda_4} \frac{\lambda_4}{\lambda_5 - \lambda_4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{9,5} &= F_{9,8}^5 F_{8,7}^5 F_{7,6}^5 F_{6,5}^5 \\
 &= \frac{\lambda_8}{\lambda_9 - \lambda_5} \frac{\lambda_7}{\lambda_8 - \lambda_5} \frac{\lambda_6}{\lambda_7 - \lambda_5} \frac{\lambda_5}{\lambda_6 - \lambda_5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{9,6} &= F_{9,8}^6 F_{8,7}^6 F_{7,6}^6 \\
 &= \frac{\lambda_8}{\lambda_9 - \lambda_6} \frac{\lambda_7}{\lambda_8 - \lambda_6} \frac{\lambda_6}{\lambda_7 - \lambda_6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{9,7} &= F_{9,8}^7 F_{8,7}^7 \\
 &= \frac{\lambda_8}{\lambda_9 - \lambda_7} \frac{\lambda_7}{\lambda_8 - \lambda_7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{9,8} &= F_{9,8}^8 \\
 &= \frac{\lambda_8}{\lambda_9 - \lambda_8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{10,1} &= F_{10,9}^1 F_{9,8}^1 F_{8,7}^1 F_{7,6}^1 F_{6,5}^1 F_{5,4}^1 F_{4,3}^1 F_{3,2}^1 F_{2,1}^1 \\
 &= \frac{\lambda_9}{\lambda_{10} - \lambda_1} \frac{\lambda_8}{\lambda_9 - \lambda_1} \frac{\lambda_7}{\lambda_8 - \lambda_1} \frac{\lambda_6}{\lambda_7 - \lambda_1} \frac{\lambda_5}{\lambda_6 - \lambda_1} \frac{\lambda_4}{\lambda_5 - \lambda_1} \frac{\lambda_3}{\lambda_4 - \lambda_1} \frac{\lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_1} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{10,2} &= F_{10,9}^2 F_{9,8}^2 F_{8,7}^2 F_{7,6}^2 F_{6,5}^2 F_{5,4}^2 F_{4,3}^2 F_{3,2}^2 \\
 &= \frac{\lambda_9}{\lambda_{10}-\lambda_2} \frac{\lambda_8}{\lambda_9-\lambda_2} \frac{\lambda_7}{\lambda_8-\lambda_2} \frac{\lambda_6}{\lambda_7-\lambda_2} \frac{\lambda_5}{\lambda_6-\lambda_2} \frac{\lambda_4}{\lambda_5-\lambda_2} \frac{\lambda_3}{\lambda_4-\lambda_2} \frac{\lambda_2}{\lambda_3-\lambda_2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{10,3} &= F_{10,9}^3 F_{9,8}^3 F_{8,7}^3 F_{7,6}^3 F_{6,5}^3 F_{5,4}^3 F_{4,3}^3 \\
 &= \frac{\lambda_9}{\lambda_{10}-\lambda_3} \frac{\lambda_8}{\lambda_9-\lambda_3} \frac{\lambda_7}{\lambda_8-\lambda_3} \frac{\lambda_6}{\lambda_7-\lambda_3} \frac{\lambda_5}{\lambda_6-\lambda_3} \frac{\lambda_4}{\lambda_5-\lambda_3} \frac{\lambda_3}{\lambda_4-\lambda_3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{10,4} &= F_{10,9}^4 F_{9,8}^4 F_{8,7}^4 F_{7,6}^4 F_{6,5}^4 F_{5,4}^4 \\
 &= \frac{\lambda_9}{\lambda_{10}-\lambda_4} \frac{\lambda_8}{\lambda_9-\lambda_4} \frac{\lambda_7}{\lambda_8-\lambda_4} \frac{\lambda_6}{\lambda_7-\lambda_4} \frac{\lambda_5}{\lambda_6-\lambda_4} \frac{\lambda_4}{\lambda_5-\lambda_4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{10,5} &= F_{10,9}^5 F_{9,8}^5 F_{8,7}^5 F_{7,6}^5 F_{6,5}^5 \\
 &= \frac{\lambda_9}{\lambda_{10}-\lambda_5} \frac{\lambda_8}{\lambda_9-\lambda_5} \frac{\lambda_7}{\lambda_8-\lambda_5} \frac{\lambda_6}{\lambda_7-\lambda_5} \frac{\lambda_5}{\lambda_6-\lambda_5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{10,6} &= F_{10,9}^6 F_{9,8}^6 F_{8,7}^6 F_{7,6}^6 \\
 &= \frac{\lambda_9}{\lambda_{10}-\lambda_6} \frac{\lambda_8}{\lambda_9-\lambda_6} \frac{\lambda_7}{\lambda_8-\lambda_6} \frac{\lambda_6}{\lambda_7-\lambda_6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{10,7} &= F_{10,9}^7 F_{9,8}^7 F_{8,7}^7 \\
 &= \frac{\lambda_9}{\lambda_{10}-\lambda_7} \frac{\lambda_8}{\lambda_9-\lambda_7} \frac{\lambda_7}{\lambda_8-\lambda_7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{10,8} &= F_{10,9}^8 F_{9,8}^8 \\
 &= \frac{\lambda_9}{\lambda_{10}-\lambda_8} \frac{\lambda_8}{\lambda_9-\lambda_8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{10,9} &= F_{10,9}^9 \\
 &= \frac{\lambda_9}{\lambda_{10}-\lambda_9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{11,1} &= F_{11,10}^1 F_{10,9}^1 F_{9,8}^1 F_{8,7}^1 F_{7,6}^1 F_{6,5}^1 F_{5,4}^1 F_{4,3}^1 F_{3,2}^1 F_{2,1}^1 \\
 &= \frac{\lambda_{10}}{\lambda_{11}-\lambda_1} \frac{\lambda_9}{\lambda_{10}-\lambda_1} \frac{\lambda_8}{\lambda_9-\lambda_1} \frac{\lambda_7}{\lambda_8-\lambda_1} \frac{\lambda_6}{\lambda_7-\lambda_1} \frac{\lambda_5}{\lambda_6-\lambda_1} \frac{\lambda_4}{\lambda_5-\lambda_1} \frac{\lambda_3}{\lambda_4-\lambda_1} \frac{\lambda_2}{\lambda_3-\lambda_1} \frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{11,2} &= F_{11,10}^2 F_{10,9}^2 F_{9,8}^2 F_{8,7}^2 F_{7,6}^2 F_{6,5}^2 F_{5,4}^2 F_{4,3}^2 F_{3,2}^2 \\
 &= \frac{\lambda_{10}}{\lambda_{11}-\lambda_2} \frac{\lambda_9}{\lambda_{10}-\lambda_2} \frac{\lambda_8}{\lambda_9-\lambda_2} \frac{\lambda_7}{\lambda_8-\lambda_2} \frac{\lambda_6}{\lambda_7-\lambda_2} \frac{\lambda_5}{\lambda_6-\lambda_2} \frac{\lambda_4}{\lambda_5-\lambda_2} \frac{\lambda_3}{\lambda_4-\lambda_2} \frac{\lambda_2}{\lambda_3-\lambda_2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{11,3} &= F_{11,10}^3 F_{10,9}^3 F_{9,8}^3 F_{8,7}^3 F_{7,6}^3 F_{6,5}^3 F_{5,4}^3 F_{4,3}^3 \\
 &= \frac{\lambda_{10}}{\lambda_{11}-\lambda_3} \frac{\lambda_9}{\lambda_{10}-\lambda_3} \frac{\lambda_8}{\lambda_9-\lambda_3} \frac{\lambda_7}{\lambda_8-\lambda_3} \frac{\lambda_6}{\lambda_7-\lambda_3} \frac{\lambda_5}{\lambda_6-\lambda_3} \frac{\lambda_4}{\lambda_5-\lambda_3} \frac{\lambda_3}{\lambda_4-\lambda_3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{11,4} &= F_{11,10}^4 F_{10,9}^4 F_{9,8}^4 F_{8,7}^4 F_{7,6}^4 F_{6,5}^4 F_{5,4}^4 \\
 &= \frac{\lambda_{10}}{\lambda_{11}-\lambda_4} \frac{\lambda_9}{\lambda_{10}-\lambda_4} \frac{\lambda_8}{\lambda_9-\lambda_4} \frac{\lambda_7}{\lambda_8-\lambda_4} \frac{\lambda_6}{\lambda_7-\lambda_4} \frac{\lambda_5}{\lambda_6-\lambda_4} \frac{\lambda_4}{\lambda_5-\lambda_4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{11,5} &= F_{11,10}^5 F_{10,9}^5 F_{9,8}^5 F_{8,7}^5 F_{7,6}^5 F_{6,5}^5 \\
 &= \frac{\lambda_{10}}{\lambda_{11}-\lambda_5} \frac{\lambda_9}{\lambda_{10}-\lambda_5} \frac{\lambda_8}{\lambda_9-\lambda_5} \frac{\lambda_7}{\lambda_8-\lambda_5} \frac{\lambda_6}{\lambda_7-\lambda_5} \frac{\lambda_5}{\lambda_6-\lambda_5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{11,6} &= F_{11,10}^6 F_{10,9}^6 F_{9,8}^6 F_{8,7}^6 F_{7,6}^6 \\
 &= \frac{\lambda_{10}}{\lambda_{11}-\lambda_6} \frac{\lambda_9}{\lambda_{10}-\lambda_6} \frac{\lambda_8}{\lambda_9-\lambda_6} \frac{\lambda_7}{\lambda_8-\lambda_6} \frac{\lambda_6}{\lambda_7-\lambda_6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{11,7} &= F_{11,10}^7 F_{10,9}^7 F_{9,8}^7 F_{8,7}^7 \\
 &= \frac{\lambda_{10}}{\lambda_{11}-\lambda_7} \frac{\lambda_9}{\lambda_{10}-\lambda_7} \frac{\lambda_8}{\lambda_9-\lambda_7} \frac{\lambda_7}{\lambda_8-\lambda_7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{11,8} &= F_{11,10}^8 F_{10,9}^8 F_{9,8}^8 \\
 &= \frac{\lambda_{10}}{\lambda_{11}-\lambda_8} \frac{\lambda_9}{\lambda_{10}-\lambda_8} \frac{\lambda_8}{\lambda_9-\lambda_8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{11,9} &= F_{11,10}^9 F_{10,9}^9 \\
 &= \frac{\lambda_{10}}{\lambda_{11}-\lambda_9} \frac{\lambda_9}{\lambda_{10}-\lambda_9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{11,10} &= F_{11,10}^{10} \\
 &= \frac{\lambda_{10}}{\lambda_{11}-\lambda_{10}}
 \end{aligned}$$

- Komponen $T_{x,y}$ dapat diuraikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 T_{2,1} &= F_{1,1}^2 \\
 &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{3,1} &= F_{1,1}^3 F_{2,2}^3 \\
 &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_3} \frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{3,2} &= F_{2,2}^3 \\
 &= \frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{4,1} &= F_{1,1}^4 F_{2,2}^4 F_{3,3}^4 \\
 &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_4} \frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_4} \frac{\lambda_3}{\lambda_3-\lambda_4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{4,2} &= F_{2,2}^4 F_{3,3}^4 \\
 &= \frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_4} \frac{\lambda_3}{\lambda_3-\lambda_4}
 \end{aligned}$$

$$T_{4,3} = F_{3,3}^4$$

$$= \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_4}$$

$$T_{5,1} = F_{1,1}^5 F_{2,2}^5 F_{3,3}^5 F_{4,4}^5$$

$$= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_5} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_5} \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_5} \frac{\lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_5}$$

$$T_{5,2} = F_{2,2}^5 F_{3,3}^5 F_{4,4}^5$$

$$= \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_5} \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_5} \frac{\lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_5}$$

$$T_{5,3} = F_{3,3}^5 F_{4,4}^5$$

$$= \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_5} \frac{\lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_5}$$

$$T_{5,4} = F_{4,4}^5$$

$$= \frac{\lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_5}$$

$$T_{6,1} = F_{1,1}^6 F_{2,2}^6 F_{3,3}^6 F_{4,4}^6 F_{5,5}^6$$

$$= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_6} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_6} \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_6} \frac{\lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_6} \frac{\lambda_5}{\lambda_5 - \lambda_6}$$

$$T_{6,2} = F_{2,2}^6 F_{3,3}^6 F_{4,4}^6 F_{5,5}^6$$

$$= \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_6} \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_6} \frac{\lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_6} \frac{\lambda_5}{\lambda_5 - \lambda_6}$$

$$T_{6,3} = F_{3,3}^6 F_{4,4}^6 F_{5,5}^6$$

$$= \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_6} \frac{\lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_6} \frac{\lambda_5}{\lambda_5 - \lambda_6}$$

