# DIMENSI PARTISI PADA GRAF HASIL IDENTIFIKASI TITIK DARI BEBERAPA GRAF SEDERHANA

**SKRIPSI**

Oleh
**Sheila Mery Anggraini**
**NIM 151810101048**

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS JEMBER**
**2019**

# DIMENSI PARTISI PADA GRAF HASIL IDENTIFIKASI TITIK DARI BEBERAPA GRAF SEDERHANA

**SKRIPSI**

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains


Oleh

**Sheila Mery Anggraini**

**NIM 151810101048**


**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS JEMBER**
**2019**

## PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan untuk :

1. Ayahanda Abdullah rahimahullah dan Ibunda Setianingsih tercinta yang senantiasa memberikan do'a, motivasi, semangat, inspirasi serta kasih sayang sejak kecil,
2. Kedua kakakku Yanto, Didik dan Yeni tersayang yang senantiasa memberikan semangat,
3. Seluruh guru dari TK Dharmawanita Persatuan, SD Negeri 3 Besuki, SMP Negeri 1 Banyuglugur, SMA Negeri 1 Situbondo, Math Sonic, yang telah memberikan banyak ilmu pengetahuan dan pelajaran hidup yang bermanfaat dengan tulus,
4. Teman-Teman seperjuangan SIGMA'15, Keluarga besar Himatika Geokomstat, UKM Seni Titik, UKM Marchingband Symphoni Rama, KKN'14 Pontang, MIPANet School 2019, yang telah memberikan pengalaman serta selalu mendukung saya sehingga skripsi ini bisa terselesaikan,
5. Sahabat kecil saya (Sakinah, Nur Halima, Anis, Efi, Sofi) yang senantiasa memberi nasihat disetiap permasalahan yang ada,
6. Sahabat tersayang (Wahyuni, Dian, Dini) yang senantiasa mengingatkan arti kesabaran,
7. Sahabat "PITEKERS" (Diah, Fanin, Amalia, Asfira) yang senantiasa menemani serta mengingatkan untuk tidak mudah lupa,
8. Almamater tercinta Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

# MOTO

“Wahai orang-orang yang beriman! Apabila dikatakan kepadamu, berilah kelapangan di dalam majelis-majelis, maka lapangkanlah. Niscaya Allah akan memberi kelapangan untukmu. Dan apabila dikatakan “Berdirilah kamu”, maka berdirilah, niscaya Allah akan mengangkat (derajat) orang-orang yang beriman diantaramu dan orang-orang yang diberi ilmu beberapa derajat. Dan Allah Maha Mengetahui terhadap apa yang kamu kerjakan.”

(Q.s Al-Mujadilah Ayat 11)

“Tidak didapatkan ilmu dengan badan yang berleha-leha”

(Yahya Ibnu Abi Katsiirin)

# PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama : Sheila Mery Anggraini

NIM : 151810101048

menyatakan dengan sebenarnya bahwa karya ilmiah yang berjudul "Dimensi Partisi pada Graf Hasil Identifikasi Titik dari Beberapa Graf Sederhana" adalah benar-benar hasil karya sendiri kecuali kutipan yang telah di sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi maupun dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggungjawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak manammun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juli 2019

Yang Menyatakan,

Sheila Mery Anggraini

NIM 151810101048

**SKRIPSI**

# DIMENSI PARTISI PADA GRAF HASIL IDENTIFIKASI TITIK DARI BEBERAPA GRAF SEDERHANA


Oleh

**Sheila Mery Anggraini**

**NIM 151810101048**

**JURUSAN MATEMATIKA**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS JEMBER**

**2019**


Pembimbing:

Dosen Pembimbing Utama : Dr. Kristiana Wijaya S.Si., M.Si

Dosen Pembimbing Anggota : Kusbudiono S.Si., M.Si

**PENGESAHAN**

Skripsi berjudul "Dimensi Partisi pada Graf Hasil Identifikasi Titik dari Beberapa Graf Sederhana" telah diuji dan disahkan pada :

Hari, tanggal :

Tanggal : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Tim Penguji,

| | |
|---|---|
| Ketua, | Anggota I, |
| Dr. Kristiana Wijaya S.Si.,M.Si<br>NIP. 197408132000032004 | Kusbudiono S.Si.,M.Si<br>NIP. 197704302005011001 |
| Anggota II, | Anggota III, |
| Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si<br>NIP.198610142014041001 | Dr. Alfian Futuhul Hadi, S.Si., M.Si<br>NIP. 197407192000121001 |

Mengesahkan,
Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Jember

Drs. Sujito, Ph.D
NIP. 196102041987111001

# RINGKASAN

**Dimensi Partisi pada Graf Hasil Identifikasi Titik dari Beberapa Graf Sederhana;** Sheila Mery Anggraini, 151810101048; 2019: 36 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Dimensi partisi adalah salah satu topik dalam teori graf yang diperkenalkan oleh Chartrand pada tahun 1998. Menurut Chartrand, dimensi partisi adalah nilai minimum dari partisi pembeda. Partisi dari himpunan titik pada graf dikatakan partisi pembeda jika representasi setiap titik dari suatu graf berbeda. Penelitian mengenai dimensi partisi sudah banyak dilakukan untuk beberapa kelas graf, seperti Chartrand dan Zhang pada tahun 2000 menemukan hasil dimensi partisi dari graf lintasan, graf lengkap dan graf bintang. Kemudian, pada tahun 2013 Rodrguez menemukan hasil dimensi partisi pada graf *cycle*. Selain itu, pada tahun 2000 Dewi juga menemukan hasil dimensi partisi dari graf lolipop. Graf lolipop didapat dengan menggabungkan salah satu titik dari graf lengkap dan satu titik graf lintasan yang dihubungkan dengan suatu sisi. Konsep tersebut tidak jauh berbeda dengan graf hasil identifikasi titik.

Pada penelitian ini dibahas mengenai nilai dimensi partisi dari graf hasil identifikasi titik dari beberapa graf sederhana. Graf hasil identifikasi titik graf $G$ dan $H$ diperoleh dengan mengidentikkan salah satu titik dari graf $G$ dan salah satu titik dari graf $H$ sehingga menghasilkan graf baru yang dinotasikan $G \odot H$. Graf yang ditentukan nilai dimensi partisinya yaitu graf hasil identifikasi titik graf lengkap $K_m$ dan graf bintang $K_{1,n}$, graf *cycle* $C_n$ dan graf lintasan $P_n$, graf lengkap $K_m$ dan graf *cycle* $C_n$.

