KOMUTATOR OPERATOR MOMENTUM SUDUT TERHADAP HAMILTONIAN PARTIKEL BEBAS

SKRIPSI

Oleh:
Amirah Farhanah Sugihartin
NIM 160210102003

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN FISIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MIPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER
2020

KOMUTATOR OPERATOR MOMENTUM SUDUT TERHADAP HAMILTONIAN PARTIKEL BEBAS

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Studi Pendidikan Fisika (S1)
dan mencapai gelar Sarjana Pendidikan

Oleh:
Amirah Farhanah Sugihartin
NIM 160210102003

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN FISIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MIPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER
2020

PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan untuk:

1. Ayahanda Sugiarto dan ibunda Siti Djuharija tercinta
2. Guru-guru saya sejak taman kanak-kanak hingga perguruan tinggi
3. Almamater Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember

MOTO

Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai kesanggupannya
(Terjemahan Q.S Al Baqarah: 148)*)

*) Departemen Agama Republik Indonesia. 2017. *Al-Qur'anulkarim terjemahan dan 319 tafsir tematik*. Bandung: Cordoba Internasional Indonesia.

PERNYATAAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama : Amirah Farhanah Sugihartin

NIM : 160210102003

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa karya ilmiah yang berjudul "Komutator Operator Momentum Sudut terhadap Hamiltonian Partikel Bebas" adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi mana pun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak mana pun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Januari 2020
Yang menyatakan,

Amirah Farhanah Sugihartin
NIM 160210102003

SKRIPSI

KOMUTATOR OPERATOR MOMENTUM SUDUT TERHADAP HAMILTONIAN PARTIKEL BEBAS

Oleh

Amirah Farhanah Sugihartin
NIM 160210102003

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Drs. Bambang Supriadi, M.Sc

Dosen Pembimbing Anggota : Drs. Albertus Djoko Lesmono, M.Si

PENGESAHAN

Skripsi berjudul "Komutator Operator Momentum Sudut Terhadap Hamiltonian Pertikel Bebas" karya Amirah Farhanah Sugihartin telah diuji dan disahkan pada:

Hari, tanggal :

Tempat : Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Tim Penguji:

Ketua,	Sekretaris,
Drs. Bambang Supriadi, M.Sc NIP 196807101993021001	Drs. Albertus Djoko Lesmono, M.Si NIP. 196412301993021001
Anggota I,	Anggota II,
Drs. Trapsilo Prihandono, M.Si NIP 196204011987021001	Dr. Agus Abdul Gani, M.Si NIP 195708011984031004

Mengesahkan
Dekan,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.
NIP 196808021993031004

RINGKASAN

Komutator Operator Momentum Sudut Terhadap Hamiltonian Partikel Bebas; Amirah Farhanah Sugihartin; 160210102003; 2019; 29 Halaman; Program Studi Pendidikan Fisika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember.

Pengukuran dalam mekanika kuantum umumnya bersifat tidak komut, artinya pengukuran dua variabel dinamik atau lebih tidak dapat dilakukan secara bersamaan. Variabel dinamik dalam mekanika kuantum direpresentasikan dengan operator. Pengukuran dua atau lebih operator dilakukan dengan menggunakan metode komutator. Operator momentum sudut dan Hamiltonian merupakan contoh operator dalam mekanika kuantum yang diukur menggunakan pendekatan matematis berupa hubungan komutasi. Operator momentum sudut memiliki peran penting dalam mengkaji persoalan mekanika kuantum seperti model atom hidrogen Bohr, pergerakan elektron dalam atom, rotasi molekuler, pergerakan nukleon dalam reaksi termonuklir, dan lain-lain. Penelitian ini dilaksanakan untuk menganalisis hubungan komutasi antara komponen operator momentum sudut dengan Hamiltonian partikel bebas.

Jenis penelitian ini adalah *basic research* berupa pengembangan teori mekanika kuantum khususnya pada pokok bahasan komutator operator momentum sudut terhadap Hamiltonian partikel bebas. Pelitian ini dilaksanakan di Laboratorium Fisika Lanjut. Program Studi Pendidikan Fisika Universitas Jember pada semester ganjil tahun ajaran 2019/2020. Tahapan yang dilaksanakan dalam penelitian ini antara lain tahap persiapan, tahap pengembangan teori, tahap validasi hasil pengembangan teori, dan tahap hasil. Literatur yang digunakan dalam penelitian ini adalah buku, jurnal, serta artikel-artikel dari internet baik yang berskala nasional maupun internasional yang relavan dengan topik penelitian. Pengambilan data dilakukan dengan menghitung komutator operator momentum sudut terhadap Hamiltonian yang dikenakan pada fungsi gelombang partikel bebas

yang memenuhi persoalan eigen. Kemudian data hasil penelitian dianalisis untuk mengetahui hubungan komutasi antara kedua operator tersebut.

Data hasil penelitian menunjukkan bahwa hasil perhitungan komutator komponen momentum sudut $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z, \hat{L}_+$, dan $\hat{L}_-$ terhadap operator Hamiltonian bernilai nol atau komut. Sedangkan hasil perhitungan komutator komponen momentum sudut kuadrat $\hat{L}_x{}^2$, $\hat{L}_y{}^2$, $\hat{L}_z{}^2$, $\hat{L}^2$, $L_+{}^2$ dan $L_-{}^2$ terhadap operator Hamiltonian bernilai tidak nol atau tidak komut. Berdasarkan postulat mekanika kuantum tentang tetapan gerak, dapat disimpulkan bahwa komponen momentum sudut $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z, \hat{L}_+, \hat{L}_-$ merupakan tetapan gerak dan komponen momentum sudut kuadrat $\hat{L}_x{}^2, \hat{L}_y{}^2, \hat{L}_z{}^2, \hat{L}^2, L_+{}^2$ $L_-{}^2$ bukan merupakan tetapan gerak.

PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Allah SWT. atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Komutator Operator Momentum Sudut terhadap Hamiltonian Partikel Bebas”. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan Pendidikan strata satu (S1) pada program studi Pendidikan Fisika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D., selaku Dekan FKIP yang telah memberikan kemudahan administrasi dalam penulisan skripsi ini;
2. Dr. Dwi Wahyuni, M.Kes. selaku Ketua Jurusan Pendidikan MIPA yang telah memberikan kemudahan administrasi dalam penulisan skripsi ini;
3. Drs. Bambang Supriadi, M.Sc., selaku Ketua Program Studi Pendidikan Fisika yang telah memberikan kemudahan administrasi dalam penulisan skripsi ini;
4. Drs. Alex Harijanto, M.Si., selaku Ketua Laboratorium Program Studi Pendidikan Fisika yang telah menyediakan fasilitas dan memberikan layanan terbaik kepada peneliti dalam pengambilan data penelitian.
5. Drs. Bambang Supriadi, M.Sc., selaku Dosen Pembimbing Utama dan Ketua Program Studi Pendidikan Fisika; Drs. Albertus Djoko Lesmono, M.Si., selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
6. Drs. Trapsilo Prihandono, M.Si, selaku Dosen Penguji Utama; Dr. Agus Abdul Gani, M.Si, Selaku Dosen Penguji Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
7. Dr. Sudarti, M. Kes., selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah membimbing selama penulis menjadi mahasiswa;
8. Bapak Sugiarto dan Ibu Siti Djuharija yang telah memberikan dorongan dan doanya demi terselesaikannya skripsi ini;

9. Keluarga besar Pendidikan Fisika Angkatan 2016 yang telah memberikan bantuan dan dukungan baik dalam bentuk doa, tenaga, pikiran, dan waktu.
10. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Januari 2020

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Perkembangan fisika kuantum diawali pada tahun 1900 yaitu saat Max Planck mengemukakan gagasannya tentang konsep kuantum energi. Selanjutnya Albert Einstein menjelaskan fenomena efek fotolistrik dengan mengembangkan konsep Max Planck tentang gelombang elektromagnetik. Berdasarkan konsep Max Planck dan postulat Einstein, Niels Bohr juga mengemukakan teori tentang model atom hidrogen pada tahun 1913. Pada tahun 1923, Arthur H. Compton melakukan percobaan yang dikenal dengan efek Compton menunjukkan bahwa sinar-X memiliki perilaku seperti partikel yang memiliki momentum sebesar $hf/\boldsymbol{c}$ dengan f merupakan frekuensi dari sinar-X (Zettili, 2009: 3). Berdasarkan percobaan tersebut, Compton berasumsi bahwa gelombang cahaya dapat berperilaku seperti partikel. Setahun kemudian, de Broglie mengajukan disertasi untuk membuktikan kebenaran asumsi Compton. Dalam disertasinya, de Broglie mengemukakan hipotesis mengenai dualisme gelombang-materi berdasarkan prinsip kesimetrian alam (Sugiyono, 2016: 145). Gagasan-gagasan tersebut menjadi dasar bagi Heisenberg dan Schrodinger untuk merumuskan teori mekanika kuantum.

Mekanika kuantum didasari oleh gagasan utama yang berupa postulat-postulat, diantaranya representasi keadaan, representasi observabel (variable dinamik), nilai ekspektasi pengukuran, dan dinamika sistem kuantum (Sani dan Kadri, 2017: 111). Postulat representasi observabel merupakan dasar penggunaan operator linier sebagai representasi dari setiap observable dalam tinjauan mekanika kuantum. Observabel yang umum digunakan untuk meninjau suatu keadaan adalah posisi, momentum linier, momentum sudut, dan energi. Pengukuran observabel dalam mekanika kuantum dilakukan dengan cara mengenakan suatu operator terhadap suatu fungsi keadaan sistem fisis yang akan diukur. Fungsi keadaan yang dikenai oleh suatu operator akan berubah menjadi fungsi keadaan lain (Purwanto 2016: 168).

Pengukuran dalam fisika kuantum umumnya bersifat tidak komut artinya, pengukuran dua observabel atau lebih tidak dapat dilakukan secara bersamaan. Ketika sifat gelombang dari suatu observabel ketelitiannya lebih tinggi maka sifat partikel observabel ketelitiannya akan rendah. Sebaliknya, jika sifat partikel dari suatu observabel ketelitiannya lebih tinggi maka sifat gelombang observabel ketelitiannya akan rendah sehingga pengukuran dua observabel atau lebih dilakukan menggunakan komutator. Pengukuran momentum dan posisi merupakan salah satu contoh pengukuran yang bersifat tidak komut. Operator momentum direpresentasikan dengan $-i\hbar\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}$ dan Operator posisi direpresentasikan dengan $\hat{\boldsymbol{x}}$ (Levi, 2003: 246).

Komutator dapat mempunyai arti fisis atau bermakna jika operator tersebut dikenakan pada suatu fungsi Schrodinger, yang merupakan solusi dari persamaan Schrodinger yang dibangun dari keadaan partikel tersebut. Persamaan Schrodinger adalah persamaan differensial orde kedua sembarang, tetapi harus taat pada hukum kekekalan energy, hipotesa de Broglie serta berperilaku baik (berhingga, tunggal, dan bersifat kontinu) (Supriadi *et al*., 2018). Persamaan ini dapat digunakan untuk meninjau sistem dalam skala mikroskopik, makroskopik, bintang, maupun alam semesta.

Partikel bebas tidak dipengaruhi oleh gaya apa pun dalam pergerakannya ($\sum \boldsymbol{F} = 0$). Berdasarkan hubungan $\boldsymbol{F} = -\frac{dV}{d\boldsymbol{r}}$, jika nilai resultan gaya yang bekerja pada suatu partikel sama dengan nol maka energi potensial yang bekerja pada partikel tersebut dapat merupakan suatu konstanta (Krane, 2012: 145) atau dapat bernilai 0 juga sesuai dengan aturan integrasi. Casati *et al* (2018) menyatakan bahwa operator Hamiltonian merepresentasikan penjumlahan total energi kinetik dan potensial partikel-partikel dalam suatu sistem fisis sehingga jika energi potensial bernilai nol maka operator Hamiltonian dalam persamaan Schrodinger hanya merepresentasikan energi kinetik partikel bebas.

Terdapat beberapa penelitian terdahulu mengenai komutator operator momentum sudut dan Hamiltonian antara lain: Supriadi *et al.* (2019) menyimpulkan bahwa operator momentum sudut L_x, L_y, L_z tergolong dalam gerak konstan karena komutator antara operator momentum sudut L_x, L_y, L_z terhadap Hamiltonian bersifat komut; Mei dan Yu (2012) menyimpulkan bahwa jika operator dikenakan pada fungsi non Eigen maka akan dihasilkan nilai non Eigen dan harga espektasi momentum berupa bilangan kompleks; Liu *et al.* (2010) menyimpulkan bahwa operator momentum sudut naik (*raising*) dan turun (*lowering*) dalam fungsi harmonik bola pada keadaan dasar dapat mempengaruhi nilai dari bilangan kuantum momentum sudut orbital; Enk dan Nienhuis (1994) menyimpulkan bahwa operator momentum sudut total **J** taat pada aturan komutasi, sedangkan operator momentum sudut spin **S** dan orbital **L** tidak taat pada aturan komutasi sehingga kedua operator momentum sudut tersebut harus diukur secara terpisah.

Berdasarkan uraian di atas, dapat dikatakan bahwa operator momentum sudut dan Hamiltonian memiliki peran penting dalam mekanika kuantum. Operator momentum sudut sering digunakan untuk meninjau sistem kuantum terutama pada sistem yang berbentuk menyerupai bola seperti model atom hidrogen Bohr. Selain itu, momentum sudut juga sering digunakan untuk meninjau gerakan elektron dalam atom, rotasi molekuler, gerakan nukleon dalam reaksi nuklir, dan lain sebagainya. Namun dalam tinjauan mekanika kuantum, momentum sudut dan Hamiltonian partikel bebas hanya dapat diukur secara matematis menggunakan metode komutator. Oleh sebab itu penelitian dengan judul Komutator Operator Momentum Sudut terhadap Hamiltonian Partikel Bebas perlu dilakukan.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas maka rumusan masalah dari penelitian ini adalah bagaimana hubungan antara komponen operator momentum sudut dengan Hamiltonian partikel bebas?

1.3 Batasan Masalah

Agar kajian rumusan masalah dalam penelitian ini lebih terfokus maka penulis membatasi masalah sebagai berikut:

a. Persamaan Schrodinger yang digunakan dalam keadaan tunak (tidak bergantung waktu).
b. Fungsi gelombang tidak ternormalisasi.
c. Operator momentum sudut dalam koordinat kartesian agar bersifat umum dan mudah ditransformasi ke koordinat lain.
d. Komutator momentum sudut dan Hamiltonian minimal masing-masing menggunakan dua buah operator agar dapat memenuhi aturan komutasi.
e. Berlaku untuk semua jenis partikel bebas

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan latar belakang di atas maka tujuan dari penelitian ini adalah untuk menganalisis hubungan antara komponen operator momentum sudut dengan Hamiltonian partikel bebas

1.5 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat, antara lain:

a. Bagi peneliti, dapat menambah pengalaman, pengetahuan, wawasan, dan penerapan teori yang telah diperoleh pada materi perkuliahan tentang komutator operator momentum sudut terhadap Hamiltonian partikel bebas dalam tinjauan mekanika kuantum.
b. Bagi pembaca, dapat dijadikan sebagai informasi untuk menambah pengetahuan tentang komutator operator momentum sudut terhadap Hamiltonian partikel bebas dan dapat dijadikan sebagai referensi untuk melakukan penelitian sejenis.
c. Bagi lembaga, dapat manambah sumbangan penelitian dan dapat digunakan sebagai sumber belajar dalam perkuliahan mekanika kuantum pokok bahasan komutator operator momentum sudut terhadap Hamiltonian partikel bebas.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Dualisme Gelombang-Partikel

Max Planck menyatakan bahwa energi radiasi elektromagnetik bukan merupakan fungsi kontinu, melainkan fungsi diskrit yang tersusun dari potongan-potongan (kuanta) energi yang sangat kecil mendekati nol. Berdasarkan pernyataannya tersebut, Planck mengeluarkan postulat yang menyatakan bahwa nilai kuantum energi adalah sebagai berikut:

$$\varepsilon = hf \tag{2.1}$$

dengan f merupakan frekuensi dari radiasi elektromagnetik dan h merupakan konstanta Planck yang bernilai $h = 6{,}62\, x\, 10^{-34}\, Js$. Energi total radiasi merupakan jumlah kelipatan bulat dari energi kuantum dasar yang dapat dinyatakan dalam persamaan:

$$E = n\varepsilon = nhf, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.2}$$

(Sugiyono, 2016: 65)

Selanjutnya Albert Einstein menjadikan postulat Planck sebagai dasar penelitiannya mengenai gelombang elektromagnetik. Einstein melakukan percobaan efek fotolistrik dengan cara menyinarkan seberkas cahaya ke permukaan logam yang dihubungkan dengan sumber tegangan. Berdasakan hasil pecobaan efek fotolistrik, diperoleh data yang menunjukkan bahwa:

a. Intensitas cahaya tidak mempengaruhi energi maksimum elektron terpancar. Intensitas cahaya hanya mempengaruhi jumlah elektron yang terpancar. Semakin besar intensitas cahaya yang diberikan maka akan semakin banya elektron yang terpancar
b. Tidak ada waktu jeda antara datangnya cahaya dengan proses fotoelektron.
c. Energi kinetik elektron yang terpancar dipengaruhi oleh frekuensi cahaya yang diberikan. Besarnya energi kinetik maksimum elektron dapat dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$E_k = hf - hf_0 \qquad (2.3)$$

dengan h merupakan konstatanta Planck dan f merupakan frekuensi cahaya yang dibutuhkan untuk dapat memancarkan elektron dengan frekuensi minimum f_0 (Zettili, 2009: 10).