$$\begin{aligned}
 T_{6,4} &= F_{4,4}^6 F_{5,5}^6 \\
 &= \frac{\lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_6} \frac{\lambda_5}{\lambda_5 - \lambda_6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{6,5} &= F_{5,5}^6 \\
 &= \frac{\lambda_5}{\lambda_5 - \lambda_6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{7,1} &= F_{1,1}^7 F_{2,2}^7 F_{3,3}^7 F_{4,4}^7 F_{5,5}^7 F_{6,6}^7 \\
 &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_7} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_7} \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_7} \frac{\lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_7} \frac{\lambda_5}{\lambda_5 - \lambda_7} \frac{\lambda_6}{\lambda_6 - \lambda_7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{7,2} &= F_{2,2}^7 F_{3,3}^7 F_{4,4}^7 F_{5,5}^7 F_{6,6}^7 \\
 &= \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_7} \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_7} \frac{\lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_7} \frac{\lambda_5}{\lambda_5 - \lambda_7} \frac{\lambda_6}{\lambda_6 - \lambda_7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{7,3} &= F_{3,3}^7 F_{4,4}^7 F_{5,5}^7 F_{6,6}^7 \\
 &= \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_7} \frac{\lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_7} \frac{\lambda_5}{\lambda_5 - \lambda_7} \frac{\lambda_6}{\lambda_6 - \lambda_7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{7,4} &= F_{4,4}^7 F_{5,5}^7 F_{6,6}^7 \\
 &= \frac{\lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_7} \frac{\lambda_5}{\lambda_5 - \lambda_7} \frac{\lambda_6}{\lambda_6 - \lambda_7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{7,5} &= F_{5,5}^7 F_{6,6}^7 \\
 &= \frac{\lambda_5}{\lambda_5 - \lambda_7} \frac{\lambda_6}{\lambda_6 - \lambda_7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{7,6} &= F_{6,6}^7 \\
 &= \frac{\lambda_6}{\lambda_6 - \lambda_7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{8,1} &= F_{1,1}^8 F_{2,2}^8 F_{3,3}^8 F_{4,4}^8 F_{5,5}^8 F_{6,6}^8 F_{7,7}^8 \\
 &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_8} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_8} \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_8} \frac{\lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_8} \frac{\lambda_5}{\lambda_5 - \lambda_8} \frac{\lambda_6}{\lambda_6 - \lambda_8} \frac{\lambda_7}{\lambda_7 - \lambda_8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{8,2} &= F_{2,2}^8 F_{3,3}^8 F_{4,4}^8 F_{5,5}^8 F_{6,6}^8 F_{7,7}^8 \\
 &= \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_8} \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_8} \frac{\lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_8} \frac{\lambda_5}{\lambda_5 - \lambda_8} \frac{\lambda_6}{\lambda_6 - \lambda_8} \frac{\lambda_7}{\lambda_7 - \lambda_8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{8,3} &= F_{3,3}^8 F_{4,4}^8 F_{5,5}^8 F_{6,6}^8 F_{7,7}^8 \\
 &= \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_8} \frac{\lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_8} \frac{\lambda_5}{\lambda_5 - \lambda_8} \frac{\lambda_6}{\lambda_6 - \lambda_8} \frac{\lambda_7}{\lambda_7 - \lambda_8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{8,4} &= F_{4,4}^8 F_{5,5}^8 F_{6,6}^8 F_{7,7}^8 \\
 &= \frac{\lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_8} \frac{\lambda_5}{\lambda_5 - \lambda_8} \frac{\lambda_6}{\lambda_6 - \lambda_8} \frac{\lambda_7}{\lambda_7 - \lambda_8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{8,5} &= F_{5,5}^8 F_{6,6}^8 F_{7,7}^8 \\
 &= \frac{\lambda_5}{\lambda_5 - \lambda_8} \frac{\lambda_6}{\lambda_6 - \lambda_8} \frac{\lambda_7}{\lambda_7 - \lambda_8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{8,6} &= F_{6,6}^8 F_{7,7}^8 \\
 &= \frac{\lambda_6}{\lambda_6 - \lambda_8} \frac{\lambda_7}{\lambda_7 - \lambda_8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{8,7} &= F_{7,7}^8 \\
 &= \frac{\lambda_7}{\lambda_7 - \lambda_8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{9,1} &= F_{1,1}^9 F_{2,2}^9 F_{3,3}^9 F_{4,4}^9 F_{5,5}^9 F_{6,6}^9 F_{7,7}^9 F_{8,8}^9 \\
 &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_9} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_9} \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_9} \frac{\lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_9} \frac{\lambda_5}{\lambda_5 - \lambda_9} \frac{\lambda_6}{\lambda_6 - \lambda_9} \frac{\lambda_7}{\lambda_7 - \lambda_9} \frac{\lambda_8}{\lambda_8 - \lambda_9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{9,2} &= F_{2,2}^9 F_{3,3}^9 F_{4,4}^9 F_{5,5}^9 F_{6,6}^9 F_{7,7}^9 F_{8,8}^9 \\
 &= \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_9} \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_9} \frac{\lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_9} \frac{\lambda_5}{\lambda_5 - \lambda_9} \frac{\lambda_6}{\lambda_6 - \lambda_9} \frac{\lambda_7}{\lambda_7 - \lambda_9} \frac{\lambda_8}{\lambda_8 - \lambda_9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{9,3} &= F_{3,3}^9 F_{4,4}^9 F_{5,5}^9 F_{6,6}^9 F_{7,7}^9 F_{8,8}^9 \\
 &= \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_9} \frac{\lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_9} \frac{\lambda_5}{\lambda_5 - \lambda_9} \frac{\lambda_6}{\lambda_6 - \lambda_9} \frac{\lambda_7}{\lambda_7 - \lambda_9} \frac{\lambda_8}{\lambda_8 - \lambda_9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{9,4} &= F_{4,4}^9 F_{5,5}^9 F_{6,6}^9 F_{7,7}^9 F_{8,8}^9 \\
 &= \frac{\lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_9} \frac{\lambda_5}{\lambda_5 - \lambda_9} \frac{\lambda_6}{\lambda_6 - \lambda_9} \frac{\lambda_7}{\lambda_7 - \lambda_9} \frac{\lambda_8}{\lambda_8 - \lambda_9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{9,5} &= F_{5,5}^9 F_{6,6}^9 F_{7,7}^9 F_{8,8}^9 \\
 &= \frac{\lambda_5}{\lambda_5 - \lambda_9} \frac{\lambda_6}{\lambda_6 - \lambda_9} \frac{\lambda_7}{\lambda_7 - \lambda_9} \frac{\lambda_8}{\lambda_8 - \lambda_9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{9,6} &= F_{6,6}^9 F_{7,7}^9 F_{8,8}^9 \\
 &= \frac{\lambda_6}{\lambda_6 - \lambda_9} \frac{\lambda_7}{\lambda_7 - \lambda_9} \frac{\lambda_8}{\lambda_8 - \lambda_9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{9,7} &= F_{7,7}^9 F_{8,8}^9 \\
 &= \frac{\lambda_7}{\lambda_7 - \lambda_9} \frac{\lambda_8}{\lambda_8 - \lambda_9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{9,8} &= F_{8,8}^9 \\
 &= \frac{\lambda_8}{\lambda_8 - \lambda_9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{10,1} &= F_{1,1}^{10} F_{2,2}^{10} F_{3,3}^{10} F_{4,4}^{10} F_{5,5}^{10} F_{6,6}^{10} F_{7,7}^{10} F_{8,8}^{10} F_{9,9}^{10} \\
 &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_{10}} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_{10}} \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_{10}} \frac{\lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_{10}} \frac{\lambda_5}{\lambda_5 - \lambda_{10}} \frac{\lambda_6}{\lambda_6 - \lambda_{10}} \frac{\lambda_7}{\lambda_7 - \lambda_{10}} \frac{\lambda_8}{\lambda_8 - \lambda_{10}} \frac{\lambda_9}{\lambda_9 - \lambda_{10}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{10,2} &= F_{2,2}^{10} F_{3,3}^{10} F_{4,4}^{10} F_{5,5}^{10} F_{6,6}^{10} F_{7,7}^{10} F_{8,8}^{10} F_{9,9}^{10} \\
 &= \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_{10}} \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_{10}} \frac{\lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_{10}} \frac{\lambda_5}{\lambda_5 - \lambda_{10}} \frac{\lambda_6}{\lambda_6 - \lambda_{10}} \frac{\lambda_7}{\lambda_7 - \lambda_{10}} \frac{\lambda_8}{\lambda_8 - \lambda_{10}} \frac{\lambda_9}{\lambda_9 - \lambda_{10}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{10,3} &= F_{3,3}^{10} F_{4,4}^{10} F_{5,5}^{10} F_{6,6}^{10} F_{7,7}^{10} F_{8,8}^{10} F_{9,9}^{10} \\
 &= \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_{10}} \frac{\lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_{10}} \frac{\lambda_5}{\lambda_5 - \lambda_{10}} \frac{\lambda_6}{\lambda_6 - \lambda_{10}} \frac{\lambda_7}{\lambda_7 - \lambda_{10}} \frac{\lambda_8}{\lambda_8 - \lambda_{10}} \frac{\lambda_9}{\lambda_9 - \lambda_{10}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{10,4} &= F_{4,4}^{10} F_{5,5}^{10} F_{6,6}^{10} F_{7,7}^{10} F_{8,8}^{10} F_{9,9}^{10} \\
 &= \frac{\lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_{10}} \frac{\lambda_5}{\lambda_5 - \lambda_{10}} \frac{\lambda_6}{\lambda_6 - \lambda_{10}} \frac{\lambda_7}{\lambda_7 - \lambda_{10}} \frac{\lambda_8}{\lambda_8 - \lambda_{10}} \frac{\lambda_9}{\lambda_9 - \lambda_{10}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{10,5} &= F_{5,5}^{10} F_{6,6}^{10} F_{7,7}^{10} F_{8,8}^{10} F_{9,9}^{10} \\
 &= \frac{\lambda_5}{\lambda_5 - \lambda_{10}} \frac{\lambda_6}{\lambda_6 - \lambda_{10}} \frac{\lambda_7}{\lambda_7 - \lambda_{10}} \frac{\lambda_8}{\lambda_8 - \lambda_{10}} \frac{\lambda_9}{\lambda_9 - \lambda_{10}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{10,6} &= F_{6,6}^{10} F_{7,7}^{10} F_{8,8}^{10} F_{9,9}^{10} \\
 &= \frac{\lambda_6}{\lambda_6 - \lambda_{10}} \frac{\lambda_7}{\lambda_7 - \lambda_{10}} \frac{\lambda_8}{\lambda_8 - \lambda_{10}} \frac{\lambda_9}{\lambda_9 - \lambda_{10}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{10,7} &= F_{7,7}^{10} F_{8,8}^{10} F_{9,9}^{10} \\
 &= \frac{\lambda_7}{\lambda_7 - \lambda_{10}} \frac{\lambda_8}{\lambda_8 - \lambda_{10}} \frac{\lambda_9}{\lambda_9 - \lambda_{10}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{10,8} &= F_{8,8}^{10} F_{9,9}^{10} \\
 &= \frac{\lambda_8}{\lambda_8 - \lambda_{10}} \frac{\lambda_9}{\lambda_9 - \lambda_{10}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{10,9} &= F_{9,9}^{10} \\
 &= \frac{\lambda_9}{\lambda_9 - \lambda_{10}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{11,1} &= F_{1,1}^{11} F_{2,2}^{11} F_{3,3}^{11} F_{4,4}^{11} F_{5,5}^{11} F_{6,6}^{11} F_{7,7}^{11} F_{8,8}^{11} F_{9,9}^{11} F_{10,10}^{11} \\
&= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_{11}} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_{11}} \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_{11}} \frac{\lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_{11}} \frac{\lambda_5}{\lambda_5 - \lambda_{11}} \frac{\lambda_6}{\lambda_6 - \lambda_{11}} \frac{\lambda_7}{\lambda_7 - \lambda_{11}} \frac{\lambda_8}{\lambda_8 - \lambda_{11}} \frac{\lambda_9}{\lambda_9 - \lambda_{11}} \\
&\quad \frac{\lambda_{10}}{\lambda_{10} - \lambda_{11}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{11,2} &= F_{2,2}^{11} F_{3,3}^{11} F_{4,4}^{11} F_{5,5}^{11} F_{6,6}^{11} F_{7,7}^{11} F_{8,8}^{11} F_{9,9}^{11} F_{10,10}^{11} \\
&= \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_{11}} \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_{11}} \frac{\lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_{11}} \frac{\lambda_5}{\lambda_5 - \lambda_{11}} \frac{\lambda_6}{\lambda_6 - \lambda_{11}} \frac{\lambda_7}{\lambda_7 - \lambda_{11}} \frac{\lambda_8}{\lambda_8 - \lambda_{11}} \frac{\lambda_9}{\lambda_9 - \lambda_{11}} \\
&\quad \frac{\lambda_{10}}{\lambda_{10} - \lambda_{11}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{11,3} &= F_{3,3}^{11} F_{4,4}^{11} F_{5,5}^{11} F_{6,6}^{11} F_{7,7}^{11} F_{8,8}^{11} F_{9,9}^{11} F_{10,10}^{11} \\
&= \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_{11}} \frac{\lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_{11}} \frac{\lambda_5}{\lambda_5 - \lambda_{11}} \frac{\lambda_6}{\lambda_6 - \lambda_{11}} \frac{\lambda_7}{\lambda_7 - \lambda_{11}} \frac{\lambda_8}{\lambda_8 - \lambda_{11}} \frac{\lambda_9}{\lambda_9 - \lambda_{11}} \frac{\lambda_{10}}{\lambda_{10} - \lambda_{11}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{11,4} &= F_{4,4}^{11} F_{5,5}^{11} F_{6,6}^{11} F_{7,7}^{11} F_{8,8}^{11} F_{9,9}^{11} F_{10,10}^{11} \\
&= \frac{\lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_{11}} \frac{\lambda_5}{\lambda_5 - \lambda_{11}} \frac{\lambda_6}{\lambda_6 - \lambda_{11}} \frac{\lambda_7}{\lambda_7 - \lambda_{11}} \frac{\lambda_8}{\lambda_8 - \lambda_{11}} \frac{\lambda_9}{\lambda_9 - \lambda_{11}} \frac{\lambda_{10}}{\lambda_{10} - \lambda_{11}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{11,5} &= F_{5,5}^{11} F_{6,6}^{11} F_{7,7}^{11} F_{8,8}^{11} F_{9,9}^{11} F_{10,10}^{11} \\
&= \frac{\lambda_5}{\lambda_5 - \lambda_{11}} \frac{\lambda_6}{\lambda_6 - \lambda_{11}} \frac{\lambda_7}{\lambda_7 - \lambda_{11}} \frac{\lambda_8}{\lambda_8 - \lambda_{11}} \frac{\lambda_9}{\lambda_9 - \lambda_{11}} \frac{\lambda_{10}}{\lambda_{10} - \lambda_{11}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{11,6} &= F_{6,6}^{11} F_{7,7}^{11} F_{8,8}^{11} F_{9,9}^{11} F_{10,10}^{11} \\
&= \frac{\lambda_6}{\lambda_6 - \lambda_{11}} \frac{\lambda_7}{\lambda_7 - \lambda_{11}} \frac{\lambda_8}{\lambda_8 - \lambda_{11}} \frac{\lambda_9}{\lambda_9 - \lambda_{11}} \frac{\lambda_{10}}{\lambda_{10} - \lambda_{11}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{11,7} &= F_{7,7}^{11} F_{8,8}^{11} F_{9,9}^{11} F_{10,10}^{11} \\
&= \frac{\lambda_7}{\lambda_7 - \lambda_{11}} \frac{\lambda_8}{\lambda_8 - \lambda_{11}} \frac{\lambda_9}{\lambda_9 - \lambda_{11}} \frac{\lambda_{10}}{\lambda_{10} - \lambda_{11}}
\end{aligned}$$

$$T_{11,8} = F_{8,8}^{11} F_{9,9}^{11} F_{10,10}^{11}$$

$$= \frac{\lambda_8}{\lambda_8 - \lambda_{11}} \frac{\lambda_9}{\lambda_9 - \lambda_{11}} \frac{\lambda_{10}}{\lambda_{10} - \lambda_{11}}$$

$$T_{11,9} = F_{9,9}^{11} F_{10,10}^{11}$$

$$= \frac{\lambda_9}{\lambda_9 - \lambda_{11}} \frac{\lambda_{10}}{\lambda_{10} - \lambda_{11}}$$