Penelitian ini diawali dengan menentukan himpunan partisi pembeda beserta anggota dari partisi himpunan pembeda sedemikian sehingga menghasilkan representasi titik yang berbeda dengan jumlah partisi pembeda yang minimum. Titik yang memungkinkan untuk diletakkan pada suatu partisi himpunan dapat dilakukan dengan mencari pola representasi setiap titik terhadap partisinya berdasarkan lema yang telah ditetapkan. Langkah selanjutnya, untuk

membuktikan bahwa partisi pembeda dari kontruksi pola yang dibentuk menghasilkan banyaknya anggota yang minimum pada himpunan partisi dapat dilakukan dengan pembuktian teorema dan lema yang ada. Hasil penelitian ini berupa teorema nilai dimensi partisi graf tersebut beserta bukti dan ilustrasi sebagai visualisasi kebenaran teorema.

Pada penelitan ini didapatkan beberapa hasil diantaranya nilai dimensi partisi pada graf $K_m \odot K_{1,n}$ dengan titik identifikasi pada pusat graf bintang dengan $m \geq 3$ dan $n \in \mathbb{N}$ bernilai $m$ ketika $n \leq m$ dan bernilai $n$ ketika $n > m$, dimensi partisi pada graf $K_m \odot K_{1,n}$ dengan titik identifikasi pada daun graf bintang dengan $m \geq 3$ dan $n \in \mathbb{N}$ bernilai $m$ ketika $n \leq m + 1$ dan bernilai $n$ ketika $n > m + 1$, dimensi partisi pada graf $C_m \odot P_n$ dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 2$ bernilai 3, dimensi partisi pada graf $K_m \odot C_n$ dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 3$ bernilai $m$.

## PRAKATA

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Dimensi Partisi pada Graf Hasil Identifikasi Titik dari Beberapa Graf Sederhana". Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan pendidikan strata satu(S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Ibu Dr. Kristiana Wijaya S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Utama dan Bapak Kusbudiono S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Anggota.
2. Bapak Ikhsanul Halikin S.Pd., M.Si., selaku Dosen Penguji I dan Bapak Dr. Alfian Futuhul Hadi S.Si., M.Si., selaku Dosen Penguji II,
3. Bapak Kusbudiono S.Si., M.S.i selaku Dosen Pembimbing Akademik serta seluruh dosen dan karyawan Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.
4. Keluarga yang telah mendukung serta memberi semangat.
5. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Juli 2019

Penulis

# DAFTAR ISI

# DAFTAR TABEL

## DAFTAR GAMBAR

Halaman

# BAB 1. PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang memiliki banyak terapan dalam kehidupan sehari-hari. Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 untuk menyelesaikan permasalahan Jembatan Konigsberg. Permasalahan tersebut adalah bagaimana membuktikan bahwa setiap orang yang melalui jembatan tersebut dan ingin kembali ke tempat asal keberangkatan tidak mungkin melalui setiap jembatan hanya satu kali. Kemudian, seorang matematikawan Swiss yang bernama Leonhard Euler berhasil membuktikan dengan memodelkan permasalahan tersebut ke dalam bentuk graf dengan merepresentasikan daratan sebagai titik (*vertex*) dan jembatan sebagai sisi (*edge*).

Setelah permasalahan Jembatan Konigsberg terselesaikan, teori graf semakin berkembang hingga saat ini. Salah satu topik pada teori graf yang menjadi pokok bahasan hingga saat ini yaitu dimensi partisi. Menurut Chartrand (1998), misalkan terdapat graf terhubung $G$ dengan $V(G)$ adalah himpunan titik-titiknya dan $V(G)$ dapat dibagi menjadi beberapa partisi. Himpunan partisi tersebut dikatakan himpunan pembeda dari graf $G$ jika setiap titik di $G$ memiliki representasi jarak yang berbeda terhadap partisi. Kardinalitas minimum dari partisi pembeda terhadap setiap titik adalah dimensi partisi.

Pada tahun 2000, Chartrand dan Zhang menemukan beberapa hasil dimensi partisi dari berbagai kelas graf diantaranya yaitu graf lintasan, graf lengkap graf bintang. Kemudian, pada tahun 2013 Rodrguez menemukan hasil dimensi partisi pada graf *cycle*. Penelitian tersebut menjadi acuan penulis untuk mencari nilai dimensi partisi pada graf hasil identifikasi titik dari beberapa graf sederhana. Graf hasil identifikasi titik diperoleh dengan mengidentikkan salah satu titik dari graf $G$ terhadap salah satu titik pada graf $H$ sedemikian sehingga menghasilkan graf baru. Dewi (2017) menemukan hasil dimensi partisi pada graf lolipop. Graf lolipop diperoleh dengan menggabungkan salah satu titik dari graf lengkap dengan salah satu titik ujung dari graf lintasan yang dihubungkan oleh sisi. Konsep dari graf lolipop mirip dengan konsep graf hasil identifikasi titik. Berdasarkan hasil penelitian sebelumnya, penulis tertarik untuk melakukan penelitian pada graf tersebut karena penelitian dimensi partisi untuk graf hasil dari pengidentifikasian titik masih jarang dilakukan.

## 1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada skripsi ini adalah menentukan nilai dimensi partisi pada graf hasil identifikasi titik dari graf lengkap dan graf bintang, graf *cycle* dan graf lintasan, graf lengkap dan graf *cycle*.

## 1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini yaitu menentukan nilai dimensi partisi pada graf hasil identifikasi titik dari graf lengkap dan graf bintang, graf *cycle* dan graf lintasan, graf lengkap dan graf *cycle*.

