DIMENSI METRIK DAN BI-METRIK GRAF *DUMBBELL*

SKRIPSI

Oleh
Sutitah
NIM 151810101018

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2019

DIMENSI METRIK DAN BI-METRIK GRAF *DUMBBELL*

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1)
dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh
Sutitah
NIM 151810101018

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2019

PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan untuk;

1. Kedua orang tua tercinta, Ibunda Sri Utami dan Ayahanda Rasmudi yang telah memberikan cinta kasih sayang, dukungan dan motivasi;
2. Adik tercinta, Muhammad Bayu Sutanto yang telah memberikan semangat;
3. Keluarga besar yang tak henti memberikan dukungan dan doa;
4. Guru-guru TK Dharma Wanita, SDN Mangunan 01, SMPN 01 Udanawu, SMAN 1 Kandat dan segenap guru-guru yang telah membimbing dari awal hingga sekarang;
5. Almamater tercinta Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.

MOTO

Dan tolong-menolonglah kamu dalam (mengerjakan) kebajikan dan takwa, dan jangan tolong-menolong dalam berbuat dosa dan pelanggaran dan bertakwalah kamu kepada Allah. Sesungguhnya Allah amat berat siksa-Nya.

(terjemahan Surat *Al-Maidah* ayat 2)[1]

---

[1]Departemen Agama Republik Indonesia. 1992. *Al-Qur'an dan Terjemahannya* (Solo : Tiga Serangkai Pustaka Mandiri), hlm. 106.

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

nama : Sutitah

NIM : 151810101018

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul ”Dimensi Metrik dan Bi-Metrik Graf *Dumbbell*” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi mana pun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak mana pun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juli 2019

Yang menyatakan,

(Sutitah)

NIM 151810101018

SKRIPSI

DIMENSI METRIK DAN BI-METRIK GRAF *DUMBBELL*

Oleh :

Sutitah
NIM 151810101018

Pembimbing :

Dosen Pembimbing Utama : Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si.

Dosen Pembimbing Anggota : Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul ”Dimensi Metrik dan Bi-Metrik Graf *Dumbbell*” telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji:

Ketua,	Anggota I
Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si.	Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si.
NIP 197408132000032004	NIP 198610142014041001
Anggota II,	Anggota III,
Kusbudiono, S.Si., M.Si.	Prof. Drs. I Made Tirta, M.Sc., Ph.D
NIP 197704302005011001	NIP 195912201985031002

Mengesahkan

Dekan,

Drs. Sujito, Ph.D.

NIP 196102041987111001

RINGKASAN

Dimensi Metrik dan Bi-Metrik Graf *Dumbbell*; Sutitah, 151810101018; 2019; 34 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Dimensi metrik pertama kali diperkenalkan oleh Harary dan Melter pada tahun 1976 dalam artikel yang berjudul "*On the Metric Dimension of Graph*". Dalam artikel tersebut dibahas tentang himpunan pembeda. Misalkan G adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$, jarak antara titik u dan v di G yaitu panjang lintasan terpendek dari u ke v. Jika representasi titik u dan v di G berbeda maka disebut dengan himpunan pembeda S. Kajian tentang dimensi metrik memunculkan suatu gagasan baru yaitu dimensi bi-metrik. Dimensi bi-metrik diperkenalkan oleh Raghavendra, Sooryanarayana, dan Chandru Hegde pada tahun 2014 dalam artikel yang berjudul "*Bi-Metric Dimension of Graphs*". Perbedaan dimensi metrik dan bi-metrik terletak pada penentuan representasi setiap titik pada graf G. Dimensi metrik merepresentasikan setiap titiknya berupa jarak, sedangkan dimensi bi-metrik merepresentasikan setiap titiknya berupa pasangan terurut jarak dan *detour*. *Detour* merupakan panjang lintasan terpanjang dari u ke v di G.

Penelitian ini membahas tentang dimensi metrik dan bi-metrik graf *dumbbell*. Graf *dumbbell* adalah graf yang dibentuk dari 2 graf *cycle* C_m dan C_n yang dihubungkan oleh suatu graf lintasan P_q, dengan titik-titik ujung dari graf lintasan P_q adalah salah satu titik dari masing-masing graf *cycle* (Wang et al, 2010). Graf *dumbbell* dinotasikan dengan $D_{m,n,q}$, dengan $m, n \geq 3$ menyatakan banyaknya titik pada kedua graf *cycle* dan $q \geq 2$ menyatakan banyaknya titik pada graf lintasan. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode pendeteksian pola dan metode deduktif aksiomatik. Penentuan dimensi metrik dan bi-metrik diawali dengan menotasikan setiap titik pada graf *dumbbell*, memilih himpunan pembeda S dengan $S \subseteq V(D_{m,n,q})$, lalu merepresentasikan setiap titik pada graf *dumbbell*

terhadap S, apabila representasi setiap titik berbeda, maka diperoleh himpunan pembeda, tetapi jika terdapat representasi titik yang sama maka dilakukan pemilihan himpunan pembeda yang lain. Kardinalitas minimum dari himpunan pembeda merupakan dimensi metrik dan bi-metrik pada graf *dumbbell*.

Pada penelitian ini, diperoleh dimensi metrik pada graf *dumbbell* $D_{m,n,q}$ = 2, dimensi metrik pada graf *dumbbell* $D_{2m,n,q}$ = 2 untuk m dan n ganjil dan dimensi metrik pada graf *dumbbell* $D_{2m,n,q}$ = 3 untuk m dan n genap. Sedangkan dimensi bi-metrik pada graf *dumbbell* $D_{m,n,q}$ = 2, dimensi bi-metrik pada graf *dumbbell* $D_{2m,n,q}$ = 2 untuk m dan n ganjil dan dimensi bi-metrik pada graf *dumbbell* $D_{2m,n,q}$ = 3 untuk m dan n genap. Sehingga dapat disimpulkan bahwa nilai dimensi metrik pada graf *dumbbell* sama dengan nilai dimensi bi-metriknya.

PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Allah SWT, atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul ”Dimensi Metrik dan Bi-Metrik Graf *Dumbbell*”. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Ibu Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Utama dan Bapak Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah membimbing dan memberikan arahan kepada penulis;
2. Bapak Kusbudiono, S.Si., M.Si dan Bapak Prof. Drs. I Made Tirta, M.Sc., Ph.D selaku Dosen Penguji yang telah memberikan masukan, saran dan kritik yang membangun dalam penyusunan skripsi ini;
3. Bapak Ahmad Kamsyakawuni, S.Si., M.Kom selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah membimbing selama penulis menjadi mahasiswa;
4. Seluruh dosen dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember;
5. Teman-teman pejuang graf (Bahtiar, Diah, Sheila, Fanin, Ridwan, Bayu, Hadi, Via, dan Ulil) yang telah memberikan motivasi dan dukungan;
6. Kakak tingkat, teman, serta adik tingkat dari Bathics 2012, Atlas 2013, Extreme 2014, Sigma 2015, Misdirection 2016 dan Konifertika 2017 yang telah memberikan dukungan dan motivasi;
7. Seluruh anggota UKM SPORA yang telah memberikan dukungan, ilmu dan pengalaman selama berorganisasi;
8. Seluruh anggota HIMATIKA yang telah memberikan dukungan;
9. Keluarga IMAKA ”Ikatan Mahasiswa Kadiri” dan KKN 239 Pokaan yang telah memberikan semangat dan dukungan;

10. Keluarga Kos 18 Marissa S.Pd, Ulfa Urfiyah S.Si, Nafilah S.Pd, Dyta Romadhona Purwasita, Bela Aprilia Nuraini yang selalu setia memberikan dukungan;
11. Sahabat-sahabatku Dyan Evi Susanti S.Si, Ulil Abshari S.Si, Rory Ronella Agustin, S.Si, Laylatul Febriana Nilasari, Ellenda Alkhori, S.Si, M. Aris Rinaldi, dan Vindi Vegi Siswanto yang selalu memberikan semangat dan dukungan;
12. Serta semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu yang telah memberikan dorongan dan semangat bagi penulis selama studi sampai terselesaikannya skripsi ini.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Juli 2019

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

Halaman

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf sebagai bagian dari Kombinatorika dapat digunakan untuk menyelesaikan berbagai permasalahan sehari-hari dengan cara menggambarkan suatu persoalan agar lebih mudah dipahami. Dalam hal ini, teori graf digunakan untuk merepresentasikan suatu objek diskrit dan hubungan antar objek tersebut. *Representasi* merupakan proses pemaknaan kembali suatu objek, objek pada graf yaitu titik dan sisi. Menurut Hartsfield dan Ringel (1990), *graf* didefinisikan sebagai pasangan himpunan terurut (V, E), dengan V adalah himpunan tak kosong dari titik-titik (*vertex*) dan E adalah himpunan sisi (*edge*) yang menghubungkan sepasang titik.

Salah satu topik kajian dalam teori graf adalah dimensi metrik. Dimensi metrik pertama kali diperkenalkan oleh Harary dan Melter pada tahun 1976 dalam artikel yang berjudul ”*On the Metric Dimension of Graph*”. Dalam artikel tersebut dibahas tentang himpunan pembeda. Suatu himpunan dikatakan himpunan pembeda jika setiap titik di graf G mempunyai representasi titik yang berbeda. Representasi suatu titik pada G diukur berdasarkan lintasan terpendek terhadap himpunan pembeda. *Dimensi metrik* merupakan kardinalitas minimum himpunan pembeda pada G. Dimensi metrik dapat diterapkan pada proses pengkodean, navigasi robot, penempatan tempat usaha tertentu dan lainnya.

Kajian tentang dimensi metrik memunculkan suatu gagasan baru yaitu dimensi bi-metrik. Dimensi bi-metrik diperkenalkan oleh Raghavendra, Sooryanarayana, dan Chandru Hegde pada tahun 2014 dalam artikel yang berjudul “*Bi-Metric Dimension of Graphs*”. Perbedaan dimensi metrik dan dimensi bi-metrik terletak pada penentuan representasi setiap titik pada graf G, yaitu berupa pasangan terurut dari lintasan terpendek dan lintasan terpanjang terhadap himpunan pembeda. Himpunan pembeda S dikatakan dimensi bi-metrik jika kardinalitas dari S adalah minimum dan sebarang dua titik pada G mempunyai representasi yang berbeda.

Pada penelitian sebelumnya, telah ditemukan nilai kardinalitas minimum dimensi metrik pada graf lintasan (P_n) yaitu 1 dan nilai kardinalitas minimum dimensi metrik pada graf *cycle* (C_n) yaitu 2. Penelitian-penelitian tersebut menjadi acuan dalam mencari dimensi metrik dan bi-metrik pada graf lain. Oleh karena itu, penulis ingin mencari nilai dimensi metrik dan bi-metrik pada graf *dumbbell* $D_{m,n,q}$, karena nilai dimensi metrik dan bi-metrik pada graf *dumbbell* $D_{m,n,q}$ belum ada yang meneliti.

1.2 Rumusan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini dirumuskan sebagai berikut :

a. Berapa nilai dimensi metrik pada graf *dumbbell* $D_{m,n,q}$?
b. Berapa nilai dimensi bi-metrik pada graf *dumbbell* $D_{m,n,q}$?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini dapat dijabarkan sebagai berikut :

a. Untuk menentukan nilai dimensi metrik pada *dumbbell* $D_{m,n,q}$.
b. Untuk menentukan nilai dimensi bi-metrik pada *dumbbell* $D_{m,n,q}$.

