PENENTUAN LUAS FRAKTAL KOCH SNOWFLAKE

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Persyaratan Penyelesaian Program Sarjana Sains
Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan IlmuPengetahuan Alam
Universitas Jember

Oleh:

Abdul Kamil
NIM: 991810101090

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER

2004

PENENTUAN LUAS FRAKTAL KOCH SNOWFLAKE

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Persyaratan Penyelesaian Program Sarjana Sains
Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan IlmuPengetahuan Alam
Universitas Jember

Oleh:

Abdul Kamil
NIM: 991810101090

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2004

MOTTO

Nuun. Demi Pena dan segala apa-apa yang dituliskannya.
(Al-Qolam : 1)

Materi hanya terdiri atas sensasi-sensasi. Satu-satunya zat yang benar-benar mutlak hanyalah Allah. Berarti hanya Allah yang benar-benar ada, semua kecuali Allah adalah makhluq bayangan, karena itu Allah pastilah ada dimana saja dan meliputi semua hal.
(Harun Yahya)

"Dan sesungguhnya Kami telah menciptakan manusia dan mengetahui apa yang dibisikkan oleh hatinya dan Kami lebih dekat kepadanya daripada urat lehernya".
(Qoof: 16)

Kemampuan berfikir lebih bernilai daripada kemampuan mengingat fakta.
(David J. Schwartz)

Berpikirlah yang besar, mulai dari yang kecil, lakukan sekarang.
(M. Amien Rais)

Terus temukan kekurangan diri
Terus temukan potensi diri
(Abdullah Gymnastiar)

PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah yang Maha Pengasih dan Maha Penyayang kupersembahkan skripsi ini kepada :

1. Ibuku Siti Khotidjah dan ayahku Kartidjo serta adikku Abdus Salam Mubarok yang do'a, perhatian dan perjuangannya selalu mengiringi setiap langkahku.
2. PakDe dan BuDe Bambang dan segenap keluarganya yang begitu banyak sumbangsihnya mengantarkanku menuju kesuksesan.
3. Saudara, teman dan sahabatku semua, terima kasih atas dukungannya
4. Ilmu Pengetahuan dan Almamaterku Universitas Jember yang kubanggakan.

DEKLARASI

Skripsi ini berisi hasil kerja/penelitian mulai September 2003 sampai dengan Mei 2004 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember. Bersama ini saya menyatakan bahwa isi skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri kecuali jika disebutkan sumbernya dan skripsi ini belum pernah diajukan pada institusi lain.

Jember, Mei 2004

Abdul Kamil

ABSTRAK

Penentuan Luas Fraktal Koch Snowflake, Abdul Kamil, 991810101090, Skripsi, Mei 2004, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Koch Snowflake adalah suatu fraktal yang pada mulanya dibangun dari kurva Koch dibangkitkan pada sisi-sisi segitiga samasisi. Kurva Koch dibangun dari sebuah garis lurus yang dibagi menjadi tiga bagian yang sama, kemudian bagian tengahnya dibentuk segitiga samasisi tanpa alas. Penulisan skripsi ini bertujuan untuk menentukan luas fraktal Koch Snowflake dan variasinya yang dibangkitkan oleh generator segitiga samasisi, samakaki dan bujursangkar pada inisiator poligon beraturan bersisi-*n*. Dari hasil penelitian ini diperoleh: (1) Koch Snowflake dengan luas bertambah didapatkan dari luas inisiator ditambah dengan luas yang dibatasi kurva Koch dan sisi inisiator, (2) Koch Snowflake dengan luas berkurang (Koch Anti-Snowflake) didapatkan dari luas inisiator dikurangi luas antara sisi inisiator dengan kurva Koch dan untuk Koch Anti-Snowflake inisiator segitiga samasisi, hanya generator segitiga samakaki dengan alas generator lebih dari atau sama dengan 1/3 panjang sisi inisiator yang bisa digunakan.

Kata kunci: *Kurva Koch, Koch Snowflake, inisiator, generator.*

PENGESAHAN

Skripsi ini diterima oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Hari : SELASA

Tanggal : 22 JUN 2004

Tempat : Fakultas MIPA Universitas Jember

Tim Penguji

Ketua (Dosen Pembimbing Utama)

Drs. Rusli Hidayat, M.Sc.
NIP. 132 048 321

Sekretaris (Dosen Pembimbing Anggota)

Kosala Dwidja Purnomo, S.Si.
NIP. 132 206 019

Anggota I

Drs. Moh. Hasan, M.Sc, Ph.D.
NIP. 131 759 844

Anggota II

M. Fatekurohman, S.Si, M.Si.
NIP. 132 210 538

Mengesahkan

Dekan F-MIPA UNEJ

Ir. H. Sumadi, MS.
NIP. 130 368 784

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah puji syukur yang tak terhingga penulis panjatkan kehadirat Allah SWT, atas segala rahmat, barokah dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Penulisan skripsi ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat guna memperoleh gelar kesarjanaan Jurusan Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Dalam penulisan skripsi ini, penulis telah banyak mendapatkan bantuan dan dorongan baik secara langsung maupun tidak langsung dari berbagai pihak. Untuk itu penulis menyampaikan terima kasih yang sedalam-dalamnya kepada:

1. Bapak Drs. Rusli Hidayat, M.Sc. selaku Dosen Pembimbing Utama dan Bapak Kosala Dwidja Purnomo, S.Si. selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah memberikan bimbingan dan arahan sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik.
2. Bapak Drs. Moh. Hasan. M.Sc, Ph.D, dan Bapak M. Fatekurohman, SSi,M.Si, selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik, saran dan masukan sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik.
3. Kedua orang tuaku dan adikku yang telah banyak memberikan dorongan semangat dan sebagai sumber inspirasiku.
4. Teman-temanku seluruh angkatan '99 terima kasih atas bantuannya, semoga kita masih bisa bertemu kembali dipuncak kesuksesan. Untuk sahabat seperjuanganku dalam menegakkan amar ma'ruf nahi mungkar di HIMATIKA, IRM, IMM, PM dan KKT'03 kel.44, teruslah berkarya, ummat telah menuntut buktimu, jaga dan jangan khianati ikatan.
5. Semua pihak yang telah membantu kelancaran penulisan skripsi ini.

Penyusunan skripsi ini masih belum sempurna, untuk itu sangat diharapkan saran dan kritik yang sifatnya membangun demi kesempurnaan skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca.

Jember, Mei 2004

Penulis

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Alam semesta banyak menyimpan benda-benda yang bersifat *self-similarity*. Sebagai contoh, jika garis pantai dilihat dari tempat yang sangat tinggi, seolah-olah terlihat garis lurus yang patah-patah. Tetapi semakin ketinggian tersebut dikurangi, akan terlihat bentuk garis pantai yang lebih jelas, apabila diperbesar akan menampilkan ketidakrataan sesungguhnya. Contoh lain adalah gumpalan awan, pegunungan, struktur molekul di dalam daun dan sebagainya.

Tampilan-tampilan alam ini disajikan sebagai topik tersendiri dalam matematika yang dikenal dengan geometri fraktal. Kata fraktal pertama kali diperkenalkan oleh Mandelbrot (1975), menggunakan istilah fraktal atau *fractal* dari kata *fractional dimentional* untuk menunjuk pada kurva-kurva yang mempunyai sifat *self-similarity* (Santosa, 1994). Kenneth Falconer menyebutkan bahwa kata *fractal* dikenalkan juga oleh Mandelbrot dari bahasa latin *fractus* yang berarti memecahkan/menguraikan (Falconer, 1990).