## 1.4 Manfaat Penelitian

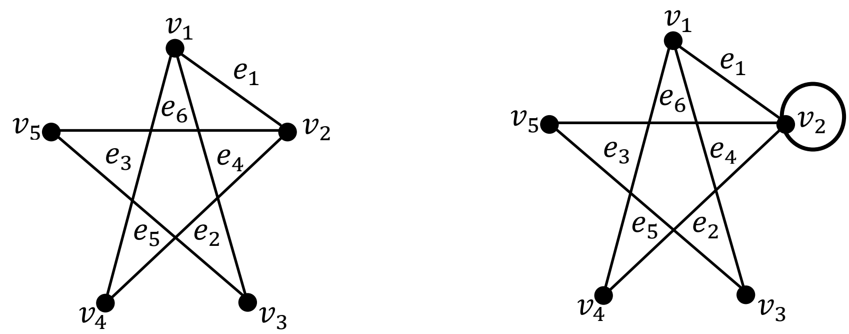
Manfaat dari penelitian ini adalah memberikan informasi mengenai nilai dimensi partisi pada graf hasil identifikasi titik dari graf lengkap dan graf bintang, graf *cycle* dan graf lintasan, graf lengkap dan graf *cycle*.

# BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

## 2.1 Pengertian dan Konsep Graf

*Graf* $G$ didefinisikan sebagai pasangan himpunan $V(G)$ dan $E(G)$ yang dinotasikan $G = (V, E)$ dengan $V(G)$ adalah himpunan titik tak kosong dan $E(G)$ adalah himpunan bagian dari 2-elemen $V$ yang disebut sisi (Chartrand dan Zhang, 2012). Berdasarkan jenisnya, graf digolongkan menjadi dua yaitu graf sederhana dan graf tak sederhana. *Graf sederhana* merupakan graf yang tidak memuat sisi ganda atau *loop*, sedangkan *graf tak sederhana* merupakan graf yang memuat sisi ganda atau *loop*.

Secara geometri, graf $G$ digambarkan dengan noktah atau titik yang dihubungkan dengan garis. Gambar 2.1 adalah contoh graf $G$ dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ sedemikian sehingga sisi yang terbentuk yaitu $e_1 = v_1v_2, e_2 = v_2v_4, e_3 = v_4e_1, e_4 = v_1v_3, e_5 = v_3v_5, e_6 = v_5v_2$. Graf $G$ dikatakan *terhubung* jika terdapat dua titik yang menghubungkan. Berikut merupakan contoh graf terhubung.




a) Graf Terhubung Sederhana b) Graf Terhubung Tak Sederhana

Gambar 2.1 Graf Terhubung

*Order* adalah banyaknya titik pada graf $G$. Gambar 2.1 merupakan graf berorde 5. Graf yang terdiri dari satu titik disebut *graf trivial*. Titik $u$ dan $v$ di graf $G$ dikatakan bertetangga (*adjacent*) apabila ada sisi $e$ yang menghubungkan kedua titik tersebut yaitu $e = (u, v)$. Selanjutnya, sisi $e$ tersebut dikatakan menempel (*incident*) dengan kedua titik yang dihubungkan. Pada Gambar 2.1 titik $v_1$

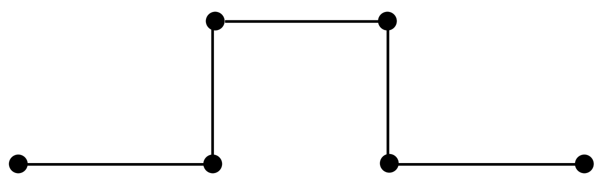
bertetangga dengan titik $v_2, v_3$ dan $v_4$ tetapi tidak bertetangga pada $v_5$. Sisi $e_1$ menempel dengan titik $v_1$ dan $v_2$ tetapi tidak menempel pada $v_3$. Banyaknya sisi yang menempel dengan titik $v$ di graf $G$ disebut derajat dari titik $v$ dan dinotasikan dengan $deg(v)$. Titik yang berderajat satu disebut $daun$. Graf yang setiap titiknya memiliki derajat sama disebut dengan *graf regular*.

*Lintasan* adalah barisan yang diawali dan diakhiri dengan titik dimana unsur-unsurnya saling bergantian antara titik dan sisi, sedemikian sehingga lintasan yang terbentuk yaitu $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$. Lintasan yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut *lintasan tertutup*, sedangkan lintasan yang tidak berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut *lintasan terbuka*. *Jarak* merupakan panjang lintasan terpendek dari titik $u$ ke $v$ di $V(G)$ dan dinotasikan dengan $d(u, v)$.

## 2.2 Kelas-Kelas Graf

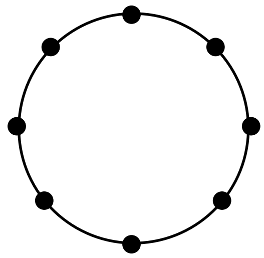
Graf diklasifikasikan menjadi beberapa jenis, namun pada skripsi ini dibahas beberapa graf sederhana yang dibutuhkan pada penelitian ini. Graf sederhana yang akan didefinisikan diantaranya graf lintasan, graf *cycle*, graf lengkap, graf bipartit dan graf bintang.

*Graf lintasan* adalah graf yang memiliki $n$ titik dalam satu lintasan dengan panjang $n-1$ dinotasikan dengan $P_n$. Gambar 2.2 adalah graf lintasan dengan 6 titik.



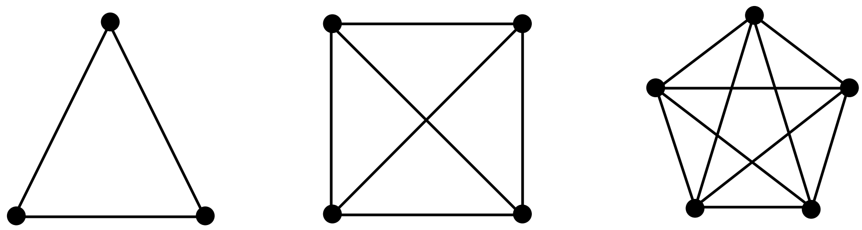
Gambar 2.2 Graf Lintasan $P_6$

*Graf cycle* adalah graf lintasan yang setiap ujungnya dihubungkan oleh sisi, sehingga graf *cycle* memiliki $n$ titik dan $n$ yang dinotasikan dengan $C_n$. Gambar 2.3 adalah graf *cycle* dengan 8 titik.