$$T_{11,10} = F_{10,10}^{11}$$

$$= \frac{\lambda_{10}}{\lambda_{10} - \lambda_{11}}$$

Langkah 3

Dengan melakukan substitusi masing-masing komponen ke dalam matriks, maka jumlah atom sisa peluruhan (N') adalah sebagai berikut :

$$N'_1 = e^{-\lambda_1 t} N_1(0)$$

$$N'_2 = (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0)$$

$$N'_3 = \lambda_1 \lambda_2 \left(\frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)} + \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_3)} \right) N_1(0)$$

$$N'_4 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \left(\frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)} + \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_3)} + \frac{e^{-\lambda_4 t}}{(\lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_4)} \right) N_1(0)$$

$$N'_5 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \left(\frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_5 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)} + \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_5 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_5 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_3)} + \frac{e^{-\lambda_4 t}}{(\lambda_5 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_4)} \right)$$

$$\left. \frac{e^{-\lambda_5 t}}{(\lambda_4 - \lambda_5)(\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_2 - \lambda_5)(\lambda_1 - \lambda_5)} \right) N_1(0)$$

$$N'_6 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \left(\frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_6 - \lambda_1)(\lambda_5 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)} + \right. \\ \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_6 - \lambda_2)(\lambda_5 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_6 - \lambda_3)(\lambda_5 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_3)} + \\ \frac{e^{-\lambda_4 t}}{(\lambda_6 - \lambda_4)(\lambda_5 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_4)} + \frac{e^{-\lambda_5 t}}{(\lambda_6 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_5)(\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_2 - \lambda_5)(\lambda_1 - \lambda_5)} + \\ \left. \frac{e^{-\lambda_6 t}}{(\lambda_5 - \lambda_6)(\lambda_4 - \lambda_6)(\lambda_3 - \lambda_6)(\lambda_2 - \lambda_6)(\lambda_1 - \lambda_6)} \right) N_1(0)$$

$$N'_7 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6 \left(\frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_7 - \lambda_1)(\lambda_6 - \lambda_1)(\lambda_5 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)} + \right. \\ \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_7 - \lambda_2)(\lambda_6 - \lambda_2)(\lambda_5 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)} + \\ \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_7 - \lambda_3)(\lambda_6 - \lambda_3)(\lambda_5 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_3)} + \\ \frac{e^{-\lambda_4 t}}{(\lambda_7 - \lambda_4)(\lambda_6 - \lambda_4)(\lambda_5 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_4)} + \\ \frac{e^{-\lambda_5 t}}{(\lambda_7 - \lambda_5)(\lambda_6 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_5)(\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_2 - \lambda_5)(\lambda_1 - \lambda_5)} + \\ \frac{e^{-\lambda_6 t}}{(\lambda_7 - \lambda_6)(\lambda_5 - \lambda_6)(\lambda_4 - \lambda_6)(\lambda_3 - \lambda_6)(\lambda_2 - \lambda_6)(\lambda_1 - \lambda_6)} + \\ \left. \frac{e^{-\lambda_7 t}}{(\lambda_6 - \lambda_7)(\lambda_5 - \lambda_7)(\lambda_4 - \lambda_7)(\lambda_3 - \lambda_7)(\lambda_2 - \lambda_7)(\lambda_1 - \lambda_7)} \right) N_1(0)$$

$$N'_8 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6 \lambda_7 \left(\frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_8 - \lambda_1)(\lambda_7 - \lambda_1)(\lambda_6 - \lambda_1)(\lambda_5 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)} + \right. \\ \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_8 - \lambda_2)(\lambda_7 - \lambda_2)(\lambda_6 - \lambda_2)(\lambda_5 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)} + \\ \left. \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_8 - \lambda_3)(\lambda_7 - \lambda_3)(\lambda_6 - \lambda_3)(\lambda_5 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_3)} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{e^{-\lambda_4 t}}{(\lambda_8 - \lambda_4)(\lambda_7 - \lambda_4)(\lambda_6 - \lambda_4)(\lambda_5 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_4)} + \\
 & \frac{e^{-\lambda_5 t}}{(\lambda_8 - \lambda_5)(\lambda_7 - \lambda_5)(\lambda_6 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_5)(\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_2 - \lambda_5)(\lambda_1 - \lambda_5)} + \\
 & \frac{e^{-\lambda_6 t}}{(\lambda_8 - \lambda_6)(\lambda_7 - \lambda_6)(\lambda_5 - \lambda_6)(\lambda_4 - \lambda_6)(\lambda_3 - \lambda_6)(\lambda_2 - \lambda_6)(\lambda_1 - \lambda_6)} + \\
 & \frac{e^{-\lambda_7 t}}{(\lambda_8 - \lambda_7)(\lambda_6 - \lambda_7)(\lambda_5 - \lambda_7)(\lambda_4 - \lambda_7)(\lambda_3 - \lambda_7)(\lambda_2 - \lambda_7)(\lambda_1 - \lambda_7)} + \\
 & \frac{e^{-\lambda_8 t}}{(\lambda_7 - \lambda_8)(\lambda_6 - \lambda_8)(\lambda_5 - \lambda_8)(\lambda_4 - \lambda_8)(\lambda_3 - \lambda_8)(\lambda_2 - \lambda_8)(\lambda_1 - \lambda_8)} \Big) N_1(0) \\
 N'_9 = & \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6 \lambda_7 \lambda_8 \left(\frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_9 - \lambda_1)(\lambda_8 - \lambda_1)(\lambda_7 - \lambda_1)(\lambda_6 - \lambda_1)(\lambda_5 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)} + \right. \\
 & \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_9 - \lambda_2)(\lambda_8 - \lambda_2)(\lambda_7 - \lambda_2)(\lambda_6 - \lambda_2)(\lambda_5 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)} + \\
 & \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_9 - \lambda_3)(\lambda_8 - \lambda_3)(\lambda_7 - \lambda_3)(\lambda_6 - \lambda_3)(\lambda_5 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_3)} + \\
 & \frac{e^{-\lambda_4 t}}{(\lambda_9 - \lambda_4)(\lambda_8 - \lambda_4)(\lambda_7 - \lambda_4)(\lambda_6 - \lambda_4)(\lambda_5 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_4)} + \\
 & \frac{e^{-\lambda_5 t}}{(\lambda_9 - \lambda_5)(\lambda_8 - \lambda_5)(\lambda_7 - \lambda_5)(\lambda_6 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_5)(\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_2 - \lambda_5)(\lambda_1 - \lambda_5)} + \\
 & \frac{e^{-\lambda_6 t}}{(\lambda_9 - \lambda_6)(\lambda_8 - \lambda_6)(\lambda_7 - \lambda_6)(\lambda_5 - \lambda_6)(\lambda_4 - \lambda_6)(\lambda_3 - \lambda_6)(\lambda_2 - \lambda_6)(\lambda_1 - \lambda_6)} + \\
 & \frac{e^{-\lambda_7 t}}{(\lambda_9 - \lambda_7)(\lambda_8 - \lambda_7)(\lambda_6 - \lambda_7)(\lambda_5 - \lambda_7)(\lambda_4 - \lambda_7)(\lambda_3 - \lambda_7)(\lambda_2 - \lambda_7)(\lambda_1 - \lambda_7)} + \\
 & \frac{e^{-\lambda_8 t}}{(\lambda_9 - \lambda_8)(\lambda_7 - \lambda_8)(\lambda_6 - \lambda_8)(\lambda_5 - \lambda_8)(\lambda_4 - \lambda_8)(\lambda_3 - \lambda_8)(\lambda_2 - \lambda_8)(\lambda_1 - \lambda_8)} + \\
 & \left. \frac{e^{-\lambda_9 t}}{(\lambda_8 - \lambda_9)(\lambda_7 - \lambda_9)(\lambda_6 - \lambda_9)(\lambda_5 - \lambda_9)(\lambda_4 - \lambda_9)(\lambda_3 - \lambda_9)(\lambda_2 - \lambda_9)(\lambda_1 - \lambda_9)} \right) N_1(0)
 \end{aligned}$$

$$N'_{10} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6 \lambda_7 \lambda_8 \lambda_9$$

$$\left(\frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_{10}-\lambda_1)(\lambda_9-\lambda_1)(\lambda_8-\lambda_1)(\lambda_7-\lambda_1)(\lambda_6-\lambda_1)(\lambda_5-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_1)} + \right. \\ \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_{10}-\lambda_2)(\lambda_9-\lambda_2)(\lambda_8-\lambda_2)(\lambda_7-\lambda_2)(\lambda_6-\lambda_2)(\lambda_5-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2)} + \\ \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_{10}-\lambda_3)(\lambda_9-\lambda_3)(\lambda_8-\lambda_3)(\lambda_7-\lambda_3)(\lambda_6-\lambda_3)(\lambda_5-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_3)} + \\ \frac{e^{-\lambda_4 t}}{(\lambda_{10}-\lambda_4)(\lambda_9-\lambda_4)(\lambda_8-\lambda_4)(\lambda_7-\lambda_4)(\lambda_6-\lambda_4)(\lambda_5-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_4)} + \\ \frac{e^{-\lambda_5 t}}{(\lambda_{10}-\lambda_5)(\lambda_9-\lambda_5)(\lambda_8-\lambda_5)(\lambda_7-\lambda_5)(\lambda_6-\lambda_5)(\lambda_4-\lambda_5)(\lambda_3-\lambda_5)(\lambda_2-\lambda_5)(\lambda_1-\lambda_5)} + \\ \frac{e^{-\lambda_6 t}}{(\lambda_{10}-\lambda_6)(\lambda_9-\lambda_6)(\lambda_8-\lambda_6)(\lambda_7-\lambda_6)(\lambda_5-\lambda_6)(\lambda_4-\lambda_6)(\lambda_3-\lambda_6)(\lambda_2-\lambda_6)(\lambda_1-\lambda_6)} + \\ \frac{e^{-\lambda_7 t}}{(\lambda_{10}-\lambda_7)(\lambda_9-\lambda_7)(\lambda_8-\lambda_7)(\lambda_6-\lambda_7)(\lambda_5-\lambda_7)(\lambda_4-\lambda_7)(\lambda_3-\lambda_7)(\lambda_2-\lambda_7)(\lambda_1-\lambda_7)} + \\ \frac{e^{-\lambda_8 t}}{(\lambda_{10}-\lambda_8)(\lambda_9-\lambda_8)(\lambda_7-\lambda_8)(\lambda_6-\lambda_8)(\lambda_5-\lambda_8)(\lambda_4-\lambda_8)(\lambda_3-\lambda_8)(\lambda_2-\lambda_8)(\lambda_1-\lambda_8)} + \\ \left. \frac{e^{-\lambda_9 t}}{(\lambda_{10}-\lambda_9)(\lambda_8-\lambda_9)(\lambda_7-\lambda_9)(\lambda_6-\lambda_9)(\lambda_5-\lambda_9)(\lambda_4-\lambda_9)(\lambda_3-\lambda_9)(\lambda_2-\lambda_9)(\lambda_1-\lambda_9)} + \right. \\ \left. \frac{e^{-\lambda_{10} t}}{(\lambda_9-\lambda_{10})(\lambda_8-\lambda_{10})(\lambda_7-\lambda_{10})(\lambda_6-\lambda_{10})(\lambda_5-\lambda_{10})(\lambda_4-\lambda_{10})(\lambda_3-\lambda_{10})(\lambda_2-\lambda_{10})(\lambda_1-\lambda_{10})} \right) N_1(0)$$

$$N'_{11} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6 \lambda_7 \lambda_8 \lambda_9 \lambda_{10}$$

$$\left(\frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_{11}-\lambda_1)(\lambda_{10}-\lambda_1)(\lambda_9-\lambda_1)(\lambda_8-\lambda_1)(\lambda_7-\lambda_1)(\lambda_6-\lambda_1)(\lambda_5-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_1)} + \right. \\ \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_{11}-\lambda_2)(\lambda_{10}-\lambda_2)(\lambda_9-\lambda_2)(\lambda_8-\lambda_2)(\lambda_7-\lambda_2)(\lambda_6-\lambda_2)(\lambda_5-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2)} + \\ \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_{11}-\lambda_3)(\lambda_{10}-\lambda_3)(\lambda_9-\lambda_3)(\lambda_8-\lambda_3)(\lambda_7-\lambda_3)(\lambda_6-\lambda_3)(\lambda_5-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_3)} + \\ \left. \frac{e^{-\lambda_4 t}}{(\lambda_{11}-\lambda_4)(\lambda_{10}-\lambda_4)(\lambda_9-\lambda_4)(\lambda_8-\lambda_4)(\lambda_7-\lambda_4)(\lambda_6-\lambda_4)(\lambda_5-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_4)} + \right)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{e^{-\lambda_5 t}}{(\lambda_{11}-\lambda_5)(\lambda_{10}-\lambda_5)(\lambda_9-\lambda_5)(\lambda_8-\lambda_5)(\lambda_7-\lambda_5)(\lambda_6-\lambda_5)(\lambda_4-\lambda_5)(\lambda_3-\lambda_5)(\lambda_2-\lambda_5)(\lambda_1-\lambda_5)} + \\
& \frac{e^{-\lambda_6 t}}{(\lambda_{11}-\lambda_6)(\lambda_{10}-\lambda_6)(\lambda_9-\lambda_6)(\lambda_8-\lambda_6)(\lambda_7-\lambda_6)(\lambda_5-\lambda_6)(\lambda_4-\lambda_6)(\lambda_3-\lambda_6)(\lambda_2-\lambda_6)(\lambda_1-\lambda_6)} + \\
& \frac{e^{-\lambda_7 t}}{(\lambda_{11}-\lambda_7)(\lambda_{10}-\lambda_7)(\lambda_9-\lambda_7)(\lambda_8-\lambda_7)(\lambda_6-\lambda_7)(\lambda_5-\lambda_7)(\lambda_4-\lambda_7)(\lambda_3-\lambda_7)(\lambda_2-\lambda_7)(\lambda_1-\lambda_7)} + \\
& \frac{e^{-\lambda_8 t}}{(\lambda_{11}-\lambda_8)(\lambda_{10}-\lambda_8)(\lambda_9-\lambda_8)(\lambda_7-\lambda_8)(\lambda_6-\lambda_8)(\lambda_5-\lambda_8)(\lambda_4-\lambda_8)(\lambda_3-\lambda_8)(\lambda_2-\lambda_8)(\lambda_1-\lambda_8)} + \\
& \frac{e^{-\lambda_9 t}}{(\lambda_{11}-\lambda_9)(\lambda_{10}-\lambda_9)(\lambda_8-\lambda_9)(\lambda_7-\lambda_9)(\lambda_6-\lambda_9)(\lambda_5-\lambda_9)(\lambda_4-\lambda_9)(\lambda_3-\lambda_9)(\lambda_2-\lambda_9)(\lambda_1-\lambda_9)} + \\
& \frac{e^{-\lambda_{10} t}}{(\lambda_{11}-\lambda_{10})(\lambda_9-\lambda_{10})(\lambda_8-\lambda_{10})(\lambda_7-\lambda_{10})(\lambda_6-\lambda_{10})(\lambda_5-\lambda_{10})(\lambda_4-\lambda_{10})(\lambda_3-\lambda_{10})(\lambda_2-\lambda_{10})(\lambda_1-\lambda_{10})} + \\
& \frac{e^{-\lambda_{11} t}}{(\lambda_{10}-\lambda_{11})(\lambda_9-\lambda_{11})(\lambda_8-\lambda_{11})(\lambda_7-\lambda_{11})(\lambda_6-\lambda_{11})(\lambda_5-\lambda_{11})(\lambda_4-\lambda_{11})(\lambda_3-\lambda_{11})(\lambda_2-\lambda_{11})(\lambda_1-\lambda_{11})} \Big) N_1(0)
\end{aligned}$$