Selain Albert Einstein, tokoh fisika lain bernama Neils Bohr mencoba untuk menyempurnakan teori model atom Rutherford menggunakan konsep kuantum energi yang dikemukakan oleh Planck. Neils Bohr menyatakan gagasannya dalam bentuk postulat-postulat berikut:

a. Sebuah elektron hanya dapat mengelilingi nukleus dalam orbit yang diperbolehkan berdasarkan hubungan:

$$m\boldsymbol{v}\boldsymbol{r} = n\hbar, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (2.4)$$

dengan $m, \boldsymbol{v},$ dan $\boldsymbol{r}$ berturut-turut adalah massa elektron, kecepatan elektron, dan jari-jari elektron. Elektron hanya diperbolehkan berada dalam orbit yang memungkinkan momentum sudutnya merupakan kelipatan bulat n dari konstanta Planck ħ sehingga momentum sudut dari elektron model atom Bohr adalah:

$$L = n\hbar \qquad (2.5)$$

b. Elektron memancarkan energi ketika berpindah dari satu tingkatan energi ke tingkatan energi yang lebih rendah. Perpindahan elektron dari tingkat energi E_i ke tingkat energi E_f disertai dengan emisi energi foton sebesar:

$$hf = E_i - E_f \qquad (2.6)$$

Dalam pergerakannya, elektron dipengaruhi oleh gaya Couloumb dan taat pada hukum Newton sehingga besarnya gaya Coulomb pada elektron diimbangi dengan adanya gaya sentrifugal yang arahnya menjauhi proton sebagai pusat orbit (McMahon, 2005: 7-8).

Selanjutnya, penelitian tentang foton dan elektron dilanjutkan oleh peneliti asal Amerika yang bernama Arthur H. Compton. Compton melakukan percobaan dengan menembakkan sinar-X terhadap elektron suatu bahan. Berdasarkan hasil percobaannya, Compton berasumsi bahwa foton memiliki momentum layaknya sebuah partikel. Compton juga menjelaskan bahwa foton yang ditembakkan pada elektron akan mengalami proses tumbukan lenting sempurna sehingga hukum kekekalan energi dan momentum berlaku dalam peristiwa tersebut (Gasiorowicz, 2003: 7).

Asumsi yang disampaikan oleh Compton pada saat itu menarik perhatian Luis de Broglie. De Broglie memiliki keyakinan bahwa alam bersifat simetri sehingga jika cahaya dapat bersifat sebagai partikel maka partikel juga dapat bersifat sebagai gelombang. Hal ini lah yang melatarbelakangi de Broglie untuk mengajukan hipotesis tentang dualisme gelombang-partikel. De Broglie menyatakan bahwa partikel yang bergerak dengan momentum $\boldsymbol{p}$ memiliki panjang gelombang λ yang dapat dihitung menggunakan persamaan:

$$\lambda = \frac{h}{\boldsymbol{p}} \tag{2.7}$$

Hipotesis yang disampaikan oleh de Broglie ini telah dibuktikan secara eksperimen oleh C. J. Davisson dan Germer. Selanjutnya hipotesis de Broglie ini dijadikan dasar dalam perkembangan fisika kuantum (Siregar, 2018: 5-6).

2.2 Persamaan Schrodinger

Persamaan Schrodinger merupakan persamaan matematis yang digunakan untuk mendeskripsikan fungsi keadaan suatu sistem mikroskopik. Persamaan Schrodinger berupa persamaan diferensial parsial yang dibentuk berdasarkan hukum kekekalan energi dan hipotesa de Broglie. Persamaan Schrodinger merupakan persamaan yang baru dan berdiri sendiri karena tidak diperoleh dari persamaan-persamaan fisika klasik sebelumnya. Hasil perhitungan persamaan Schrodinger akan berupa fungsi keadaan atau fungsi gelombang yang merepresentasikan keadaan dari suatu sistem. Fungsi keadaan sistem tersebut akan memuat segala informasi yang terdapat di dalamnya. Solusi persamaan Schrodinger harus memenuhi beberapa ketentuan. Ketentuan-ketentuan tersebut adalah harus taat kepada hukum kekekalan energi; taat kepada hipotesa de Broglie; bernilai tunggal; bersifat linier dan kontinu (Krane, 2012: 140-141).

2.3 Postulat Dasar Mekanika Kuantum

Sani dan Kadri (2017: 111-112) menyatakan bahwa secara umum pemecahan masalah dalam mekanika kuantum dapat dilakukan menggunakan dua pendekatan. Pendekatan yang pertama berupa perumusan diferensial-integral dan yang kedua berupa pendekatan formal matematis. Kedua pendekatan ini berangkat dari pernyataan formal berupa postulat-postulat yang mendasari mekanika kuantum. Postulat-postulat dasar mekanika kuantum adalah sebagai berikut:

a. Suatu sistem fisis dalam mekanika kuantum direpresentasikan dengan fungsi gelombang $\Psi(\boldsymbol{r}, t)$ yang memuat segala informasi tentang observabel-observabel pada sistem tersebut.
b. Setiap observabel dalam suatu sistem direpresentasikan dengan operator linier Hermitian
c. Pengukuran observabel dalam suatu sistem fisis sebanding dengan harga ekspektasi dari operator tersebut. Harga ekspektasi suatu operator A adalah sebagai berikut:

$$\langle A \rangle = \frac{\int \Psi^* A \Psi d\tau}{\int \Psi^* \Psi d\tau} \tag{2.8}$$

d. Besarnya peluang untuk menemukan suatu partikel pada posisi $\boldsymbol{r}$ dalam ruang volume $d\boldsymbol{\tau}$ setara dengan $\Psi|\boldsymbol{r}|^2 d\boldsymbol{\tau}$
e. Keadaan Ψ yang berevolusi terhadap waktu memenuhi persamaan:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mathrm{H}\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\Psi + V\Psi \tag{2.9}$$

2.4 Prinsip Ketidakpastian Heisenberg

Pengukuran dilakukan untuk menentukan nilai dari suatu observabel. Namun, tidak jarang beberapa hasil pengukuran menunjukkan data yang berbeda-beda. Perbedaan data hasil pengukuran ini terjadi karena adanya penyimpangan pengukuran. Besarnya penyimpangan pengukuran dapat diketahui dengan menghitung standart deviasi. Standart deviasi merupakan nilai statistik yang digunakan untuk mengetahui sebaran data yang terukur serta besarnya simpangan antara masing-masing data terhadap nilai rata-ratanya. Secara matematis standart deviasi dalam mekanika kuantum didefinisikan sebagai berikut:

$$\Delta A = \sqrt{\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2} \quad (2.10)$$

Harga ekspektasi $\langle A\rangle$ merepresentasikan nilai rata-rata pengkuran observabel A. Misalkan terdapat dua observabel A dan B yang memiliki harga standart deviasi sebagai berikut:

$$(\Delta A)^2 = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2 = \langle \alpha^2\rangle \quad (2.11)$$

$$(\Delta B)^2 = \langle B^2\rangle - \langle B\rangle^2 = \langle \beta^2\rangle \quad (2.12)$$

Kemudian, untuk mengetahui apakah kedua observabel tersebut memiliki nilai presisi maka dituliskan hubungan berikut:

$$\alpha - i\lambda\beta \quad (2.13)$$

dengan λ merupakan parameter real. Ajoint dari persamaan (2.13) adalah

$$(\alpha - i\lambda\beta)^+ = (\alpha + i\lambda\beta) \quad (2.14)$$

sehingga berdasarkan sifat operator dan sekawan hermite diperoleh:

$$\langle(\alpha - i\lambda\beta)\rangle\langle(\alpha + i\lambda\beta)\rangle \geq 0 \quad (2.15)$$

Jika diuraikan persamaan (2.15) menjadi:

$$\langle \alpha^2\rangle + \lambda^2\langle \beta^2\rangle - \lambda\langle i[A,B]\rangle \geq 0 \quad (2.16)$$

dengan

$$[\alpha,\beta] = [A,B] \quad (2.17)$$

Persamaan (2.16) akan berharga minimum jika diturunkan terhadap λ bernilai nol. Kondisi tersebut terjadi jika:

$$\lambda = \frac{\langle i[A,B]\rangle}{2\langle \beta^2\rangle} \quad (2.18)$$

dengan mensubstitusikan harga λ ke persamaan (2.16) maka diperoleh:

$$\langle \alpha^2\rangle - \frac{\langle i[A,B]\rangle^2}{4\langle \beta^2\rangle} \geq 0 \quad (2.19)$$

Jika disederhanakan persamaan (2.19) akan menjadi

$$\langle \alpha^2\rangle\langle \beta^2\rangle \geq \frac{\langle i[A,B]\rangle^2}{4} \quad (2.20)$$

dengan ungkapan (2.11) dan (2.12) diperoleh:

$$(\Delta A)^2(\Delta B)^2 \geq -\frac{\langle [A,B]\rangle^2}{4} \quad (2.21)$$

Persamaan (2.21) merupakan bentuk umum dari ketidakpastian pengukuran untuk observabel A dan observabel B. Jika dimisalkan observabel A merupakan operator posisi $\boldsymbol{x}$ dan observabel B merupakan operator momentum $\boldsymbol{p}$ dengan:

$$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}] = i\hbar \tag{2.22}$$

maka persamaan (2.21) akan menjadi

$$(\Delta\boldsymbol{x})^2(\Delta\boldsymbol{p})^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} \tag{2.23}$$

Atau

$$(\Delta\boldsymbol{x})(\Delta\boldsymbol{p}) \geq \frac{\hbar}{2} \tag{2.24}$$

(Purwanto, 2016: 194-196)

2.5 Operator

Operator merupakan persamaan matematis yang merepresentasikan observabel dalam ruang Hilbert. Operator dapat berfungsi jika dikenakan kepada suatu fungsi kedaan sistem yang akan diukur. Operator yang dikenakan pada suatu fungsi akan menghasilkan fungsi baru yang memenuhi hubungan berikut:

$$\hat{A}\varphi \rightarrow \Psi \tag{2.25}$$

Fungsi keadaan sistem memuat informasi lengkap tentang sistem tersebut (Zettili, 2009: 89).

Observabel pada suatu sistem dapat diperoleh dengan mengenakan operator dengan fungsi keadaan sistem yang akan diukur. Hubungan antara operator dan observabel umumnya dinyatakan dalam persamaan eigen berikut:

$$\hat{A}|\varphi\rangle = c|\varphi\rangle \tag{2.26}$$

dengan $\hat{A}$ merupakan operator yang dikenakan pada fungsi keadaan $|\varphi\rangle$ dan menghasilkan nilai eigen (observabel) a. Jika hanya ada satu nilai eigen untuk setiap fungsi keadaan,

$$\hat{A}|\varphi\rangle = c_1|\varphi\rangle \tag{2.27}$$

$$\hat{A}|\Psi\rangle = c_2|\Psi\rangle \tag{2.28}$$

yang mana $\varphi \neq \Psi$ dan $a \neq b$ maka sistem tersebut merupakan sistem nondegenerasi. Namun, jika satu nilai eigen dapat dihasilkan oleh lebih dari satu fungsi keadaan,

$$\hat{A}|\varphi\rangle = c|\varphi\rangle \tag{2.29}$$

$$\hat{A}|\Psi\rangle = c|\Psi\rangle \tag{2.30}$$

dengan $\varphi \neq \Psi$ maka sistem tersebut disebut sistem tergenerisasi (Purwanto, 2016 180-181).

2.5.1 Operator Linier

Umumnya operator diperoleh dari turunan suatu fungsi. Namun, operator dalam mekanika kuantum harus bersifat linier. Artinya, suatu operator harus dapat memenuhi sifat-sifat operator linier sebagai berikut:

$$\hat{A}(c\varphi) = c\hat{A}\varphi \tag{2.31}$$

$$\hat{A}(c_1\varphi + c_2\Psi) = c_1\hat{A}\varphi + c_2\hat{A}\Psi \tag{2.32}$$

$$\hat{A}(\varphi + \Psi) = \hat{A}\varphi + \hat{A}\Psi \tag{2.33}$$

$$(\hat{A}_1 + \hat{A}_2)\varphi = \hat{A}_1\varphi + \hat{A}_2\varphi \tag{2.34}$$

dengan c merupakan konstanta. Kombinasi linier pada sistem tergenerisasi merupakan fungsi eigen yang dapat dirumuskan menggunakan persamaan berikut:

$$\begin{aligned} \hat{A}(c_1\varphi + c_2\Psi) &= c_1\hat{A}\varphi + c_1\hat{A}\Psi \\ &= c_1 a\varphi + c_1 a\Psi \\ &= a(c_1\varphi + c_2\Psi) \end{aligned} \tag{2.35}$$

(Sani dan Kadri, 2017: 101).

2.5.2 Operator Momentum Sudut

Operator momentum sudut merupakan operator yang dibentuk oleh operator posisi dan operator momentum sudut linier. Operator momentum linier dinyatakan sebagai:

$$\hat{\boldsymbol{p}} = -i\hbar\boldsymbol{\nabla} \tag{2.36}$$

dengan ungkapan $\boldsymbol{\nabla}$ adalah sebagai:

$$\boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\boldsymbol{k}} \tag{2.37}$$

sehingga setiap komponen dari operator momentum linier dalam koordinat kartesian dapat dinyatakan:

$$\hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}; \hat{p}_y = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}; \hat{p}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial z} \tag{2.38}$$

Operator momentum sudut diperoleh dari hasil *cross product* antara vector posisi $\boldsymbol{r}$ dan operator momentum sudut linier $\boldsymbol{p}$ sebagai berikut:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\ \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{p}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\imath}} & \hat{\boldsymbol{\jmath}} & \widehat{\boldsymbol{k}} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

$$= (yp_z - zp_y)\hat{\boldsymbol{\imath}} + (zp_x - xp_z)\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (xp_y - yp_x)\widehat{\boldsymbol{k}} \qquad (2.39)$$

Berdasarkan penyelesaian di atas diperoleh:

$$L_x = yp_z - zp_y \qquad (2.40)$$

$$L_y = zp_x - xp_z \qquad (2.41)$$

$$L_z = xp_y - yp_x \qquad (2.42)$$

dengan mensubstitusi komponen-komponen operator momentum sudut linier ke dalam persamaan di atas maka akan diperoleh:

$$L_x = y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right) - z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right) = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad (2.43)$$

$$L_y = z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right) - x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right) = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) \qquad (2.44)$$

$$L_z = x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right) - y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right) = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) \qquad (2.45)$$

(Mustamin, 2017: 25-26)

Menggunakan definisi $L^2 = \boldsymbol{L}.\boldsymbol{L}$ dengan $\boldsymbol{L}$ sebagaimana persamaan (2.39) maka ekspresi untuk operator $\hat{L}^2$ dapat disederhanakan menggunakan persamaan (2.43) sampai (2.45) menjadi persamaan berikut:

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x{}^2 + \hat{L}_y{}^2 + \hat{L}_z{}^2 \qquad (2.46)$$

dan mendefinisikan komponen operator momentum sudut $\hat{L}_x{}^2, \hat{L}_y{}^2, \hat{L}_z{}^2$ sebagai:

$$\hat{L}_x{}^2 = \hbar^2\left(z\frac{\partial}{\partial z} + y\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad (2.47)$$

$$\hat{L}_y{}^2 = \hbar^2\left(x\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial z}\right) \qquad (2.48)$$

$$\hat{L}_z{}^2 = \hbar^2\left(y\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial x}\right) \qquad (2.49)$$