Salah satu contoh fraktal adalah Koch Snowflake merupakan sebuah fraktal yang juga dikenal sebagai pulau Koch, pertama kali digambarkan oleh Helge Von Koch pada tahun 1904. Awalnya merupakan kurva Koch takhingga yang digandakan tiga, dibangkitkan pada sisi-sisi segitiga samasisi, didasarkan pada garis-garis yang mempunyai arah tertentu dan dihubungkan satu sama lain. Keistimewaan dari kurva ini adalah terbentuknya suatu garis yang sangat panjang pada suatu daerah yang terbatas.

Keadaan ini menjadi menarik diteliti, untuk menentukan besarnya luas daerah yang dihasilkan untuk membangun sebuah objek fraktal Koch Snowflake dan variasinya. Selain itu, tampilan geometrisnya menghasilkan gambaran objek yang menarik.

1.2 Perumusan Masalah

Masalah yang akan dibahas adalah bagaimana menentukan luas fraktal Koch Snowflake yang dibangun dari inisiator poligon beraturan bersisi-n dan dibangkitkan oleh generator segitiga samakaki, samasisi dan bujursangkar dengan prasyarat segmen garis yang dihasilkan kongruen.

1.3 Tujuan

Tujuan penelitian ini adalah untuk mendapatkan rumusan menentukan luas Koch Snowflake dengan generator segitiga samasisi, samakaki, dan bujursangkar pada inisiator poligon beraturan bersisi-n.

1.4 Manfaat

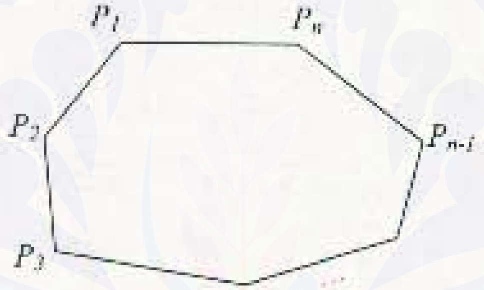
Dalam mengkonstruksi objek-objek di alam yang memiliki kemiripan dengan Koch Snowflake generator segitiga samasisi, samakaki dan bujursangkar yang dibangkitkan pada sisi-sisi poligon beraturan bersisi-n, akan mudah dilakukan pendekatan untuk menentukan besarnya luas yang diinginkan.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Poligon, Segitiga dan Bujursangkar

2.1.1 Pengertian Poligon

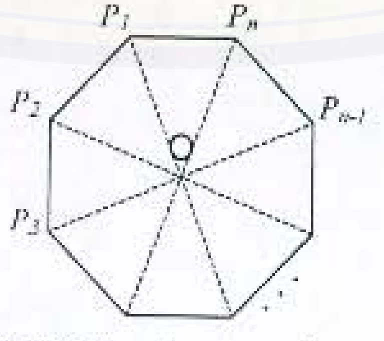
Definisi 1: Poligon adalah gabungan himpunan titik-titik $P_1, P_2, P_3, \cdots P_{n-1}, P_n$ dengan ruas-ruas garis: $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \cdots, \overline{P_{n-1}P_n}, \overline{P_nP_1}$, sedemikian hingga jika dua sebarang dari ruas garis berpotongan, bertitik potong salah satu dari titik $P_1, P_2, P_3, \cdots P_{n-1}, P_n$ dan tidak ada titik lain (Kusno, 2003) (Gambar 2.1).



Gambar 2.1 Poligon dengan n sisi

Definisi 2: Poligon beraturan adalah suatu poligon yang sisi-sisinya dan sudut-sudutnya kongruen (Kusno, 2003) (Gambar 2.2).

Dengan demikian $\overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3} = \cdots = \overline{P_{n-1}P_n} = \overline{P_nP_1}$ dan $\angle P_1OP_2 = \angle P_2OP_3 = \cdots = \angle P_{n-1}OP_n = \angle P_nOP_1$



Gambar 2.2 Poligon beraturan dengan n sisi

2.1.2 Pengertian Segitiga

Definisi 3: Segitiga adalah poligon yang bersisi tiga (Kusno, 2003).

Berdasarkan sisi-sisi pembentuknya dikenal beberapa macam segitiga, diantaranya:

a. Segitiga samasisi yaitu segitiga yang ketiga sisinya sama panjang (Gambar 2.3.*a*).

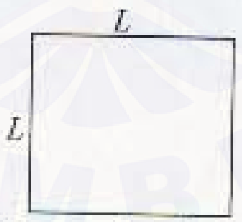
b. Segitiga samakaki yaitu segitiga yang mempunyai dua buah sisi yang sama panjang (Gambar 2.3.*b*).

a. Segitiga samasisi b. Segitiga samakaki

Gambar 2.3 Segitiga berdasarkan sisi-sisi pembentuknya

2.1.3 Pengertian Bujursangkar

Definisi 7: Bujursangkar adalah persegi panjang dengan dua sisi bersisiannya kongruen (Kusno, 2003) (Gambar 2.4).



Gambar 2.4 Bujursangkar dengan sisi-sisi *L*

2.1.4 Kekongruenan dan Kesebangunan

Definisi 5: Dua poligon adalah kongruen, jika ada korespondensi 1-1 diantara titik-titiknya sedemikian hingga (Kusno, 2003):

1. Semua sisi yang berkorespondensi kongruen
2. Semua sudut yang berkorespondensi kongruen

Postulat 1 (sisi-sudut-sisi): Dua segitiga adalah kongruen, jika ada suatu korespondensi diantara titik-titik sudutnya sedemikian rupa hingga dua sisi dan sudut apitnya dari sebuah segitiga kongruen terhadap bagian-bagian yang berkorespondensi segitiga kedua.

Postulat 2 (sudut-sisi-sudut): Dua segitiga adalah kongruen, jika ada suatu korespondensi diantara titik-titik sudutnya sedemikian hingga dua sudut dan sisi apitnya dari sebuah segitiga kongruen terhadap bagian-bagian yang berkorespondensi segitiga yang kedua.

Misalkan notasi kekongruenan ($\cong$), yang diilustrasikan pada Gambar 2.5.

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

Gambar 2.5 Kekongruenan dua segitiga

Definisi 6: Dua poligon sebangun adalah dua poligon yang berkorespondensi satu-satu diantara titik-titik sudutnya sedemikian hingga (Kusno, 2003):

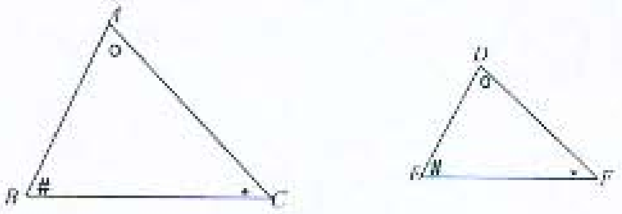
1. semua sudut-sudutnya yang berkorespondensi kongruen
2. semua rasio-rasio ukuran–ukuran sisi-sisinya yang berkorespondensi sama.

Teorema 1 (***sisi-sudut-sisi***): Dua segitiga adalah sebangun jika ada suatu korespondensi diantara titik-titik sudutnya dengan dua pasangan sudutnya yang berkorespondesi kongruen.