1.4 Manfaat Penelitian

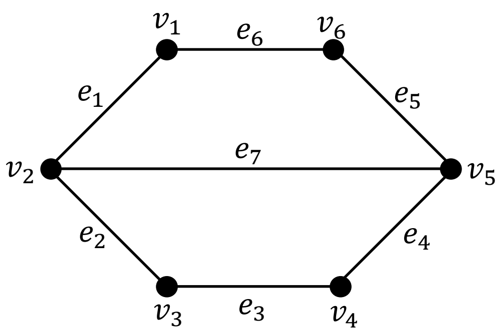
Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah sebagai berikut :

a. Memberikan kontribusi terhadap penelitian yang berhubungan dengan dimensi metrik dan bi-metrik.
b. Memberikan motivasi dan referensi kepada pembaca atau peneliti lain untuk meneliti dimensi metrik dan bi-metrik pada graf lain.
c. Hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan ilmu dan aplikasi lainnya.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

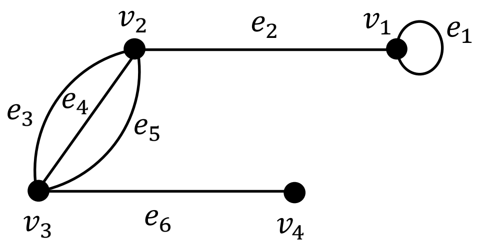
2.1 Pengertian dan Konsep Graf

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan dari $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ menyatakan himpunan tak kosong dari semua titik di G dan himpunan sisi $E(G)$ menyatakan sebuah pasangan tak berurut dari titik u dan v (Chartrand dan Lesniak, 1996). Banyaknya titik yang dimiliki oleh graf disebut *order*, sedangkan banyaknya sisi yang dimiliki oleh graf disebut *size*. Graf yang hanya memiliki satu titik disebut *graf trivial*, sedangkan graf yang memiliki titik berhingga disebut *graf hingga*. Contoh graf G yang terdiri dari 6 titik, $V(G)$ = {v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6} dan 7 sisi, $E(G)$ = {e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7} diperlihatkan pada Gambar 2.1



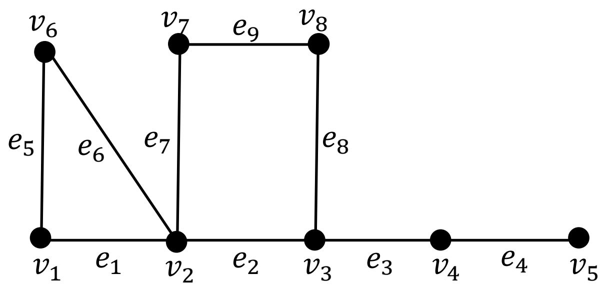
Gambar 2.1 Graf G dengan 6 titik dan 7 sisi

Titik u dan v pada graf G dikatakan *bertetangga* apabila ada sisi e yang menghubungkan titik u dan v yaitu $e = uv$, dengan kata lain u dan v bersisian dengan sisi e. Pada Gambar 2.1 diperoleh bahwa v_2 bertetangga dengan v_1, v_3, v_5, dan v_2 bersisian dengan e_1, e_2, e_7 . *Loop* adalah sisi yang menghubungkan titik v dengan dirinya sendiri, sedangkan jika terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik maka disebut *sisi rangkap*. Graf G yang tidak memuat *loop* dan sisi rangkap disebut *graf sederhana*. Gambar 2.1 merupakan contoh graf sederhana dan Gambar 2.2 merupakan contoh graf tidak sederhana karena memuat *loop* dan sisi rangkap. e_1 adalah *loop*, sedangkan e_3, e_4, dan e_5 adalah sisi rangkap.



Gambar 2.2 Graf dengan *loop* dan sisi rangkap

Sebuah *jalan* dari titik u ke v pada graf G dinotasikan $W(u-v)$ adalah barisan hingga yang diawali dengan titik u dan diakhiri dengan titik v dengan unsur didalamnya saling bergantian antara titik dan sisi yaitu $W \coloneqq u = v_0, v_1, \ldots, v_k = v$ sedemikian hingga $E(G) = v_i + v_{i+1}$, dengan $0 \leq i \leq k-1$. Jalan dikatakan *tertutup* apabila $v_0 = v_n$ dan dikatakan *terbuka* apabila $v_0 \neq v_n$. Jalan yang semua sisinya berbeda (sisinya tidak berulang) disebut *jejak* (Slamin, 2009). Jalan yang semua titiknya berbeda (titiknya tidak berulang) disebut *lintasan.* Pada Gambar 2.3 $v_1, e_1, v_2, e_7, v_7, e_7, v_2, e_2, v_3$ adalah jalan, v_1, e_1, v_2, e_2, v_3 adalah jejak, dan $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_5$ adalah lintasan.

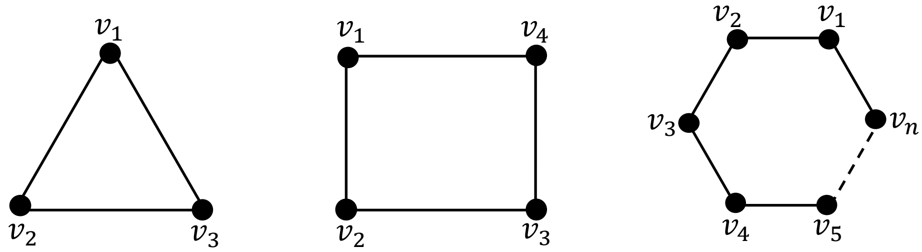


Gambar 2.3 Graf untuk mengilustrasikan jalan, jejak, dan lintasan

Graf G dikatakan *terhubung* jika setiap dua titik u dan v di G terdapat lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut, sedangkan graf G dikatakan *tidak terhubung* jika terdapat dua titik u dan v di G yang tidak mempunyai lintasan. Pada graf terhubung G, *jarak* antara dua titik u dan v yang dinotasikan dengan $d(u, v)$ adalah panjang lintasan terpendek yang menghubungkan titik tersebut, sedangkan lintasan terpanjang yang menghubungkan u dan v di G disebut *detour* yang dinotasikan $\delta(u, v)$. *Eksentrisitas* titik u di G adalah jarak terbesar titik u ke semua titik di G. *Diameter* dari G merupakan eksentrisitas maksimum pada setiap titik di G yang dinotasikan $diam(G)$, sedangkan *jari-jari* di G merupakan eksentrisitas minimum pada setiap titik di G yang dinotasikan $r(v_i)$. Gambar 2.3 menunjukkan jarak $d(v_1, v_6) = 1$, *detour* $\delta(v_1, v_6) = 2$, diameter $diam(G) = 4$, dan jari-jari $r(v_5) = 1$.