Ekspresi operator $\hat{L}^2$ juga dapat dituliskan dalam bentuk persamaan diferensial seperti pada persamaan (2.47) sampai (2.49) dan didapatkan:

$$\hat{L}^2 = 2\hbar^2\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right) \qquad (2.50)$$

(Supriadi *et al.*, 2019)

Purwanto (2016: 223) mendefinisikan operator momentum sudut $\hat{L}_{\pm}$ sebagai kombinasi dari dua komponen operator momentum sudut sebagai berikut:

$$\hat{L}_{\pm} = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y \tag{2.51}$$

dengan operator $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$, dan $\hat{L}_z$ merupakan operator Hermitian sehingga:

$$\hat{L}_{+}^{+} = \left(\hat{L}_x + i\hat{L}_y\right)^{+} = \hat{L}_{-} \tag{2.52}$$

dan sebaliknya

$$\hat{L}_{-}^{+} = \left(\hat{L}_x - i\hat{L}_y\right)^{+} = \hat{L}_{+} \tag{2.53}$$

Menggunakan definisi $\hat{L}_{\pm}{}^2 = \hat{L}_{\pm}.\hat{L}_{\pm}$ dengan $\hat{L}_{\pm}$ sebagaimana persamaan (2.51) maka ekspresi untuk operator $\hat{L}_{+}{}^2$ dan $\hat{L}_{-}{}^2$ adalah sebagai berikut:

$$\hat{L}_{+}{}^2 = i\hbar\big(-xp_x + yp_y - ixp_y - iyp_x + x^2p_z{}^2 - y^2p_z{}^2 + z^2p_x{}^2 - z^2p_y{}^2 - 2xzp_xp_z + 2yzp_yp_z + 2ixyp_z{}^2 - 2ixzp_yp_z - 2iyzp_xp_z + 2iz^2p_xp_y\big) \tag{2.54}$$

$$\hat{L}_{-}{}^2 = \boldsymbol{i}\hbar\big(-xp_x + yp_y + ixp_y + iyp_x + x^2p_z{}^2 - y^2p_z{}^2 + z^2p_x{}^2 - z^2p_y{}^2 - 2xzp_xp_z + 2yzp_yp_z - 2ixyp_z{}^2 + 2ixzp_yp_z + 2iyzp_xp_z - 2iz^2p_xp_y\big) \tag{2.55}$$

(Liu *et al.*, 2010)

2.5.3 Operator Hamiltonian

Operator Hamiltonian merupakan representasi dari energi total dalam ruang Hilbert. Penggunaan operator Hamiltonian dalam persamaan Schrodinger dituliskan:

$$\hat{H}\Psi = E\Psi \tag{2.56}$$

Operator Hamiltonian merupakan hasil penjumlahan dari energi kinetik dan energi potensial. Bentuk dari operator Hamiltonian adalah sebagai berikut:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + V \tag{2.57}$$

dengan menggunakan definisi energi kinetik

$$T = \frac{1}{2m}\left(p_x{}^2 + p_y{}^2 + p_z{}^2\right) \tag{2.58}$$

yang mana m merupakan massa partikel yang bergerak dengan momentum $\boldsymbol{p}$ dalam koordinat x, y dan z. Kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (2.58) ke persamaan (2.57) akan diperoleh:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2m}({p_x}^2 + {p_y}^2 + {p_z}^2) + V_{(x,y,z)} \qquad (2.59)$$

(Hayward, 2002:155)

Krane (2012: 145) menyatakan bahwa pergerakan partikel bebas tidak dipengaruhi oleh gaya apapun sehingga resultan gaya yang bekerja sama dengan nol. Berdasarkan hubungan $\boldsymbol{F} = -\frac{dV}{dr}$ dapat dikatakan bahwa energi potensial partikel bebas merupakan sebuah konstanta. Energi potensial partikel bebas dapat ditentukan menggunakan tetapan integrasi sembarang sehingga dapat bernilai nol. Jika energi potensial partikel bebas bernilai nol maka operator Hamiltonian untuk partikel bebas menjadi:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2m}({p_x}^2 + {p_y}^2 + {p_z}^2) \qquad (2.60)$$

2.6 Komutator

Komutator merupakan hubungan komutasi antara dua operator atau lebih. Menurut aljabar operator terdapat penjumlahan operator, pengurangan operator, dan perkalian operator. Pengurangan dan penjumlahan operator dan pengurangan operator akan menghasilkan fungsi matematis yang juga merupakan operator. Penjumlahan operator umumnya bersifat komut sehingga memenuhi persamaan berikut:

$$\hat{A} + \hat{B} = \hat{B} + \hat{A} \qquad (2.61)$$

sedangkan untuk perkalian operator umumnya tidak bersifat komut sehingga

$$\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A} \qquad (2.62)$$

Hubungan komutasi antara dua operator dilambangkan dengan $[\hat{A}, \hat{B}]$ dan didefinisikan dengan

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \qquad (2.63)$$

Berikut merupakan beberapa sifat dari komutator, antara lain:

a. $[\hat{A},\hat{B}]+[\hat{B},\hat{A}]=0$ (2.64)

b. $[\hat{A},\hat{A}]=0$ (2.65)

c. $[\hat{A},\hat{B}+\hat{C}]=[\hat{A},\hat{B}]+[\hat{A},\hat{C}]$ (2.66)

d. $[\hat{A}+\hat{B},\hat{C}]=[\hat{A},\hat{C}]+[\hat{B},\hat{C}]$ (2.67)

e. $[\hat{A},\hat{B}\hat{C}]=[\hat{A},\hat{B}]\hat{C}+\hat{B}[\hat{A},\hat{C}]$ (2.68)

f. $[\hat{A}\hat{B},\hat{C}]=[\hat{A},\hat{C}]\hat{B}+\hat{A}[\hat{B},\hat{C}]$ (2.69)

g. $[\hat{A},[\hat{B},\hat{C}]]+[\hat{C},[\hat{A},\hat{B}]]+[\hat{B},[\hat{C},\hat{A}]]=0$ (2.70)

(Sutopo, 2005: 102)

2.6.1 Komutator Operator Momentum Sudut

Komutator komponen operator posisi terhadap komponen momentum linier dapat di tuliskan sebagai berikut:

$$[\hat{x},\hat{p}_x]=[\hat{y},\hat{p}_y]=[\hat{z},\hat{p}_z]=i\hbar \tag{2.71}$$

$$[\hat{x},\hat{p}_y]=[\hat{x},\hat{p}_z]=[\hat{y},\hat{p}_x]=[\hat{y},\hat{p}_z]=[\hat{z},\hat{p}_x]=[\hat{z},\hat{p}_y]=0 \tag{2.72}$$

dan komutator antar komponen momentum sudut adalah sebagai berikut:

$$[\hat{L}_x,\hat{L}_y]=i\hbar\hat{L}_z\,;\ [\hat{L}_y,\hat{L}_z]=i\hbar\hat{L}_x\,;\ [\hat{L}_z,\hat{L}_x]=i\hbar\hat{L}_y \tag{2.73}$$

Menggunakan ungkapan bahwa:

$$\hat{L}^2=\hat{L}_x{}^2+\hat{L}_y{}^2+\hat{L}_z{}^2 \tag{2.74}$$

dan

$$\hat{L}_\pm=\hat{L}_x\pm i\hat{L}_y \tag{2.75}$$

maka komutator antara operator momentum sudut adalah sebagai berikut:

$$[\hat{L}^2,\hat{L}_x]=[\hat{L}^2,\hat{L}_y]=[\hat{L}^2,\hat{L}_z]=0 \tag{2.76}$$

$$[\hat{L}_z,\hat{L}_\pm]=\pm\hbar\hat{L}_\pm \tag{2.77}$$

$$[\hat{L}_+,\hat{L}_-]=2\hbar\hat{L}_z \tag{2.78}$$

$$[\hat{L}^2,\hat{L}_\pm]=0 \tag{2.79}$$

(Siregar, 2018: 70-71)

2.6.2 Komutator Operator Hamiltonian dengan Tetapan Gerak

Berdasarkan postulat keempat mengenai dinamika sistem kuantum maka fungsi keadaan Ψ yang berevolusi terhadap waktu pada persaman Schrodinger memenuhi hubungan:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \mathrm{H}\Psi \tag{2.80}$$

Jika harga ekspektasi $\langle A\rangle$ berevolusi terhadap waktu maka akan diperoleh persamaan:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\langle\hat{A}\rangle_{\Psi} &= \frac{\partial}{\partial t}\int\Psi^{*}\hat{A}\Psi d\boldsymbol{v}\\ &= \int\left(\frac{\partial}{\partial t}\Psi\right)^{*}\hat{A}\Psi d\boldsymbol{v} + \int\Psi^{*}\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}\Psi d\boldsymbol{v} + \int\Psi^{*}\hat{A}\left(\frac{\partial}{\partial t}\Psi\right)d\boldsymbol{v}\end{aligned} \tag{2.81}$$

Selanjutnya dengan perhitungan matematis persamaan (2.81) akan menghasilkan persamaan sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\hat{A}\rangle_{\Psi} = \frac{1}{i\hbar}\langle[\hat{A},H]\rangle + \langle\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\rangle \tag{2.82}$$

Apabila operator $\hat{A}$ bernilai konstan terhadap waktu maka $\frac{\partial}{\partial t}\langle\hat{A}\rangle$ adalah nol sehingga berdasarkan persamaan (2.82) dapat berlaku hubungan:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\hat{A}\rangle_{\Psi} = \frac{1}{i\hbar}\langle[\hat{A},H]\rangle \tag{2.83}$$

Jika hubungan komutasi operator $\hat{A}$ terhadap operator Hamiltonian H bersifat komut maka operator $\hat{A}$ merupakan suatu tetapan gerak. Dalam hal ini operator $\hat{A}$ dapat digantikan oleh operator posisi $\hat{\boldsymbol{r}}$ dan momentum linier $\hat{\boldsymbol{p}}$. Ketika operator posisi $\hat{\boldsymbol{r}}$ menggantikan operator $\hat{A}$ persamaan (2.83) akan menjadi:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\hat{\boldsymbol{r}}\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle[\hat{\boldsymbol{r}},H]\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\left[\hat{\boldsymbol{r}},\frac{\boldsymbol{p}^{2}}{2m}+V\right]\rangle \tag{2.84}$$

dengan menggunakan perhitungan matematis maka akan diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\hat{\boldsymbol{r}}\rangle = \langle\frac{\boldsymbol{p}}{m}\rangle \tag{2.85}$$

Persamaan (2.85) merepresentasikan persamaan gerak dalam mekanika, sedangkan untuk operator $\hat{A}$ yang digantikan oleh operator momentum linier $\hat{\boldsymbol{p}}$, persamaan (2.83) akan menjadi:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\hat{\boldsymbol{p}}\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle[\hat{\boldsymbol{p}},H]\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\left[\hat{\boldsymbol{p}},\frac{\boldsymbol{p}^{2}}{2m}+V\right]\rangle \tag{2.86}$$

Kemudian persamaan (2.86) disubstitusikan dengan hubungan komutasi antara operator momentum linier $\hat{p}$ dan energi potensial V berikut:

$$[\hat{\boldsymbol{p}}, V] = -i\hbar\left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}}\right)\Psi \tag{2.87}$$

Kemudian kersamaan (2.87) disubstitusikan ke persamaan (2.86) diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\hat{\boldsymbol{p}}\rangle = -\left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}}\right) = \langle\boldsymbol{F}\rangle \tag{2.88}$$

Persamaan (2.88) merepresentasikan persamaan gerak dalam mekanika (Supriadi *et al*, 2019)

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Jenis, Tempat, dan Waktu Penelitian

Jenis penelitian ini adalah *basic research*. Penelitian dilakukan dengan mengembangkan teori-teori yang telah ada sebelumnya. Penelitian dilaksanakan di Laboratorium Fisika Lanjut, Program Studi Pendidikan Fisika pada semester ganjil tahun ajaran 2019/2020.

3.2 Definisi Operasional

Berikut merupakan definisi operasional masing-masing variabel penelitian agar tidak terjadi kesalahan pengartian istilah-istilah dalam penelitan ini:

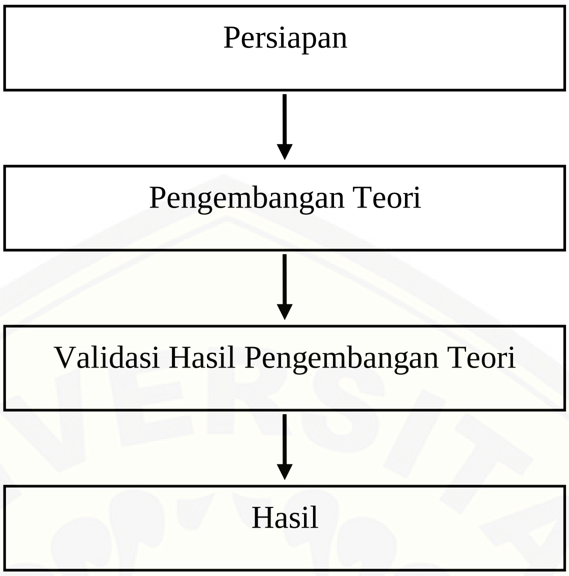
a. Komutator Operator Momentum Sudut

Komutator operator momentum sudut merupakan suatu hubungan komutasi yang digunakan untuk melihat apakah komponen operator momentum sudut yang diukur bersifat komut atau tidak. Komponen operator momentum sudut yang bersifat komut akan memiliki hasil perhitungan komutator sama dengan nol artinya, dapat diukur secara serempak. Sebaliknya, komponen operator momentum sudut yang tidak komut memiliki hasil perhitungan komutator yang tidak sama dengan nol artinya, tidak dapat diukur secara serempak dan memenuhi prinsip ketidakpastian Heisenberg

b. Hamiltonian Partikel Bebas

Hamiltonian merupakan representasi dari energi total yang berupa penjumlahan energi kinetik dan energi potensial suatu sistem. Namun untuk partikel bebas, Hamiltonian hanya merupakan representasi dari energi kinetik saja karena resultan gaya yang bekerja pada partikel bebas sama dengan nol sehingga berdasarkan hubungan $\boldsymbol{F} = -\frac{dV}{dr}$, energi potensial partikel bebas berupa konstanta yang dapat diasumsikan bernilai nol.

3.3 Langkah Penelitian



3.3.1 Persiapan

Pada tahap ini peneliti mempersiapkan bahan-bahan yang digunakan sebagai literatur untuk melakukan penelitian dengan mengumpulkan buku dan jurnal yang berskala nasional maupun internasional serta artikel-artikel dari internet yang relavan dengan topik penelitian.