Teorema 2 (***sisi-sudut-sisi***): Dua segitiga adalah sebangun jika ada suatu korespondesi diantara titik-titik sudutnya dengan rasio-rasio ukuran dua pasang sisinya yang berkorespondensi sama dan sudut apit masing-masing pasangan sisi adalah sama.

Teorema 3 (***sisi-sisi-sisi***): Dua segitiga adalah sebangun jika ada suatu korespondensi diantara titik-titik sudutnya dengan rasio-rasio ukuran sisi-sisinya yang berkorespondensi adalah sama.

Misalkan notasi kesebangunan (~), yang diilustrasikan pada Gambar 2.6.



$\Delta\ ABC \sim \Delta\ DEF$

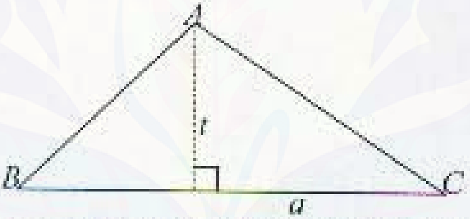
Gambar 2.6 Kesebangunan dua segitiga

2.2 Luas Segitiga, Bujursangkar dan Poligon

2.2.1 Penyajian Segitiga

a. Luas segitiga secara geometris

Misalkan diketahui segitiga ABC dengan alas a, dan tinggi t (Gambar 2.7), maka luas (A) segitiga ABC = ½ a . t



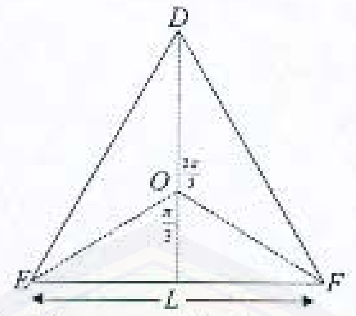
Gambar 2.7 Segitiga dengan alas a dan tinggi t

Untuk segitiga samasisi DEF dengan panjang sisi L (Gambar 2.8), luasnya

$$(A) = \tfrac{1}{2}\, a \,.\, t = \frac{L}{2}\sqrt{L^2 - \frac{L^2}{4}} = \frac{L}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{(4-1)L^2}$$

$$A = \frac{L}{4}L\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}L^2$$

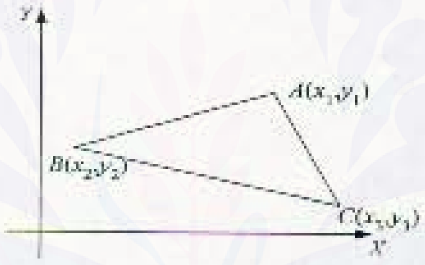
atau luas $(A) = \frac{1}{4}3L^2\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{4}3L^2\cot\left(\frac{\pi}{3}\right)$



Gambar 2.8 Segitiga samasisi dengan panjang sisi L

b. Luas segitiga secara analitis

Pandang segitiga ABC dengan titik – titik sudut pada $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ pada Gambar 2.9.



Gambar 2.9 Segitiga dengan titik-titik sudut ABC

Luas segitiga ABC dapat diperoleh dengan menggunakan rumus berikut (Spiegel, 1968):

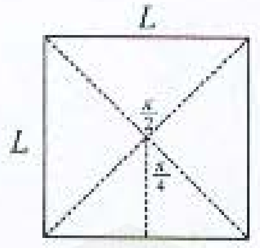
$$\text{luas} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2}\left(x_1y_2 + y_1x_3 + y_3x_2 - y_2x_3 - y_1x_2 - x_1y_3\right)$$

2.2.2 Penyajian Bujursangkar

a. Luas bujursangkar secara geometris

Perumusan luas bujursangkar adalah sisi kali sisi (Gambar 2.10), dengan L adalah sisi bujursangkar, maka diperoleh juga perumusan luas:

$$\text{luas } (A) = L^2 \cot\left(\frac{\pi}{4}\right) = L^2 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} = L^2$$



Gambar 2.10 Bujursangkar dengan sisi L

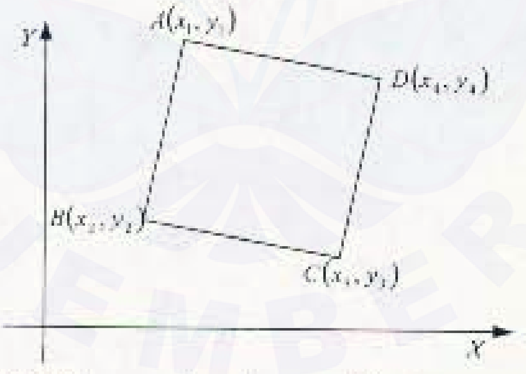
b. Luas bujursangkar secara analitik

Pandang bujursangkar $ABCD$ (Gambar 2.11) dengan titik-titik sudut $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$, dan $D(x_4,y_4)$. Luas bujursangkar $ABCD$ dapat ditulis sebagai berikut :

$$\text{luas} = \left(\left|\overline{AB}\right|\right)^2 = \left(\left|\overline{BC}\right|\right)^2 = \left(\left|\overline{CD}\right|\right)^2 = \left(\left|\overline{AD}\right|\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\right)^2$$

$$= (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2$$



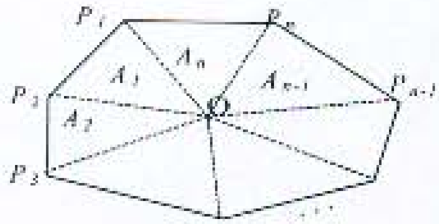
Gambar 2.11 Bujursangkar dengan titik-titik sudut $ABCD$

2.2.3 Penyajian Poligon

a. Luas poligon secara geometris

Luas poligon tak beraturan dapat ditentukan dari penjumlahan segitiga-segitiga penyusun (Gambar 2.12), dengan demikian luas poligon adalah jumlah luas $\Delta P_1OP_2 + \Delta P_2OP_3 + \cdots + \Delta P_{n-1}OP_n + \Delta P_nOP_1$, atau

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_{n-1} + A_n$$



Gambar 2.12 Poligon tak beraturan dengan n sisi

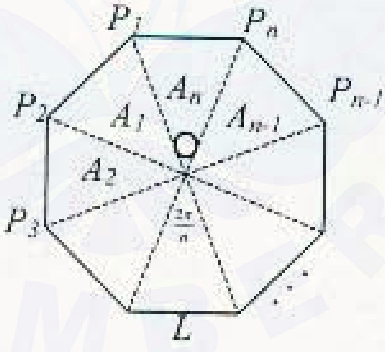
Dengan cara yang sama, untuk poligon beraturan (Gambar 2.13) luas (A) sama dengan jumlah seluruh luas segitiga yang menyusunnya.