2.2 Kelas-kelas Graf

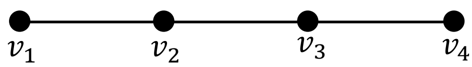
Graf cycle dengan n titik dinotasikan C_n adalah graf reguler yang mempunyai derajat dua. Graf *cycle* C_n hanya dapat dibentuk jika $n \geq 3$. Gambar 2.4 menunjukkan graf *cycle* dengan 3 titik, 4 titik dan n titik.



(a) (b) (c)

Gambar 2.4 Graf *cycle* (a) C_2 ; (b) C_4 ; (c) C_n

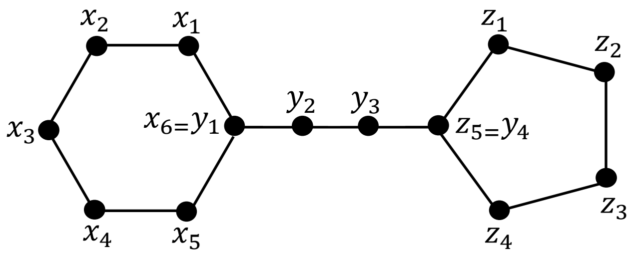
Graf lintasan dinotasikan P_n adalah graf yang mempunyai n titik dengan sisi $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \dots, v_{n-1}v_n$. Titik v_1 dan v_n berturut-turut merupakan titik awal dan titik akhir yang mempunyai derajat 1. Selain kedua titik tersebut, titik-titiknya mempunyai derajat 2 dan sisinya ada sebanyak $n - 1$. Gambar 2.5 menunjukkan graf lintasan dengan 4 titik.



Gambar 2.5 Graf lintasan P_4

Graf dumbbell adalah graf yang dibentuk dari 2 graf *cycle* C_m dan C_n yang dihubungkan oleh suatu graf lintasan P_q, dengan titik-titik ujung dari graf lintasan P_q adalah salah satu titik dari masing-masing graf *cycle* (Wang et al, 2010). Graf *dumbbell* dinotasikan dengan $D_{m,n,q}$, dengan $m, n \geq 3$ menyatakan banyaknya titik pada kedua graf *cycle* dan $q \geq 2$ menyatakan banyaknya titik pada graf lintasan.

Banyaknya titik pada graf *dumbbell* adalah $m + n + q - 2$, sedangkan banyaknya sisi adalah $m + n + q - 1$ sehingga $|V| = |E| - 1$. Gambar 2.6 menunjukkan graf *dumbbell* $D_{6,5,4}$.



Gambar 2.6 Graf *dumbbell* $D_{6,5,4}$

2.3 Dimensi Metrik

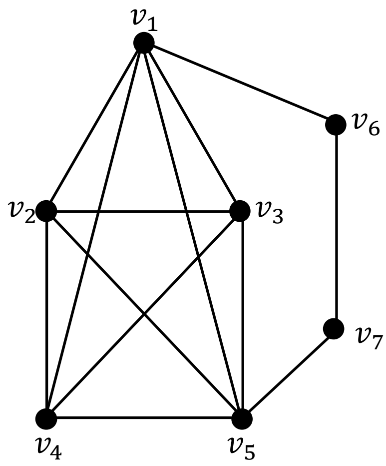
Misalkan G adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Jarak antara titik u dan v di G dinotasikan $d(u, v)$ yaitu panjang lintasan terpendek dari u ke v. Misalkan $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ adalah sub himpunan sebanyak k dengan $S \subseteq V(G)$. Representasi jarak dari titik $u \in V(G)$ terhadap S dinotasikan $r(u|S) = (d(u, s_1), d(u, s_2), \dots, d(u, s_k))$. Jika $r(u|S) \neq r(v|S)$ untuk $u, v \in V(G)$, maka S disebut *himpunan pembeda* di G. Himpunan pembeda yang mempunyai kardinalitas minimum disebut *basis metrik*. Kardinalitas dari basis metrik disebut *dimensi metrik*. Dengan kata lain, dimensi metrik merupakan kardinalitas minimum dari himpunan pembeda pada G, yang dinotasikan $\beta(G)$ atau $dim(G)$ (Chartrand, 2000).

Berikut ini beberapa teorema mengenai dimensi metrik :

Teorema 2.3.1. (Chartrand, 2000) *Graf terhubung G dengan $n \geq 2$ mempunyai $\beta(G) = 1$ jika dan hanya jika G merupakan graf lintasan (P_n).*

Teorema 2.3.2. (Chartrand, 2000) *Graf terhubung G dengan $n \geq 3$ mempunyai $\beta(G) = 2$, maka G merupakan graf cycle (C_n).*

Gambar 2.7 menunjukkan contoh dimensi metrik pada suatu graf G.



Gambar 2.7 Graf G dengan $\beta(G) = 4$

Untuk membuktikan $\beta(G) = 4$, akan ditunjukkan bahwa kardinalitas minimum graf G kurang dari 4 adalah tidak mungkin atau *impossible*. Dengan kata lain, akan menyebabkan adanya representasi titik yang sama. Misalkan ambil S_2 = $\{v_1, v_2, v_3\}$, hal yang sama akan terjadi yaitu $r(v_4|S_2) = r(v_5|S_2) = (1, 1, 1)$, maka S_2 bukan merupakan himpunan pembeda dan bukan basis metrik. Selanjutnya, misalkan ambil S_1 = $\{v_1, v_2, v_3, v_5\}$ representasi titiknya adalah :

$r(v_1|S_1) = (0, 1, 1, 1)$, $\quad$ $r(v_4|S_1) = (1, 1, 1, 1)$,

$r(v_2|S_1) = (1, 0, 1, 1)$, $\quad$ $r(v_6|S_1) = (1, 2, 2, 2)$,

$r(v_3|S_1) = (1, 1, 0, 1)$, $\quad$ $r(v_7|S_1) = (2, 2, 2, 1)$.