3.3.2 Pengembangan Teori

Pada tahap ini peneliti mengembangkan teori tentang komutator operator momentum sudut yang ada dalam literatur. Pengembangan teori diawali dengan menentukan operator momentum sudut dan Hamiltonian dalam koordinat kartesian sebagai berikut:

a. Operator Momentum Sudut

1) Operator $\hat{L}_x$

$$\hat{L}_x = y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right) - z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right) = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{3.1}$$

2) Operator $\hat{L}_y$

$$\hat{L}_y = z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right) - x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right) = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{3.2}$$

3) Operator $\hat{L}_z$

$$\hat{L}_z = x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right) - y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right) = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{3.3}$$

4) Operator $\hat{L}^2$

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x{}^2 + \hat{L}_y{}^2 + \hat{L}_z{}^2 \tag{3.4}$$

5) Operator $\hat{L}_\pm$

$$\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y \tag{3.5}$$

b. Hamiltonian Partikel Bebas

$$\hat{H} = -\frac{1}{2m}\left(p_x{}^2 + p_y{}^2 + p_z{}^2\right) \tag{3.6}$$

Selanjutnya menentukan hubungan komutasi antara operator momentum sudut dan Hamiltonian.sebagai berikut:

$$\left[\hat{L}_x, \hat{H}\right] = \left[\hat{L}_y, \hat{H}\right] = \left[\hat{L}_z, \hat{H}\right] = 0 \tag{3.7}$$

3.3.3 Validasi Hasil Pengembangan Teori

Pada tahap ini peneliti membandingkan operator momentum sudut dan komutator operator momentum sudut terhadap Hamiltonian partikel bebas hasil pengembangan teori dengan teori yang ada dalam literatur. Peneliti melakukan validasi menggunakan data dari beberapa buku dan jurnal berskala nasional maupun internasional yang relevan dengan topik penelitian khususnya pada pokok bahasan tentang operator momentum sudut dalam koordinat kartesian dan hasil beberapa komutator operator momentum sudut terhadap Hamiltonian partikel bebas. Berikut merupakan validasi antara hasil perhitungan manual peneliti dengan materi yang terdapat dalam literatur:

a. Validasi Operator Momentum Sudut

Tabel 3.1 Operator momentum sudut dalam koordinat katesian

No.	Operator Momentum Sudut	Operator Momentum Sudut Dalam Koordinat Kartesian
1	$\hat{L}_x$	$-i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)$
2	$\hat{L}_y$	$-i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)$
3	$\hat{L}_z$	$-i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$
4	$\hat{L}^2$	$2\hbar^2\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)$

(Supriadi *et al*, 2019)

b. Validasi Komutator Momentum Sudut terhadap Hamiltonian

Tabel 3.2 Komutator operator momentum sudut terhadap Hamiltonian partikel bebas dalam koordinat kartesian

No.	Komutator Operator Momentum Sudut Terhadap Hamiltonian	Komutator Operator Momentum Sudut Terhadap Hamiltonian dalam Koordinat Kartesian
1	$[\hat{L}_x, \hat{H}]$	0
2	$[\hat{L}_y, \hat{H}]$	0
3	$[\hat{L}_z, \hat{H}]$	0

(Gasiorowicz, 2003: 171)

3.3.4 Hasil

Pada tahap ini peneliti telah memvalidasi hasil pengembangan teori untuk menghasilkan produk berupa komutator operator momentum sudut dan Hamiltonian partikel bebas. Data hasil pengembangan teori disajikan dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.3 Contoh tabel hasil menentukan komutator operator momentum sudut terhadap Hamiltonian partikel bebas

No.	Komutator	Hasil
1	$[\hat{L}_x, \hat{H}]$	
2	$[\hat{L}_y, \hat{H}]$	
3	$[\hat{L}_z, \hat{H}]$	

4	$[\hat{L}_+, \hat{H}]$	
5	$[\hat{L}_-, \hat{H}]$	

Tabel 3.4 Contoh tabel hasil menentukan komutator operator momentum sudut kuadrat terhadap Hamiltonian partikel bebas

No.	Komutator	Hasil
1	$[\hat{L}_x{}^2, \hat{H}]$	
2	$[\hat{L}_y{}^2, \hat{H}]$	
3	$[\hat{L}_z{}^2, \hat{H}]$	
4	$[\hat{L}^2, \hat{H}]$	
5	$[\hat{L}_+{}^2, \hat{H}]$	
6	$[\hat{L}_-{}^2, \hat{H}]$	

BAB 5. PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan data hasil penelitian dan kajian tentang komutator operator momentum sudut terhadap operator Hamiltonian dapat disimpulkan bahwa hasil perhitungan komutator komponen momentum sudut $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z, \hat{L}_+$, dan $\hat{L}_-$ terhadap operator Hamiltonian bernilai nol atau komut. Sedangkan hasil perhitungan komutator komponen momentum sudut kuadrat $\hat{L}_x{}^2$, $\hat{L}_y{}^2$, $\hat{L}_z{}^2$, $\hat{L}^2$, $L_+{}^2$ dan $L_-{}^2$ terhadap operator Hamiltonian bernilai tidak nol atau tidak komut. Menurut postulat keempat mekanika kuantum jika komutator suatu operator terhadap operator Hamiltonian bersifat komut maka operator tersebut merupakan tetapan gerak. Artinya komponen momentum sudut $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z, \hat{L}_+$, $\hat{L}_-$ merupakan tetapan gerak dan komponen momentum sudut kuadrat $\hat{L}_x{}^2, \hat{L}_y{}^2, \hat{L}_z{}^2, \hat{L}^2, L_+{}^2$ $L_-{}^2$ bukan merupakan tetapan gerak.

5.2 Saran

Berdasarkan data hasil penelitian dan pembahasan, peneliti memberikan saran sebaiknya dilakukan penelitian lebih lanjut tentang komutator dengan mengubah variabel penelitian menggunakan operator lain seperti operator posisi dan operator momentum linier.

DAFTAR PUSTAKA

Casati, M., E. V. Ferapontov, M. V. Pavlov, dan R. F. Vitolo. 2018. On a class of third-order nonlocal Hamiltonian operators. *Journal of Geometry and Physics*. 138 (6): 285-296.

Enk, S. J. V. dan G. Nienhuis. 1994. Commutation rules and eigenvalues of spin and orbital angular momentum of radiation fields. *Journal of Modern Optics*. 41 (5): 963-977.

Gasiorowicz, S. 2003. *Quantum Physics Third Edition*. Kanada: John Wiley and Sons, Inc.

Hayward, D. O. 2002. *Quantum Mechanics for Chemists*. Cambridge: Thomas Graham House.

Krane, K. S. 2012. *Modern Physics Third Edition*. United States of America: John Wiley and Sons, Inc.

Levi, A. F. J. 2003. *Applied Quantum Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Liu, Q. H., D. M. Xun, dan L. Shan. 2010. Raising and lowering operators for orbital angular momentum quantum numbers. *International Journal of Theoritical Physics*. 49 (9): 2164-2171.

McMahon, D. 2005. *Quantum Mechanics*. New York: McGraw-Hill Professional.

Mei, X., dan P. Yu. 2012. The definition of universal momentum operator of quantum mechanics and the essence of micro-particle’s spin. *Journal of Modern Physics*. 3(6): 451- 470.

Mustamin, M. F. 2017. *Dasar Matematis Mekanika Kuantum*. Makassar: Infty Press.

Purwanto, A. 2016. *Fisika Kuantum Edisi 2 Revisi*.Yogyakarta: Penerbit Gava Media.

Sani, R. dan M. Kadri. 2017. *Fisika Kuantum*. Jakarta: Bumi Aksara.

Siregar, R. E. 2018. *Fisika Kuantum*. Jatinangor: Universitas Padjadjaran Press.

Sugiyono, V. 2016. *Mekanika Kuantum*. Yogyakarta: CAPS.

Supriadi, B., S. H. B. Prastowo, S. Bahri, Z. R. Ridlo, dan T. Prihandono. 2018. The stark effect on the wave function of tritium in relativistic condition. *Journal of Physics*. 1008 (1): 1-7.

Supriadi, B., T. Prihandono, V. Rizqiyah, Z. R. Ridlo, N. Faroh, dan S. Andika. 2019. Angular momentum operator commutator against position and Hamiltonian of a free particle. *Journal of Physics*. 1211 (1): 1- 8.

Sutopo. 2005. *Pengantar Fisika Kuantum*. Malang: UM Press.

Zettili, N. 2009. *Quantum Mechanics: Concepts and Application Second Edition*. United Kingdom: John Willey and Sons, Ltd.

LAMPIRAN

Lampiran 1. Matriks Penelitian

Judul	Rumusan Masalah	Tujuan	Variabel	Data dan Teknik Pengambilan Data	Metode Penelitian
Komutator Operator Momentum Sudut Terhadap Hamiltonian Partikel Bebas	1. Bagaimana hubungan antara komponen operator momentum sudut dengan Hamiltonian partikel bebas?	1. Menganalisis hubungan antara komponen operator momentum sudut dengan Hamiltonian partikel bebas	1. Variabel bebas: Operator momentum sudut 2. Variabel terikat: Komutator operator momentum sudut terhadap hamiltonian partikel bebas	1. Sumber data: a. Buku b. Jurnal c. Internet 2. Teknik pengambilan data: Menggunakan perhitungan manual secara analitik	1. Jenis penelitan: *basic research* 2. Analisis data: a. Persamaan schrodinger partikel bebas tunak b. Persamaan operator momentum sudut pada koordinat kartesian c. Hamiltonian partikel bebas d. Sifat komutator

Lampiran 2. Hasil Perhitungan Operator Momentum Sudut dan Hamiltonian Partikel Bebas dalam Koordinat Kartesian

1. **Operator Posisi**

$$\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{\imath}} + y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + z\hat{\boldsymbol{k}}$$

2. **Operator Momentum Linier**

$$\boldsymbol{p} = p_x\hat{\imath} + p_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + p_z\hat{\boldsymbol{k}}$$

$$\boldsymbol{p} = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\boldsymbol{k}}\right)$$

3. **Operator Momentum Sudut**

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\ \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{p} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\imath}} & \hat{\boldsymbol{\jmath}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

$$L_x = yp_z - zp_y = y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right) - z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right) = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$L_y = zp_x - xp_z = z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right) - x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right) = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$L_z = xp_y - yp_x = x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right) - y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right) = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

4. **Operator Momentum Sudut Naik Dan Turun**

$$\hat{L}_{\pm} = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$$

5. **Operator Momentum Sudut Naik dalam Koordinat Kartesian**

$$\begin{aligned}\hat{L}_{+} &= \hat{L}_x + i\hat{L}_y \\ &= \left(yp_z - zp_y\right) + i(zp_x - xp_z) \\ &= -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) + \hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ &= \hbar\left\{\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) - \left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\right\}\end{aligned}$$

6. Operator Momentum Sudut Turun dalam Koordinat Kartesian

$$\hat{L}_- = \hat{L}_x - i\hat{L}_y$$
$$= (yp_z - zp_y) - i(zp_x - xp_z)$$
$$= -i\hbar\left(y\,\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) - \hbar\left(z\,\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)$$
$$= -\hbar\left\{\left(z\,\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) + \left(y\,\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\right\}$$

7. Operator Hamiltonian Partikel Bebas

$$\hat{H} = -\frac{1}{2m}\left({p_x}^2 + {p_y}^2 + {p_z}^2\right)$$
$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

Lampiran 3. Hasil Perhitungan Operator Momentum Sudut Kuadrat dalam Koordinat Kartesian

1. **Operator $\hat{L}_x{}^2$**

$$\hat{L}_x{}^2 = (yp_z - zp_y)(yp_z - zp_y)$$
$$= yp_zyp_z - yp_zzp_y - zp_yyp_z + zp_yzp_y$$
$$= y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right) - y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right) - z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right) + z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)$$
$$= -\hbar^2y^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \hbar^2y\frac{\partial}{\partial y} + \hbar^2yz\frac{\partial^2}{\partial y\partial z} + \hbar^2z\frac{\partial}{\partial z} + \hbar^2yz\frac{\partial^2}{\partial y\partial z} - \hbar^2z^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$
$$= \hbar^2y\frac{\partial}{\partial y} + \hbar^2z\frac{\partial}{\partial z} + 2\hbar^2yz\frac{\partial^2}{\partial y\partial z} - \hbar^2y^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \hbar^2z^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$
$$= i\hbar\left(yp_y + zp_z + 2yzp_yp_z - y^2p_z{}^2 - z^2p_y{}^2\right)$$

2. **Operator $\hat{L}_y{}^2$**

$$\hat{L}_y{}^2 = (zp_x - xp_z)(zp_x - xp_z)$$
$$= zp_xzp_x - zp_xxp_z - xp_zzp_x + xp_zxp_z$$
$$= z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right) - z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right) - x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right) + x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)$$
$$= -\hbar^2z^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \hbar^2z\frac{\partial}{\partial z} + \hbar^2xz\frac{\partial^2}{\partial x\partial z} + \hbar^2x\frac{\partial}{\partial x} + \hbar^2xz\frac{\partial^2}{\partial x\partial z} - \hbar^2x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$
$$= \hbar^2x\frac{\partial}{\partial x} + \hbar^2z\frac{\partial}{\partial z} + 2\hbar^2xz\frac{\partial^2}{\partial x\partial z} - \hbar^2x^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \hbar^2z^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$
$$= i\hbar(xp_x + zp_z + 2xzp_xp_z - x^2p_z{}^2 - z^2p_x{}^2)$$

3. **Operator $\hat{L}_z{}^2$**

$$\hat{L}_z{}^2 = (xp_y - yp_x)(xp_y - yp_x)$$
$$= xp_yxp_y - xp_yyp_x - yp_xxp_y + yp_xyp_x$$
$$= x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right) - x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right) - y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right) + y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$= -\hbar^2 x\left(0 + x\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \hbar^2 x\left(\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right) + \hbar^2 y\left(\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right) - \hbar^2 y\left(0 + y\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$$

$$= -\hbar^2 x^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \hbar^2 x\frac{\partial}{\partial x} + \hbar^2 xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \hbar^2 y\frac{\partial}{\partial y} + \hbar^2 xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} - \hbar^2 y^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$= \hbar^2 x\frac{\partial}{\partial x} + \hbar^2 y\frac{\partial}{\partial y} + 2\hbar^2 xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} - \hbar^2 x^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \hbar^2 y^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$= i\hbar\left(xp_x + yp_y + 2xyp_xp_y - x^2{p_y}^2 - y^2{p_x}^2\right)$$

4. Operator $\hat{L}^2$

$$\hat{L}^2 = {\hat{L}_x}^2 + {\hat{L}_y}^2 + {\hat{L}_z}^2$$

$$= \hbar^2\left(y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} + 2yz\frac{\partial^2}{\partial y\partial z} - y^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} - z^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \hbar^2\left(x\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial z} + 2xz\frac{\partial^2}{\partial x\partial z} - x^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} - z^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) + \hbar^2\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + 2xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} - x^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} - y^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$$

$$= i\hbar\left(yp_y + zp_z + 2yzp_yp_z - y^2{p_z}^2 - z^2{p_y}^2\right) + i\hbar\left(xp_x + zp_z + 2xzp_xp_z - x^2{p_z}^2 - z^2{p_x}^2\right) + i\hbar\left(xp_x + yp_y + 2xyp_xp_y - x^2{p_y}^2 - y^2{p_x}^2\right)$$

$$= i\hbar\left(2xp_x + 2yp_y + 2zp_z + 2xyp_xp_y + 2xzp_xp_z + 2yzp_yp_z - x^2{p_y}^2 - x^2{p_z}^2 - y^2{p_x}^2 - y^2{p_z}^2 - z^2{p_x}^2 - z^2{p_y}^2\right)$$

5. Operator ${\hat{L}_+}^2$

$${\hat{L}_+}^2 = \left(yp_z - zp_y + izp_x - ixp_z\right)\left(yp_z - zp_y + izp_x - ixp_z\right)$$

$$= yp_zyp_z - yp_zzp_y + yp_zizp_x - yp_zixp_z - zp_yyp_z + zp_yzp_y - zp_yizp_x + zp_yixp_z + izp_xyp_z - izp_xzp_y + izp_xizp_x - izp_xixp_z - ixp_zyp_z + ixp_zzp_y - ixp_zizp_x + ixp_zixp_z$$

$$= y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right) - y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right) + y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)iz\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right) - y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)ix\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right) - z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right) + z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right) -$$

$$z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)iz\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)+z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)ix\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)+$$
$$iz\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)-iz\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)+$$
$$iz\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)iz\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)-iz\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)ix\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)-$$
$$ix\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)+ix\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)-$$
$$ix\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)iz\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)+ix\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)ix\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$=-\hbar^2y^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\hbar^2y\frac{\partial}{\partial y}+\hbar^2yz\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}-i\hbar^2y\frac{\partial}{\partial x}-i\hbar^2yz\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}+$$
$$i\hbar^2xy\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\hbar^2z\frac{\partial}{\partial z}+\hbar^2yz\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}-\hbar^2z^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+i\hbar^2z^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}-$$
$$i\hbar^2xz\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}-i\hbar^2yz\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}+i\hbar^2z^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\hbar^2z^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\hbar^2z\frac{\partial}{\partial z}-$$
$$\hbar^2xz\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}+i\hbar^2xy\frac{\partial^2}{\partial z^2}-i\hbar^2x\frac{\partial}{\partial y}-i\hbar^2xz\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}-\hbar^2x\frac{\partial}{\partial x}-$$
$$\hbar^2xz\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}+\hbar^2x^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$=\hbar^2\left(-x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}-ix\frac{\partial}{\partial y}-iy\frac{\partial}{\partial x}+x^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}-y^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}+z^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\right.$$
$$z^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}-2xz\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}+2yz\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}+2ixy\frac{\partial^2}{\partial z^2}-2ixz\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}-2iyz\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}+$$
$$\left.2iz^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right)$$

$$=i\hbar\big(-xp_x+yp_y-ixp_y-iyp_x+x^2{p_z}^2-y^2{p_z}^2+z^2{p_x}^2-z^2{p_y}^2-2xzp_xp_z+2yzp_yp_z+2ixy{p_z}^2-2ixzp_yp_z-2iyzp_xp_z+2iz^2p_xp_y\big)$$