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_{n-1} + A_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (A_k)$$

Pada poligon beraturan, segitiga penyusunnya kongruen, maka luasnya adalah n kali luas segitiga. Jadi, diperoleh:

$$A = n(A_k), \text{ dengan } k = 1, 2, 3, \ldots, n$$



Gambar 2.13 Poligon beraturan dengan n sisi

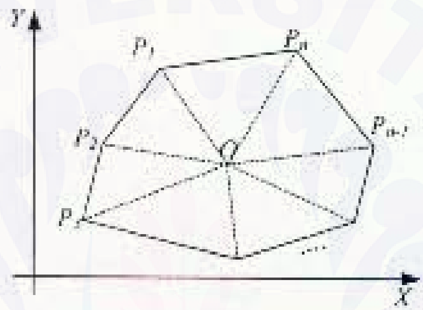
Poligon beraturan dengan n sisi memiliki panjang sisi dan besar sudut kongruen, misalkan besarnya masing-masing L dan $\frac{2\pi}{n}$, maka luas poligon beraturan dengan n sisi dapat juga dituliskan:

$$A \;= = \frac{n}{4} L^2 \frac{\cos\left(\pi/n\right)}{\sin\left(\pi/n\right)} = \frac{n}{4} L^2 \cot\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

b. Luas poligon secara analitis

Jika diberikan titik-titik poligon $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, $\cdots$, $P_n(x_n, y_n)$, maka luas poligon dengan n sisi (Gambar 2.14) adalah (Wiesstein, 1999):

$$A = \frac{1}{2}\left(x_1y_2 + x_2y_3 + \cdots + x_{n-1}y_n + x_ny_1 - y_1x_2 - y_2x_3 - \cdots - y_{n-1}x_n - y_nx_1\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x_n & x_1 \\ y_n & y_1 \end{vmatrix}\right)$$



Gambar 2.14 Poligon tak beraturan dengan n sisi

2.3 Deret

2.3.1 Kekonvergenan Deret

Misalkan $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum b_k$ merupakan deret takhingga dengan $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n, \cdots$ suku-suku deret, maka S_n (yaitu jumlah parsial ke-n) dapat dinyatakan

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n,$$

dan $\qquad b_n = S_n - S_{n-1}$

Definisi 5: Deret $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergen dan mempunyai jumlah S, apabila barisan jumlah-jumlah parsial $\{S_n\}$ konvergen menuju S. Apabila $\{S_n\}$ divergen, maka deret divergen. Suatu deret yang divergen tidak memiliki jumlah (Purcel, 1999).

Deret $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergen jika barisan jumlah parsialnya mempunyai limit dan divergen jika barisan jumlah parsialnya tidak mempunyai limit.

2.3.2 Deret Geometri

Deret Geometri $\sum b_k$ adalah deret takhingga yang berbentuk

$$\sum_{n=1}^{\infty} br^{n-1} = b + br + br^2 + \cdots + br^{n-1} + \cdots$$

b adalah suku awal $(b \neq 0)$dan r disebut rasio.

Teorema 4: Deret geometri dengan rasio r divergen jika $|r| \geq 1$.

Jika $|r| < 1$, maka deret konvergen dengan

$$\sum_{n=1}^{\infty} br^{n-1} = \frac{b}{1-r}, |r| < 1$$

2.4 Fraktal

2.4.1 Pengertian Fraktal

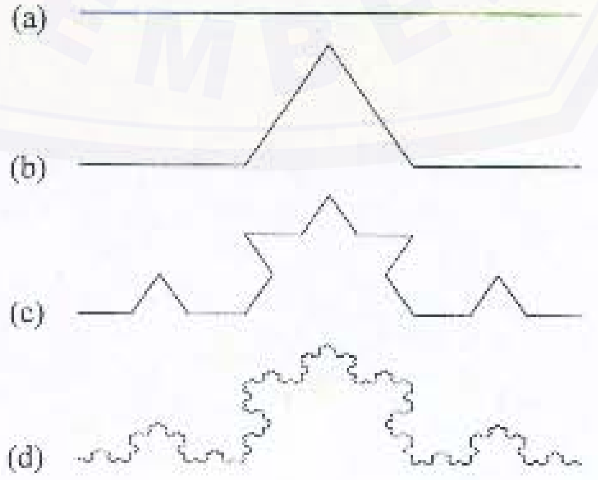
Sebelum mendefinisikan fraktal terlebih dahulu dijabarkan tentang *self-similarity*, karena objek yang membentuk fraktal selalu mempunyai sifat *self-similarity*. *Self-similarity* merupakan suatu keadaan objek yang dibangun secara berulang dengan mengganti suatu gambar dengan yang sebangun, tetapi berukuran lebih kecil dari asalnya. Ini berarti bahwa sekecil apapun gambar tersebut, apabila diperbesar tetap mempunyai bentuk yang sama. Contoh, jika kurva Koch digambar sampai orde takhingga, dan apabila dilihat bagian tertentu dari kurva tersebut setelah diperbesar, akan mempunyai ketidakrataan yang sama (Santosa, 1994).

Kata fraktal selain diambil dari bahasa latin *fractus* (memecahkan/ menguraikan) (Falconer, 1990), juga berasal dari kata kerja dalam bahasa latin *frangere*, yang berarti meretakkan atau membagi menjadi kepingan-kepingan (Beek, 1996). Paul Bourke mengambil istilah Mandelbrot yang mendefinisikan fraktal sebagai bentuk geometri yang tampak kasar atau berupa sebuah pecahan yang dapat dibagi lagi pada bagian-bagiannya. Definisi matematiknya adalah suatu himpunan titik-titik yang dimensi fraktalnya melebihi dimensi topologi (Bourke, 1991).

2.4.2 Fraktal Koch Snowflake

a. Kurva Koch

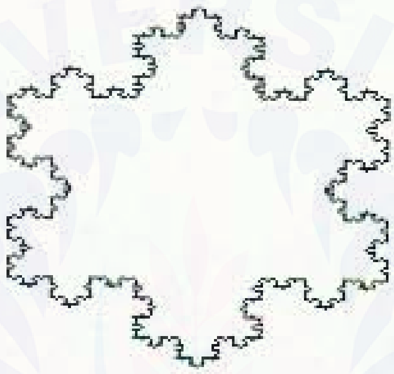
Kurva Koch didasarkan pada garis-garis yang mempunyai arah tertentu dan dihubungkan satu sama lain, sehingga terbentuk suatu garis yang sangat panjang pada suatu daerah yang terbatas. Langkah-langkah pembentukan kurva Koch dimulai dengan sebuah garis lurus (Gambar 2.15.a). Untuk membentuk kurva Koch orde satu, yaitu K_1, garis tersebut dibagi menjadi tiga bagian, dan bagian tengah diubah menjadi segitiga samasisi tanpa alas, sehingga membentuk bangun dengan empat buah segmen garis (Gambar 2.15.b). Untuk membentuk kurva Koch orde dua, K_2, dibentuk dengan membagi setiap segmen garis dari kurva Koch orde satu menjadi tiga bagian, dan bagian tengahnya diubah menjadi segitiga samasisi (gambar 2.15.c). Dengan cara yang sama, kurva Koch untuk orde yang lebih tinggi bisa diperoleh dari kurva Koch sebelumnya. Dengan kata lain, untuk memperoleh kurva Koch orde i, setiap segmen yang ada pada kurva Koch orde i-1 dibagi menjadi tiga bagian sama panjang, dan bagian tengahnya diubah menjadi bangun dengan sisi yang sama tanpa alas.



Gambar 2.15 Proses pembentukan kurva Koch

b. Koch Snowflake

Fraktal Koch Snowflake (Gambar 2.16) dibentuk dari kurva Koch yang dibangkitkan pada inisiator berupa bidang dengan sisi yang sama. Variasi Koch Snowflake dapat dikombinasikan antara inisiator segitiga samasisi atau bujursangkar dengan generator segitiga dan bujursangkar, atau dengan bidang lainnya dengan prasyarat kurva Koch yang dibentuk menghasilkan segmen garis yang sama.