Diketahui :

Massa awal atom ${}_{90}\text{Th}^{232}$ (m) = 7 gram

Massa molar atom ${}_{90}\text{Th}^{232}$ (Mr) = 232 gram

Bilangan Avogadro (N_A) = $6,0221367 \times 10^{23}$ atom

No.	Nuklida	Waktu Paruh
1.	Thorium-232	$1,39 \times 10^{10}$ tahun
2.	Radium-228	6,7 tahun
3.	Actinium-228	6,13 jam
4.	Thorium-228	1,91 tahun
5.	Radium-224	3,64 hari
6.	Radon-220	51,5 detik
7.	Polonium-216	0,16 detik
8.	Timbal-212	10,6 jam
9.	Bismut-212	60,5 menit
10.	Polonium-212	3×10^{-7} detik
11.	Timbal-208	Stabil

- Mencari jumlah atom awal $N_1(0)$ ${}_{90}\text{Th}^{232}$

$$\begin{aligned}
 N_1(0) &= \frac{m}{Mr} \times N_A \\
 &= \frac{7 \text{ gram}}{232 \text{ gram}} \times 6,0221367 \times 10^{23} \text{ atom} \\
 &= 0,1817025519 \times 10^{23} \text{ atom} \\
 &= 1,817025519 \times 10^{22} \text{ atom} \\
 &= 1,82 \times 10^{22} \text{ atom}
 \end{aligned}$$

- Mencari konstanta peluruhan (λ_n) dan jumlah atom sisa peluruhan (N'_n) masing-masing nuklida pada deret Thorium-232 selama $t = 1,34 \times 10^{10}$ tahun

$$\lambda_n = \frac{0,693}{t_{1/2}}$$

- Untuk λ_1 berlaku pada Thorium-232 dengan $t_{1/2} = 1,39 \times 10^{10}$ tahun

$$\lambda_1 = \frac{0,693}{t_{1/2}}$$

$$= \frac{0,693}{1,39 \times 10^{10}}$$

$$= 0,498 \times 10^{-10}$$

Maka,

$$N_1' = e^{-\lambda_1 t} N_1(0)$$

$$= e^{-0,498 \times 10^{-10} \cdot 1,34 \times 10^{10}} (1,82 \times 10^{22})$$

$$= e^{-0,66732} (1,82 \times 10^{22})$$

$$= 0,513 (1,82 \times 10^{22})$$

$$= 9,34 \times 10^{21} \text{ atom}$$

✚ Untuk λ_2 berlaku pada Radium-228 dengan $t_{1/2} = 6,7$ tahun

$$\lambda_2 = \frac{0,693}{t_{1/2}}$$

$$= \frac{0,693}{6,7}$$

$$= 0,1034$$

Maka,

$$N_2' = (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0)$$

$$= (e^{-0,498 \times 10^{-10} \cdot 1,34 \times 10^{10}} - e^{-0,1034 \cdot 1,34 \times 10^{10}})$$

$$\frac{0,498 \times 10^{-10}}{0,1034 - 0,498 \times 10^{-10}} (1,82 \times 10^{22})$$

$$= (e^{-0,66732} - e^{-0,1386 \times 10^{10}}) \frac{0,498 \times 10^{-10}}{0,1034} (1,82 \times 10^{22})$$

$$= (0,513 - 0) 4,816 \times 10^{-10} (1,82 \times 10^{22})$$

$$= 4,49 \times 10^{12} \text{ atom}$$

✚ Untuk λ_3 berlaku pada Actinium-228 dengan $t_{1/2} = 6,988 \times 10^{-4}$ tahun

$$\lambda_3 = \frac{0,693}{t_{1/2}}$$

$$= \frac{0,693}{6,988 \times 10^{-4}}$$

$$= 0,0992 \times 10^4$$

Maka,

$$\begin{aligned} N_3' &= \left(\frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)} + \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_3)} \right) \lambda_1 \lambda_2 N_1(0) \\ &= \left(\frac{e^{-0,498 \times 10^{-10} \cdot 1,34 \times 10^{10}}}{(0,0992 \times 10^4 - 0,498 \times 10^{-10})(0,1034 - 0,498 \times 10^{-10})} + \right. \\ &\quad \frac{e^{-0,1034 \cdot 1,34 \times 10^{10}}}{(0,0992 \times 10^4 - 0,1034)(0,498 \times 10^{-10} - 0,1034)} + \\ &\quad \left. \frac{e^{-0,0992 \times 10^4 \cdot 1,34 \times 10^{10}}}{(0,1034 - 0,0992 \times 10^4)(0,498 \times 10^{-10} - 0,0992 \times 10^4)} \right) \\ &\quad (0,498 \times 10^{-10} \cdot 0,1034) 1,82 \times 10^{22} \\ &= \left(\frac{e^{-0,66732}}{(992)(0,1034)} + \frac{e^{-0,1386 \times 10^{10}}}{(991,897)(-0,1034)} + \frac{e^{-0,133 \times 10^{14}}}{(-991,897)(-992)} \right) \\ &\quad (0,0937 \times 10^{12}) \\ &= \left(\frac{0,513}{(102,573)} + \frac{0}{(-102,562)} + \frac{0}{(983961,82)} \right) (0,0937 \times 10^{12}) \\ &= (5,001 \times 10^{-3})(0,0937 \times 10^{12}) \\ &= 4,68 \times 10^8 \text{ atom} \end{aligned}$$

✚ Untuk λ_4 berlaku pada Thorium-228 dengan $t_{1/2} = 1,91$ tahun

$$\begin{aligned} \lambda_4 &= \frac{0,693}{t_{1/2}} \\ &= \frac{0,693}{1,91} \\ &= 0,3628 \end{aligned}$$

Maka,

$$\begin{aligned} N_4' &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \left(\frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)} + \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)} + \right. \\ &\quad \left. \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_3)} + \frac{e^{-\lambda_4 t}}{(\lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_4)} \right) N_1(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{e^{-0,66732}}{(0,3628 - 0,498 \times 10^{-10})(992)(0,1034)} + \right. \\
 &\quad \frac{e^{-0,1386 \times 10^{10}}}{(0,3628 - 0,1034)(991,897)(-0,1034)} + \\
 &\quad \frac{e^{-0,133 \times 10^{14}}}{(0,3628 - 0,0992 \times 10^4)(-991,897)(-992)} + \\
 &\quad \left. \frac{e^{-0,3628,134 \times 10^{10}}}{(0,0992 \times 10^4 - 0,3628)(0,1034 - 0,3628)(0,498 \times 10^{-10} - 0,3628)} \right) \\
 &\quad (0,498 \times 10^{-10} \cdot 0,1034 \cdot 0,0992 \times 10^4) 1,82 \times 10^{22} \\
 &= \left(\frac{0,513}{(0,3628)(102,573)} + \frac{0}{(0,2594)(-102,562)} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{0}{(-991,64)(983961,82)} + \frac{0}{(991,64)(-0,2594)(-0,3628)} \right) \\
 &\quad (9,29 \times 10^{13}) \\
 &= \left(\frac{0,513}{37,213} \right) (9,29 \times 10^{13}) \\
 &= (0,01378)(9,29 \times 10^{13}) \\
 &= 1,28 \times 10^{12} \text{ atom}
 \end{aligned}$$

✚ Untuk λ_5 berlaku pada Radium-224 dengan $t_{1/2} = 9,97 \times 10^{-3}$ tahun

$$\begin{aligned}
 \lambda_5 &= \frac{0,693}{t_{1/2}} \\
 &= \frac{0,693}{9,97 \times 10^{-3}} \\
 &= 69,51
 \end{aligned}$$

Maka,

$$\begin{aligned}
 N'_5 &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \left(\frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_5 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)} + \right. \\
 &\quad \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_5 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)} + \\
 &\quad \left. \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_5 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_3)} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{e^{-\lambda_4 t}}{(\lambda_5 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_4)} + \right. \\
& \left. \frac{e^{-\lambda_5 t}}{(\lambda_4 - \lambda_5)(\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_2 - \lambda_5)(\lambda_1 - \lambda_5)} \right) N_1(0) \\
= & \left(\frac{e^{-0,66732}}{(69,51 - 0,498 \times 10^{-10})(0,3628)(992)(0,1034)} + \right. \\
& \frac{e^{-0,1386 \times 10^{10}}}{(69,51 - 0,1034)(0,2594)(991,897)(-0,1034)} + \\
& \frac{e^{-0,133 \times 10^{14}}}{(69,51 - 0,0992 \times 10^4)(-991,64)(-991,897)(-992)} + \\
& \frac{e^{-0,486 \times 10^{10}}}{(69,51 - 0,3628)(991,64)(-0,2594)(-0,3628)} + \\
& \left. \frac{e^{-69,51,34 \times 10^{10}}}{(0,3628 - 69,51)(0,0992 \times 10^4 - 69,51)(0,1034 - 69,51)(0,498 \times 10^{-10} - 69,51)} \right) \\
& (0,498 \times 10^{-10} \cdot 0,1034 \cdot 0,0992 \times 10^4 \cdot 0,3628) 1,82 \times 10^{22} \\
= & \left(\frac{0,513}{(69,51)(37,213)} + \frac{0}{(69,4066)(-26,605)} + \right. \\
& \frac{0}{(-922,49)(-9,76 \times 10^{-8})} + \frac{0}{(69,147)(93,32)} + \\
& \left. \frac{0}{(-69,147)(922,49)(-69,4066)(-69,51)} \right) (3,37 \times 10^{13}) \\
= & \left(\frac{0,513}{2586,67} \right) (3,37 \times 10^{13}) \\
= & (1,983 \times 10^{-4})(3,37 \times 10^{13}) \\
= & 6,68 \times 10^9 \text{ atom}
\end{aligned}$$

✚ Untuk λ_6 berlaku pada Radon-220 dengan $t_{1/2} = 1,63 \times 10^{-6}$ tahun

$$\begin{aligned}
\lambda_6 &= \frac{0,693}{t_{1/2}} \\
&= \frac{0,693}{1,63 \times 10^{-6}} \\
&= 4,25 \times 10^5
\end{aligned}$$

Maka,

$$\begin{aligned}
 N'_6 &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \left(\frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_6 - \lambda_1)(\lambda_5 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)} + \right. \\
 &\quad \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_6 - \lambda_2)(\lambda_5 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)} + \\
 &\quad \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_6 - \lambda_3)(\lambda_5 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_3)} + \\
 &\quad \frac{e^{-\lambda_4 t}}{(\lambda_6 - \lambda_4)(\lambda_5 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_4)} + \\
 &\quad \frac{e^{-\lambda_5 t}}{(\lambda_6 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_5)(\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_2 - \lambda_5)(\lambda_1 - \lambda_5)} + \\
 &\quad \left. \frac{e^{-\lambda_6 t}}{(\lambda_5 - \lambda_6)(\lambda_4 - \lambda_6)(\lambda_3 - \lambda_6)(\lambda_2 - \lambda_6)(\lambda_1 - \lambda_6)} \right) N_1(0) \\
 &= \left(\frac{e^{-0,66732}}{(4,25 \times 10^5 - 0,498 \times 10^{-10})(69,51)(0,3628)(992)(0,1034)} + \right. \\
 &\quad \frac{e^{-0,1386 \times 10^{10}}}{(4,25 \times 10^5 - 0,1034)(69,4066)(0,2594)(991,897)(-0,1034)} + \\
 &\quad \frac{e^{-0,133 \times 10^{14}}}{(4,25 \times 10^5 - 0,0992 \times 10^4)(-922,49)(-991,64)(-991,897)(-992)} + \\
 &\quad \frac{e^{-0,486 \times 10^{10}}}{(4,25 \times 10^5 - 0,3628)(69,147)(991,64)(-0,2594)(-0,3628)} + \\
 &\quad \left. \frac{e^{-93,14 \times 10^{10}}}{(4,25 \times 10^5 - 69,51)(-69,147)(922,49)(-69,4066)(-69,51)} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{e^{-4,25 \times 10^5 \cdot 1,34 \times 10^{10}}}{(69,51 - 4,25 \times 10^5)(0,3628 - 4,25 \times 10^5)(0,0992 \times 10^4 - 4,25 \times 10^5)(0,1034 - 4,25 \times 10^5)(0,498 \times 10^{-10} - 4,25 \times 10^5)} \right) \\
 &\quad (0,498 \times 10^{-10} \cdot 0,1034 \cdot 0,0992 \times 10^4 \cdot 0,3628 \cdot 69,51) 1,82 \times 10^{22} \\
 &= \left(\frac{0,513}{(4,25 \times 10^5)(2586,67)} + \frac{0}{(4,2499 \times 10^5)(-1,85 \times 10^3)} + \right. \\
 &\quad \frac{0}{(4,24 \times 10^5)(9,003 \times 10^{-8})} + \frac{0}{(4,249 \times 10^5)(6,45 \times 10^3)} + \\
 &\quad \left. \frac{0}{(4,2493 \times 10^5)(-3,08 \times 10^8)} + \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{0}{(-4,2493 \times 10^5)(-4,249 \times 10^5)(-4,24 \times 10^5)(-4,2499 \times 10^5)(-4,25 \times 10^5)} \\
& (2,34 \times 10^{15}) \\
& = \left(\frac{0,513}{1,099 \times 10^9} \right) (2,34 \times 10^{15}) \\
& = (0,467 \times 10^{-9})(2,34 \times 10^{15}) \\
& = 1,09 \times 10^6 \text{ atom}
\end{aligned}$$