$r(v_5|S_1) = (1, 1, 1, 0)$,

Karena representasi titik semua berbeda untuk S_1 = $\{v_1, v_2, v_3, v_5\}$, maka S_1 merupakan himpunan pembeda. Maka dimensi metrik pada graf G adalah 4 atau $\beta(G) = 4$.

2.4 Hasil Penelitian Dimensi Metrik

Pada bagian ini disajikan beberapa hasil penelitian mengenai dimensi metrik yang dapat digunakan sebagai rujukan. Beberapa hasil penelitian tersebut diantaranya dapat dilihat pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1 Hasil penelitian dimensi metrik terdahulu

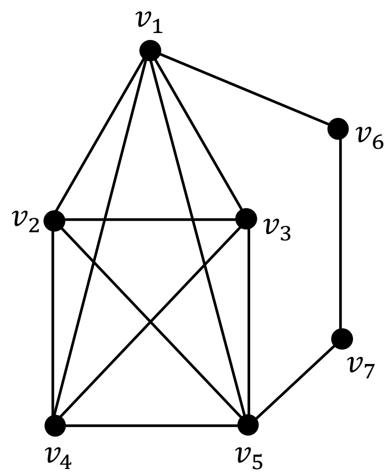
Graf	Hasil $\beta(G)$	Keterangan Sumber
Graf Lintasan (P_n)	$\beta(P_n) = 1$	Chartrand (2000)
Graf Lengkap (K_n)	$\beta(K_n) = n - 1$	Chartrand (2000)
Graf *Cycle* (C_n)	$\beta(C_n) = 2, n \geq 3$	Chartrand (2000)
Graf Shackle Tangga (SL_n)	$\beta(SL_n) = n, n \geq 2$	Saifudin, I. 2015
Graf Tangga Tiga (TCL_n)	$\beta(TCL_n) = n, n \geq 2$	Saifudin, I. 2015
Graf Antiprisma (H_n)	$\beta(H_n) = 3, n \geq 3$	Santi, R. N. 2015
Graf Prisma $(H_{5,n})$	$\beta(H_{5,n}) = 2, n \geq 2$	Santi, R. N. 2015
Graf Bintang (S_n)	$\beta(S_n) = n - 1, n \geq 2$	Santi, R. N. 2015
Graf $E(E_n)$	$\beta(E_n) = 2, n \geq 3$	Fitriana, R. A. 2015

2.5 Dimensi Bi-Metrik

Misalkan G adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Setiap titik $x \in V(G)$ menyatakan representasi (a, b) yang dinotasikan S_x. Dengan a menyatakan jarak dan b menyatakan $detour$. *Detour* antara titik u dan v di G yaitu panjang lintasan terpanjang dari u ke v. Misalkan $S = \{s_1, s_2, ..., s_k\}$ dari titik-titik dalam graf terhubung G dengan $a = d(x, s_1), d(x, s_2), \dots, d(x, s_k))$ dan $b = \delta(x, s_1), \delta(x, s_2), \dots, \delta(x, s_k))$, sehingga $d(x, s_i)$ adalah jarak dan $\delta(x, s_i)$ adalah *detour*. Jika $s_x \neq s_y$, maka S disebut *himpunan pembeda* di G. Himpunan pembeda yang mempunyai kardinalitas minimum disebut *basis bi-metrik.* Kardinalitas dari basis bi-metrik disebut *dimensi bi-metrik*. Dengan kata lain, dimensi bi-metrik merupakan kardinalitas minimum dari himpunan pembeda pada G, yang dinotasikan $\beta_b(G)$. Beberapa graf yang telah ditemukan dimensi bi-metriknya yaitu graf lintasan dengan $\beta_b(P_n) = 1$ dan graf lengkap dengan $\beta_b(K_n) = n - 1$ (Raghavendra dkk., 2014).

Teorema 2.4.1. (Raghavendra dkk., 2014) *Sebuah graf G* mempunyai $\beta_b(G) = 1$ *jika dan hanya jika G merupakan graf lintasan* (P_n).

Gambar 2.8 menunjukkan contoh dimensi bi-metrik pada suatu graf.



Gambar 2.8 Graf G dengan $\beta_b(G) = 3$

Untuk membuktikan $\beta(G) = 3$, akan ditunjukkan bahwa kardinalitas minimum graf G kurang dari 3 adalah tidak mungkin atau *impossible*. Dengan kata lain, akan menyebabkan adanya representasi titik yang sama. Misalkan ambil S_2 = $\{v_1, v_2\}$, hal yang sama akan terjadi yaitu $r(v_3|S_2) = r(v_4|S_2) = ((1,1),(6,6))$, maka S_2 bukan merupakan himpunan pembeda dan bukan basis bi-metrik. Selanjutnya, misalkan ambil S_1 = $\{v_2, v_3, v_6\}$ representasi titiknya adalah :

$r(v_2|S_1) = ((0,1,2),(7,6,6))$, $\quad$ $r(v_4|S_1) = ((1,1,2),(6,6,6))$,
$r(v_3|S_1) = ((0,1,2),(6,7,6))$, $\quad$ $r(v_5|S_1) = ((1,1,2),(6,6,5))$,
$r(v_6|S_1) = ((2,2,0),(6,6,7))$, $\quad$ $r(v_7|S_1) = ((2,2,1),(6,6,6))$.
$r(v_1|S_1) = ((1,1,1),(6,6,6))$,

Karena representasi titik semua berbeda untuk S_1 = $\{v_2, v_3, v_6\}$, maka S_1 merupakan himpunan pembeda. Maka, dimensi bi-metrik pada graf G adalah 3 atau $\beta_b(G) = 3$.