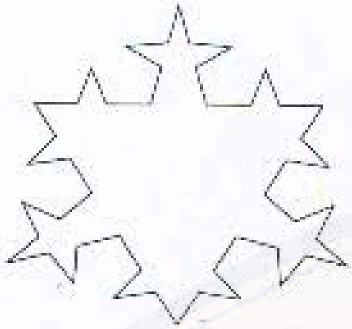
Gambar 2.16 Koch Snowflake

2.4.3 Variasi bentuk Koch Snowflake

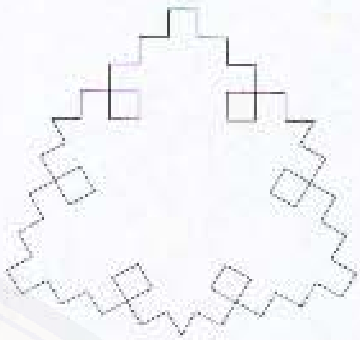
a. Variasi Koch Snowflake dengan luas bertambah

Variasi Koch Snowflake pada dasarnya dapat dibangkitkan dengan berbagai generator pada segmen garis yang sembarang. Akan tetapi, yang akan dibahas hanya yang menghasilkan segmen garis yang kongruen. Dalam hal ini generatornya berupa segitiga dan bujursangkar, yang dibangkitkan pada sisi-sisi poligon beraturan dengan n sisi, dengan melebar keluar sisi-sisi poligon.

Beberapa gambar dibawah ini mengilustrasikan berbagai variasi Koch Snowflake dengan generator segitiga dan bujursangkar yang dibangkitkan pada inisiator segitiga samasisi (Gambar 2.17), bujursangkar (Gambar 2.18) dan poligon beraturan (Gambar 2.19).

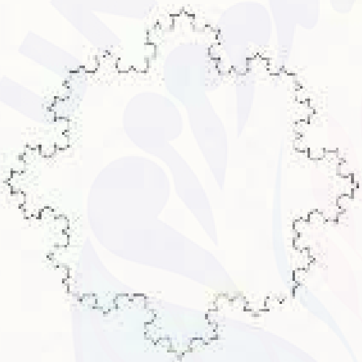


a. Generator segitiga samakaki

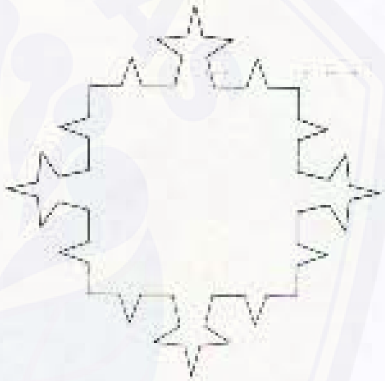


b. Generator bujursangkar

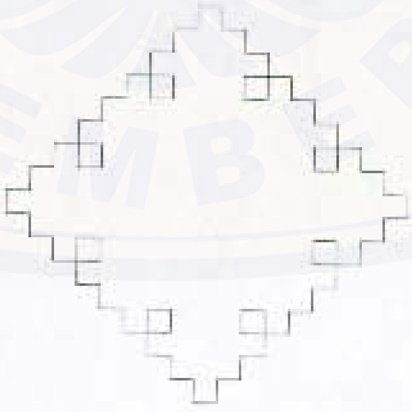
Gambar 2.17 Koch Snowflake dengan inisiator segitiga samasisi



a. Generator segitiga samasisi

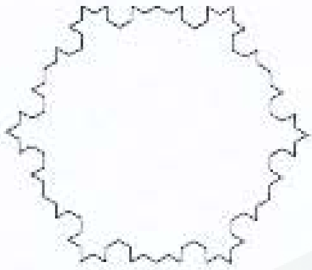


b. Generator segitiga samakaki

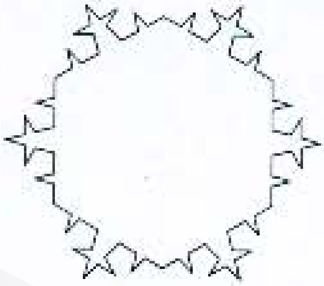


c. Generator bujursangkar

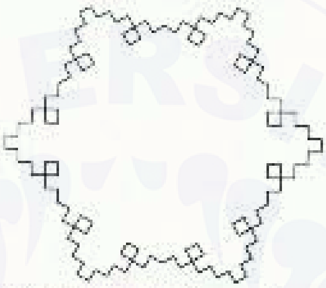
Gambar 2.18 Koch Snowflake dengan inisiator bujursangkar



a. Generator segitiga samasisi



b. Generator segitiga samakaki

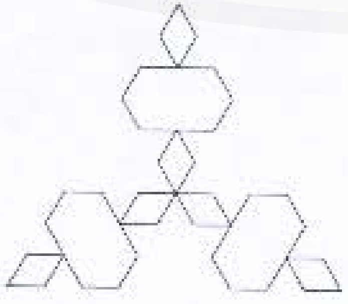


c. Generator bujursangkar

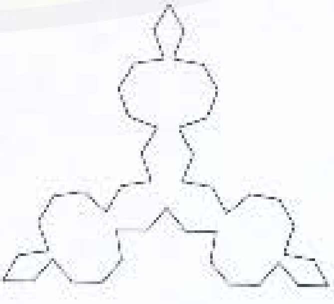
Gambar 2.19 Koch Snowflake dengan inisiator poligon beraturan bersisi-n

b. Koch Snowflake dengan luas berkurang (Koch Anti-Snowflake)

Dari bentuk Koch snowflake (Gambar 2.16) dan variasinya (subbab 2.4.3.a), dapat dibentuk variasi yang lain dengan mengubah arah melebarnya kurva Koch, ke pusat atau ke dalam. Perhitungan luas didapat dari luas inisiator dikurangi luas kurva Koch. Bangun yang terbentuk dikenal sebagai Koch Anti-Snowflake (Weisstein, 1999) (Gambar 2.20), variasi lainnya dengan generator bujursangkar dibangkitkan pada pada inisiator bujursangkar (Gambar 2.21) dan poligon beraturan (Gambar 2.22).

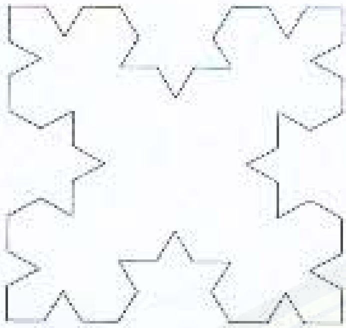


a. Generator segitiga samasisi

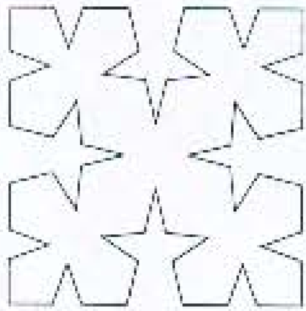


b. Generator segitiga samakaki

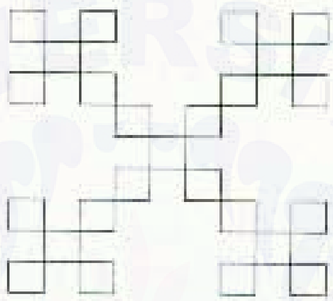
Gambar 2.20 Koch Anti-Snowflake dengan inisiator segitiga samasisi