6. Operator $\hat{L}_-{}^2$

$$\hat{L}_-{}^2=\left(yp_z-zp_y-izp_x+ixp_z\right)\left(yp_z-zp_y-izp_x+ixp_z\right)$$

$$=yp_zyp_z-yp_zzp_y-yp_zizp_x+yp_zixp_z-zp_yyp_z+zp_yzp_y+zp_yizp_x-zp_yixp_z-izp_xyp_z+izp_xzp_y+izp_xizp_x-izp_xixp_z+ixp_zyp_z-ixp_zzp_y-ixp_zizp_x+ixp_zixp_z$$

$$= y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right) - y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right) -$$
$$y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)iz\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right) + y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)ix\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right) -$$
$$z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right) + z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right) +$$
$$z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)iz\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right) - z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)ix\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right) -$$
$$iz\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right) + iz\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right) +$$
$$iz\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)iz\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right) - iz\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)ix\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right) +$$
$$ix\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right) - ix\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right) -$$
$$ix\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)iz\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right) + ix\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)ix\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$= -\hbar^2 y^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \hbar^2 y\frac{\partial}{\partial y} + \hbar^2 yz\frac{\partial^2}{\partial y\partial z} + i\hbar^2 y\frac{\partial}{\partial x} + i\hbar^2 yz\frac{\partial^2}{\partial x\partial z} -$$
$$i\hbar^2 xy\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \hbar^2 z\frac{\partial}{\partial z} + \hbar^2 yz\frac{\partial^2}{\partial y\partial z} - \hbar^2 z^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} - i\hbar^2 z^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} +$$
$$i\hbar^2 xz\frac{\partial^2}{\partial y\partial z} + i\hbar^2 yz\frac{\partial^2}{\partial x\partial z} - i\hbar^2 z^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \hbar^2 z^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \hbar^2 z\frac{\partial}{\partial z} -$$
$$\hbar^2 xz\frac{\partial^2}{\partial x\partial z} - i\hbar^2 xy\frac{\partial^2}{\partial z^2} + i\hbar^2 x\frac{\partial}{\partial y} + i\hbar^2 xz\frac{\partial^2}{\partial y\partial z} - \hbar^2 x\frac{\partial}{\partial x} -$$
$$\hbar^2 xz\frac{\partial^2}{\partial x\partial z} + \hbar^2 x^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\hbar^2\left(-x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial z} + ix\frac{\partial}{\partial y} + iy\frac{\partial}{\partial x} + x^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} - y^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} +\right.$$
$$z^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - z^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2xz\frac{\partial^2}{\partial x\partial z} + 2yz\frac{\partial^2}{\partial y\partial z} - 2ixy\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2ixz\frac{\partial^2}{\partial y\partial z} +$$
$$\left.2iyz\frac{\partial^2}{\partial x\partial z} - 2iz^2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right)$$

$$= \boldsymbol{i}\hbar\left(-xp_x + yp_y + ixp_y + iyp_x + x^2{p_z}^2 - y^2{p_z}^2 + z^2{p_x}^2 -\right.$$
$$z^2{p_y}^2 - 2xzp_xp_z + 2yzp_yp_z - 2ixy{p_z}^2 + 2ixzp_yp_z + 2iyzp_xp_z -$$
$$\left.2iz^2p_xp_y\right)$$

Lampiran 4. Hasil Perhitungan Komutator Operator Momentum Sudut Terhadap Hamiltonian Partikel Bebas

1. $[\hat{L}_x, \hat{H}\,]$

Cara I

$$[\hat{L}_x, \hat{H}\,]\Psi = \left[(yp_z - zp_y), \left(-\frac{1}{2m}(p_x{}^2 + p_y{}^2 + p_z{}^2)\right)\right]\Psi$$

$$= -\frac{1}{2m}([yp_z, p_x{}^2] + [yp_z, p_y{}^2] + [yp_z, p_z{}^2] - [zp_y, p_x{}^2] - [zp_y, p_y{}^2] - [zp_y, p_z{}^2])\Psi$$

$$= -\frac{1}{2m}\left(0 + (y[p_z, p_y{}^2] + [y, p_y{}^2]p_z) + 0 - 0 - 0 - (z[p_y, p_z{}^2] + [z, p_z{}^2]p_y)\right)\Psi$$

$$= -\frac{1}{2m}(0 + (2i\hbar p_y)p_z - 0 - (2i\hbar p_z)p_y)\,\Psi$$

$$= 0$$

Cara II

$$[\hat{L}_x, \hat{H}\,]\Psi = (\hat{L}_x\hat{H} - \hat{H}\hat{L}_x\,)\,\Psi$$

$$= (yp_z - zp_y)\left(-\frac{1}{2m}(p_x{}^2 + p_y{}^2 + p_z{}^2)\right)\Psi - \left(-\frac{1}{2m}(p_x{}^2 + p_y{}^2 + p_z{}^2)\right)(yp_z - zp_y)\Psi$$

$$= -\frac{1}{2m}(yp_zp_x{}^2 + yp_zp_y{}^2 + yp_zp_z{}^2 - zp_yp_x{}^2 - zp_yp_y{}^2 - zp_yp_z{}^2)\Psi + \frac{1}{2m}(p_x{}^2yp_z + p_y{}^2yp_z + p_z{}^2yp_z - p_x{}^2zp_y - p_y{}^2zp_y - p_z{}^2zp_y)\Psi$$

$$= -\frac{1}{2m}\left(y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\Psi + y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\Psi + y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\Psi - z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\Psi - z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\Psi - z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\Psi\right) + \frac{1}{2m}\left(\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi + \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi +\right.$$

$$\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi - \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi -$$
$$\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi - \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi\Bigg)$$
$$= -\frac{1}{2m}\left(i\hbar^3 y\frac{\partial^3\Psi}{\partial x^2\partial z} + i\hbar^3 y\frac{\partial^3\Psi}{\partial y^2\partial z} + i\hbar^3 y\frac{\partial^3\Psi}{\partial z^3} - i\hbar^3 z\frac{\partial^3\Psi}{\partial x^2\partial y} -\right.$$
$$\left. i\hbar^3 z\frac{\partial^3\Psi}{\partial y^3} - i\hbar^3 z\frac{\partial^3\Psi}{\partial y\partial z^2}\right) + \frac{1}{2m}\left(i\hbar^3 y\frac{\partial^3\Psi}{\partial x^2\partial z} + 2i\hbar^3\frac{\partial^2\Psi}{\partial y\partial z} +\right.$$
$$i\hbar^3 y\frac{\partial^3\Psi}{\partial y^2\partial z} + i\hbar^3 y\frac{\partial^3\Psi}{\partial z^3} - i\hbar^3 z\frac{\partial^3\Psi}{\partial x^2\partial y} - i\hbar^3 z\frac{\partial^3\Psi}{\partial y^3} - 2i\hbar^3\frac{\partial^2\Psi}{\partial y\partial z} -$$
$$\left. i\hbar^3 z\frac{\partial^3\Psi}{\partial y\partial z^2}\right)$$
$$= 0$$

2. $[\hat{\boldsymbol{L}}_y, \hat{\boldsymbol{H}}]$

Cara I

$$[\hat{L}_y, \hat{H}]\Psi = \left[(zp_x - xp_z), \left(-\frac{1}{2m}({p_x}^2 + {p_y}^2 + {p_z}^2)\right)\right]\Psi$$
$$= -\frac{1}{2m}\left([zp_x, {p_x}^2] + [zp_x, {p_y}^2] + [zp_x, {p_z}^2] - [xp_z, {p_x}^2] -\right.$$
$$\left.[xp_z, {p_y}^2] - [xp_z, {p_z}^2]\right)\Psi$$
$$= -\frac{1}{2m}(0 + 0 + (z[p_x, {p_z}^2] + [z, {p_z}^2]p_x) - (x[p_z, {p_x}^2] +$$
$$[x, {p_x}^2]p_z) - 0 - 0)\Psi$$
$$= -\frac{1}{2m}(0 + (2i\hbar p_z)p_x - 0 - (2i\hbar p_x)p_z)\,\Psi$$
$$= 0$$

Cara II

$$[\hat{L}_y, \hat{H}]\Psi = (\hat{L}_y\hat{H} - \hat{H}\hat{L}_y)\,\Psi$$
$$= (zp_x - xp_z)\left(-\frac{1}{2m}({p_x}^2 + {p_y}^2 + {p_z}^2)\right)\Psi - \left(-\frac{1}{2m}({p_x}^2 + {p_y}^2 +\right.$$
$$\left.{p_z}^2)\right)(zp_x - xp_z)\Psi$$

$$= -\frac{1}{2m}\left(zp_xp_x{}^2 + zp_xp_y{}^2 + zp_xp_z{}^2 - xp_zp_x{}^2 - xp_zp_y{}^2 - xp_zp_z{}^2\right)\Psi + \frac{1}{2m}\left(p_x{}^2zp_x + p_y{}^2zp_x + p_z{}^2zp_x - p_x{}^2xp_z - p_y{}^2xp_z - p_z{}^2xp_z\right)\Psi$$

$$= -\frac{1}{2m}\left(z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\Psi + z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\Psi + z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\Psi - x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\Psi - x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\Psi - x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\Psi\right) + \frac{1}{2m}\left(\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi + \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi + \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi - \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi - \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi - \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi\right)$$

$$= -\frac{1}{2m}\left(i\hbar^3 z\frac{\partial^3\Psi}{\partial x^3} + i\hbar^3 z\frac{\partial^3\Psi}{\partial x\partial y^2} + i\hbar^3 z\frac{\partial^3\Psi}{\partial x\partial z^2} - i\hbar^3 x\frac{\partial^3\Psi}{\partial x^2\partial z} - i\hbar^3 x\frac{\partial^3\Psi}{\partial y^2\partial z} - i\hbar^3 x\frac{\partial^3\Psi}{\partial z^3}\right) + \frac{1}{2m}\left(i\hbar^3 z\frac{\partial^3\Psi}{\partial x^3} + i\hbar^3 z\frac{\partial^3\Psi}{\partial x\partial y^2} + 2i\hbar^3\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial z} + i\hbar^3 z\frac{\partial^3\Psi}{\partial x\partial z^2} - 2i\hbar^3\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial z} - i\hbar^3 x\frac{\partial^3\Psi}{\partial x^2\partial z} - i\hbar^3 x\frac{\partial^3\Psi}{\partial y^2\partial z} - i\hbar^3 x\frac{\partial^3\Psi}{\partial z^3}\right)$$

$$= 0$$

3. $[\hat{L}_z, \hat{H}]$

Cara I

$$[\hat{L}_z, \hat{H}]\Psi = \left[(xp_y - yp_x), \left(-\frac{1}{2m}(p_x{}^2 + p_y{}^2 + p_z{}^2)\right)\right]\Psi$$

$$= -\frac{1}{2m}\left([xp_y, p_x{}^2] + [xp_y, p_y{}^2] + [xp_y, p_z{}^2] - [yp_x, p_x{}^2] - [yp_x, p_y{}^2] - [yp_x, p_z{}^2]\right)\Psi$$

$$= -\frac{1}{2m}\left(\left(x[p_y, p_x{}^2] + [x, p_x{}^2]p_y\right) + 0 + 0 - 0 - \left(y[p_x, p_y{}^2] + [y, p_y{}^2]p_x\right) - 0\right)\Psi$$

$$= -\frac{1}{2m}\left(0 + (2i\hbar p_x)p_y - 0 - (2i\hbar p_y)p_x\right)\Psi$$

$$= 0$$

Cara II

$[\hat{L}_z, \hat{H}\,]\Psi = (\hat{L}_z\hat{H} - \hat{H}\hat{L}_z\,)\,\Psi$

$= (xp_y - yp_x)\left(-\frac{1}{2m}(p_x{}^2 + p_y{}^2 + p_z{}^2)\right)\Psi - \left(-\frac{1}{2m}(p_x{}^2 + p_y{}^2 +\right.$

$\left.p_z{}^2)\right)(xp_y - yp_x)\Psi$

$= -\frac{1}{2m}(xp_yp_x{}^2 + xp_yp_y{}^2 + xp_yp_z{}^2 - yp_xp_x{}^2 - yp_xp_y{}^2 -$

$yp_xp_z{}^2)\Psi + \frac{1}{2m}(p_x{}^2xp_y + p_y{}^2xp_y + p_z{}^2xp_y - p_x{}^2yp_x -$

$p_y{}^2yp_x - p_z{}^2yp_x)\Psi$

$= -\frac{1}{2m}\left(x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\Psi + x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\Psi +\right.$

$x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\Psi - y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\Psi -$

$\left.y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\Psi - y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\Psi\right) +$

$\frac{1}{2m}\left(\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi + \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi +\right.$

$\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi - \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi -$

$\left.\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi - \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi\right)$

$= -\frac{1}{2m}\left(i\hbar^3x\frac{\partial^3\Psi}{\partial x^2\partial y} + i\hbar^3x\frac{\partial^3\Psi}{\partial y^3} + i\hbar^3x\frac{\partial^3\Psi}{\partial y\partial z^2} - i\hbar^3y\frac{\partial^3\Psi}{\partial x^3} -\right.$

$\left.i\hbar^3y\frac{\partial^3\Psi}{\partial x\partial y^2} - i\hbar^3y\frac{\partial^3\Psi}{\partial x\partial z^2}\right) + \frac{1}{2m}\left(2i\hbar^3\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y} + i\hbar^3x\frac{\partial^3\Psi}{\partial x^2\partial y} +\right.$

$i\hbar^3x\frac{\partial^3\Psi}{\partial y^3} + i\hbar^3x\frac{\partial^3\Psi}{\partial y\partial z^2} - i\hbar^3y\frac{\partial^3\Psi}{\partial x^3} - 2i\hbar^3\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y} - i\hbar^3y\frac{\partial^3\Psi}{\partial x\partial y^2} -$

$\left.i\hbar^3y\frac{\partial^3\Psi}{\partial x\partial z^2}\right)$

$= 0$

4. $[\hat{\boldsymbol{L}}_+, \hat{\boldsymbol{H}}\,]$

Cara I

$[\hat{L}_+, \hat{H}\,]\Psi = \left[(yp_z - zp_y + izp_x - ixp_z), \left(-\frac{1}{2m}(p_x{}^2 + p_y{}^2 + p_z{}^2)\right)\right]\Psi$

$$= -\frac{1}{2m}\left([yp_z, p_x{}^2] + [yp_z, p_y{}^2] + [yp_z, p_z{}^2] - [zp_y, p_x{}^2] - [zp_y, p_y{}^2] - [zp_y, p_z{}^2] + [izp_x, p_x{}^2] + [izp_x, p_y{}^2] + [izp_x, p_z{}^2] - [ixp_z, p_x{}^2] - [ixp_z, p_y{}^2] - [ixp_z, p_z{}^2]\right)\Psi$$

$$= -\frac{1}{2m}\left(0 + \left(y[p_z, p_y{}^2] + [y, p_y{}^2]p_z\right) + 0 - 0 - 0 - \left(z[p_y, p_z{}^2] + [z, p_z{}^2]p_y\right) + 0 + 0 + i(z[p_x, p_z{}^2] + [z, p_z{}^2]p_x) - i(x[p_z, p_x{}^2] + [x, p_x{}^2]p_z) - 0 - 0\right)\Psi$$

$$= -\frac{1}{2m}\left(0 + (2i\hbar p_y)p_z - 0 - (2i\hbar p_z)p_y + 0 + i(2i\hbar p_z)p_x - 0 - i(2i\hbar p_x)p_z\right)\Psi$$

$$= 0$$

Cara II

$$[\hat{L}_+, \hat{H}\,]\Psi = (\hat{L}_+\hat{H} - \hat{H}\hat{L}_+\,)\,\Psi$$

$$= (yp_z - zp_y + izp_x - ixp_z)\left(-\frac{1}{2m}(p_x{}^2 + p_y{}^2 + p_z{}^2)\right)\Psi - \left(-\frac{1}{2m}(p_x{}^2 + p_y{}^2 + p_z{}^2)\right)(yp_z - zp_y + izp_x - ixp_z)\Psi$$

$$= -\frac{1}{2m}(yp_zp_x{}^2 + yp_zp_y{}^2 + yp_zp_z{}^2 - zp_yp_x{}^2 - zp_yp_y{}^2 - zp_yp_z{}^2 + izp_xp_x{}^2 + izp_xp_y{}^2 + izp_xp_z{}^2 - ixp_zp_x{}^2 - ixp_zp_y{}^2 - ixp_zp_z{}^2)\Psi + \frac{1}{2m}(p_x{}^2yp_z + p_y{}^2yp_z + p_z{}^2yp_z - p_x{}^2zp_y - p_y{}^2zp_y - p_z{}^2zp_y + p_x{}^2izp_x + p_y{}^2izp_x + p_z{}^2izp_x - p_x{}^2ixp_z - p_y{}^2ixp_z - p_z{}^2ixp_z)\Psi$$