Gambar 2.3 Graf *Cycle* $C_8$

*Graf lengkap* adalah graf yang setiap titiknya bertetangga dengan setiap titik selain dirinya sendiri. Graf lengkap dengan $n$ titik dinotasikan dengan $K_n$. Selain itu, graf lengkap merupakan graf regular karena setiap titiknya memiliki derajat yang sama yaitu $n-1$. Gambar 2.4 merupakan graf lengkap $K_3, K_4$ dan $K_5$.



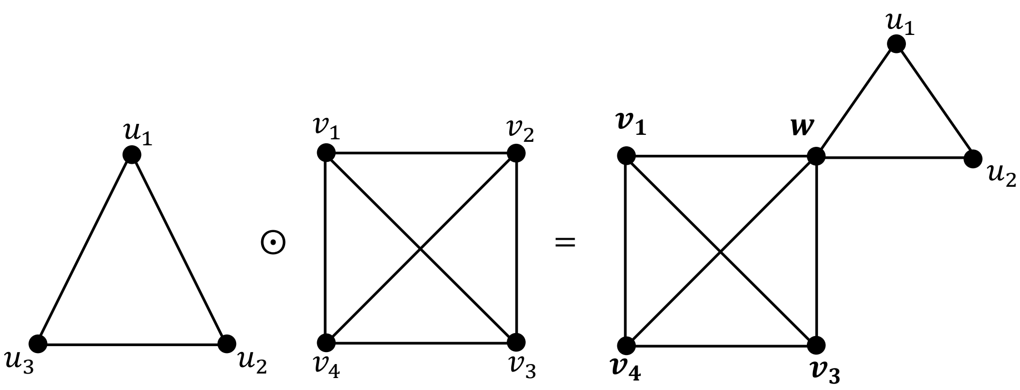
Gambar 2.4 Graf Lengkap $K_3, K_4$ dan $K_5$

*Graf bipartit* adalah graf $G$ yang setiap himpunan titiknya dibagi menjadi dua himpunan bagian $V_1$ dan $V_2$, sedemikian sehingga setiap sisi di $G$ menghubungkan sebuah titik di $V_1$ dan sebuah titik $V_2$. Jika setiap titik di $V_1$ bertetangga dengan setiap titik di $V_2$ maka graf tersebut disebut sebagai *graf bipartit lengkap* yang dinotasikan dengan $K_{m,n}$ ; $m$ adalah banyak titik di $V_1$ dan $n$ banyak titik di $V_2$. Banyaknya sisi dari graf bipartit lengkap yaitu $mn$ dan banyak titiknya adalah $m+n$. Jika $m=1$ maka graf bipartit lengkap $K_{1,n}$ disebut graf bintang (Munir, 2005). Berikut contoh graf bipartit dan graf bintang $K_{1,8}$:

a) Graf Bipartit $K_{m,n}$ b) Graf Bintang $K_{1,8}$

Gambar 2.5 Graf Bipartit

Misalkan $G$ dan $H$ graf dengan $u \in V(G)$ dan $v \in V(H)$. Identifikasi titik graf $G$ dan $H$ pada titik $u$ dan $v$ dinotasikan $(G \odot_{u=v} \mathrm{H})$ adalah graf $G$ dan $H$ yang titik $u$ pada $G$ dilekatkan dengan titik $v$ pada $H$. Dengan demikian graf $(G \odot_{u=v} \mathrm{H})$ mempunyai $(|G| + |H| - 1)$ titik dan $|E(G)| + |V(G)|$ sisi. Berikut adalah contoh graf dari identifikasi titik dari suatu graf $G$dan $H$.




$(G, u_3)$ $(H, v_2)$ $(G \odot_{u_3=v_2} \mathrm{H}, w)$

Gambar 2.6 Graf Identifikasi Titik $(G, u_3)$ dan $(H, v_2)$

Gambar 2.5 menunjukkan bahwa titik yang diidentifikasi adalah $u_3$ dan $v_2$, sehingga banyaknya derajat titik hasil identifikasi yaitu $w$ adalah jumlah dari derajat masing-masing titik hasil identifikasi, sedemikian sehingga:

$$\deg(w) = \deg(u_3) + \deg(v_2)$$

## 2.3 Partisi Himpunan

*Partisi* dari sebuah himpunan $S$ adalah dekomposisi dari $S$ ke dalam subset-subset tak kosong atau *cell* $S_1, S_2, \dots, S_n$ sedemikian sehingga :

a) $S_i \neq \emptyset$ untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$.

b) $S_i \cap S_j = \emptyset$ untuk setiap $i \neq j, i, j = 1,2, \dots, n$.

c) $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n = S$.

Dengan demikian, *cell* dari partisi suatu himpunan adalah saling asing *(disjoint)*. (Wijaya, 2010).

Misalkan $S = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ maka $\{\{1\}, \{2,3,4\}, \{7,8\}, \{5,6\}\}$ adalah salah satu contoh partisi dari $S$. Pada contoh tersebut, himpunan $S$ dibagi menjadi empat *cell* yaitu, $\{1\}, \{2,3,4\}, \{7,8\}$ dan $\{5,6\}$. Jika banyaknya elemen berhingga, maka jumlah partisi yang dapat dibentuk tidak lebih dari $|S|$. Sedangkan $\{\{1,2\}, \{2,3,4\}, \{7,8\}, \{5,6\}\}$ bukan partisi dari $S$ karena 2 menjadi anggota dari kedua *cell*. Demikian juga cell $\{1,2,3,4,5\}$ dan $\{7,8\}$ juga bukan partisi dari $S$ karena 6 bukan anggota dari kedua *cell*.