a. Generator segitiga samasisi

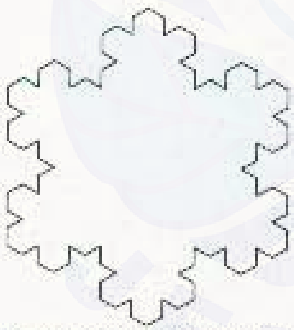


b. Generator segitiga samakaki

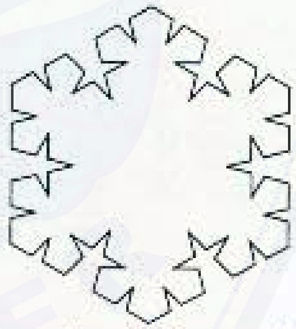


c. Generator bujursangkar

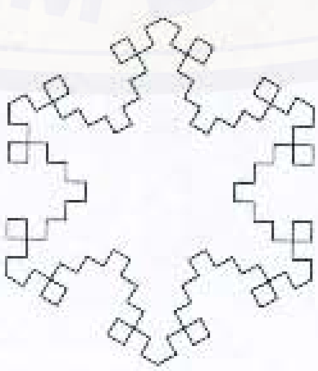
Gambar 2.21 Koch Anti-Snowflake dengan inisiator bujursangkar



a. Generator segitiga samasisi



b. Generator segitiga samakaki



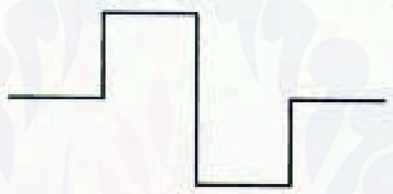
c. Generator bujursangkar

Gambar 2.22 Koch Anti-Snowflake dengan inisiator poligon beraturan bersisi-n

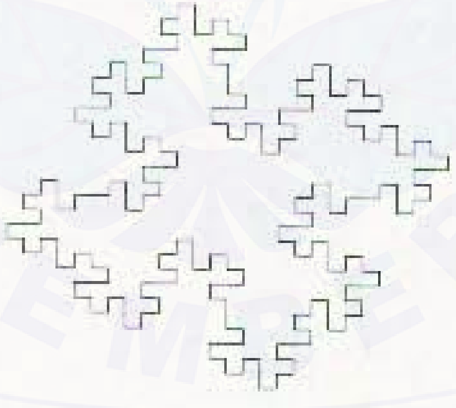
c. Koch Snowflake dengan mempertahankan luas

Variasi Koch Snowflake ini di dapat dari perpaduan Koch Snowflake dengan luas bertambah dan Koch Snowflake dengan luas berkurang. Dengan adanya kombinasi pada generatornya akan dihasilkan bentuk Koch Snowflake dengan tampilan lebih menarik dan tetap mempertahankan luas, yaitu sebesar luas inisiatornya.

Generator yang digunakan merupakan variasi bentuk bujursangkar, dikenal sebagai kurva Koch kuadratik (Addison, 1997) (Gambar 2.23) dan segitiga (Gambar 2.24). Melebar keluar dan kedalam sisi-sisi inisiator secara kongruen.

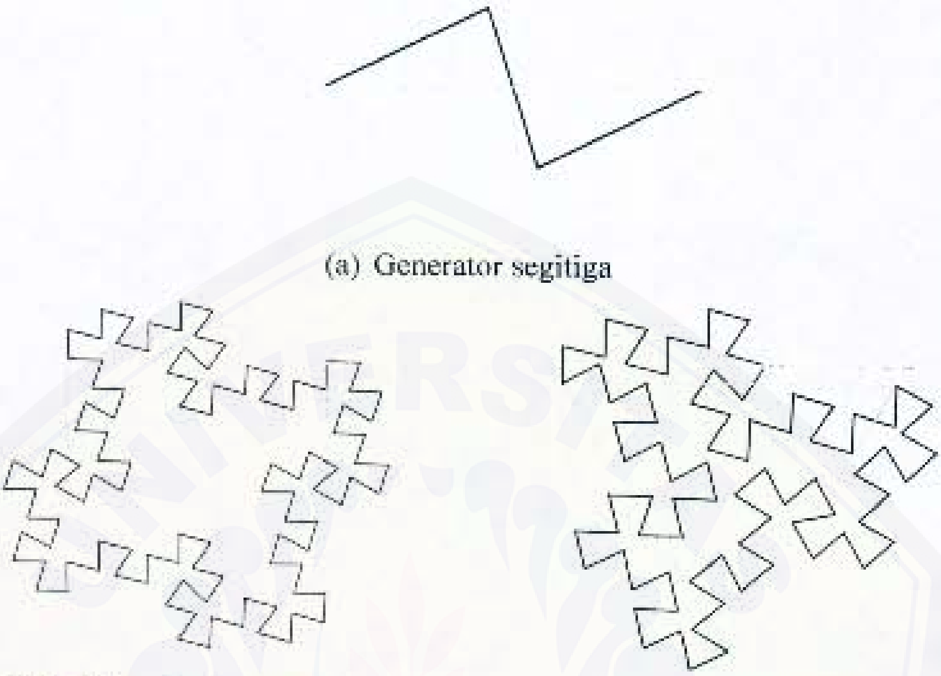


(a) Generator Koch Snowflake kuadratik



(b) Koch Snowflake pada inisiator bujursangkar

Gambar 2.23 Koch Snowflake kuadratik



(a) Generator segitiga

(b) Inisiator bujursangkar

(c) Inisiator segitiga

Gambar 2.24 Koch Snowflake generator segitiga yang mempertahankan luas

BAB IV
KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Dari hasil penelitian penentuan luas fraktal Koch Snowflake dapat disimpulkan bahwa :

1. Koch Snowflake dengan luas bertambah diperoleh dari luas inisiator ditambah dengan luas yang dibatasi kurva Koch dan sisi inisiator.
2. Koch Snowflake dengan luas berkurang (Anti-Snowflake) diperoleh dari luas inisiator dikurangi luas antara sisi inisiator dengan kurva Koch.
3. Koch Anti-Snowflake inisiator segitiga sama sisi, hanya generator segitiga sama kaki dengan alas generator lebih dari atau sama dengan 1/3 panjang sisi inisiator yang bisa digunakan, sedangkan pada generator lainnya akan menghasilkan objek fraktal yang tumpang tindih.

4.2 Saran

Penelitian tentang Koch Snowflake ini masih dapat dikembangkan pada variasi-variasi bentuk Koch Snowflake lainnya, seperti yang menghasilkan segmen garis yang tidak kongruen, maupun segmen garis acak. Demikian juga pada topik tentang fraktal yang lain masih terbuka lebar bagi peneliti untuk menganalisanya.

DAFTAR PUSTAKA

Addison, Paul. S., 1997, ***Fractals and Chaos an Illustrated Cours***, Institute of Publishing, London.

Beek, Alan, 1996, ***What is a Fractal and Who is This Guy Mandelbrot?***, http:// www. glyphs.com/ art/ fractals/ what is. html.

Bouldry, W.C., dkk, 1995, ***Calculus Projects with Maple Project 20. Koch's Fractal***, Cole Pub. Co.