✚ Untuk λ_7 berlaku pada Polonium-216 dengan $t_{1/2} = 5,074 \times 10^{-9}$ tahun

$$\begin{aligned}
\lambda_7 &= \frac{0,693}{t_{1/2}} \\
&= \frac{0,693}{5,074 \times 10^{-9}} \\
&= 1,37 \times 10^8
\end{aligned}$$

Maka,

$$\begin{aligned}
N_7' &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6 \left(\frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_7 - \lambda_1)(\lambda_6 - \lambda_1)(\lambda_5 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)} + \right. \\
& \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_7 - \lambda_2)(\lambda_6 - \lambda_2)(\lambda_5 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)} + \\
& \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_7 - \lambda_3)(\lambda_6 - \lambda_3)(\lambda_5 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_3)} + \\
& \frac{e^{-\lambda_4 t}}{(\lambda_7 - \lambda_4)(\lambda_6 - \lambda_4)(\lambda_5 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_4)} + \\
& \frac{e^{-\lambda_5 t}}{(\lambda_7 - \lambda_5)(\lambda_6 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_5)(\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_2 - \lambda_5)(\lambda_1 - \lambda_5)} + \\
& \left. \frac{e^{-\lambda_6 t}}{(\lambda_7 - \lambda_6)(\lambda_5 - \lambda_6)(\lambda_4 - \lambda_6)(\lambda_3 - \lambda_6)(\lambda_2 - \lambda_6)(\lambda_1 - \lambda_6)} + \right. \\
& \left. \frac{e^{-\lambda_7 t}}{(\lambda_6 - \lambda_7)(\lambda_5 - \lambda_7)(\lambda_4 - \lambda_7)(\lambda_3 - \lambda_7)(\lambda_2 - \lambda_7)(\lambda_1 - \lambda_7)} \right) N_1(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{e^{-0,66732}}{(1,37 \times 10^8 - 0,498 \times 10^{-10})(4,25 \times 10^5)(69,51)(0,3628)(992)(0,1034)} + \right. \\
 &\frac{e^{-0,1386 \times 10^{10}}}{(1,37 \times 10^8 - 0,1034)(4,2499 \times 10^5)(69,4066)(0,2594)(991,897)(-0,1034)} + \\
 &\frac{e^{-0,133 \times 10^{14}}}{(1,37 \times 10^8 - 0,0992 \times 10^4)(4,24 \times 10^5)(-922,49)(-991,64)(-991,897)(-992)} + \\
 &\frac{e^{-0,486 \times 10^{10}}}{(1,37 \times 10^8 - 0,3628)(4,249 \times 10^5)(69,147)(991,64)(-0,2594)(-0,3628)} + \\
 &\frac{e^{-93,14 \times 10^{10}}}{(1,37 \times 10^8 - 69,51)(4,2493 \times 10^5)(-69,147)(922,49)(-69,4066)(-69,51)} + \\
 &\frac{e^{-5,69 \times 10^{15}}}{(1,37 \times 10^8 - 4,25 \times 10^5)(-4,2493 \times 10^5)(-4,249 \times 10^5)(-4,24 \times 10^5)(-4,2499 \times 10^5)(-4,25 \times 10^5)} + \\
 &\left. \frac{e^{-1,37 \times 10^8 \cdot 1,34 \times 10^{10}}}{(-1,366 \times 10^8)(-1,369 \times 10^8)(-1,369 \times 10^8)(-1,369 \times 10^8)(-1,369 \times 10^8)(-1,37 \times 10^8)} \right) \\
 &(0,498 \times 10^{-10} \cdot 0,1034 \cdot 0,0992 \times 10^4 \cdot 0,3628 \cdot 69,51 \cdot 4,25 \times 10^5) 1,82 \times 10^{22} \\
 &= \left(\frac{0,513}{(1,37 \times 10^8)(1,099 \times 10^9)} + \frac{0}{(1,369 \times 10^8)(-7,86 \times 10^8)} + \frac{0}{(1,369 \times 10^8)(3,82 \times 10^{-2})} + \right. \\
 &\frac{0}{(1,369 \times 10^8)(2,74 \times 10^9)} + \frac{0}{(1,369 \times 10^8)(-1,31 \times 10^{14})} + \frac{0}{(1,366 \times 10^8)(-1,38 \times 10^{28})} + \\
 &\left. \frac{0}{(6,57 \times 10^{48})} \right) \\
 &(9,94 \times 10^{20}) \\
 &= \left(\frac{0,513}{1,51 \times 10^{17}} \right) (9,94 \times 10^{20}) \\
 &= (0,34 \times 10^{-17})(9,94 \times 10^{20}) \\
 &= 3,38 \times 10^3 \text{ atom}
 \end{aligned}$$

✚ Untuk λ_g berlaku pada Timbal-212 dengan $t_{1/2} = 1,208 \times 10^{-3}$ tahun

$$\begin{aligned}
 \lambda_g &= \frac{0,693}{t_{1/2}} \\
 &= \frac{0,693}{1,208 \times 10^{-3}} \\
 &= 0,57 \times 10^3
 \end{aligned}$$

Maka,

$$\begin{aligned}
 N'_8 &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6 \lambda_7 \left(\frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_8 - \lambda_1)(\lambda_7 - \lambda_1)(\lambda_6 - \lambda_1)(\lambda_5 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)} + \right. \\
 &\quad \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_8 - \lambda_2)(\lambda_7 - \lambda_2)(\lambda_6 - \lambda_2)(\lambda_5 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)} + \\
 &\quad \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_8 - \lambda_3)(\lambda_7 - \lambda_3)(\lambda_6 - \lambda_3)(\lambda_5 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_3)} + \\
 &\quad \frac{e^{-\lambda_4 t}}{(\lambda_8 - \lambda_4)(\lambda_7 - \lambda_4)(\lambda_6 - \lambda_4)(\lambda_5 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_4)} + \\
 &\quad \frac{e^{-\lambda_5 t}}{(\lambda_8 - \lambda_5)(\lambda_7 - \lambda_5)(\lambda_6 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_5)(\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_2 - \lambda_5)(\lambda_1 - \lambda_5)} + \\
 &\quad \frac{e^{-\lambda_6 t}}{(\lambda_8 - \lambda_6)(\lambda_7 - \lambda_6)(\lambda_5 - \lambda_6)(\lambda_4 - \lambda_6)(\lambda_3 - \lambda_6)(\lambda_2 - \lambda_6)(\lambda_1 - \lambda_6)} + \\
 &\quad \left. \frac{e^{-\lambda_7 t}}{(\lambda_8 - \lambda_7)(\lambda_6 - \lambda_7)(\lambda_5 - \lambda_7)(\lambda_4 - \lambda_7)(\lambda_3 - \lambda_7)(\lambda_2 - \lambda_7)(\lambda_1 - \lambda_7)} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{e^{-\lambda_8 t}}{(\lambda_7 - \lambda_8)(\lambda_6 - \lambda_8)(\lambda_5 - \lambda_8)(\lambda_4 - \lambda_8)(\lambda_3 - \lambda_8)(\lambda_2 - \lambda_8)(\lambda_1 - \lambda_8)} \right) N_1(0) \\
 &= \left(\frac{e^{-0,66732}}{(0,57 \times 10^3)(1,37 \times 10^8)(4,25 \times 10^5)(69,51)(0,3628)(992)(0,1034)} + \right. \\
 &\quad \frac{e^{-0,1386 \times 10^{10}}}{(5,698 \times 10^2)(1,3698 \times 10^8)(4,2499 \times 10^5)(69,4066)(0,2594)(991,897)(-0,1034)} + \\
 &\quad \frac{e^{-0,133 \times 10^{14}}}{(-422)(1,369 \times 10^8)(4,24 \times 10^5)(-922,49)(-991,64)(-991,897)(-992)} + \\
 &\quad \frac{e^{-0,486 \times 10^{10}}}{(5,696 \times 10^2)(1,369 \times 10^8)(4,249 \times 10^5)(69,147)(991,64)(-0,2594)(-0,3628)} + \\
 &\quad \frac{e^{-93,14 \times 10^{10}}}{(500,49)(1,369 \times 10^8)(4,2493 \times 10^5)(-69,147)(922,49)(-69,4066)(-69,51)} + \\
 &\quad \frac{e^{-5,69 \times 10^{15}}}{(-4,24 \times 10^5)(1,366 \times 10^8)(-4,2493 \times 10^5)(-4,249 \times 10^5)(-4,24 \times 10^5)(-4,2499 \times 10^5)(-4,25 \times 10^5)} + \\
 &\quad \left. \frac{e^{-1,84 \times 10^{18}}}{(-1,369 \times 10^8)(-1,366 \times 10^8)(-1,369 \times 10^8)(-1,369 \times 10^8)(-1,369 \times 10^8)(-1,369 \times 10^8)(-1,37 \times 10^8)} \right) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{e^{-0,57 \times 10^3 \cdot 1,34 \times 10^{10}}}{(1,369 \times 10^8)(4,24 \times 10^5)(-500,49)(5,696 \times 10^2)(422)(5,698 \times 10^2)(-570)} \\
 & (0,498 \times 10^{-10} \cdot 0,1034 \cdot 0,0992 \times 10^4 \cdot 0,3628 \cdot 69,51 \cdot 4,25 \times 10^5 \cdot 1,37 \times 10^8) 1,82 \times 10^{22} \\
 & = \left(\frac{0,513}{(0,57 \times 10^3)(1,51 \times 10^{17})} + \frac{0}{(5,698 \times 10^2)(-10,7 \times 10^{16})} + \frac{0}{(-422)(5,23 \times 10^6)} + \right. \\
 & \frac{0}{(5,696 \times 10^2)(3,75 \times 10^{17})} + \frac{0}{(500,49)(-1,79 \times 10^{22})} + \frac{0}{(-4,24 \times 10^5)(-1,88 \times 10^{36})} + \\
 & \left. \frac{0}{(-1,369 \times 10^8)(6,57 \times 10^{48})} + \frac{0}{(2,27 \times 10^{17})} \right) (13,6 \times 10^{28}) \\
 & = \left(\frac{0,513}{0,86 \times 10^{20}} \right) (13,6 \times 10^{28}) \\
 & = (0,59 \times 10^{-20})(13,6 \times 10^{28}) \\
 & = 8,02 \times 10^8 \text{ atom}
 \end{aligned}$$

✚ Untuk λ_9 berlaku pada Bismut-212 dengan $t_{1/2} = 1,15 \times 10^{-4}$ tahun

$$\begin{aligned}
 \lambda_9 &= \frac{0,693}{t_{1/2}} \\
 &= \frac{0,693}{1,15 \times 10^{-4}} \\
 &= 0,602 \times 10^4
 \end{aligned}$$

Maka,

$$\begin{aligned}
 N'_9 &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6 \lambda_7 \lambda_8 \left(\frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_9 - \lambda_1)(\lambda_8 - \lambda_1)(\lambda_7 - \lambda_1)(\lambda_6 - \lambda_1)(\lambda_5 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)} + \right. \\
 & \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_9 - \lambda_2)(\lambda_8 - \lambda_2)(\lambda_7 - \lambda_2)(\lambda_6 - \lambda_2)(\lambda_5 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)} + \\
 & \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_9 - \lambda_3)(\lambda_8 - \lambda_3)(\lambda_7 - \lambda_3)(\lambda_6 - \lambda_3)(\lambda_5 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_3)} + \\
 & \frac{e^{-\lambda_4 t}}{(\lambda_9 - \lambda_4)(\lambda_8 - \lambda_4)(\lambda_7 - \lambda_4)(\lambda_6 - \lambda_4)(\lambda_5 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_4)} + \\
 & \frac{e^{-\lambda_5 t}}{(\lambda_9 - \lambda_5)(\lambda_8 - \lambda_5)(\lambda_7 - \lambda_5)(\lambda_6 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_5)(\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_2 - \lambda_5)(\lambda_1 - \lambda_5)} + \\
 & \left. \frac{e^{-\lambda_6 t}}{(\lambda_9 - \lambda_6)(\lambda_8 - \lambda_6)(\lambda_7 - \lambda_6)(\lambda_5 - \lambda_6)(\lambda_4 - \lambda_6)(\lambda_3 - \lambda_6)(\lambda_2 - \lambda_6)(\lambda_1 - \lambda_6)} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{e^{-\lambda_7 t}}{(\lambda_9 - \lambda_7)(\lambda_8 - \lambda_7)(\lambda_6 - \lambda_7)(\lambda_5 - \lambda_7)(\lambda_4 - \lambda_7)(\lambda_3 - \lambda_7)(\lambda_2 - \lambda_7)(\lambda_1 - \lambda_7)} + \\
 & \frac{e^{-\lambda_8 t}}{(\lambda_9 - \lambda_8)(\lambda_7 - \lambda_8)(\lambda_6 - \lambda_8)(\lambda_5 - \lambda_8)(\lambda_4 - \lambda_8)(\lambda_3 - \lambda_8)(\lambda_2 - \lambda_8)(\lambda_1 - \lambda_8)} + \\
 & \left. \frac{e^{-\lambda_9 t}}{(\lambda_8 - \lambda_9)(\lambda_7 - \lambda_9)(\lambda_6 - \lambda_9)(\lambda_5 - \lambda_9)(\lambda_4 - \lambda_9)(\lambda_3 - \lambda_9)(\lambda_2 - \lambda_9)(\lambda_1 - \lambda_9)} \right) N_1(0) \\
 = & \left(\frac{e^{-0,66732}}{(0,602 \times 10^4)(0,57 \times 10^3)(1,37 \times 10^8)(4,25 \times 10^5)(69,51)(0,3628)(992)(0,1034)} + \right. \\
 & \frac{e^{-0,1386 \times 10^{10}}}{(6,019 \times 10^3)(5,698 \times 10^2)(1,3698 \times 10^8)(4,2499 \times 10^5)(69,4066)(0,2594)(991,897)(-0,1034)} + \\
 & \frac{e^{-0,133 \times 10^{14}}}{(6,019 \times 10^3)(-422)(1,369 \times 10^8)(4,24 \times 10^5)(-922,49)(-991,64)(-991,897)(-992)} + \\
 & \frac{e^{-0,486 \times 10^{10}}}{(5028)(5,696 \times 10^2)(1,369 \times 10^8)(4,249 \times 10^5)(69,147)(991,64)(-0,2594)(-0,3628)} + \\
 & \frac{e^{-93,14 \times 10^{10}}}{(5,95 \times 10^3)(500,49)(1,369 \times 10^8)(4,2493 \times 10^5)(-69,147)(922,49)(-69,4066)(-69,51)} + \\
 & \frac{e^{-5,69 \times 10^{15}}}{(-4,19 \times 10^5)(-4,24 \times 10^5)(1,366 \times 10^8)(-4,2493 \times 10^5)(-4,249 \times 10^5)(-4,24 \times 10^5)(-4,2499 \times 10^5)(-4,25 \times 10^5)} + \\
 & \frac{e^{-1,84 \times 10^{18}}}{(-1,369 \times 10^8)(-1,369 \times 10^8)(-1,366 \times 10^8)(-1,369 \times 10^8)(-1,369 \times 10^8)(-1,369 \times 10^8)(-1,369 \times 10^8)(-1,37 \times 10^8)} + \\
 & \frac{e^{-0,57 \times 10^3 \cdot 1,34 \times 10^{10}}}{(5450)(1,369 \times 10^8)(4,24 \times 10^5)(-500,49)(5,696 \times 10^2)(422)(5,698 \times 10^2)(-570)} + \\
 & \left. \frac{e^{-0,57 \times 10^3 \cdot 1,34 \times 10^{10}}}{(-0,602 \times 10^4)(-6,019 \times 10^3)(-6,019 \times 10^3)(-5028)(-5,95 \times 10^3)(4,19 \times 10^5)(1,369 \times 10^8)(-5450)} \right) \\
 & (0,498 \times 10^{-10} \cdot 0,1034 \cdot 0,0992 \times 10^4 \cdot 0,3628 \cdot 69,51 \cdot 4,25 \times 10^5 \cdot 1,37 \times 10^8 \cdot 0,57 \times 10^3) 1,82 \times 10^{22} \\
 = & \left(\frac{0,513}{(0,602 \times 10^4)(8,61 \times 10^{19})} + \frac{0}{(6,019 \times 10^3)(-6,09 \times 10^{19})} + \frac{0}{(6,019 \times 10^3)(-2,21 \times 10^9)} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{0}{(5028)(2,13 \times 10^{20})} + \frac{0}{(5,95 \times 10^3)(-8,96 \times 10^{24})} + \frac{0}{(-4,19 \times 10^5)(7,97 \times 10^{41})} + \\
& \frac{0}{(-1,369 \times 10^8)(-8,99 \times 10^{56})} + \frac{0}{(5450)(2,27 \times 10^{17})} + \frac{0}{(2,04 \times 10^{36})} \Big) (7,75 \times 10^{31}) \\
& = \left(\frac{0,513}{5,18 \times 10^{23}} \right) (7,75 \times 10^{31}) \\
& = (0,099 \times 10^{-23})(7,75 \times 10^{31}) \\
& = 7,67 \times 10^7 \text{ atom}
\end{aligned}$$