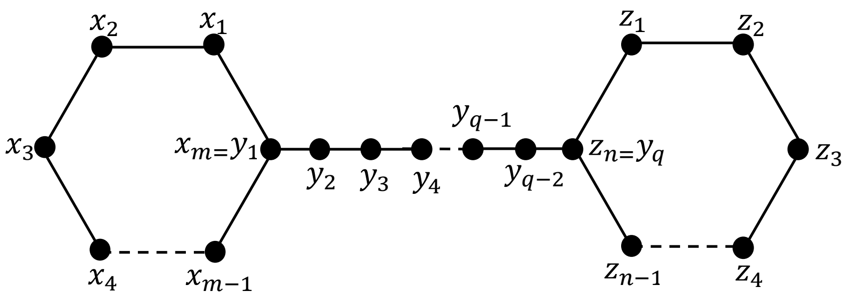
BAB 3. METODE PENELITIAN

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai metode yang digunakan untuk mendapatkan dimensi metrik dan bi-metrik pada graf *dumbbell* $D_{m,n,q}$. Penelitian ini digolongkan ke dalam penelitian eksploratif yang bertujuan untuk memperdalam pengetahuan dan mencari ide-ide baru, serta hasil dari penelitian ini dapat dijadikan sebagai dasar penelitian selanjutnya. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

a. Metode pendeteksian pola (*pattern recognition*) yaitu mencari pola untuk mendapatkan nilai dimensi metrik dan bi-metrik dengan himpunan pembeda terhubung, sehingga diperoleh nilai kardinalitas minimum dengan koordinat titik yang berbeda.
b. Metode deduktif aksiomatik merupakan metode penelitian yang menggunakan pembuktian aksioma dan teorema yang telah ada untuk memecahkan masalah.

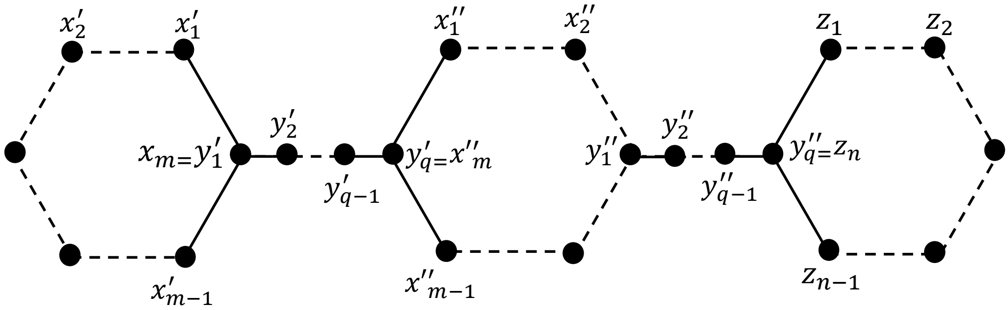
3.1 Data Penelitian dan Penotasian Titik

Penelitian ini menggunakan graf *dumbbell* $D_{m,n,q}$ dan $D_{2m,n,q}$. Penelitian yang pertama graf *dumbbell* $D_{m,n,q}$ yaitu graf yang dibentuk dari 2 graf *cycle* C_m dan C_n yang dihubungkan oleh suatu graf lintasan P_q, dengan titik-titik ujung dari graf lintasan P_q adalah salah satu titik dari masing-masing graf *cycle*. Banyaknya titik pada graf *dumbbell* adalah $m+n+q-2$, sedangkan banyaknya sisi adalah $m+n+q-1$. Penotasian titik pada graf *dumbbell* yaitu $V(G)=\{x_i|1\le i\le m\}\cup\{y_j|1\le j\le q\}\cup\{z_k|1\le k\le n\}$ dan penotasian sisi pada graf *dumbbell* yaitu $E(G)=\{x_ix_{i+1}|1\le i\le m-1\}\cup\{y_jy_{j+1}|1\le j\le q-1\}\cup\{z_kz_{k+1}|1\le k\le n-1\}$, dengan x_i dan z_k adalah titik pada graf *cycle*, dan y_j adalah titik pada graf lintasan.



Gambar 3.1 Graf *dumbbell* $D_{m,n,q}$

Penelitian selanjutnya graf *dumbbell* $D_{2m,n,q}$ yaitu graf yang dibentuk dari 3 graf *cycle* C'_m, C''_m dan C_n yang dihubungkan oleh suatu graf lintasan P'_q dan P''_q. Dengan titik-titik ujung dari graf lintasan P'_q adalah salah satu titik dari graf *cycle* C''_m, lalu graf *cycle* C''_m dihubungkan oleh graf lintasan P''_q yang mana titik ujungnya merupakan salah satu titik graf *cycle* C_n. Banyaknya titik pada graf *dumbbell* $D_{2m,n,q}$ adalah $m' + m'' + n + q' + q'' - 4$, sedangkan banyaknya sisi adalah $m' + m'' + n + q' + q'' - 2$. Penotasian titik pada graf *dumbbell* yaitu $V(G) = \{x'_i | 1 \le i' \le m'\} \cup \{y'_j | 1 \le j' \le q\} \cup \{x''_i | 1 \le i'' \le m''\} \cup \{y''_j | 1 \le j'' \le q\} \cup \{z_k | 1 \le k \le n\}$ dan penotasian sisi pada graf *dumbbell* yaitu $E(G) = \{x'_i x'_{i+1} | 1 \le i' \le m' - 1\} \cup \{y'_j y'_{j+1} | 1 \le j' \le q - 1\} \cup \{x''_i x''_{i+1} | 1 \le i'' \le m'' - 1\} \cup \{y''_j y''_{j+1} | 1 \le j'' \le q - 1\} \cup \{z_k z_{k+1} | 1 \le k \le n - 1\}$, dengan x'_i, x''_i dan z_k adalah titik pada graf *cycle*, dan y'_jdan y''_j adalah titik pada graf lintasan.



Gambar 3.2 Graf *dumbbell* $D_{2m,n,q}$

3.2 Mengklaim $\boldsymbol{\beta(G) = k}$ dan $\boldsymbol{\beta_b(G) = k}$

Untuk mengklaim $\beta(G) = k$ dan $\beta_b(G) = k$ dilakukan 2 cara yaitu dengan menunjukkan $\beta(G) \geq k$, $\beta_b(G) \geq k$ sebagai batas bawah dan $\beta(G) \leq k$, $\beta_b(G) \leq k$ sebagai batas atas dengan k asumsikan sebagai bilangan hasil dari kardinalitas minimum dimensi metrik dan bi-metrik.