Bourke, Paul, 1991, ***An Introduction to Fractals***, http:// www. astronomy. swim.edu.au/ ~pbourke/ fractals/ fracinto. htm.

Falkoner, Kenneth, 1990, ***Fractal Geometry Mathematical Foundations and Applications***, John Wiley & Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore.

Kusno, 2003, ***Diktat Kuliah Geometri***, Fakultas MIPA Universitas Jember, Jember.

Purcel, Edwin J, Vaberg, Dale, 1999, ***Calculus with Analytic Geometry 5th Edition*** (Terjemahan oleh I Nyoman Susila, Bana Kartasasmita, Rawuh), Erlangga, Jakarta.

Sandefur, James T., 1996, ***Using Self-Similarity to Find Length, Area, and Dimension***, The American Mathematical Monthly, Washington D.C.

Santosa, Insap, P, 1994, ***Grafika Komputer dan Antarmuka Grafis Teknik Penyusunan Program Aplikasi Berbasis Grafis yang Profesional***, Andi Offset, Yogyakarta.

Spiegel, Murray R., 1968, ***Mathematical Hand Book of Formula*** (Terjemahan oleh M.O. Tjia), Erlangga, Jakarta.

Weisstein, E. W., 1999, ***CRC Concise Encyclopedia of Mathematics***, Boca Raton, London, New York, Washington D. C.

Lampiran 1:

List Program Menggambar Koch Snowflake dengan Luas Bertambah Menggunakan Maple 8.

1. Inisiator segitiga samasisi dengan generator segitiga samakaki

```
##Setup plots
> plots[setoptions](axes=none,scaling=constrained);
##Prosedure menghubungkan titik-titik yang
##dipartisi
graph := proc() local pts;
    pts := [args];
    plot(pts, style= LINE, numpoints=nargs)
    end:
##merotasi titik A sepanjang daerah awal dengan
##sudut p
rotate := proc(a, p);
[p[1]*cos(a)-p[2]*sin(a),p[1]*sin(a)+p[2]*cos(a)];
    end:
##Memasukkan titik-titik generator setiap iterasi
Koch := proc(A, B)
local pA, pB, pC, dx, dy, len, alpha, delta;
pA := [(2/3*A[1]+1/3*B[1]), (2/3*A[2]+1/3*B[2])];
dx          := B[1]-A[1];
dy          := B[2]-A[2];
len         := sqrt(dx^2+dy^2)/3;
alpha       := arctan(dy, dx);
delta := rotate(alpha, [len/2,sqrt(3)*len/5]);
pB := [(pA[1]-delta[1]), (pA[2]+delta[2])];
pC := [(1/3*A[1]+2/3*B[1]) ,(1/3*A[2]+2/3*B[2])];
    pA, pB, pC;
    end:
##Mempartisi inisiator setiap iterasi
```

Lampiran 1:

List Program Menggambar Koch Snowflake dengan Luas Bertambah Menggunakan Maple 8.

1. Inisiator segitiga samasisi dengan generator segitiga samakaki

```
##Setup plots
>plots[setoptions](axes=none,scaling=constrained);
##Prosedure menghubungkan titik-titik yang
##dipartisi
graph := proc() local pts;
     pts := [args];
     plot(pts, style= LINE, numpoints=nargs)
     end:
##merotasi titik A sepanjang daerah awal dengan
##sudut p
rotate := proc(a, p);
[p[1]*cos(a)-p[2]*sin(a),p[1]*sin(a)+p[2]*cos(a)];
     end:
##Memasukkan titik-titik generator setiap iterasi
Koch := proc(A, B)
local pA, pB, pC, dx, dy, len, alpha, delta;
pA := [(2/3*A[1]+1/3*B[1]), (2/3*A[2]+1/3*B[2])];
dx              := B[1]-A[1];
dy              := B[2]-A[2];
len             := sqrt(dx^2+dy^2)/3;
alpha           := arctan(dy, dx);
delta := rotate(alpha, [len/2,sqrt(3)*len/5]);
pB := [(pA[1]+delta[1]), (pA[2]+delta[2])];
pC := [(1/3*A[1]+2/3*B[1]) ,(1/3*A[2]+2/3*B[2])];
     pA, pB, pC;
     end:
##Mempartisi inisiator setiap iterasi
```

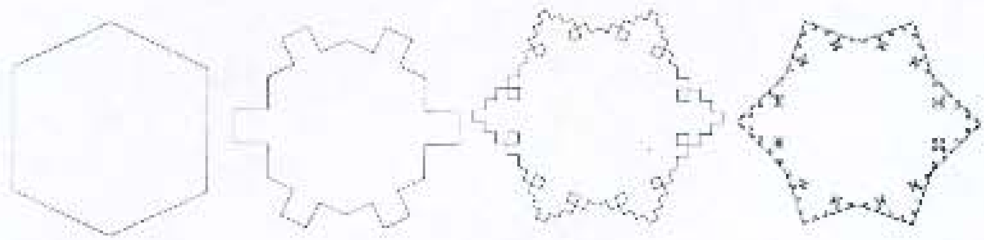
```
path := proc()  local pa, pth, i;
    pa := args;
    pth := pa[1];
    for i from 2 to nops([pa])
      do
        pth := (pth, Koch(pa[i-1], pa[i]), pa[i]);
      od;
    pth:
    end:
##Pendefinisian Inisiator
s := sqrt(3)/6:
  p := [0, s], [1/2, 4*s], [1, s], [0, s]:
  snow||0 := graph(p):
## Memulai proses iterasi
N := 5:
  for i from 1 to N
    do
      p := path(p);
      snow||i := graph(p);
     od:
>plots[display]([snow||(3)],insequence=true);
```

iterasi ke-0　　iterasi ke-1　　iterasi ke-3　　iterasi ke-5

2. Inisiator poligon bersisi 6 generator bujursangkar

```
##Setup plots
>plots[setoptions](axes=none,scaling=constrained);
##Prosedure menghubungkan titik-titik yang ##dipartisi
graph := proc() local pts;
    pts := [args];
    plot(pts, style= LINE, numpoints=nargs)
    end:
##merotasi titik A sepanjang daerah awal dengan sudut p
rotate := proc(a, p);
[p[1]*cos(a)-p[2]*sin(a),p[1]*sin(a)+p[2]*cos(a)];
    end:
##Memasukkan titik-titik generator setiap iterasi
Koch := proc(A, B)
Local pA, pB, pC, pD, dx, dy, ds, dt, len, lg, lon,
alpha, betha, tetha, delta;
pA := [(2/3*A[1]+1/3*B[1]), (2/3*A[2]+1/3*B[2])];
dx          := B[1]-A[1];
dy          := B[2]-A[2];
ds          :=B[2]-A[2];
dt          :=B[1]-A[1];
len         := sqrt(dx^2+dy^2)/0.5;
lon         :=sqrt((dx^2)+(dy^2))/3;
lg          :=sqrt((dx^2)+(dy^2))/3;
alpha       :=arctan(dy, dx);
betha       :=arctan(dy,dx);
delta:=rotate(alpha, [len/2000,sqrt(3)*lg/1.73]);
tetha:=rotate(betha,[len/6,sqrt(3)*lon/1.73]);
pB    :=    [(pA[1]+delta[1]),    (pA[2]+delta[2])];
pC := [(pA[1]+tetha[1]), (pA[2]+tetha[2])];
pD := [(1/3*A[1]+2/3*B[1]) ,(1/3*A[2]+2/3*B[2])];
    pA, pB, pC, pD;
```

```
    end:
##Mempartisi inisiator setiap iterasi
path := proc()  local pa, pth, i;
    pa := args;
    pth := pa[1];
    for i from 2 to nops([pa])
      do
        pth := (pth, Koch(pa[i-1], pa[i]),pa[i]);
      od;
    pth:
    end:
##Pendefinisian Inisiator
s := sqrt(2):
  p :=[-s+0.5,1],[s+0.5,3.5],[1,3+s],
     [1.5+s,3.5],[1.5+s,1],[1, 1.5-s],[-s+0.5,1]:
  snow||0 := graph(p):
## Memulai proses iterasi
N := 3:
  for i from 1 to N
    do
      p := path(p);
      snow||i := graph(p);
     od:
>plots[display]([snow||(0..3)],insequence=true);
```