✚ Untuk λ_{10} berlaku pada Polonium-212 dengan $t_{1/2} = 9,51 \times 10^{-15}$ tahun

$$\begin{aligned}
\lambda_{10} &= \frac{0,693}{t_{1/2}} \\
&= \frac{0,693}{9,51 \times 10^{-15}} \\
&= 7,28 \times 10^{13}
\end{aligned}$$

Maka,

$$N'_{10} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6 \lambda_7 \lambda_8 \lambda_9$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_{10} - \lambda_1)(\lambda_9 - \lambda_1)(\lambda_8 - \lambda_1)(\lambda_7 - \lambda_1)(\lambda_6 - \lambda_1)(\lambda_5 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)} + \right. \\
& \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_{10} - \lambda_2)(\lambda_9 - \lambda_2)(\lambda_8 - \lambda_2)(\lambda_7 - \lambda_2)(\lambda_6 - \lambda_2)(\lambda_5 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)} + \\
& \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_{10} - \lambda_3)(\lambda_9 - \lambda_3)(\lambda_8 - \lambda_3)(\lambda_7 - \lambda_3)(\lambda_6 - \lambda_3)(\lambda_5 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_3)} + \\
& \frac{e^{-\lambda_4 t}}{(\lambda_{10} - \lambda_4)(\lambda_9 - \lambda_4)(\lambda_8 - \lambda_4)(\lambda_7 - \lambda_4)(\lambda_6 - \lambda_4)(\lambda_5 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_4)} + \\
& \frac{e^{-\lambda_5 t}}{(\lambda_{10} - \lambda_5)(\lambda_9 - \lambda_5)(\lambda_8 - \lambda_5)(\lambda_7 - \lambda_5)(\lambda_6 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_5)(\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_2 - \lambda_5)(\lambda_1 - \lambda_5)} + \\
& \frac{e^{-\lambda_6 t}}{(\lambda_{10} - \lambda_6)(\lambda_9 - \lambda_6)(\lambda_8 - \lambda_6)(\lambda_7 - \lambda_6)(\lambda_5 - \lambda_6)(\lambda_4 - \lambda_6)(\lambda_3 - \lambda_6)(\lambda_2 - \lambda_6)(\lambda_1 - \lambda_6)} + \\
& \frac{e^{-\lambda_7 t}}{(\lambda_{10} - \lambda_7)(\lambda_9 - \lambda_7)(\lambda_8 - \lambda_7)(\lambda_6 - \lambda_7)(\lambda_5 - \lambda_7)(\lambda_4 - \lambda_7)(\lambda_3 - \lambda_7)(\lambda_2 - \lambda_7)(\lambda_1 - \lambda_7)} + \\
& \left. \frac{e^{-\lambda_8 t}}{(\lambda_{10} - \lambda_8)(\lambda_9 - \lambda_8)(\lambda_7 - \lambda_8)(\lambda_6 - \lambda_8)(\lambda_5 - \lambda_8)(\lambda_4 - \lambda_8)(\lambda_3 - \lambda_8)(\lambda_2 - \lambda_8)(\lambda_1 - \lambda_8)} \right)
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{e^{-\lambda_9 t}}{(\lambda_{10} - \lambda_9)(\lambda_8 - \lambda_9)(\lambda_7 - \lambda_9)(\lambda_6 - \lambda_9)(\lambda_5 - \lambda_9)(\lambda_4 - \lambda_9)(\lambda_3 - \lambda_9)(\lambda_2 - \lambda_9)(\lambda_1 - \lambda_9)} + \frac{e^{-\lambda_{10} t}}{(\lambda_9 - \lambda_{10})(\lambda_8 - \lambda_{10})(\lambda_7 - \lambda_{10})(\lambda_6 - \lambda_{10})(\lambda_5 - \lambda_{10})(\lambda_4 - \lambda_{10})(\lambda_3 - \lambda_{10})(\lambda_2 - \lambda_{10})(\lambda_1 - \lambda_{10})} \right) N_1(0)$$

$$= \left(\frac{e^{-0,66732}}{(7,28 \times 10^{13})(0,602 \times 10^4)(8,61 \times 10^{19})} + \frac{e^{-0,1386 \times 10^{10}}}{(7,28 \times 10^{13})(6,019 \times 10^3)(-6,09 \times 10^{19})} + \frac{e^{-0,133 \times 10^{14}}}{(7,28 \times 10^{13})(6,019 \times 10^3)(-2,21 \times 10^9)} + \frac{e^{-0,486 \times 10^{10}}}{(7,28 \times 10^{13})(5028)(2,13 \times 10^{20})} + \frac{e^{-93,14 \times 10^{10}}}{(7,28 \times 10^{13})(5,95 \times 10^3)(-8,96 \times 10^{24})} + \frac{e^{-5,69 \times 10^{15}}}{(7,27 \times 10^{13})(-4,19 \times 10^5)(7,97 \times 10^{41})} + \frac{e^{-1,84 \times 10^{18}}}{(7,27 \times 10^{13})(-1,369 \times 10^8)(-8,99 \times 10^{56})} + \frac{e^{-0,57 \times 10^3 \cdot 1,34 \times 10^{10}}}{(7,28 \times 10^{13})(5450)(2,27 \times 10^{17})} + \frac{e^{-0,76 \times 10^{18}}}{(7,27 \times 10^{13})(2,04 \times 10^{36})} + \frac{e^{-7,28 \times 10^{13} \cdot 1,34 \times 10^{10}}}{(-9,53 \times 10^{121})} \right) (0,498 \times 10^{-10} \cdot 0,1034 \cdot 0,0992 \times 10^4 \cdot 0,3628 \cdot 69,51 \cdot 4,25 \times 10^5 \cdot 1,37 \times 10^8 \cdot 0,57 \times 10^3 \cdot 0,602 \times 10^4) 1,82 \times 10^{22}$$

$$= \left(\frac{0,513}{(7,28 \times 10^{13})(5,18 \times 10^{23})} + \frac{0}{(7,28 \times 10^{13})(-3,66 \times 10^{23})} + \frac{0}{(7,28 \times 10^{13})(-1,33 \times 10^{13})} + \frac{0}{(7,28 \times 10^{13})(1,07 \times 10^{24})} + \frac{0}{(7,28 \times 10^{13})(-5,33 \times 10^{28})} + \frac{0}{(7,27 \times 10^{13})(-3,34 \times 10^{47})} + \frac{0}{(7,27 \times 10^{13})(1,23 \times 10^{65})} + \frac{0}{(7,28 \times 10^{13})(1,24 \times 10^{21})} + \frac{0}{(7,27 \times 10^{13})(2,04 \times 10^{36})} \right)$$

$$\begin{aligned} & \left. \frac{0}{(-9,53 \times 10^{121})} \right) (4,68 \times 10^{35}) \\ &= \left(\frac{0,513}{3,77 \times 10^{37}} \right) (4,68 \times 10^{35}) \\ &= (0,14 \times 10^{-37})(4,68 \times 10^{35}) \\ &= 6,55 \times 10^{-3} \text{ atom} \end{aligned}$$

✚ Untuk λ_{11} berlaku pada Timbal-208 dengan $t_{1/2} = \ln(2) = 0,693$ tahun

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &= \frac{0,693}{t_{1/2}} \\ &= \frac{0,693}{0,693} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Maka,

$$N'_{11} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6 \lambda_7 \lambda_8 \lambda_9 \lambda_{10}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_{11} - \lambda_1)(\lambda_{10} - \lambda_1)(\lambda_9 - \lambda_1)(\lambda_8 - \lambda_1)(\lambda_7 - \lambda_1)(\lambda_6 - \lambda_1)(\lambda_5 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)} \right)^+ \\ & \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_{11} - \lambda_2)(\lambda_{10} - \lambda_2)(\lambda_9 - \lambda_2)(\lambda_8 - \lambda_2)(\lambda_7 - \lambda_2)(\lambda_6 - \lambda_2)(\lambda_5 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)}^+ \\ & \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_{11} - \lambda_3)(\lambda_{10} - \lambda_3)(\lambda_9 - \lambda_3)(\lambda_8 - \lambda_3)(\lambda_7 - \lambda_3)(\lambda_6 - \lambda_3)(\lambda_5 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_3)}^+ \\ & \frac{e^{-\lambda_4 t}}{(\lambda_{11} - \lambda_4)(\lambda_{10} - \lambda_4)(\lambda_9 - \lambda_4)(\lambda_8 - \lambda_4)(\lambda_7 - \lambda_4)(\lambda_6 - \lambda_4)(\lambda_5 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_4)}^+ \\ & \frac{e^{-\lambda_5 t}}{(\lambda_{11} - \lambda_5)(\lambda_{10} - \lambda_5)(\lambda_9 - \lambda_5)(\lambda_8 - \lambda_5)(\lambda_7 - \lambda_5)(\lambda_6 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_5)(\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_2 - \lambda_5)(\lambda_1 - \lambda_5)}^+ \\ & \frac{e^{-\lambda_6 t}}{(\lambda_{11} - \lambda_6)(\lambda_{10} - \lambda_6)(\lambda_9 - \lambda_6)(\lambda_8 - \lambda_6)(\lambda_7 - \lambda_6)(\lambda_5 - \lambda_6)(\lambda_4 - \lambda_6)(\lambda_3 - \lambda_6)(\lambda_2 - \lambda_6)(\lambda_1 - \lambda_6)}^+ \\ & \frac{e^{-\lambda_7 t}}{(\lambda_{11} - \lambda_7)(\lambda_{10} - \lambda_7)(\lambda_9 - \lambda_7)(\lambda_8 - \lambda_7)(\lambda_6 - \lambda_7)(\lambda_5 - \lambda_7)(\lambda_4 - \lambda_7)(\lambda_3 - \lambda_7)(\lambda_2 - \lambda_7)(\lambda_1 - \lambda_7)}^+ \\ & \frac{e^{-\lambda_8 t}}{(\lambda_{11} - \lambda_8)(\lambda_{10} - \lambda_8)(\lambda_9 - \lambda_8)(\lambda_7 - \lambda_8)(\lambda_6 - \lambda_8)(\lambda_5 - \lambda_8)(\lambda_4 - \lambda_8)(\lambda_3 - \lambda_8)(\lambda_2 - \lambda_8)(\lambda_1 - \lambda_8)}^+ \\ & \frac{e^{-\lambda_9 t}}{(\lambda_{11} - \lambda_9)(\lambda_{10} - \lambda_9)(\lambda_8 - \lambda_9)(\lambda_7 - \lambda_9)(\lambda_6 - \lambda_9)(\lambda_5 - \lambda_9)(\lambda_4 - \lambda_9)(\lambda_3 - \lambda_9)(\lambda_2 - \lambda_9)(\lambda_1 - \lambda_9)}^+ \\ & \frac{e^{-\lambda_{10} t}}{(\lambda_{11} - \lambda_{10})(\lambda_9 - \lambda_{10})(\lambda_8 - \lambda_{10})(\lambda_7 - \lambda_{10})(\lambda_6 - \lambda_{10})(\lambda_5 - \lambda_{10})(\lambda_4 - \lambda_{10})(\lambda_3 - \lambda_{10})(\lambda_2 - \lambda_{10})(\lambda_1 - \lambda_{10})}^+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{e^{-\lambda_{11}t}}{(\lambda_{10} - \lambda_{11})(\lambda_9 - \lambda_{11})(\lambda_8 - \lambda_{11})(\lambda_7 - \lambda_{11})(\lambda_6 - \lambda_{11})(\lambda_5 - \lambda_{11})(\lambda_4 - \lambda_{11})(\lambda_3 - \lambda_{11})(\lambda_2 - \lambda_{11})(\lambda_1 - \lambda_{11})} \right) N_1(0) \\
 = & \left(\frac{e^{-0,66732}}{(1)(7,28 \times 10^{13})(0,602 \times 10^4)(8,61 \times 10^{19})} + \right. \\
 & \frac{e^{-0,1386 \times 10^{10}}}{(0,89)(7,28 \times 10^{13})(6,019 \times 10^3)(-6,09 \times 10^{19})} + \\
 & \frac{e^{-0,133 \times 10^{14}}}{(-991)(7,28 \times 10^{13})(6,019 \times 10^3)(-2,21 \times 10^9)} + \\
 & \frac{e^{-0,486 \times 10^{10}}}{(0,64)(7,28 \times 10^{13})(5028)(2,13 \times 10^{20})} + \\
 & \frac{e^{-93,14 \times 10^{10}}}{(-68,51)(7,28 \times 10^{13})(5,95 \times 10^3)(-8,96 \times 10^{24})} + \\
 & \frac{e^{-5,69 \times 10^{15}}}{(-4,249 \times 10^5)(7,27 \times 10^{13})(-4,19 \times 10^5)(7,97 \times 10^{41})} + \\
 & \frac{e^{-1,84 \times 10^{18}}}{(-1,369 \times 10^8)(7,27 \times 10^{13})(-1,369 \times 10^8)(-8,99 \times 10^{56})} + \\
 & \frac{e^{-0,57 \times 10^3 \cdot 1,34 \times 10^{10}}}{(-569)(7,28 \times 10^{13})(5450)(2,27 \times 10^{17})} + \\
 & \frac{e^{-0,76 \times 10^{18}}}{(-6019)(7,27 \times 10^{13})(2,04 \times 10^{36})} + \\
 & \left. \frac{e^{-9,75 \times 10^{28}}}{(-7,28 \times 10^{13})(-9,53 \times 10^{121})} + \right. \\
 & \left. \frac{e^{-1,1,34 \times 10^{10}}}{(9,23 \times 10^{34})} \right) (0,498 \times 10^{-10} \cdot 0,1034 \cdot 0,0992 \times 10^4 \cdot 0,3628 \cdot 69,51 \cdot 4,25 \times 10^5 \cdot \\
 & 1,37 \times 10^8 \cdot 0,57 \times 10^3 \cdot 0,602 \times 10^4 \cdot 7,28 \times 10^{13}) 1,82 \times 10^{22} \\
 = & \left(\frac{0,513}{(1)(3,77 \times 10^{37})} + \frac{0}{(0,89)(-2,66 \times 10^{37})} + \frac{0}{(-991)(-9,68 \times 10^{26})} + \right. \\
 & \frac{0}{(0,64)(7,79 \times 10^{37})} + \frac{0}{(-68,51)(-3,88 \times 10^{42})} + \left. \frac{0}{(-4,249 \times 10^5)(-2,43 \times 10^{61})} + \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{0}{(-1,369 \times 10^8)(8,94 \times 10^{78})} + \frac{0}{(-569)(9,03 \times 10^{34})} + \frac{0}{(-6019)(1,48 \times 10^{50})} + \\
& \left. \frac{0}{(-7,28 \times 10^{13})(-9,53 \times 10^{121})} + \frac{0}{(9,23 \times 10^{34})} \right) (34,07 \times 10^{48}) \\
&= \left(\frac{0,513}{3,77 \times 10^{37}} \right) (34,07 \times 10^{48}) \\
&= (0,136 \times 10^{-37})(34,07 \times 10^{48}) \\
&= 4,63 \times 10^{11} \text{ atom}
\end{aligned}$$