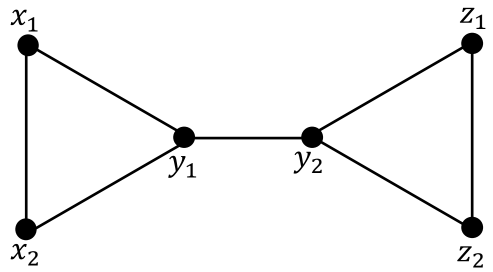
a. Pembuktian $\beta(G) \geq k$ dan $\beta_b(G) \geq k$. $\beta(G) \geq k$ dan $\beta_b(G) \geq k$ digunakan untuk menentukan batas bawah dimensi metrik dan bi-metrik yang menggunakan metode deduktif aksiomatik yaitu pembuktian lemma dan teorema. Sesuai Teorema 2.4.1. mengakibatkan $(G) \geq 1$ dan $\beta_b(G) \geq 1$ atau analisis struktur graf *dumbbell.*

b. Pembuktian $\beta(G) \leq k$ dan $\beta_b(G) \leq k$. Berdasarkan pengertian dimensi metrik dan bi-metrik pada subbab 2.3 dan 2.5, untuk menentukan batas atas dimensi metrik dan bi-metrik pada graf G kurang dari sama dengan k, dapat dilakukan dengan mengkonstruksi himpunan pembeda $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ dengan $S \subseteq G$ dan membuktikan bahwa $r(u|S) \neq r(v|S)$ untuk $u, v \in V(G)$. Oleh karena itu, sesuai definisi bahwa $\beta(G)$ dan $\beta_b(G)$ merupakan kardinalitas minimum dari himpunan pembeda maka $\beta(G) \leq k$ dan $\beta_b(G) \leq k$. Untuk membuktikan bahwa $\beta(G) \leq k$ dan $\beta_b(G) \leq k$, dilakukan langkah-langkah sebagai berikut :

   1. Menentukan graf yang akan diteliti;
   2. Menotasikan himpunan titik pada graf *dumbbell* yaitu $\{(x_1, x_2, \dots, x_m)$, $(z_1, z_2, \dots, z_n)$, $(y_1, y_2, \dots, y_q)\}$;
   3. Memilih subset S dari V;
   4. Merepresentasikan setiap titik pada graf *dumbbell* terhadap S yaitu $r(v|S)$ untuk setiap v anggota dari S;
   5. Mendapatkan himpunan pembeda jika $r(u|S) \neq r(v|S)$ untuk $u, v \in V(G)$ dengan $u \neq v$, maka S merupakan himpunan pembeda. Jika $r(u|S) = r(v|S)$ maka kembali untuk memilih subset S dari V.

3.3 Observasi Penelitian

Pada bagian ini peneliti ingin mencari hasil dimensi metrik dan dimensi bi-metrik pada graf $D_{m,n,q}$. Dari penjelasan langkah-langkah penelitian di atas, berikut hasil observasi awal peneliti :



Gambar 3.3 Graf *dumbbell* $D_{3,3,2}$

Gambar 3.2 menunjukkan observasi awal pada graf *dumbbell* $D_{3,3,2}$. Langkah yang pertama akan mencari nilai dimensi metrik dari graf *dumbbell* $D_{3,3,2}$ yaitu dengan memilih himpunan titik $S = \{x_1, y_1\}$. Karena pada graf *dumbbell* $D_{3,3,2}$ terdapat representasi yang sama yaitu $r\ (z_1|S) = r\ (z_2|S)$ = (3,2), maka S bukan merupakan himpunan pembeda. Selanjutnya, memilih himpunan titik yang lain yaitu $S = \{x_1, z_1\}$, diperoleh representasi semua titik pada graf *dumbbell* $D_{3,3,2}$ terhadap S sebagai berikut :

$r\ (x_1|S)$ = (0,3), $r\ (y_1|S)$ = (1,2),
$r\ (z_1|S)$ = (3,0), $r\ (y_2|S)$ = (2,1),
$r\ (x_2|S)$ = (1,3), $r\ (z_2|S)$ = (3,1).

Karena setiap titik pada graf *dumbbell* $D_{3,3,2}$ mempunyai representasi yang berbeda, maka S merupakan himpunan pembeda. Dengan demikian, $\beta(D_{3,3,2}) = 2$ dan $S = \{x_1, z_1\}$ merupakan himpunan pembeda dan basis metrik.

Langkah yang kedua akan mencari dimensi bi-metrik dari graf *dumbbell* $D_{3,3,2}$, yaitu dengan memilih himpunan titik $S = \{x_1, y_1\}$. Karena pada graf *dumbbell* $D_{3,3,2}$ terdapat representasi yang sama yaitu $r\ (z_1|S) = r\ (z_2|S)$ = ((3,2), (5,3)), maka S bukan merupakan himpunan pembeda. Selanjutnya, memilih himpunan titik yang lain yaitu $S = \{x_1, z_1\}$, diperoleh representasi semua titik pada graf *dumbbell* $D_{3,3,2}$ terhadap S sebagai berikut :