iterasi ke-0 iterasi ke-1 iterasi ke-2 iterasi ke-3

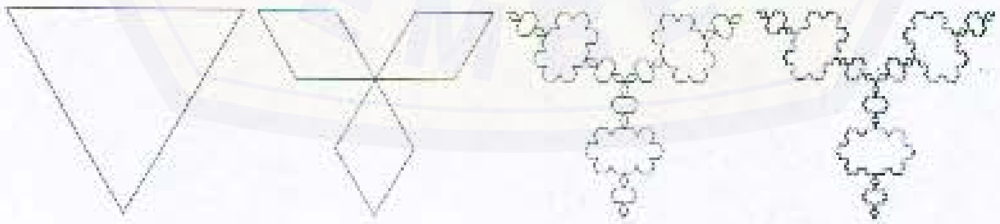
Lampiran 2:

List Program Menggambar Koch Anti-Snowflake dengan Luas Bertambah Menggunakan Maple 8.

1. Inisiator segitiga samasisi dengan generator segitiga samasisi

```
##Setup plots
>plots[setoptions](axes=none,scaling=constrained);
##Prosedure menghubungkan titik-titik yang
##dipartisi
graph := proc() local pts;
    pts := [args];
    plot(pts, style= LINE, numpoints=nargs)
    end:
##merotasi titik A sepanjang daerah awal dengan
##sudut p
rotate := proc(a, p);
[p[1]*cos(a)-p[2]*sin(a),p[1]*sin(a)+p[2]*cos(a)];
    end:
##Memasukkan titik-titik generator setiap iterasi
Koch := proc(A, B)
local pA, pB, pC, dx, dy, len, alpha, delta;
pA := [(2/3*A[1]+1/3*B[1]), (2/3*A[2]+1/3*B[2])];
dx              := B[1]-A[1];
dy              := B[2]-A[2];
len             := sqrt(dx^2+dy^2)/3;
alpha           := arctan(dy, dx);
delta := rotate(alpha, [len/2, sqrt(3)*len/2]);
pB := [(pA[1]+delta[1]), (pA[2]+delta[2])];
pC := [(1/3*A[1]+2/3*B[1]) ,(1/3*A[2]+2/3*B[2])];
    pA, pB, pC;
    end:
##Mempartisi inisiator setiap iterasi
```

```
path := proc()  local pa, pth, i;
    pa := args;
    pth := pa[1];
    for i from 2 to nops([pa])
      do
        pth := (pth, Koch(pa[i-1], pa[i]),pa[i]);
      od;
    pth:
    end:
##Pendefinisian Inisiator
s := sqrt(3)/6:
  p := [0, s], [1/2, -2*s], [1, s], [0, s]:
  snow||0 := graph(p):
## Memulai proses iterasi
N := 5:
  for i from 1 to N
    do
      p := path(p);
      snow||i := graph(p);
     od:
>plots[display]([snow||(0..5)],insequence=true);
```



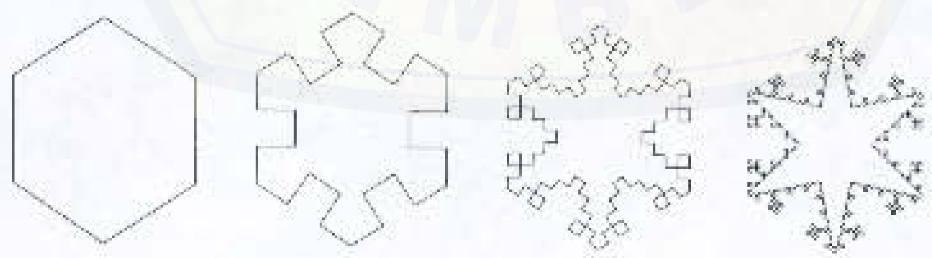
iterasi ke-0 iterasi ke-1 iterasi ke-3 iterasi ke-5

2. Inisiator Poligon bersisi 6 dengan generator bujursangkar

```
##Setup plots
>plots[setoptions](axes=none,scaling=constrained);
##Prosedure menghubungkan titik-titik yang dipartisi
```

```
graph := proc() local pts;
    pts := [args];
    plot(pts, style= LINE, numpoints=nargs)
    end:
##merotasi titik A sepanjang daerah awal dengan
##sudut p
rotate := proc(a, p);
  [p[1]*cos(a)-p[2]*sin(a),p[1]*sin(a)+p[2]*cos(a)];
    end:
##Memasukkan titik-titik generator setiap iterasi
Koch := proc(A, B)
local          pA,pB,pC,pD,dx,dy,ds,dt,len,lg,lon,alpha,
betha,tetha,delta;
pA := [(2/3*A[1]+1/3*B[1]),(2/3*A[2]+1/3*B[2])];
dx            := B[1]-A[1];
dy            := B[2]-A[2];
ds            :=B[2]-A[2];
dt            :=B[1]-A[1];
len           := sqrt(dx^2+dy^2)/0.5;
lon           :=sqrt((dx^2)+(dy^2))/3;
lg            :=sqrt((dx^2)+(dy^2))/3;
alpha         :=arctan(dy, dx);
betha         :=arctan(dy,dx);
delta:=rotate(alpha,[len/2000,sqrt(3)*lg/1.73]);
tetha:=rotate(betha,[len/6,sqrt(3)*lon/1.73]);
pB    :=      [(pA[1]+delta[1]),     (pA[2]+delta[2])];
pC := [(pA[1]+tetha[1]), (pA[2]+tetha[2])];
pD := [(1/3*A[1]+2/3*B[1]) ,(1/3*A[2]+2/3*B[2])];
    pA, pB, pC, pD;
    end:
##Mempartisi inisiator setiap iterasi
```

```
path := proc()  local pa, pth, i;
    pa := args;
    pth := pa[1];
    for i from 2 to nops([pa])
      do
        pth :=(pth, Koch(pa[i-1], pa[i]), pa[i]);
      od;
    pth:
    end:
##Pendefinisian Inisiator
s:= sqrt(2):
p  := [-(s+0.5),1],[-(s+0.5),-2.5],[1,-(3+s)], [2.5+s,-
2.5], [2.5+s,1], [1,1.5+s], [-(s+0.5),1]:
  snow||0 := graph(p):
## Memulai proses iterasi
N := 3:
  for i from 1 to N
    do
      p := path(p);
      snow||i := graph(p);
     od:
>plots[display]([snow||(0..3)],insequence=true);
```



iterasi ke-0 iterasi ke-1 iterasi ke-2 iterasi ke-3