Langkah 4

- Untuk λ_1 berlaku pada Thorium-232 dengan $t_{1/2} = 1,39 \times 10^{10}$ tahun

$$\begin{aligned}
m'_1 &= Mr \times \frac{N'_1}{N_A} \\
&= 232 \times \frac{9,34 \times 10^{21}}{6,0221367 \times 10^{23}} \\
&= 232 (0,155 \times 10^{-1}) \\
&= 3,596 \text{ gram}
\end{aligned}$$

- Untuk λ_2 berlaku pada Radium-228 dengan $t_{1/2} = 6,7$ tahun

$$\begin{aligned}
m'_2 &= Mr \times \frac{N'_2}{N_A} \\
&= 228 \times \frac{4,49 \times 10^{12}}{6,0221367 \times 10^{23}} \\
&= 228 (0,747 \times 10^{-11}) \\
&= 1,71 \times 10^{-9} \text{ gram}
\end{aligned}$$

- Untuk λ_3 berlaku pada Actinium-228 dengan $t_{1/2} = 6,988 \times 10^{-4}$ tahun

$$m'_3 = Mr \times \frac{N'_3}{N_A}$$

$$\begin{aligned}
 &= 228 \times \frac{4,686 \times 10^8}{6,0221367 \times 10^{23}} \\
 &= 228 (0,778 \times 10^{-15}) \\
 &= 1,77 \times 10^{-13} \text{ gram}
 \end{aligned}$$

- Untuk λ_4 berlaku pada Thorium-228 dengan $t_{1/2} = 1,91$ tahun

$$\begin{aligned}
 m'_4 &= Mr \times \frac{N'_4}{N_A} \\
 &= 228 \times \frac{1,28 \times 10^{12}}{6,0221367 \times 10^{23}} \\
 &= 228 (0,21 \times 10^{-11}) \\
 &= 4,78 \times 10^{-10} \text{ gram}
 \end{aligned}$$

- Untuk λ_5 berlaku pada Radium-224 dengan $t_{1/2} = 9,97 \times 10^{-3}$ tahun

$$\begin{aligned}
 m'_5 &= Mr \times \frac{N'_5}{N_A} \\
 &= 224 \times \frac{6,68 \times 10^9}{6,0221367 \times 10^{23}} \\
 &= 224 (1,11 \times 10^{-14}) \\
 &= 2,49 \times 10^{-12} \text{ gram}
 \end{aligned}$$

- Untuk λ_6 berlaku pada Radon-220 dengan $t_{1/2} = 1,63 \times 10^{-6}$ tahun

$$\begin{aligned}
 m'_6 &= Mr \times \frac{N'_6}{N_A} \\
 &= 220 \times \frac{1,09 \times 10^6}{6,0221367 \times 10^{23}} \\
 &= 220 (0,18 \times 10^{-17}) \\
 &= 3,96 \times 10^{-16} \text{ gram}
 \end{aligned}$$

- Untuk λ_7 berlaku pada Polonium-216 dengan $t_{1/2} = 5,074 \times 10^{-9}$ tahun

$$m'_7 = Mr \times \frac{N'_7}{N_A}$$

$$\begin{aligned}
 &= 216 \times \frac{3,38 \times 10^3}{6,0221367 \times 10^{23}} \\
 &= 216 (0,56 \times 10^{-20}) \\
 &= 1,21 \times 10^{-18} \text{ gram}
 \end{aligned}$$

- Untuk λ_8 berlaku pada Timbal-212 dengan $t_{1/2} = 1,208 \times 10^{-3}$ tahun

$$\begin{aligned}
 m'_8 &= Mr \times \frac{N'_8}{N_A} \\
 &= 212 \times \frac{8,02 \times 10^8}{6,0221367 \times 10^{23}} \\
 &= 212 (1,33 \times 10^{-15}) \\
 &= 2,82 \times 10^{-13} \text{ gram}
 \end{aligned}$$

- Untuk λ_9 berlaku pada Bismut-212 dengan $t_{1/2} = 1,15 \times 10^{-4}$ tahun

$$\begin{aligned}
 m'_9 &= Mr \times \frac{N'_9}{N_A} \\
 &= 212 \times \frac{7,67 \times 10^7}{6,0221367 \times 10^{23}} \\
 &= 212 (1,27 \times 10^{-16}) \\
 &= 2,69 \times 10^{-14} \text{ gram}
 \end{aligned}$$

- Untuk λ_{10} berlaku pada Polonium-212 dengan $t_{1/2} = 9,51 \times 10^{-15}$ tahun

$$\begin{aligned}
 m'_{10} &= Mr \times \frac{N'_{10}}{N_A} \\
 &= 212 \times \frac{6,55 \times 10^{-3}}{6,0221367 \times 10^{23}} \\
 &= 212 (1,09 \times 10^{-26}) \\
 &= 2,31 \times 10^{-24} \text{ gram}
 \end{aligned}$$

- Untuk λ_{11} berlaku pada Timbal-208 dengan $t_{1/2} = \log(2) = 0,693$ tahun

$$m'_{11} = Mr \times \frac{N'_{11}}{N_A}$$

$$\begin{aligned}
 &= 208 \times \frac{4,63 \times 10^{11}}{6,0221367 \times 10^{23}} \\
 &= 208 (0,77 \times 10^{-12}) \\
 &= 1,60 \times 10^{-10} \text{ gram}
 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh data sebagai berikut :

No.	Nuklida	Waktu Paruh (tahun)	N_t (atom)	m (gram)
1.	Thorium-232	$1,39 \times 10^{10}$	$9,34 \times 10^{21}$	3,596
2.	Radium-228	6,7	$4,49 \times 10^{12}$	$1,702 \times 10^{-9}$
3.	Actinium-228	$6,988 \times 10^{-4}$	$4,68 \times 10^8$	$1,774 \times 10^{-13}$
4.	Thorium-228	1,91	$1,28 \times 10^{12}$	$4,78 \times 10^{-10}$
5.	Radium-224	$9,97 \times 10^{-3}$	$6,68 \times 10^9$	$2,49 \times 10^{-12}$
6.	Radon-220	$1,63 \times 10^{-6}$	$1,09 \times 10^6$	$3,96 \times 10^{-16}$
7.	Polonium-216	$5,074 \times 10^{-9}$	$3,38 \times 10^3$	$1,21 \times 10^{-18}$
8.	Timbal-212	$1,208 \times 10^{-3}$	$8,02 \times 10^8$	$2,82 \times 10^{-13}$
9.	Bismut-212	$1,15 \times 10^{-4}$	$7,67 \times 10^7$	$2,69 \times 10^{-14}$
10.	Polonium-212	$9,51 \times 10^{-15}$	$6,55 \times 10^3$	$2,31 \times 10^{-24}$
11.	Timbal-208	0,693	$4,63 \times 10^{11}$	$1,60 \times 10^{-10}$


```
A = -diag(lambda)+diag(lambda(1:(end-1)),-1)
```

```
A =
```

```
1.0e+13 *
```

```
Columns 1 through 6
```

```

-0.0000    0    0    0    0    0
 0.0000  -0.0000    0    0    0    0
    0    0.0000  -0.0000    0    0    0
    0    0    0.0000  -0.0000    0    0
    0    0    0    0.0000  -0.0000    0
    0    0    0    0    0.0000  -0.0000
    0    0    0    0    0    0.0000
    0    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0

```

```
Columns 7 through 11
```

```

    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0
-0.0000    0    0    0    0
 0.0000  -0.0000    0    0    0
    0    0.0000  -0.0000    0    0
    0    0    0.0000  -7.2886    0
    0    0    0    7.2886  -0.0000

```

```
[V,D] = eig(A)
```

```
V =
```

```
Columns 1 through 6
```

```

    0    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0.7055
    0    0    0    0    0.7071  0.0022

```

0	0	0	0.6686	-0.7071	-0.7087
0	0	0.7070	0.0703	0.0000	0.0010
0	0.7071	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.0000	-0.7071	-0.7072	-0.7403	-0.0000	-0.0000

Columns 7 through 11

0	0	0	0	1.0000
0	0	0	0.9186	0.0000
0	0	0.7070	0.0001	0.0000
0	0.8676	-0.7072	0.3663	0.0000
0.6477	0.0046	0.0003	0.0019	0.0000
0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0893	0.0006	-0.0000	0.0002	0.0000
0.0086	0.0001	-0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000
-0.7566	0.4972	0.0000	0.1485	0.0000

D =

1.0e+13 *

Columns 1 through 6

-0.0000	0	0	0	0	0
0	-7.2886	0	0	0	0
0	0	-0.0000	0	0	0
0	0	0	-0.0000	0	0
0	0	0	0	-0.0000	0
0	0	0	0	0	-0.0000
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Columns 7 through 11

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

```

0          0          0          0          0
-0.0000    0          0          0          0
0    -0.0000    0          0          0
0          0    -0.0000    0          0
0          0          0    -0.0000    0
0          0          0          0    -0.0000

```

```
%Mencari jumlah atom peluruhan
```

```
Nt = V*diag(inv(V)*N0)*exp(D*repmat(t,length(N0),1))
```

```
Nt =
```

```
1.0e+22 *
```

```
Columns 1 through 6
```

```

1.8170    1.8048    1.7927    1.7806    1.7686    1.7567
-0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
-0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0          0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0          0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000

```

```
Columns 7 through 12
```

```

1.7449    1.7332    1.7215    1.7099    1.6984    1.6870
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000

```

```
Columns 13 through 18
```

```

1.6757    1.6644    1.6532    1.6421    1.6310    1.6200
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000

```

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 19 through 24

1.6092	1.5983	1.5876	1.5769	1.5663	1.5558
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 25 through 30

1.5453	1.5349	1.5246	1.5143	1.5041	1.4940
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 31 through 36

1.4840	1.4740	1.4641	1.4542	1.4444	1.4347
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 73 through 78

1.1176	1.1101	1.1027	1.0952	1.0879	1.0806
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 79 through 84

1.0733	1.0661	1.0589	1.0518	1.0447	1.0377
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 85 through 90

1.0307	1.0238	1.0169	1.0100	1.0032	0.9965
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 91 through 96

0.9898	0.9831	0.9765	0.9699	0.9634	0.9569
--------	--------	--------	--------	--------	--------

```

0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000

```

Columns 97 through 100

```

0.9505    0.9441    0.9378    0.9314
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000