## 2.4 Dimensi Partisi

Misalkan sebuah graf terhubung $G$ dengan $v \in V(G)$ dan $S$ adalah himpunan bagian dari $V(G)$. Jarak antara $v$ dengan $S$ dinotasikan dengan $\mathrm{d}(v, S)$ didefinisikan sebagai :

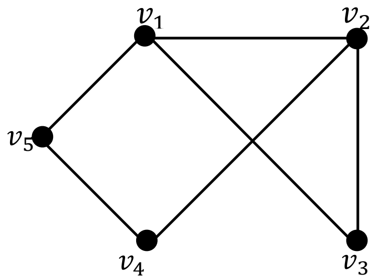
$$\mathrm{d}(v, S) = \min\{d(v, x) \mid x \in S\}.$$

Misalkan $V(G)$ dapat dipartisi menjadi $k$-buah partisi dan $\prod$ merupakan himpunan semua partisi dari $V(G)$ yaitu $\prod = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$. Representasi titik $v$ terhadap $\prod$ didefinisikan sebagai:

$$\mathrm{r}(v|\textstyle\prod) = \left(\mathrm{d}(v, S_1), \mathrm{d}(v, S_2), \dots, \mathrm{d}(v, S_k)\right).$$

Partisi sebuah himpunan dikatakan *partisi pembeda* jika $r(v|\prod)$ untuk setiap $v \in V(G)$ berbeda. Nilai minimum $k$ sedemikian sehingga $S_1, S_2, \dots, S_k$ merupakan partisi pembeda disebut *dimensi partisi* dari $G$ yang dinotasikan dengan $pd(G)$.

Sebagai contoh, misalkan $G$ adalah graf terhubung dengan 5 titik $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan 6 sisi seperti yang ditunjukkan Gambar 2.6. Dimensi partisi dari graf $G$ dapat ditentukan sebagai berikut:




Gambar 2.7 Graf terhubung $G$

Jika $V(G)$ dipartisi menjadi satu partisi, maka jelas bahwa akan terdapat representasi titik yang sama. Selanjutnya jika $V(G)$ dipartisi menjadi dua partisi, misalkan $\prod = \{S_1, S_2\}$ dengan $S_1 = \{v_1, v_3\}$ dan $S_2 = \{v_2, v_4, v_5\}$ sedemikian sehingga representasi titiknya sebagai berikut:

$$r(v_1|\prod) = (0,1)$$
$$r(v_2|\prod) = (1,0)$$
$$r(v_3|\prod) = (0,1)$$
$$r(v_4|\prod) = (2,0)$$
$$r(v_5|\prod) = (1,0)$$

Karena $r(v_1|\prod) = r(v_3|\prod)$ dan $(v_2|\prod) = r(v_5|\prod)$, maka $\prod = \{S_1, S_2\}$ tidak dapat dikatakan partisi pembeda. Untuk $\prod = \{S_1, S_2\}$ yang lainnya, dengan :

$S_1 = \{v_1, v_2\}$ dan $S_2 = \{v_3, v_4, v_5\}$

$S_1 = \{v_1, v_4\}$ dan $S_2 = \{v_2, v_3, v_5\}$

$S_1 = \{v_1, v_5\}$ dan $S_2 = \{v_2, v_3, v_4\}$

$S_1 = \{v_2, v_3\}$ dan $S_2 = \{v_1, v_4, v_5\}$

$S_1 = \{v_4, v_5\}$ dan $S_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$

$S_1 = \{v_1\}$ dan $S_2 = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$S_1 = \{v_2\}$ dan $S_2 = \{v_1, v_3, v_4, v_5\}$

$S_1 = \{v_3\}$ dan $S_2 = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$

$S_1 = \{v_4\}$ dan $S_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_5\}$

Juga akan menghasilkan sedikitnya dua titik dengan representasi yang sama, Oleh karena itu, ambil partisi yang lebih dari dua. Misalkan ambil $\prod = \{S_1, S_2, S_3\}$ dengan $S_1 = \{v_1, v_3\}$, $S_2 = \{v_2, v_4\}$ dan $S_3 = \{v_5\}$ sedemikian sehingga representasi titiknya sebagai berikut:

$$r(v_1|\prod) = (0,1,1)$$
$$r(v_2|\prod) = (1,0,2)$$
$$r(v_3|\prod) = (0,1,2)$$
$$r(v_4|\prod) = (2,1,0)$$

Hasil di atas menunjukkan bahwa representasi titik yang berbeda untuk $\prod = \{S_1, S_2, S_3\}$, maka dimensi partisi dari graf tersebut adalah $pd(G) = 3$.

Berikut adalah teorema-teorema dari dimensi partisi suatu graf yang telah dimukan oleh Chartrand dan Zhang tahun 2000:

**Teorema 2.1** *Misalkan $G$ adalah graf terhubung berorde $n \geq 2$.*

*(i) $pd(G) = 2$ jika dan hanya jika $G = P_n$*

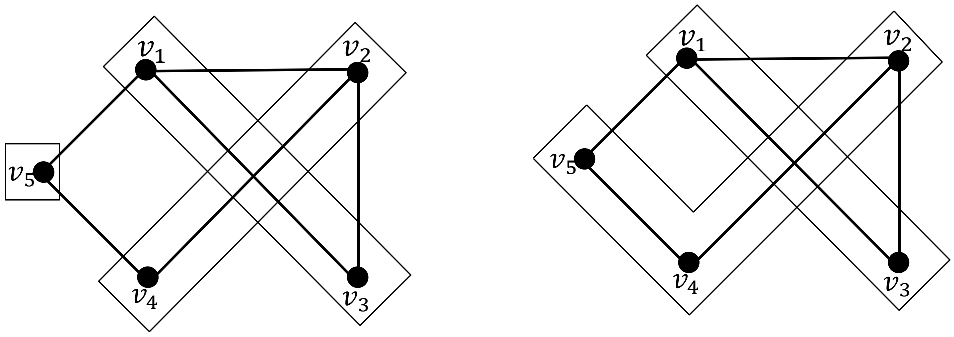
*(ii) $pd(G) = n$ jika dan hanya jika $G = K_n$*

**Teorema 2.2** *Misalkan $G$ adalah graf terhubung berorde $n \geq 3$ maka $pd(G) = n - 1$ jika dan hanya jika $G = K_{1,n}$*

**Akibat 2.3** *Misalkan $G$ adalah graf terhubung yang bukan lintasan dan bukan graf bintang $K_{1,n}$ , maka $3 \leq pd(G) \leq n - 2$.*

**Lema 2.4** *Misalkan $G$ adalah graf terhubung dengan partisi pembeda $\prod$ dari $V(G)$ dan $u, v \in V(G)$. Jika $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$ maka $u$ dan $v$ berada pada elemen partisi yang berbeda dalam $\prod$.*