$$= -\frac{1}{2m}\left(y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\Psi + y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\Psi + y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\Psi - z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\Psi - z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\Psi - z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\Psi + iz\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\Psi + iz\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\Psi + iz\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\Psi - ix\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\Psi - ix\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\Psi - ix\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\Psi\right) +$$

$$\frac{1}{2m}\left(\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi+\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi+\right.$$
$$\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi-\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi-$$
$$\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi-\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi+$$
$$\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 iz\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi+\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 iz\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi+$$
$$\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 iz\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi-\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 ix\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi-$$
$$\left.\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 ix\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi-\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 ix\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi\right)$$
$$=-\frac{1}{2m}\left(i\hbar^3 y\frac{\partial^3\Psi}{\partial x^2\partial z}+i\hbar^3 y\frac{\partial^3\Psi}{\partial y^2\partial z}+i\hbar^3 y\frac{\partial^3\Psi}{\partial z^3}-i\hbar^3 z\frac{\partial^3\Psi}{\partial x^2\partial y}-\right.$$
$$i\hbar^3 z\frac{\partial^3\Psi}{\partial y^3}-i\hbar^3 z\frac{\partial^3\Psi}{\partial y\partial z^2}-\hbar^3 z\frac{\partial^3\Psi}{\partial x^3}-\hbar^3 z\frac{\partial^3\Psi}{\partial x\partial y^2}-\hbar^3 z\frac{\partial^3\Psi}{\partial x\partial z^2}+$$
$$\left.\hbar^3 x\frac{\partial^3\Psi}{\partial x^2\partial z}+\hbar^3 x\frac{\partial^3\Psi}{\partial y^2\partial z}+\hbar^3 x\frac{\partial^3\Psi}{\partial z^3}\right)+\frac{1}{2m}\left(i\hbar^3 y\frac{\partial^3\Psi}{\partial x^2\partial z}+2i\hbar^3\frac{\partial^2\Psi}{\partial y\partial z}+\right.$$
$$i\hbar^3 y\frac{\partial^3\Psi}{\partial y^2\partial z}+i\hbar^3 y\frac{\partial^3\Psi}{\partial z^3}-i\hbar^3 z\frac{\partial^3\Psi}{\partial x^2\partial y}-i\hbar^3 z\frac{\partial^3\Psi}{\partial y^3}-2i\hbar^3\frac{\partial^2\Psi}{\partial y\partial z}-$$
$$i\hbar^3 z\frac{\partial^3\Psi}{\partial y\partial z^2}-\hbar^3 z\frac{\partial^3\Psi}{\partial x^3}-\hbar^3 z\frac{\partial^3\Psi}{\partial x\partial y^2}-2\hbar^3\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial z}-\hbar^3 z\frac{\partial^3\Psi}{\partial x\partial z^2}+$$
$$\left.2\hbar^3\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial z}+\hbar^3 x\frac{\partial^3\Psi}{\partial x^2\partial z}+\hbar^3 x\frac{\partial^3\Psi}{\partial y^2\partial z}+\hbar^3 x\frac{\partial^3\Psi}{\partial z^3}\right)$$
$$=0$$

5. $[\hat{L}_-,\hat{H}\,]$

Cara I

$$[\hat{L}_-,\hat{H}\,]\Psi=\left[\left(yp_z-zp_y-izp_x+ixp_z\right),\left(-\frac{1}{2m}\left({p_x}^2+{p_y}^2+{p_z}^2\right)\right)\right]\Psi$$
$$=-\frac{1}{2m}\left([yp_z,{p_x}^2]+[yp_z,{p_y}^2]+[yp_z,{p_z}^2]-[zp_y,{p_x}^2]-\right.$$
$$[zp_y,{p_y}^2]-[zp_y,{p_z}^2]-[izp_x,{p_x}^2]-[izp_x,{p_y}^2]-$$
$$\left.[izp_x,{p_z}^2]+[ixp_z,{p_x}^2]+[ixp_z,{p_y}^2]+[ixp_z,{p_z}^2]\right)\Psi$$
$$=-\frac{1}{2m}\left(0+\left(y[p_z,{p_y}^2]+[y,{p_y}^2]p_z\right)+0-0-0-\right.$$
$$\left(z[p_y,{p_z}^2]+[z,{p_z}^2]p_y\right)-0-0-i(z[p_x,{p_z}^2]+$$
$$\left.[z,{p_z}^2]p_x)+i(x[p_z,{p_x}^2]+[x,{p_x}^2]p_z)+0+0\right)\Psi$$

$$= -\frac{1}{2m}\left(0 + (2i\hbar p_y)p_z - 0 - (2i\hbar p_z)p_y - 0 - i(2i\hbar p_z)p_x + 0 + i(2i\hbar p_x)p_z\right)\Psi$$

$$= 0$$

Cara II

$$[\hat{L}_-, \hat{H}\,]\Psi = (\hat{L}_-\hat{H} - \hat{H}\hat{L}_-\,)\,\Psi$$

$$= (yp_z - zp_y - izp_x + ixp_z)\left(-\frac{1}{2m}(p_x{}^2 + p_y{}^2 + p_z{}^2)\right)\Psi - \left(-\frac{1}{2m}(p_x{}^2 + p_y{}^2 + p_z{}^2)\right)(yp_z - zp_y - izp_x + ixp_z)\Psi$$

$$= -\frac{1}{2m}(yp_zp_x{}^2 + yp_zp_y{}^2 + yp_zp_z{}^2 - zp_yp_x{}^2 - zp_yp_y{}^2 - zp_yp_z{}^2 - izp_xp_x{}^2 - izp_xp_y{}^2 - izp_xp_z{}^2 + ixp_zp_x{}^2 + ixp_zp_y{}^2 + ixp_zp_z{}^2)\Psi + \frac{1}{2m}(p_x{}^2yp_z + p_y{}^2yp_z + p_z{}^2yp_z - p_x{}^2zp_y - p_y{}^2zp_y - p_z{}^2zp_y - p_x{}^2izp_x - p_y{}^2izp_x - p_z{}^2izp_x + p_x{}^2ixp_z + p_y{}^2ixp_z + p_z{}^2ixp_z)\Psi$$

$$= -\frac{1}{2m}\Bigg(y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\Psi + y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\Psi + y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\Psi - z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\Psi - z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\Psi - z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\Psi - iz\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\Psi - iz\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\Psi - iz\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\Psi + ix\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\Psi + ix\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\Psi + ix\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\Psi\Bigg) +$$

$$\frac{1}{2m}\Bigg(\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi + \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi + \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi - \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi - \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi - \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 z\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi - \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 iz\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi - \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 iz\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi -$$

$$\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 iz\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi + \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 ix\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi +$$

$$\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 ix\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi + \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 ix\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi\right)$$

$$= -\frac{1}{2m}\left(i\hbar^3 y\frac{\partial^3\Psi}{\partial x^2\partial z} + i\hbar^3 y\frac{\partial^3\Psi}{\partial y^2\partial z} + i\hbar^3 y\frac{\partial^3\Psi}{\partial z^3} - i\hbar^3 z\frac{\partial^3\Psi}{\partial x^2\partial y} -\right.$$

$$i\hbar^3 z\frac{\partial^3\Psi}{\partial y^3} - i\hbar^3 z\frac{\partial^3\Psi}{\partial y\partial z^2} + \hbar^3 z\frac{\partial^3\Psi}{\partial x^3} + \hbar^3 z\frac{\partial^3\Psi}{\partial x\partial y^2} + \hbar^3 z\frac{\partial^3\Psi}{\partial x\partial z^2} -$$

$$\left.\hbar^3 x\frac{\partial^3\Psi}{\partial x^2\partial z} - \hbar^3 x\frac{\partial^3\Psi}{\partial y^2\partial z} - \hbar^3 x\frac{\partial^3\Psi}{\partial z^3}\right) + \frac{1}{2m}\left(i\hbar^3 y\frac{\partial^3\Psi}{\partial x^2\partial z} + 2i\hbar^3\frac{\partial^2\Psi}{\partial y\partial z} +\right.$$

$$i\hbar^3 y\frac{\partial^3\Psi}{\partial y^2\partial z} + i\hbar^3 y\frac{\partial^3\Psi}{\partial z^3} - i\hbar^3 z\frac{\partial^3\Psi}{\partial x^2\partial y} - i\hbar^3 z\frac{\partial^3\Psi}{\partial y^3} - 2i\hbar^3\frac{\partial^2\Psi}{\partial y\partial z} -$$

$$i\hbar^3 z\frac{\partial^3\Psi}{\partial y\partial z^2} + \hbar^3 z\frac{\partial^3\Psi}{\partial x^3} + \hbar^3 z\frac{\partial^3\Psi}{\partial x\partial y^2} + 2\hbar^3\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial z} + \hbar^3 z\frac{\partial^3\Psi}{\partial x\partial z^2} -$$

$$\left.2\hbar^3\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial z} - \hbar^3 x\frac{\partial^3\Psi}{\partial x^2\partial z} - \hbar^3 x\frac{\partial^3\Psi}{\partial y^2\partial z} - \hbar^3 x\frac{\partial^3\Psi}{\partial z^3}\right)$$

$$= 0$$

Lampiran 5. Hasil Perhitungan Komutator Operator Momentum Sudut Kuadrat Terhadap Hamiltonian Partikel Bebas

1. $\left[\hat{\boldsymbol{L}}_{x}{}^{2}, \widehat{\boldsymbol{H}}\right]$

$$\left[\hat{L}_x{}^2, \widehat{H}\right]\Psi = \left[\left(i\hbar\left(yp_y + zp_z + 2yzp_yp_z - y^2p_z{}^2 - z^2p_y{}^2\right)\right), \left(-\frac{1}{2m}\left(p_x{}^2 + p_y{}^2 + p_z{}^2\right)\right)\right]\Psi$$

$$= -\frac{i\hbar}{2m}\left([yp_y, p_x{}^2] + [yp_y, p_y{}^2] + [yp_y, p_z{}^2] + [zp_z, p_x{}^2] + [zp_z, p_y{}^2] + [zp_z, p_z{}^2] + 2[yzp_yp_z, p_x{}^2] + 2[yzp_yp_z, p_y{}^2] + 2[yzp_yp_z, p_z{}^2] - [y^2p_z{}^2, p_x{}^2] - [y^2p_z{}^2, p_y{}^2] - [y^2p_z{}^2, p_z{}^2] - [z^2p_y{}^2, p_x{}^2] - [z^2p_y{}^2, p_y{}^2] - [z^2p_y{}^2, p_z{}^2]\right)\Psi$$

$$= -\frac{i\hbar}{2m}\left(0 + \left(y[p_y, p_y{}^2] + [y, p_y{}^2]p_y\right) + 0 + 0 + 0 + \left(z[p_z, p_z{}^2] + [z, p_z{}^2]p_z\right) + 0 + 2\left(yz[p_yp_z, p_y{}^2] + [yz, p_y{}^2]p_yp_z\right) + 2\left(yz[p_yp_z, p_z{}^2] + [yz, p_z{}^2]p_yp_z\right) - 0 - \left(y^2[p_z{}^2, p_y{}^2] + [y^2, p_y{}^2]p_z{}^2\right) - 0 - 0 - 0 - \left(z^2[p_y{}^2, p_z{}^2] + [z^2, p_z{}^2]p_y{}^2\right)\right)\Psi$$

$$= -\frac{i\hbar}{2m}\left(\left(0 + (2i\hbar p_y)p_y\right) + \left(0 + (2i\hbar p_z)p_z\right) + 2\left(0 + \left(y[z, p_y{}^2] + [y, p_y{}^2]z\right)p_yp_z\right) + 2\left(0 + \left(y[z, p_z{}^2] + [y, p_z{}^2]z\right)p_yp_z\right) - \left(0 + \left(y[y, p_y{}^2] + [y, p_y{}^2]y\right)p_z{}^2\right) - \left(0 + \left(z[z, p_z{}^2] + [z, p_z{}^2]z\right)p_y{}^2\right)\right)\Psi$$

$$= -\frac{i\hbar}{2m}\left(2i\hbar p_y{}^2 + 2i\hbar p_z{}^2 + 2\left(\left(0 + (2i\hbar p_y)z\right)p_yp_z\right) + 2\left(\left(y(2i\hbar p_z) + 0\right)p_yp_z\right) - \left(0 + \left(y(2i\hbar p_y) + (2i\hbar p_y)y\right)p_z{}^2\right) - \left(0 + \left(z(2i\hbar p_z) + (2i\hbar p_z)z\right)p_y{}^2\right)\right)\Psi$$

$$= -\frac{i\hbar}{2m}\left(2i\hbar p_y{}^2 + 2i\hbar p_z{}^2 + 4i\hbar zp_y{}^2p_z + 4i\hbar yp_yp_z{}^2 - 4i\hbar yp_yp_z{}^2 - 4i\hbar zp_y{}^2p_z\right)\Psi$$

$$= -\frac{i\hbar}{2m}\left(2i\hbar p_y{}^2 + 2i\hbar p_z{}^2\right)\Psi$$

$$= \frac{2\hbar^2}{2m}\left(p_y{}^2 + p_z{}^2\right)\Psi$$

$$\left[\hat{L}_x{}^2, \hat{H}\right]\Psi = 2\hbar^2 \hat{H}_{yz}\Psi$$

$$\left[\hat{L}_x{}^2, \hat{H}\right] = 2\hbar^2 \hat{H}_{yz}$$

2. $\left[\hat{\boldsymbol{L}}_y{}^2, \hat{\boldsymbol{H}}\right]$

$$\left[\hat{L}_y{}^2, \hat{H}\right]\Psi = \left[\left(i\hbar(xp_x + zp_z + 2xzp_xp_z - x^2p_z{}^2 - z^2p_x{}^2)\right), \left(-\frac{1}{2m}\left(p_x{}^2 + p_y{}^2 + p_z{}^2\right)\right)\right]\Psi$$

$$= -\frac{i\hbar}{2m}\big([xp_x, p_x{}^2] + [xp_x, p_y{}^2] + [xp_x, p_z{}^2] + [zp_z, p_x{}^2] + [zp_z, p_y{}^2] + [zp_z, p_z{}^2] + 2[xzp_xp_z, p_x{}^2] + 2[xzp_xp_z, p_y{}^2] + 2[xzp_xp_z, p_z{}^2] - [x^2p_z{}^2, p_x{}^2] - [x^2p_z{}^2, p_y{}^2] - [x^2p_z{}^2, p_z{}^2] - [z^2p_x{}^2, p_x{}^2] - [z^2p_x{}^2, p_y{}^2] - [z^2p_x{}^2, p_z{}^2]\big)\Psi$$

$$= -\frac{i\hbar}{2m}\big((x[p_x, p_x{}^2] + [x, p_x{}^2]p_x) + 0 + 0 + 0 + 0 + (z[p_z, p_z{}^2] + [z, p_z{}^2]p_z) + 2(xz[p_xp_z, p_x{}^2] + [xz, p_x{}^2]p_xp_z) + 0 + 2(xz[p_xp_z, p_z{}^2] + [xz, p_z{}^2]p_xp_z) - (x^2[p_z{}^2, p_x{}^2] + [x^2, p_x{}^2]p_z{}^2) - 0 - 0 - 0 - 0 - (z^2[p_x{}^2, p_z{}^2] + [z^2, p_z{}^2]p_x{}^2)\big)\Psi$$

$$= -\frac{i\hbar}{2m}\big((0 + (2i\hbar p_x)p_x) + (0 + (2i\hbar p_z)p_z) + 2(0 + (x[z, p_x{}^2] + [x, p_x{}^2]z)p_xp_z) + 0 + 2(0 + (x[z, p_z{}^2] + [x, p_z{}^2]z)p_xp_z) - (0 + (x[x, p_x{}^2] + [x, p_x{}^2]x)p_z{}^2) - 0 - 0 - 0 - 0 - (0 + (z[z, p_z{}^2] + [z, p_z{}^2]z)p_x{}^2)\big)\Psi$$

$$= -\frac{i\hbar}{2m}\Big(2i\hbar p_x{}^2 + 2i\hbar p_z{}^2 + 2\big((0 + (2i\hbar p_x)z)p_xp_z\big) + 2\big((x(2i\hbar p_z) + 0)p_xp_z\big) - (0 + (x(2i\hbar p_x) + (2i\hbar p_x)x)p_z{}^2) - (0 + (z(2i\hbar p_z) + (2i\hbar p_z)z)p_x{}^2)\Big)\Psi$$