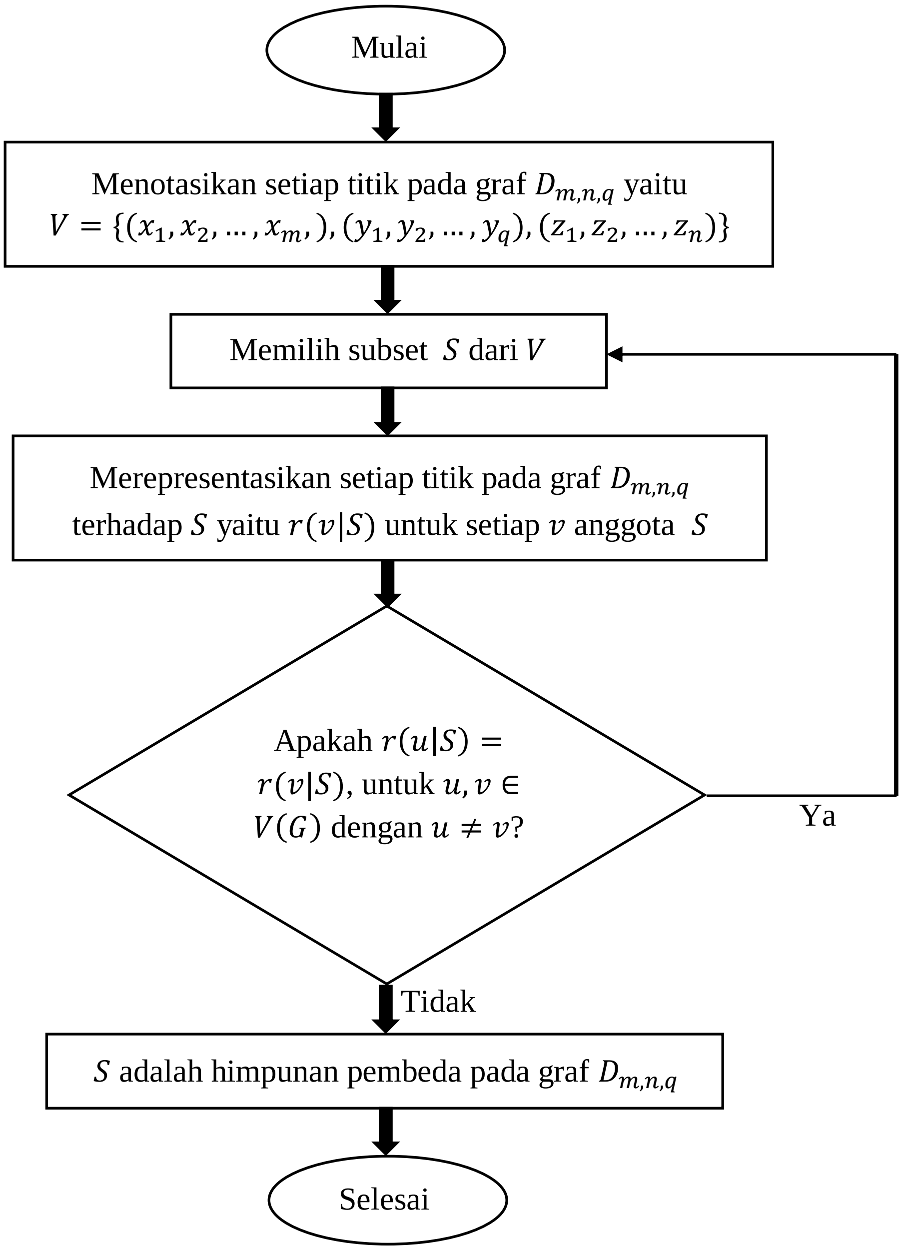
$r\ (x_1|S)$ = ((0,3), (3,5)), $r\ (y_1|S)$ = ((1,2), (2,3)),

$r\ (z_1|S)$ = ((3,0), (5,3)), $r\ (y_2|S)$ = ((2,1), (3,2)),

$r\ (x_2|S)$ = ((1,3), (2,5)), $r\ (z_2|S)$ = ((3,1), (5,2)).

Karena setiap titik pada graf *dumbbell* $D_{3,3,2}$ mempunyai representasi yang berbeda, maka S merupakan himpunan pembeda. Dengan demikian, $\beta_b\left(D_{3,3,2}\right) = 2$ dan $S = \{x_1, z_1\}$ merupakan himpunan pembeda.

Berdasarkan langkah-langkah penelitian di atas, berikut adalah skema penelitian yang ditunjukkan pada Gambar 3.3 sebagai berikut :



Gambar 3.4 Skema mendapatkan himpunan pembeda pada suatu graf

BAB 5. PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa diperoleh 4 teorema dimensi metrik dan bi-metrik pada graf *dumbbell*, diantaranya :

a. Dimensi metrik pada graf *dumbbell* dalam penelitian ini adalah

$$\beta(D_{m,n,q}) = 2$$

$$\beta(D_{2m,n,q}) = \begin{cases} 2 & \text{untuk} \quad m \text{ dan } n \text{ ganjil} \\ 3 & \text{untuk} \quad m \text{ dan } n \text{ genap} \end{cases}$$

b. Dimensi bi-metrik pada graf *dumbbell* dalam penelitian ini adalah

$$\beta_b(D_{m,n,q}) = 2$$

$$\beta_b(D_{2m,n,q}) = \begin{cases} 2 & \text{untuk} \quad m \text{ dan } n \text{ ganjil} \\ 3 & \text{untuk} \quad m \text{ dan } n \text{ genap} \end{cases}$$

5.1 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai dimensi metrik dan bi-metrik pada graf *dumbbell* $D_{m,n,q}$, peneliti memberikan saran kepada pembaca atau peneliti lain agar dapat mengembangkan penelitian dimensi metrik dan bi-metrik pada graf lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Chartrand, G, C. Poisson, dan P. Zhang. 2000. Resolvability and The Upper Dimension of Graphs. *Computers and Mathematics with Applications*, (29):19-28.

Chartrand, G dan Lesniak, L. 1996. *Graphs* & *Digraphs Third Edition.* New York: Chapman & Hall / CRC.

Fitriana, R. A. 2015. *Pengembangan Dimensi Metrik pada Graf Khusus dan Operasinya.* Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.

Hartsfield, N and Ringel. 1990. *Pearls in Graph Theory*. Australia: Academic Press.

J. Wang, F. Belardo, Q. Huang and E. M. L. Marzi. 2010. *Spectral Characterizations of Dumbbell Graphs. Electron. J. Combin.*

Raghavendra, A., B. Sooryanarayana, and Chandru Hedge. 2014. Bi-metric Dimension of Graphs. *British Journal of Mathematics & Computer Science*. 4(18): 2699-2714.

Saifudin, I. 2015. *Dimensi Partisi dari Graf Khusus dan Operasinya*. Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.

Santi, R. N. 2015. *Analisa Dimensi Metrik pada Beberapa Graf Khusus.* Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.

Slamin. 2009. *Desain Jaringan Pendekatan Teori Graf.* Jember University Press. Jember.