Berikut adalah graf yang akan dicari dimensi partisinya beserta ilustrasi partisi pembedanya:

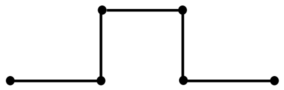
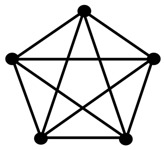
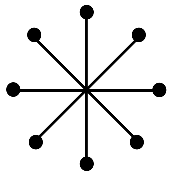
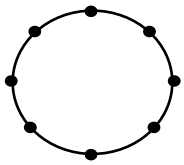
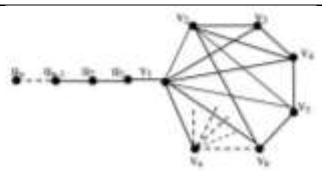



a. $\prod_1 = \{S_1, S_2, S_3\}$ b. $\prod_1 = \{S_1, S_2\}$

Gambar 2.8 Ilustrasi Partisi Pembeda

Gambar 2.8.a mengilustrasikan bahwa setiap titik yang termuat dalam satu kotak yang sama, maka titik-titik tersebut terletak dalam partisi yang sama. Jadi, $\prod_1 = \{S_1, S_2, S_3\}$ dengan $S_1 = \{v_1, v_3\}$, $S_2 = \{v_2, v_4\}$ dan $S_3 = \{v_5\}$ adalah partisi pembeda karena semua titik di $G$ mempunyai representasi titik yang berbeda terhadap $\prod_1$. Partisi $\prod_2$ dengan $\prod_1 = \{S_1, S_2\}$ dengan $S_1 = \{v_1, v_3\}$, $S_2 = \{v_2, v_4, v_5\}$ pada Gambar 2.8.b bukan partisi pembeda karena $r(v_1|\prod) = r(v_3|\prod)$ dan $r(v_2|\prod) = r(v_5|\prod)$. Dengan menggunakan Lema 2.4, untuk menunjukkan bahwa graf $G$ pada Gambar 2.7 tidak memiliki dua partisi pembeda adalah sebagai berikut. Misalkan $u, v,$ w $\in V(G)$ dan $G$ terdiri dari dua partisi yaitu $S_1$ dan $S_2$ dengan $|S_1| = 2$ dan $|S_2| = 3$. Andaikan $u, v \in S_1$ dan $u, v$ memiliki jarak yang sama terhadap $S_i$ ,maka $d(u, S_i) = d(v, S_i)$. Oleh karena itu $r(u, S_i) = r(v, S_i)$, hal ini mengakibatkan kontradiksi dengan pemisalan $\prod$ sebagai partisi pembeda. Oleh karena itu, Gambar 2.8.a telah menunjukkan partisi pembeda dengan $|\prod| = 3$ maka $pd(G) = 3$.

Tabel 2.1 Hasil Penelitian Dimensi Partisi pada Graf Sederhana

| No | Nama Graf | Gambar | Dimensi Partisi | Peneliti | Tahun |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Graf Lintasan ($P_n$) |  | $pd(P_n) = 2$ | Chartrand dan Zhang | 1998 |
| 2. | Graf Lengkap ($K_n$) |  | $pd(K_n) = n$ | Chartrand dan Zhang | 1998 |
| 3. | Graf Bintang ($K_{1,n}$) |  | $pd(K_{1,n}) = n - 1$ | Chartrand dan Zhang | 1998 |
| 4. | Graf Cycle ($C_n$) |  | $pd(C_n) = 3$ | J.Rodrguez-Velzquez | 2013 |
| 5. | Graf Lollipop ($L_{m,n}$) |  | $pd(L_{m,n}) = m$ | Maylinda Purna Kartika Dewi | 2017 |

# BAB 3. METODE PENELITIAN

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai prosedur untuk mendapatkan dimensi partisi dari graf hasil identifikasi titik dari beberapa graf sederhana. Graf hasil identifikasi titik diperoleh dengan mengambil salah satu titik dari graf $G$ dan satu titik pada graf $H$ kemudian mengidentikkan kedua titik tersebut sehingga menghasilkan graf baru. Graf tersebut dinotasikan dengan $G \odot H.$ Prosedur tersebut tediri dari metode penelitian dan langkah-langkah penelitian.

## 3.1 Metodologi

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

a. Metode Induktif

Metode ini digunakan untuk mencari pola dimensi partisi graf yang dimulai dengan contoh $n$ yang minimum kemudian dicari partisinya sehingga menghasilkan nilai minimum $k$ partisi pembeda.

b. Metode Deduktif Aksiomatik

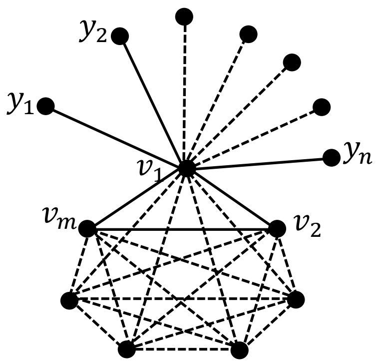
Metode penelitian ini dilakukan menggunakan prinsip-prinsip pembuktian yang berlaku dalam logika matematika dengan menerapkan teorema-teorema yang telah ada untuk menentukan dimensi partisi dari graf yang akan diteltiti.

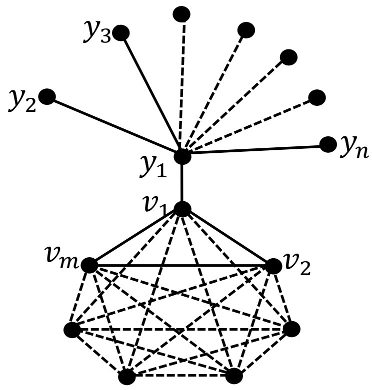
## 3.2 Data Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini berupa graf hasil identifikasi titik dari beberapa graf sederhana diantaranya:

a. Graf Hasil Identifikasi Titik dari Graf Lengkap dan Graf Bintang $(K_m \odot K_{1,n})$

Penotasian titik graf tersebut yaitu$V(K_m \odot K_{1,n}) = \{v_1, v_2, .., v_m, y_1, y_2, .., y_n\}$ dengan $v_i \in V(K_m)$ dan $y_i \in V(K_{1,n})$ diiluastrasikan pada Gambar 3.1.