$$= -\frac{i\hbar}{2m}(2i\hbar p_x{}^2 + 2i\hbar p_z{}^2 + 4i\hbar zp_x{}^2p_z + 4i\hbar xp_xp_z{}^2 - 4i\hbar xp_xp_z{}^2 - 4i\hbar zp_x{}^2p_z)\Psi$$

$$= -\frac{i\hbar}{2m}(2i\hbar p_x{}^2 + 2i\hbar p_z{}^2)\Psi$$

$$\left[\hat{L}_y{}^2, \hat{H}\right]\Psi = 2\hbar^2 \hat{H}_{xz}\,\Psi$$

$$\left[\hat{L}_y{}^2, \hat{H}\right] \quad = 2\hbar^2 \hat{H}_{xz}$$

3. $\left[\hat{\boldsymbol{L}}_z{}^2, \hat{\boldsymbol{H}}\right]$

$$\left[\hat{L}_z{}^2, \hat{H}\right]\Psi = \Big[\big(i\hbar\big(xp_x + yp_y + 2xyp_xp_y - x^2p_y{}^2 -$$

$$y^2p_x{}^2)\big), \left(-\frac{1}{2m}(p_x{}^2 + p_y{}^2 + p_z{}^2)\right)\Big]\Psi$$

$$= -\frac{i\hbar}{2m}([xp_x, p_x{}^2] + [xp_x, p_y{}^2] + [xp_x, p_z{}^2] + [yp_y, p_x{}^2] +$$

$$[yp_y, p_y{}^2] + [yp_y, p_z{}^2] + 2[xyp_xp_y, p_x{}^2] +$$

$$2[xyp_xp_y, p_y{}^2] + 2[xyp_xp_y, p_z{}^2] - [x^2p_y{}^2, p_x{}^2] -$$

$$[x^2p_y{}^2, p_y{}^2] - [x^2p_y{}^2, p_z{}^2] - [y^2p_x{}^2, p_x{}^2] - [y^2p_x{}^2, p_y{}^2] -$$

$$[y^2p_x{}^2, p_z{}^2])\Psi$$

$$= -\frac{i\hbar}{2m}\Big((x[p_x, p_x{}^2] + [x, p_x{}^2]p_x) + 0 + 0 + 0 +$$

$$(y[p_y, p_y{}^2] + [y, p_y{}^2]p_y) + 0 + 2(xy[p_xp_y, p_x{}^2] +$$

$$[xy, p_x{}^2]p_xp_y) + 2(xy[p_xp_y, p_y{}^2] + [xy, p_y{}^2]p_xp_y) + 0 -$$

$$(x^2[p_y{}^2, p_x{}^2] + [x^2, p_x{}^2]p_y{}^2) - 0 - 0 - 0 -$$

$$(y^2[p_x{}^2, p_y{}^2] + [y^2, p_y{}^2]p_x{}^2) - 0\Big)\Psi$$

$$= -\frac{i\hbar}{2m}\Big((0 + (2i\hbar p_x)p_x) + (0 + (2i\hbar p_y)p_y) + 2(0 +$$

$$(x[y, p_x{}^2] + [x, p_x{}^2]y)p_xp_y) + 2(0 + (x[y, p_y{}^2] +$$

$$[x, p_y{}^2]y)p_xp_y) - (0 + (x[x, p_x{}^2] + [x, p_x{}^2]x)p_y{}^2) -$$

$$(0 + (y[y, p_y{}^2] + [y, p_y{}^2]y)p_x{}^2)\Big)\Psi$$

$$= -\frac{i\hbar}{2m}\Big(2i\hbar p_x{}^2 + 2i\hbar p_y{}^2 + 2\left((0 + (2i\hbar p_x)y)p_xp_y\right) +$$

$$2\left((x(2i\hbar p_y) + 0)p_xp_y\right) - (0 + (x(2i\hbar p_x) +$$

$$(2i\hbar p_x)x)p_y{}^2) - (0 + (y(2i\hbar p_y) + (2i\hbar p_y)y)p_x{}^2)\Big)\Psi$$

$$= -\frac{i\hbar}{2m}\Big(2i\hbar p_x{}^2 + 2i\hbar p_y{}^2 + 4i\hbar y p_x{}^2 p_y + 4i\hbar x p_x p_y{}^2 - 4i\hbar x p_x p_y{}^2 - 4i\hbar y p_x{}^2 p_y\Big)\Psi$$

$$= -\frac{i\hbar}{2m}\big(2i\hbar p_x{}^2 + 2i\hbar p_y{}^2\big)\Psi$$

$$\left[\hat{L}_z{}^2, \hat{H}\,\right]\Psi = 2\hbar^2 \hat{H}_{xy}\,\Psi$$

$$\left[\hat{L}_z{}^2, \hat{H}\,\right] \quad = 2\hbar^2 \hat{H}_{xy}$$

4. $[\hat{\boldsymbol{L}}^2, \hat{\boldsymbol{H}}\,]$

$$[\hat{L}^2, \hat{H}\,]\Psi = \Big[\Big(i\hbar\big(2xp_x + 2yp_y + 2zp_z + 2xyp_xp_y + 2xzp_xp_z + 2yzp_yp_z - x^2p_y{}^2 - x^2p_z{}^2 - y^2p_x{}^2 - y^2p_z{}^2 - z^2p_x{}^2 - z^2p_y{}^2\big)\Big), \Big(-\frac{1}{2m}\big(p_x{}^2 + p_y{}^2 + p_z{}^2\big)\Big)\Big]\Psi$$

$$= -\frac{i\hbar}{2m}\Big(2[xp_x, p_x{}^2] + 2[xp_x, p_y{}^2] + 2[xp_x, p_z{}^2] + 2[yp_y, p_x{}^2] + 2[yp_y, p_y{}^2] + 2[yp_y, p_z{}^2] + 2[zp_z, p_x{}^2] + 2[zp_z, p_y{}^2] + 2[zp_z, p_z{}^2] + 2[xyp_xp_y, p_x{}^2] + 2[xyp_xp_y, p_y{}^2] + 2[xyp_xp_y, p_z{}^2] + 2[xzp_xp_z, p_x{}^2] + 2[xzp_xp_z, p_y{}^2] + 2[xzp_xp_z, p_z{}^2] + 2[yzp_yp_z, p_x{}^2] + 2[yzp_yp_z, p_y{}^2] + 2[yzp_yp_z, p_z{}^2] - [x^2p_y{}^2, p_x{}^2] - [x^2p_y{}^2, p_y{}^2] - [x^2p_y{}^2, p_z{}^2] - [x^2p_z{}^2, p_x{}^2] - [x^2p_z{}^2, p_y{}^2] - [x^2p_z{}^2, p_z{}^2] - [y^2p_x{}^2, p_x{}^2] - [y^2p_x{}^2, p_y{}^2] - [y^2p_x{}^2, p_z{}^2] - [y^2p_z{}^2, p_x{}^2] - [y^2p_z{}^2, p_y{}^2] - [y^2p_z{}^2, p_z{}^2] - [z^2p_x{}^2, p_x{}^2] - [z^2p_x{}^2, p_y{}^2] - [z^2p_x{}^2, p_z{}^2] - [z^2p_y{}^2, p_x{}^2] - [z^2p_y{}^2, p_y{}^2] - [z^2p_y{}^2, p_z{}^2]\Big)\Psi$$

$$= -\frac{i\hbar}{2m}\Big(2(x[p_x, p_x{}^2] + [x, p_x{}^2]p_x) + 0 + 0 + 0 + 2\big(y[p_y, p_y{}^2] + [y, p_y{}^2]p_y\big) + 0 + 0 + 0 + 2(z[p_z, p_z{}^2] + [z, p_z{}^2]p_z) + 2\big(xy[p_xp_y, p_x{}^2] + [xy, p_x{}^2]p_xp_y\big) + 2\big(xy[p_xp_y, p_y{}^2] + [xy, p_y{}^2]p_xp_y\big) + 0 + 2(xz[p_xp_z, p_x{}^2] + [xz, p_x{}^2]p_xp_z) + 0 + 2(xz[p_xp_z, p_z{}^2] + [xz, p_z{}^2]p_xp_z) + 0 + 2\big(yz[p_yp_z, p_y{}^2] + [yz, p_y{}^2]p_yp_z\big) + 2\big(yz[p_yp_z, p_z{}^2] + [yz, p_z{}^2]p_yp_z\big) -$$

$\left(x^2[p_y{}^2,p_x{}^2]+[x^2,p_x{}^2]p_y{}^2\right)-0-0-\left(x^2[p_z{}^2,p_x{}^2]+[x^2,p_x{}^2]p_z{}^2\right)-0-0-0-\left(y^2[p_x{}^2,p_y{}^2]+[y^2,p_y{}^2]p_x{}^2\right)-0-0-\left(y^2[p_z{}^2,p_y{}^2]+[y^2,p_y{}^2]p_z{}^2\right)-0-0-0-\left(z^2[p_x{}^2,p_z{}^2]+[z^2,p_z{}^2]p_x{}^2\right)-0-0-\left(z^2[p_y{}^2,p_z{}^2]+[z^2,p_z{}^2]p_y{}^2\right)\Big)\Psi$

$= -\frac{i\hbar}{2m}\Big(2(0+(2i\hbar p_x)p_x)+2\left(0+(2i\hbar p_y)p_y\right)+2(0+(2i\hbar p_z)p_z)+2\left(0+(x[y,p_x{}^2]+[x,p_x{}^2]y)p_xp_y\right)+2\left(0+\left(x[y,p_y{}^2]+[x,p_y{}^2]y\right)p_xp_y\right)+2(0+(x[z,p_x{}^2]+[x,p_x{}^2]z)p_xp_z)+2(0+(x[z,p_z{}^2]+[x,p_z{}^2]z)p_xp_z)+2\left(0+\left(y[z,p_y{}^2]+[y,p_y{}^2]z\right)p_yp_z\right)+2\left(0+(y[z,p_z{}^2]+[y,p_z{}^2]z)p_yp_z\right)-\left(0+(x[x,p_x{}^2]+[x,p_x{}^2]x)p_y{}^2\right)-(0+(x[x,p_x{}^2]+[x,p_x{}^2]x)p_z{}^2)-\left(0+\left(y[y,p_y{}^2]+[y,p_y{}^2]y\right)p_x{}^2\right)-\left(0+\left(y[y,p_y{}^2]+[y,p_y{}^2]y\right)p_z{}^2\right)-(0+(z[z,p_z{}^2]+[z,p_z{}^2]z)p_x{}^2)-\left(0+(z[z,p_z{}^2]+[z,p_z{}^2]z)p_y{}^2\right)\Big)\Psi$

$= -\frac{i\hbar}{2m}\Big(4i\hbar p_x{}^2+4i\hbar p_y{}^2+4i\hbar p_z{}^2+2\left((0+(2i\hbar p_x)y)p_xp_y\right)+2\left(\left(x(2i\hbar p_y)+0\right)p_xp_y\right)+2((0+(2i\hbar p_x)z)p_xp_z)+2((x(2i\hbar p_z)+0)p_xp_z)+2\left(\left(0+(2i\hbar p_y)z\right)p_yp_z\right)+2\left((y(2i\hbar p_z)+0)p_yp_z\right)-\left(0+(x(2i\hbar p_x)+(2i\hbar p_x)x)p_y{}^2\right)-(0+(x(2i\hbar p_x)+(2i\hbar p_x)x)p_z{}^2)-\left(0+\left(y(2i\hbar p_y)+(2i\hbar p_y)y\right)p_x{}^2\right)-\left(0+\left(y(2i\hbar p_y)+(2i\hbar p_y)y\right)p_z{}^2\right)-(0+(z(2i\hbar p_z)+(2i\hbar p_z)z)p_x{}^2)-\left(0+(z(2i\hbar p_z)+(2i\hbar p_z)z)p_y{}^2\right)\Big)\Psi$

$= -\frac{i\hbar}{2m}\big(4i\hbar p_x{}^2+4i\hbar p_y{}^2+4i\hbar p_z{}^2+4i\hbar yp_x{}^2p_y+4i\hbar xp_xp_y{}^2+4i\hbar zp_x{}^2p_z+4i\hbar xp_xp_z{}^2+4i\hbar zp_y{}^2p_z+4i\hbar yp_yp_z{}^2-$

$$4i\hbar x p_x p_y{}^2 - 4i\hbar x p_x p_z{}^2 - 4i\hbar y p_x{}^2 p_y - 4i\hbar y p_y p_z{}^2 -$$
$$4i\hbar z p_x{}^2 p_z - 4i\hbar y p_y p_z{}^2\big)\Psi$$
$$= -\frac{2i\hbar}{2m}\left(2i\hbar p_x{}^2 + 2i\hbar p_y{}^2 + 2i\hbar p_z{}^2\right)\Psi$$
$$\left[\hat{L}^2, \hat{H}\,\right]\Psi = 4\hbar^2 \hat{H}\,\Psi$$
$$\left[\hat{L}^2, \hat{H}\,\right] \quad = 4\hbar^2 \hat{H}$$

5. $\left[\hat{\boldsymbol{L}}_+{}^{\boldsymbol{2}}, \hat{\boldsymbol{H}}\right]$

$$\left[\hat{L}_+{}^2, \hat{H}\,\right]\Psi = \Big[\Big(\boldsymbol{i}\hbar\big(-xp_x + yp_y - \;ixp_y - iyp_x + x^2p_z{}^2 - y^2p_z{}^2 +$$
$$z^2p_x{}^2 - z^2p_y{}^2 - 2xzp_xp_z + 2yzp_yp_z + 2ixyp_z{}^2 -$$
$$2ixzp_yp_z - 2iyzp_xp_z + 2iz^2p_xp_y\big)\Big), \Big(-\frac{1}{2m}\big(p_x{}^2 + p_y{}^2 +$$
$$p_z{}^2\big)\Big)\Big]\Psi$$
$$= -\frac{i\hbar}{2m}\Big(-[xp_x, p_x{}^2] - [xp_x, p_y{}^2] - [xp_x, p_z{}^2] + [yp_y, p_x{}^2] +$$
$$[yp_y, p_y{}^2] + [yp_y, p_z{}^2] - i[xp_y, p_x{}^2] - i[xp_y, p_y{}^2] -$$
$$i[xp_y, p_z{}^2] - i[yp_x, p_x{}^2] - i[yp_x, p_y{}^2] - i[yp_x, p_z{}^2] +$$
$$[x^2p_z{}^2, p_x{}^2] + [x^2p_z{}^2, p_y{}^2] + [x^2p_z{}^2, p_z{}^2] - [y^2p_z{}^2, p_x{}^2] -$$
$$[y^2p_z{}^2, p_y{}^2] - [y^2p_z{}^2, p_z{}^2] + [z^2p_x{}^2, p_x{}^2] + [z^2p_x{}^2, p_y{}^2] +$$
$$[z^2p_x{}^2, p_z{}^2] - [z^2p_y{}^2, p_x{}^2] - [z^2p_y{}^2, p_y{}^2] - [z^2p_y{}^2, p_z{}^2] -$$
$$[2xzp_xp_z, p_x{}^2] - [2xzp_xp_z, p_y{}^2] - [2xzp_xp_z, p_z{}^2] +$$
$$[2yzp_yp_z, p_x{}^2] + [2yzp_yp_z, p_y{}^2] + [2yzp_yp_z, p_z{}^2] +$$
$$[2ixyp_z{}^2, p_x{}^2] + [2ixyp_z{}^2, p_y{}^2] + [2ixyp_z{}^2, p_z{}^2] -$$
$$[2ixzp_yp_z, p_x{}^2] - [2ixzp_yp_z, p_y{}^2] - [2ixzp_yp_z, p_z{}^2] -$$
$$[2iyzp_xp_z, p_x{}^2] - [2iyzp_xp_z, p_y{}^2] - [2iyzp_xp_z, p_z{}^2] +$$
$$[2iz^2p_xp_y, p_x{}^2] + [2iz^2p_xp_y, p_y{}^2] + [2iz^2p_xp_y, p_z{}^2]\Big)\Psi$$
$$= -\frac{i\hbar}{2m}\Big(-\big(x[p_x, p_x{}^2] + [x, p_x{}^2]p_x\big) - 0 - 0 + 0 +$$
$$\big(y[p_y, p_y{}^2] + [y, p_y{}^2]p_y\big) + 0 - i\big(x[p_y, p_x{}^2] + [x, p_x{}^2]p_y\big) -$$
$$0 - 0 - 0 - i\big(y[p_x, p_y{}^2] + [y, p_y{}^2]p_x\big) - 0 + \big(x^2[p_z{}^2, p_x{}^2] +$$