```

```

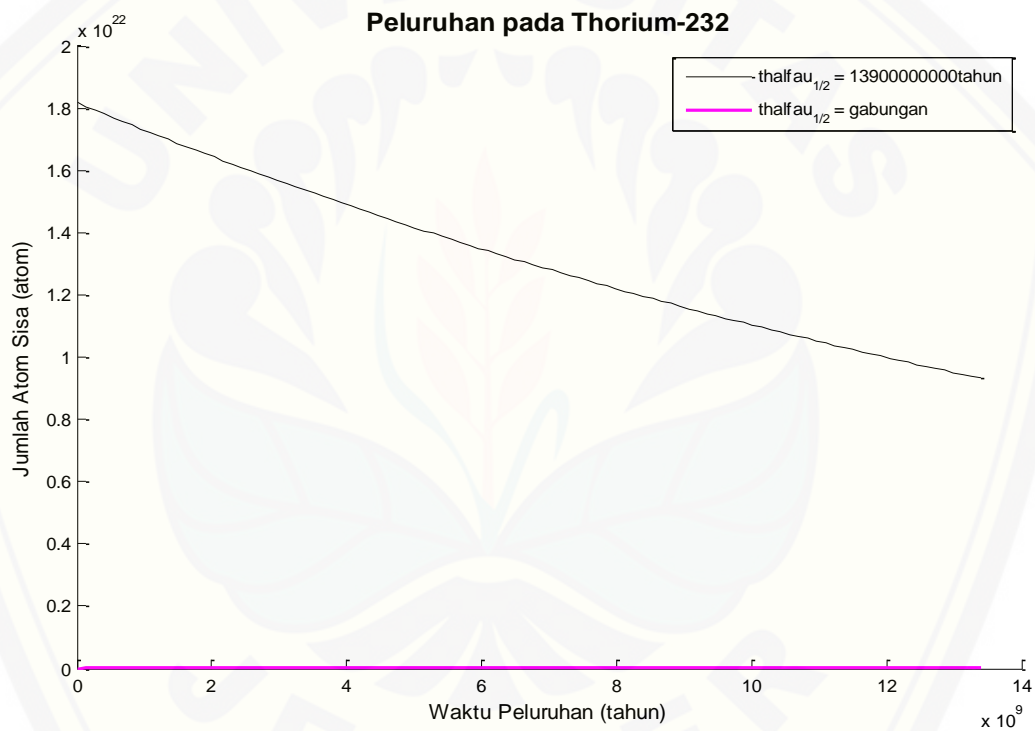
%Misal
a = thalf;
hold on
plot(t,Nt(1,:), 'k-', 'LineWidth', 1)
plot(t,Nt(2,:), 'b-', 'LineWidth', 1)
plot(t,Nt(3,:), 'r-', 'LineWidth', 1)
plot(t,Nt(4,:), 'm-', 'LineWidth', 1)
plot(t,Nt(5,:), 'g-', 'LineWidth', 1)
plot(t,Nt(6,:), 'c-', 'LineWidth', 1)
plot(t,Nt(7,:), 'y-', 'LineWidth', 1)
plot(t,Nt(8,:), 'k-', 'LineWidth', 1)
plot(t,Nt(9,:), 'b-', 'LineWidth', 1)
plot(t,Nt(10,:), 'r-', 'LineWidth', 1)
plot(t,Nt(11,:), 'm-', 'LineWidth', 1)

hold off
title('Peluruhan pada Thorium-232','fontsize',12)
xlabel('Waktu Peluruhan (tahun)','fontsize',10)
ylabel('Jumlah Atom Sisa (atom)','fontsize',10)
set(gca, 'fontsize',8)
legend(['thalfau_{1/2} = ' num2str(a(1))
'tahun'], ['thalfau_{1/2} = ' num2str(a(2))

```

```
'tahun'],['thalfau_{1/2} = ' num2str(a(3))
'tahun'],['thalfau_{1/2} = ' num2str(a(4))
'tahun'],['thalfau_{1/2} = ' num2str(a(5))
'tahun'],['thalfau_{1/2} = ' num2str(a(6))
'tahun'],['thalfau_{1/2} = ' num2str(a(7))
'tahun'],['thalfau_{1/2} = ' num2str(a(8))
'tahun'],['thalfau_{1/2} = ' num2str(a(9))
'tahun'],['thalfau_{1/2} = ' num2str(a(10))
'tahun'],['thalfau_{1/2} = stabil']])
```

%Grafik gabungan hubungan jumlah atom dengan waktu peluruhan



%Grafik Nuklida anak 2,4,11

```
hold on
plot(t,Nt(2,:), 'b-', 'LineWidth', 1)
plot(t,Nt(4,:), 'm-', 'LineWidth', 1)
plot(t,Nt(11,:), 'm-', 'LineWidth', 1)
hold off
title('Peluruhan pada Thorium-232','fontsize',12)
xlabel('Waktu Peluruhan (tahun)','fontsize',10)
ylabel('Jumlah Atom Sisa (atom)','fontsize',10)
set(gca, 'fontsize',8)
```

```
legend(['thalfau_{1/2} = ' num2str(a(2))
'tahun'], ['thalfau_{1/2} = ' num2str(a(4))
'tahun'], ['thalfau_{1/2} = stabil'])

%Grafik Nuklida anak 3,5,8
hold on
plot(t,Nt(3,:), 'r-', 'LineWidth', 1)
plot(t,Nt(5,:), 'g-', 'LineWidth', 1)
plot(t,Nt(8,:), 'k-', 'LineWidth', 1)
hold off
title('Peluruhan pada Thorium-232','fontsize',12)
xlabel('Waktu Peluruhan (tahun)','fontsize',10)
ylabel('Jumlah Atom Sisa (atom)','fontsize',10)
set(gca, 'fontsize',8)
legend(['thalfau_{1/2} = ' num2str(a(3))
'tahun'], ['thalfau_{1/2} = ' num2str(a(5))
'tahun'], ['thalfau_{1/2} = ' num2str(a(8)) 'tahun'])

%Grafik Nuklida anak 6
hold on
plot(t,Nt(6,:), 'c-', 'LineWidth', 1)
hold off
title('Peluruhan pada Thorium-232','fontsize',12)
xlabel('Waktu Peluruhan (tahun)','fontsize',10)
ylabel('Jumlah Atom Sisa (atom)','fontsize',10)
set(gca, 'fontsize',8)
legend(['thalfau_{1/2} = ' num2str(a(6)) 'tahun'])

%Grafik Nuklida anak 7
hold on
plot(t,Nt(7,:), 'y-', 'LineWidth', 1)
hold off
title('Peluruhan pada Thorium-232','fontsize',12)
xlabel('Waktu Peluruhan (tahun)','fontsize',10)
ylabel('Jumlah Atom Sisa (atom)','fontsize',10)
set(gca, 'fontsize',8)
legend(['thalfau_{1/2} = ' num2str(a(7)) 'tahun'])

%Grafik nuklida anak 9
hold on
plot(t,Nt(9,:), 'b-', 'LineWidth', 1)
hold off
title('Peluruhan pada Thorium-232','fontsize',12)
xlabel('Waktu Peluruhan (tahun)','fontsize',10)
ylabel('Jumlah Atom Sisa (atom)','fontsize',10)
set(gca, 'fontsize',8)
legend(['thalfau_{1/2} = ' num2str(a(9)) 'tahun'])
%Grafik Nuklida anak 10
hold on
plot(t,Nt(10,:), 'r-', 'LineWidth', 1)
hold off
```


Columns 19 through 24

6.1992	6.1575	6.1161	6.0749	6.0340	5.9935
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 25 through 30

5.9531	5.9131	5.8733	5.8338	5.7946	5.7556
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 31 through 36

5.7169	5.6784	5.6402	5.6023	5.5646	5.5272
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 37 through 42

5.4900	5.4530	5.4164	5.3799	5.3437	5.3078
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 43 through 48

5.2721	5.2366	5.2014	5.1664	5.1316	5.0971
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 49 through 54

5.0628	5.0288	4.9950	4.9614	4.9280	4.8948
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 55 through 60

4.8619	4.8292	4.7967	4.7644	4.7324	4.7006
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Columns 61 through 66

4.6689	4.6375	4.6063	4.5753	4.5446	4.5140
--------	--------	--------	--------	--------	--------


```
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
```

```
Columns 85 through 90
```

```
3.9707    3.9440    3.9175    3.8911    3.8649    3.8389
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
```

```
Columns 91 through 96
```

```
3.8131    3.7875    3.7620    3.7367    3.7115    3.6866
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
```

```
Columns 97 through 100
```

```
3.6618    3.6371    3.6127    3.5884
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
```

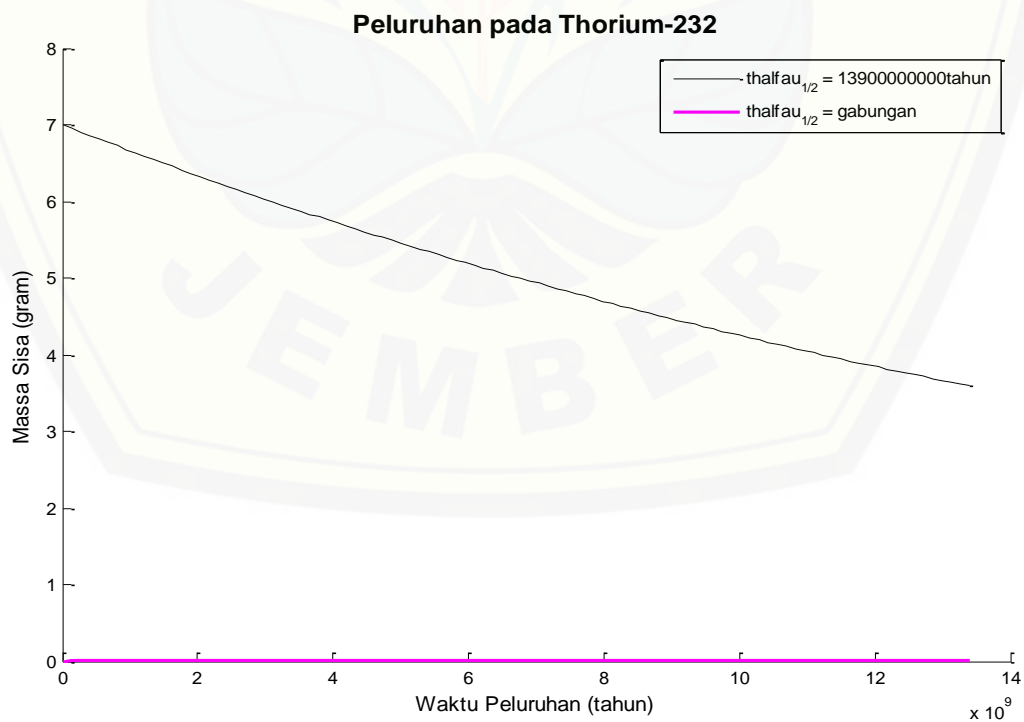
```
hold on
plot(t,M(1,:), 'k-', 'LineWidth', 1)
plot(t,M(2,:), 'b-', 'LineWidth', 1)
plot(t,M(3,:), 'r-', 'LineWidth', 1)
plot(t,M(4,:), 'm-', 'LineWidth', 1)
plot(t,M(5,:), 'g-', 'LineWidth', 1)
plot(t,M(6,:), 'c-', 'LineWidth', 1)
```

```

plot(t,M(7,:), 'y-', 'LineWidth', 1)
plot(t,M(8,:), 'k-', 'LineWidth', 1)
plot(t,M(9,:), 'b-', 'LineWidth', 1)
plot(t,M(10,:), 'r-', 'LineWidth', 1)
plot(t,M(11,:), 'm-', 'LineWidth', 1)
hold off
title('Peluruhan pada Thorium-232','fontsize',12)
xlabel('Waktu Peluruhan (tahun)','fontsize',10)
ylabel('Massa Sisa (gram)','fontsize',10)
set(gca, 'fontsize',8)
legend(['thalfau_{1/2} = ' num2str(a(1))
'tahun'], ['thalfau_{1/2} = ' num2str(a(2))
'tahun'], ['thalfau_{1/2} = ' num2str(a(3))
'tahun'], ['thalfau_{1/2} = ' num2str(a(4))
'tahun'], ['thalfau_{1/2} = ' num2str(a(5))
'tahun'], ['thalfau_{1/2} = ' num2str(a(6))
'tahun'], ['thalfau_{1/2} = ' num2str(a(7))
'tahun'], ['thalfau_{1/2} = ' num2str(a(8))
'tahun'], ['thalfau_{1/2} = ' num2str(a(9))
'tahun'], ['thalfau_{1/2} = ' num2str(a(10))
'tahun'], ['thalfau_{1/2} = stabil'])

```

%Grafik gabungan hubungan massa atom dengan waktu peluruhan



%Grafik nuklida 2,4,11

```
hold on
plot(t,M(2,:), 'b-', 'LineWidth', 1)
plot(t,M(4,:), 'm-', 'LineWidth', 1)
plot(t,M(11,:), 'm-', 'LineWidth', 1)
hold off
title('Peluruhan pada Thorium-232','fontsize',12)
xlabel('Waktu Peluruhan (tahun)','fontsize',10)
ylabel('Massa Sisa (gram)','fontsize',10)
set(gca, 'fontsize',8)
legend(['thalfau_{1/2} = ' num2str(a(2))
'tahun'], ['thalfau_{1/2} = ' num2str(a(4))
'tahun'], ['thalfau_{1/2} = stabil'])

%Grafik Nuklida anak 3,5,8,9
hold on
plot(t,M(3,:), 'r-', 'LineWidth', 1)
plot(t,M(5,:), 'g-', 'LineWidth', 1)
plot(t,M(8,:), 'k-', 'LineWidth', 1)
plot(t,M(9,:), 'b-', 'LineWidth', 1)
hold off
title('Peluruhan pada Thorium-232','fontsize',12)
xlabel('Waktu Peluruhan (tahun)','fontsize',10)
ylabel('Massa Sisa (gram)','fontsize',10)
set(gca, 'fontsize',8)
legend(['thalfau_{1/2} = ' num2str(a(3))
'tahun'], ['thalfau_{1/2} = ' num2str(a(5))
'tahun'], ['thalfau_{1/2} = ' num2str(a(8))
'tahun'], ['thalfau_{1/2} = ' num2str(a(9)) 'tahun'])

%Grafik Nuklida anak 6
hold on
plot(t,M(6,:), 'c-', 'LineWidth', 1)
hold off
title('Peluruhan pada Thorium-232','fontsize',12)
xlabel('Waktu Peluruhan (tahun)','fontsize',10)
ylabel('Massa Sisa (gram)','fontsize',10)
set(gca, 'fontsize',8)
legend(['thalfau_{1/2} = ' num2str(a(6)) 'tahun'])

%Grafik Nuklida anak 7
hold on
plot(t,M(7,:), 'y-', 'LineWidth', 1)
hold off
title('Peluruhan pada Thorium-232','fontsize',12)
xlabel('Waktu Peluruhan (tahun)','fontsize',10)
ylabel('Massa Sisa (gram)','fontsize',10)
set(gca, 'fontsize',8)
legend(['thalfau_{1/2} = ' num2str(a(7)) 'tahun'])

%Grafik Nuklida anak 10
```

```
hold on
plot(t,M(10,:), 'r-', 'LineWidth', 1)
hold off
title('Peluruhan pada Thorium-232','fontsize',12)
xlabel('Waktu Peluruhan (tahun)','fontsize',10)
ylabel('Massa Sisa (gram)','fontsize',10)
set(gca, 'fontsize',8)
legend(['thalfau_{1/2} = ' num2str(a(10)) 'tahun'])
```