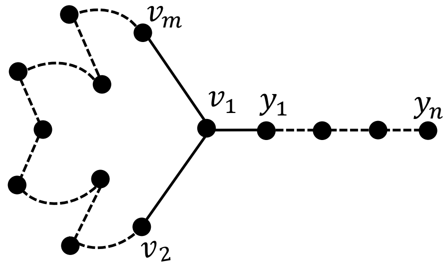




a) Identifikasi pada Pusat Graf Bintang b) Identifikasi pada Daun Graf Bintang

Gambar 3.1 Graf $K_m \odot K_{1,n}$

b. Graf Hasil Identifikasi Titik dari Graf *Cycle* dan Graf Lintasan ($C_m \odot P_n$)

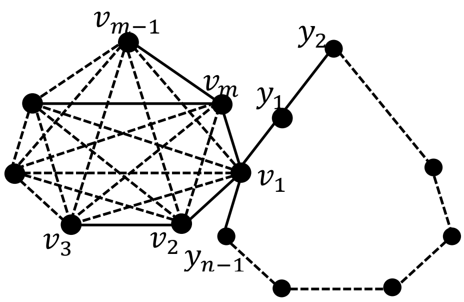
Penotasian titik graf $C_m \odot P_n$ yaitu $V(C_m \odot P_n) = \{v_1, v_2, .., v_m, y_1, , .., y_{n-1}\}$ dengan $v_i \in V(C_m)$ dan $y_i \in V(P_n)$ diiluastrasikan pada Gambar 3.2.




Gambar 3.2 Graf $C_m \odot P_n$

c. Graf Hasil Identifikasi Titik dari Graf Lengkap dan Graf *Cycle* ($K_m \odot C_n$)

Penotasian titik graf $K_m \odot C_n$ yaitu $V(K_m \odot C_n) = \{v_1, v_2, .., v_m, y_1, , .., y_{n-1}\}$ dengan $v_i \in V(K_m)$ dan $y_i \in V(C_n)$ diiluastrasikan pada Gambar 3.3.




Gambar 3.3 Graf $K_m \odot C_n$

## 3.3 Langkah-Langkah Penelitian

Langkah-langkah yang digunakan untuk menentukan dimensi partisi dari graf $G⨀H$ adalah sebagai berikut:

a. Menentukan penotasian titik dari graf $G⨀H$ yaitu $V(G⨀H) = \{v_1, v_2, .., v_m, y_1, y_2, .., y_n\}$ dengan $v_i \in V(G)$ dan $y_i \in V(H)$. Titik hasil identifikasi dinotasikan $v_1$.

b. Mempartisi himpunan titik $V(G⨀H)$ dalam $k$ partisi yaitu $\prod = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$, $S_i \subseteq V(G⨀H)$.

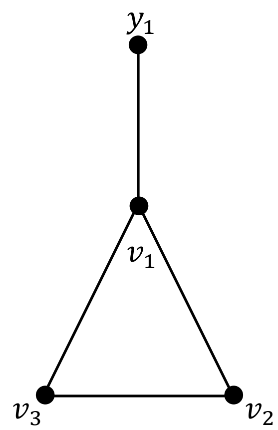
c. Menentukan representasi setiap titik di $V(G⨀H)$ terhadap partisi $\prod$ yaitu $r(v|\prod), \forall v \in V(G⨀H)$

d. Memeriksa apakah $\prod$ menghasilkan representasi titik yang berbeda atau tidak. Jika berbeda, maka $\prod$ merupakan partisi pembeda.

e. Membuktikan dimensi partisi $k \leq pd(G⨀H) \leq k$.

## 3.4 Observasi Penelitian

Pada penelitian ini akan dicari nilai dimensi partisi menggunakan langkah-langkah penelitian. Berikut hasil observasi awal peneliti:



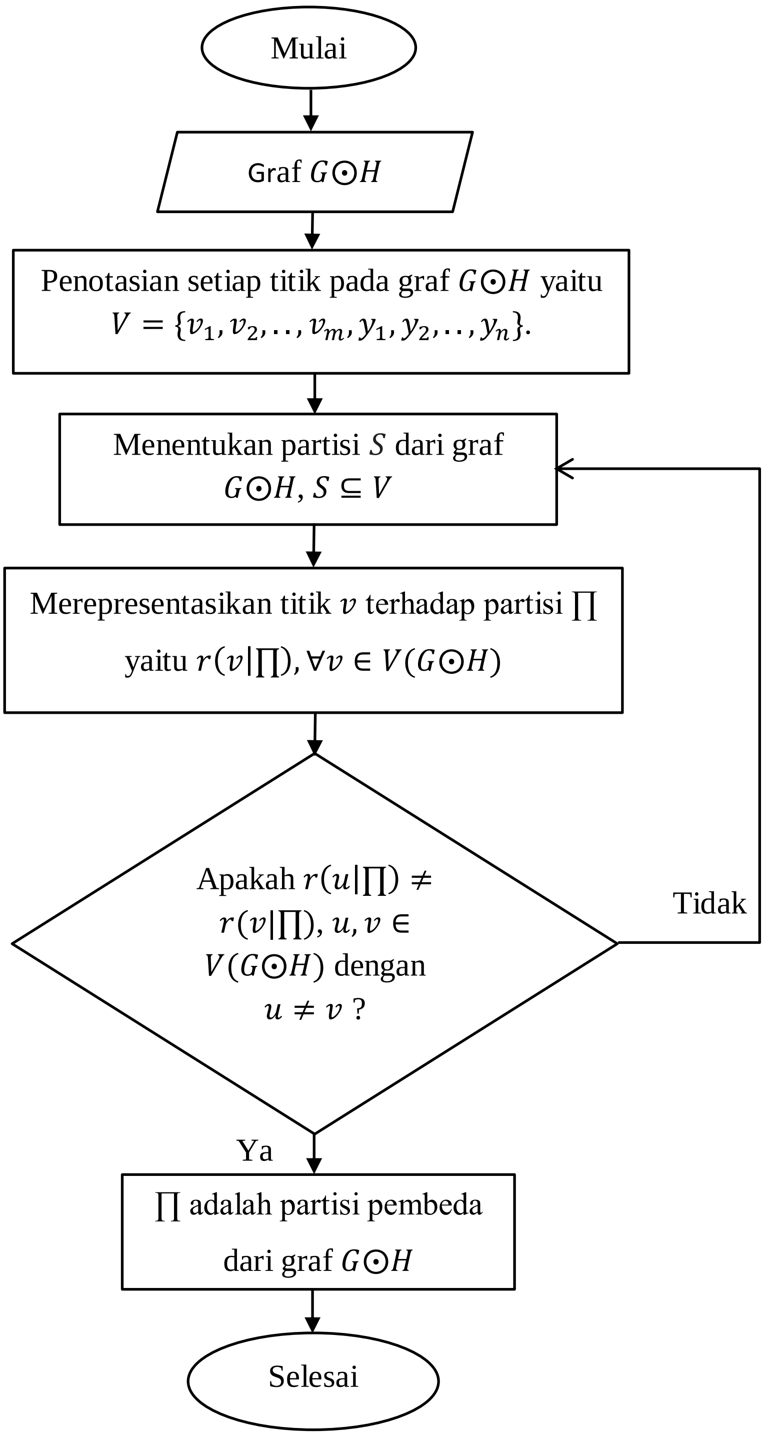

Gambar 3.4 Graf $K_3⨀K_{1,1}$

Graf yang digunakan pada observasi penelitian yaitu graf $K_3⨀K_{1,1}$ dengan penotasian seperti pada Gambar 3.2. Selanjutnya menentukan himpunan pembeda, ambil $\prod = \{S_1, S_2, S_3\}$ dengan $S_1 = \{v_1, y_1\}$, $S_2 = \{v_2\}$, $S_3 = \{v_3\}$. Kemudian merepresentasikan setiap titik terhadap $\prod$, yaitu:

$$r(v_1|\prod) = (0,1,1) \qquad r(v_2|\prod) = (1,0,1)$$

$$r(v_3|\prod) = (1,1,0) \qquad r(y_1|\prod) = (0,2,2)$$

Karena didapat representasi yang berbeda untuk setiap titik, maka $\prod$ merupakan partisi pembeda pada graf $K_3 \odot K_{1,1}$, sehingga didapat $pd(K_3 \odot K_{1,1}) \leq 3$.




Gambar 3.5 Skema Penentuan Partisi Pembeda

Secara umum, langkah–langkah untuk membuktikan dimensi partisi dari suatu graf $G$ adalah sebagai berikut:

a. Membuktikan batas atas $pd(G) \leq k$

Berdasarkan definisi dimensi partisi pada subbab 2.4, untuk menentukan batas atas dimensi partisi pada graf $G$ dapat dilakukan dengan menentukan partisi pembeda $\prod = \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_k\}$ dengan menunjukkan bahwa $r(u|\prod) \neq r(v|\prod)$ untuk setiap $u, v \in V(G)$. Dalam hal ini, penentuan partisi pembeda $\prod$ cukup dengan menunjukkan bahwa representasi setiap titik terhadap partisi pembeda memberikan representasi yang berbeda. Skema penentuan partisi pembeda ditunjukkan pada Gambar 3.5

b. Membuktikan batas bawah $pd(G) \geq k$

Untuk membuktikan batas bawah dimensi partisi pada graf $G$ dilakukan menggunakan metode deduktif aksiomatik. Teorema yang digunakan sebagai dasar penentuan dimensi partisi yaitu Teorema 2.1 yang mengakibatkan $pd(G) \geq 2$ dan $pd(G) \geq n$, Teorema 2.2 yang mengakibatkan $pd(G) \geq n - 1$. Selain itu, lema yang digunakan yaitu Lema 2.4 yang mengakibatkan anggota dari partisi pembeda bernilai minimum.

# BAB 5. PENUTUP

## 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, diperoleh beberapa nilai dimensi partisi pada graf hasil identifikasi titik dari beberapa graf sederhana, diantaranya:

1. Dimensi partisi pada graf hasil identifikasi titik dari graf lengkap dan graf bintang dengan titik identifikasi pada pusat, adalah:

$$pd(K_m \odot K_{1,n}) = \begin{cases} m, & n \leq m \\ n, & n > m \end{cases}$$

2. Dimensi partisi pada graf hasil identifikasi titik dari graf lengkap dan graf bintang dengan titik identifikasi pada daun, adalah:

$$pd(K_m \odot K_{1,n}) = \begin{cases} m, & n \leq m+1 \\ n-1, & n > m+1 \end{cases}$$

3. Dimensi partisi pada graf hasil identifikasi titik dari graf *cycle* dan graf lintasan, adalah:

$$pd(C_m \odot P_n) = 3$$

4. Dimensi partisi pada graf hasil identifikasi titik dari graf lengkap dan graf *cycle*, adalah:

$$pd(K_m \odot C_n) = m$$

## 5.2 Saran

Adapun saran yang perlu diperhatikan untuk penelitian lebih lanjut mengenai dimensi partisi dari graf hasil identifikasi titik adalah:

1. Menentukan dimensi partisi dari graf hasil identifikasi titik untuk beberapa kelas graf sederhana yang lain.
2. Menentukan hasil secara umum untuk dimensi partisi dari graf hasil identifikasi titik untuk sembarang graf.

## DAFTAR PUSTAKA

Chartrand, G. Salehi E, dan Zhang,P. 1998. On the Partition Dimension of Graph. *Aequantiones Math.* 130:157-168.

Chartrand, G. Salehi E, dan Zhang.P. 2000. The Partition Dimension of a Graphs. *Aequantiones Math*. 59:45-54.

Chartrand, G. dan Zhang.P. 2012. *A First Course In Graph Theory*. Boston: Mc Graw-Hill Higher Education.

Dewi, M. P. K. 2017. On the Partition Dimension of a Lollipop Graph and a Generalized Jahangir Graph. *Journal Of Phisycs.* 855:2-3

Munir, R. 2005. *Matematika Diskrit*. Edisi Keempat. Bandung: Informatika Bandung.

Wijaya, K. 2010. *Struktur Aljabar Ring.* Jember: UPT Penerbitan Universitas Jember.