$[x^2,{p_x}^2]{p_z}^2) + 0 + 0 - 0 - (y^2[{p_z}^2,{p_y}^2] + [y^2,{p_y}^2]{p_z}^2) -$
$0 + 0 + 0 + (z^2[{p_x}^2,{p_z}^2] + [z^2,{p_z}^2]{p_x}^2) - 0 - 0 -$
$(z^2[{p_y}^2,{p_z}^2] + [z^2,{p_z}^2]{p_y}^2) - 2(xz[p_xp_z,{p_x}^2] +$
$[xz,{p_x}^2]p_xp_z) - 0 - 2(xz[p_xp_z,{p_z}^2] + [xz,{p_z}^2]p_xp_z) + 0 +$
$2(yz[p_yp_z,{p_y}^2] + [yz,{p_y}^2]p_yp_z) + 2(yz[p_yp_z,{p_z}^2] +$
$[yz,{p_z}^2]p_yp_z) + 2i(xy[{p_z}^2,{p_x}^2] + [xy,{p_x}^2]{p_z}^2) +$
$2i(xy[{p_z}^2,{p_y}^2] + [xy,{p_y}^2]{p_z}^2) + 0 - 2i(xz[p_yp_z,{p_x}^2] +$
$[xz,{p_x}^2]p_yp_z) - 0 - 2i(xz[p_yp_z,{p_z}^2] + [xz,{p_z}^2]p_yp_z) -$
$0 - 2i(yz[p_xp_z,{p_y}^2] + [yz,{p_y}^2]p_xp_z) - 2i(yz[p_xp_z,{p_z}^2] +$
$[yz,{p_z}^2]p_xp_z) + 0 + 0 + 2i(z^2[p_xp_y,{p_z}^2] +$
$[z^2,{p_z}^2]p_xp_y))\Psi$

$= -\frac{i\hbar}{2m}\Big(-(0 + (2i\hbar p_x)p_x) + (0 + (2i\hbar p_y)p_y) - i(0 +$
$(2i\hbar p_x)p_y) - i(0 + (2i\hbar p_y)p_x) + (0 + (x[x,{p_x}^2] +$
$[x,{p_x}^2]x){p_z}^2) - (0 + (y[y,{p_y}^2] + [y,{p_y}^2]y){p_z}^2) + (0 +$
$(z[z,{p_z}^2] + [z,{p_z}^2]z){p_x}^2) - (0 + (z[z,{p_z}^2] +$
$[z,{p_z}^2]z){p_y}^2) - 2(0 + (x[z,{p_x}^2] + [x,{p_x}^2]z)p_xp_z) - 2(0 +$
$(x[z,{p_z}^2] + [x,{p_z}^2]z)p_xp_z) + 2(0 + (y[z,{p_y}^2] +$
$[y,{p_y}^2]z)p_yp_z) + 2(0 + (y[z,{p_z}^2] + [y,{p_z}^2]z)p_yp_z) +$
$2i(0 + (x[y,{p_x}^2] + [x,{p_x}^2]y){p_z}^2) + 2i(0 + (x[y,{p_y}^2] +$
$[x,{p_y}^2]y){p_z}^2) - 2i(0 + (x[z,{p_x}^2] + [x,{p_x}^2]z)p_yp_z) -$
$2i(0 + (x[z,{p_z}^2] + [x,{p_z}^2]z)p_yp_z) - 2i(0 + (y[z,{p_y}^2] +$
$[y,{p_y}^2]z)p_xp_z) - 2i(0 + (y[z,{p_z}^2] + [y,{p_z}^2]z)p_xp_z) +$
$2i(0 + (z[z,{p_z}^2] + [z,{p_z}^2]z)p_xp_y)\Big)\Psi$

$= -\frac{i\hbar}{2m}\Big(-2i\hbar {p_x}^2 + 2i\hbar {p_y}^2 + 2\hbar p_xp_y + 2\hbar p_xp_y + (0 +$
$(x(2i\hbar p_x) + (2i\hbar p_x)x){p_z}^2) - (0 + (y(2i\hbar p_y) +$
$(2i\hbar p_y)y){p_z}^2) + (0 + (z(2i\hbar p_z) + (2i\hbar p_z)z){p_x}^2) - (0 +$

$(z(2i\hbar p_z) + (2i\hbar p_z)z)p_y{}^2) - 2((0 + (2i\hbar p_x)z)p_x p_z) -$

$2((x(2i\hbar p_z) + 0)p_x p_z) + 2\left((0 + (2i\hbar p_y)z)p_y p_z\right) +$

$2\left((y(2i\hbar p_z) + 0)p_y p_z\right) + 2i((0 + (2i\hbar p_x)y)p_z{}^2) + 2i(0 +$

$(x(2i\hbar p_y) + 0)p_z{}^2) - 2i\left((0 + (2i\hbar p_x)z)p_y p_z\right) -$

$2i\left((x(2i\hbar p_z) + 0)p_y p_z\right) - 2i\left((0 + (2i\hbar p_y)z)p_x p_z\right) -$

$2i((y(2i\hbar p_z) + 0)p_x p_z) + 2i(0 + (z(2i\hbar p_z) +$

$(2i\hbar p_z)z)p_x p_y)\Big)\Psi$

$= -\frac{i\hbar}{2m}(-2i\hbar p_x{}^2 + 2i\hbar p_y{}^2 + 4\hbar p_x p_y + 4i\hbar x p_x p_z{}^2 -$

$4i\hbar y p_y p_z{}^2 + 4i\hbar z p_x{}^2 p_z - 4i\hbar z p_y{}^2 p_z - 4i\hbar z p_x{}^2 p_z -$

$4i\hbar x p_x p_z{}^2 + 4i\hbar z p_y{}^2 p_z + 4i\hbar y p_y p_z{}^2 - 4\hbar y p_x p_z{}^2 -$

$4\hbar x p_y p_z{}^2 + 4\hbar z p_x p_y p_z + 4\hbar x p_y p_z{}^2 + 4\hbar z p_x p_y p_z +$

$4\hbar y p_x p_z{}^2 - 8\hbar z p_x p_y p_z)\Psi$

$= -\frac{i\hbar}{2m}(-2i\hbar p_x{}^2 + 2i\hbar p_y{}^2 + 4\hbar p_x p_y)\Psi$

$$\left[\hat{L}_+{}^2, \hat{H}\right]\Psi = -2\hbar^2\left(\hat{H}_x - \hat{H}_y + \frac{i}{m}p_x p_y\right)\Psi$$

$$\left[\hat{L}_+{}^2, \hat{H}\right] = -2\hbar^2\left(\hat{H}_x - \hat{H}_y + \frac{i}{m}p_x p_y\right)$$

6. $\left[\hat{\boldsymbol{L}}_-{}^2, \hat{\boldsymbol{H}}\right]$

$\left[\hat{L}_-{}^2, \hat{H}\right]\Psi = \Big[\Big(\boldsymbol{i}\hbar(-x p_x + y p_y + i x p_y + i y p_x + x^2 p_z{}^2 - y^2 p_z{}^2 +$

$z^2 p_x{}^2 - z^2 p_y{}^2 - 2xz p_x p_z + 2yz p_y p_z - 2ixy p_z{}^2 +$

$2ixz p_y p_z + 2iyz p_x p_z - 2iz^2 p_x p_y)\Big), \left(-\frac{1}{2m}(p_x{}^2 + p_y{}^2 +\right.$

$\left.p_z{}^2)\right)\Big]\Psi$

$= -\frac{i\hbar}{2m}(-[x p_x, p_x{}^2] - [x p_x, p_y{}^2] - [x p_x, p_z{}^2] + [y p_y, p_x{}^2] +$

$[y p_y, p_y{}^2] + [y p_y, p_z{}^2] + i[x p_y, p_x{}^2] + i[x p_y, p_y{}^2] +$

$i[x p_y, p_z{}^2] + i[y p_x, p_x{}^2] + i[y p_x, p_y{}^2] + i[y p_x, p_z{}^2] +$

$[x^2{p_z}^2, {p_x}^2] + [x^2{p_z}^2, {p_y}^2] + [x^2{p_z}^2, {p_z}^2] - [y^2{p_z}^2, {p_x}^2] - [y^2{p_z}^2, {p_y}^2] - [y^2{p_z}^2, {p_z}^2] + [z^2{p_x}^2, {p_x}^2] + [z^2{p_x}^2, {p_y}^2] + [z^2{p_x}^2, {p_z}^2] - [z^2{p_y}^2, {p_x}^2] - [z^2{p_y}^2, {p_y}^2] - [z^2{p_y}^2, {p_z}^2] - [2xzp_xp_z, {p_x}^2] - [2xzp_xp_z, {p_y}^2] - [2xzp_xp_z, {p_z}^2] + [2yzp_yp_z, {p_x}^2] + [2yzp_yp_z, {p_y}^2] + [2yzp_yp_z, {p_z}^2] - [2ixy{p_z}^2, {p_x}^2] - [2ixy{p_z}^2, {p_y}^2] - [2ixy{p_z}^2, {p_z}^2] + [2ixzp_yp_z, {p_x}^2] + [2ixzp_yp_z, {p_y}^2] + [2ixzp_yp_z, {p_z}^2] + [2iyzp_xp_z, {p_x}^2] + [2iyzp_xp_z, {p_y}^2] + [2iyzp_xp_z, {p_z}^2] - [2iz^2p_xp_y, {p_x}^2] - [2iz^2p_xp_y, {p_y}^2] - [2iz^2p_xp_y, {p_z}^2])\Psi$

$= -\frac{i\hbar}{2m}\Big(-(x[p_x, {p_x}^2] + [x, {p_x}^2]p_x) - 0 - 0 + 0 + (y[p_y, {p_y}^2] + [y, {p_y}^2]p_y) + 0 + i(x[p_y, {p_x}^2] + [x, {p_x}^2]p_y) + 0 + 0 + 0 + i(y[p_x, {p_y}^2] + [y, {p_y}^2]p_x) + 0 + (x^2[{p_z}^2, {p_x}^2] + [x^2, {p_x}^2]{p_z}^2) + 0 + 0 - 0 - (y^2[{p_z}^2, {p_y}^2] + [y^2, {p_y}^2]{p_z}^2) - 0 + 0 + 0 + (z^2[{p_x}^2, {p_z}^2] + [z^2, {p_z}^2]{p_x}^2) - 0 - 0 - (z^2[{p_y}^2, {p_z}^2] + [z^2, {p_z}^2]{p_y}^2) - 2(xz[p_xp_z, {p_x}^2] + [xz, {p_x}^2]p_xp_z) - 0 - 2(xz[p_xp_z, {p_z}^2] + [xz, {p_z}^2]p_xp_z) + 0 + 2(yz[p_yp_z, {p_y}^2] + [yz, {p_y}^2]p_yp_z) + 2(yz[p_yp_z, {p_z}^2] + [yz, {p_z}^2]p_yp_z) - 2i(xy[{p_z}^2, {p_x}^2] + [xy, {p_x}^2]{p_z}^2) - 2i(xy[{p_z}^2, {p_y}^2] + [xy, {p_y}^2]{p_z}^2) - 0 + 2i(xz[p_yp_z, {p_x}^2] + [xz, {p_x}^2]p_yp_z) + 0 + 2i(xz[p_yp_z, {p_z}^2] + [xz, {p_z}^2]p_yp_z) + 0 + 2i(yz[p_xp_z, {p_y}^2] + [yz, {p_y}^2]p_xp_z) + 2i(yz[p_xp_z, {p_z}^2] + [yz, {p_z}^2]p_xp_z) - 0 - 0 - 2i(z^2[p_xp_y, {p_z}^2] + [z^2, {p_z}^2]p_xp_y)\Big)\Psi$

$= -\frac{i\hbar}{2m}\Big(-(0 + (2i\hbar p_x)p_x) + (0 + (2i\hbar p_y)p_y) + i(0 + (2i\hbar p_x)p_y) + i(0 + (2i\hbar p_y)p_x) + (0 + (x[x, {p_x}^2] + [x, {p_x}^2]x){p_z}^2) - (0 + (y[y, {p_y}^2] + [y, {p_y}^2]y){p_z}^2) + (0 + (z[z, {p_z}^2] + [z, {p_z}^2]z){p_x}^2) - (0 + (z[z, {p_z}^2] +$

$[z,p_z{}^2]z)p_y{}^2\big) - 2(0 + (x[z,p_x{}^2] + [x,p_x{}^2]z)p_xp_z) - 2(0 +$
$(x[z,p_z{}^2] + [x,p_z{}^2]z)p_xp_z) + 2\big(0 + \big(y\big[z,p_y{}^2\big] +$
$\big[y,p_y{}^2\big]z\big)p_yp_z\big) + 2\big(0 + (y[z,p_z{}^2] + [y,p_z{}^2]z)p_yp_z\big) -$
$2i(0 + (x[y,p_x{}^2] + [x,p_x{}^2]y)p_z{}^2) - 2i\big(0 + \big(x\big[y,p_y{}^2\big] +$
$\big[x,p_y{}^2\big]y\big)p_z{}^2\big) + 2i\big(0 + (x[z,p_x{}^2] + [x,p_x{}^2]z)p_yp_z\big) +$
$2i\big(0 + (x[z,p_z{}^2] + [x,p_z{}^2]z)p_yp_z\big) + 2i\big(0 + \big(y\big[z,p_y{}^2\big] +$
$\big[y,p_y{}^2\big]z\big)p_xp_z\big) + 2i(0 + (y[z,p_z{}^2] + [y,p_z{}^2]z)p_xp_z) -$
$2i\big(0 + (z[z,p_z{}^2] + [z,p_z{}^2]z)p_xp_y)\big)\Psi$

$= -\frac{i\hbar}{2m}\Big(-2i\hbar p_x{}^2 + 2i\hbar p_y{}^2 - 2\hbar p_xp_y - 2\hbar p_xp_y + (0 +$
$(x(2i\hbar p_x) + (2i\hbar p_x)x)p_z{}^2) - \big(0 + \big(y(2i\hbar p_y\big) +$
$\big(2i\hbar p_y\big)y\big)p_z{}^2\big) + (0 + (z(2i\hbar p_z) + (2i\hbar p_z)z)p_x{}^2) - \big(0 +$
$(z(2i\hbar p_z) + (2i\hbar p_z)z)p_y{}^2\big) - 2\big((0 + (2i\hbar p_x)z)p_xp_z\big) -$
$2\big((x(2i\hbar p_z) + 0)p_xp_z\big) + 2\left(\big(0 + \big(2i\hbar p_y\big)z\big)p_yp_z\right) +$
$2\left((y(2i\hbar p_z) + 0)p_yp_z\right) - 2i\big((0 + (2i\hbar p_x)y)p_z{}^2\big) - 2i\big(0 +$
$\big(x\big(2i\hbar p_y\big) + 0\big)p_z{}^2\big) + 2i\left((0 + (2i\hbar p_x)z)p_yp_z\right) +$
$2i\left((x(2i\hbar p_z) + 0)p_yp_z\right) + 2i\left(\big(0 + \big(2i\hbar p_y\big)z\big)p_xp_z\right) +$
$2i\big((y(2i\hbar p_z) + 0)p_xp_z\big) - 2i\big(0 + (z(2i\hbar p_z) +$
$(2i\hbar p_z)z)p_xp_y)\Big)\Psi$

$= -\frac{i\hbar}{2m}(-2i\hbar p_x{}^2 + 2i\hbar p_y{}^2 - 4\hbar p_xp_y - 4i\hbar xp_xp_z{}^2 -$
$4i\hbar yp_yp_z{}^2 + 4i\hbar zp_x{}^2p_z - 4i\hbar zp_y{}^2p_z - 4i\hbar zp_x{}^2p_z -$
$4i\hbar xp_xp_z{}^2 + 4i\hbar zp_y{}^2p_z + 4i\hbar yp_yp_z{}^2 + 4\hbar yp_xp_z{}^2 +$
$4\hbar xp_yp_z{}^2 - 4\hbar zp_xp_yp_z - 4\hbar xp_yp_z{}^2 - 4\hbar zp_xp_yp_z -$
$4\hbar yp_xp_z{}^2 + 8\hbar zp_xp_yp_z)\Psi$

$= -\frac{i\hbar}{2m}(-2i\hbar p_x{}^2 + 2i\hbar p_y{}^2 - 4\hbar p_xp_y)\Psi$

$\left[\hat{L}_-{}^2,\hat{H}\,\right]\Psi = -2\hbar^2\left(\hat{H}_x - \hat{H}_y - \frac{i}{m}p_xp_y\right)\,\Psi$

$$\left[\hat{L}_-{}^2, \hat{H}\right] \quad = -2\hbar^2 \left(\hat{H}_x - \hat{H}_y - \frac{i}{m} p_x p_y\right)$$