SOLUSI LENGKAP SISTEM EIGEN OPERATOR MATRIKS HERMITIAN DENGAN METODE ANALITIK DAN DIAGONALISASI MATRIKS

SKRIPSI

Oleh :

Nur Aida
NIM 150210102078

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN FISIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MIPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER
2019

SOLUSI LENGKAP SISTEM EIGEN OPERATOR MATRIKS HERMITIAN DENGAN METODE ANALITIK DAN DIAGONALISASI MATRIKS

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Studi Pendidikan Fisika (S1)
dan mencapai gelar Sarjana Pendidikan

Oleh :

Nur Aida
NIM 150210102078

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN FISIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MIPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER
2019

PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah SWT yang Maha Pengasih dan Maha Penyayang, serta mengucap sholawat dan salam kepada Nabi Muhammad SAW, skripsi ini saya persembahkan kepada:

1. Kedua orang tua yang saya sayangi, Bapak Asid dan Ibu Tasri, terima kasih atas segala do'a, untaian dzikir, motivasi, nasihat, kasih sayang, serta pengorbanan yang telah diberikan kepada saya selama ini;
2. Guru-guru sejak Taman Kanak-kanak hingga Perguruan Tinggi, terima ksih telah memberikan ilmu serta bimbingan dengan penuh kesabaran dan keikhlasan;
3. Almamater yang saya banggakan, Program Studi Pendidikan Fisika Jurusan Pendidikan MIPA Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

MOTTO

Dia (Allah) mengetahui apa yang di hadapan mereka dan apa yang di belakang mereka; dan hanya kepada Allah dikembalikan segala urusan. Wahai orang-orang yang beriman! Rukuklah, sujudlah, dan sembahlah Tuhanmu; dan berbuatlah kebaikan, agar kamu beruntung.

(*terjemahan Surat Al-Hajj ayat 76-77*)*)

*) Lajnah Pentashih Mushaf Al-Qur'an Departemen Agama Republik Indonesia. 2007. *Al-Qur'an Dan Terjemahannya Special for Woman*. Jakarta: Sy9ma Creative Media Corp.

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Nur Aida

NIM : 150210102078

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa karya ilmiah yang berjudul "Solusi Lengkap Sistem Eigen Operator Matriks Hermitian dengan Metode Analitik dan Diagonalisasi Matriks" adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi mana pun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak mana pun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, April 2019
Yang menyatakan,

Nur Aida
NIM 150210102078

SKRIPSI

SOLUSI LENGKAP SISTEM EIGEN OPERATOR MATRIKS HERMITIAN DENGAN METODE ANALITIK DAN DIAGONALISASI MATRIKS

Oleh :

Nur Aida
NIM 150210102078

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama	: Drs. Bambang Supriadi, M.Sc.
Dosen Pembimbing Anggota	: Dr. Yushardi, S.Si., M.Si.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul "Solusi Lengkap Sistem Eigen Operator Matriks Hermitian dengan Metode Analitik dan Diagonalisasi Matriks" telah diuji dan disahkan pada:

Hari, tanggal : Selasa, 02 April 2019

Tempat : Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember

Tim Penguji:

Ketua,	Sekretaris,
Drs. Bambang Supriadi, M.Sc. NIP. 19680710 199302 1 00 1	Dr. Yushardi, S.Si., M.Si. NIP. 19650420 199512 1 00 1
Anggota I,	Anggota II,
Drs. Sri Handono Budi Prastowo, M.Si. NIP. 19580318 198503 1 00 4	Drs. Albertus Djoko Lesmono, M.Si. NIP. 19641230 199302 1 00 1

Mengesahkan,
Dekan,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.
NIP. 19680802 199303 1 00 4

RINGKASAN

Solusi Lengkap Sistem Eigen Operator Matriks Hermitian dengan Metode Analitik dan Diagonalisasi Matriks; Nur Aida; 150210102078; 48 Halaman; Program Studi Pendidikan Fisika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember.

Operator matriks Hermitian adalah salah satu bentuk operator atau instruksi berupa matriks yang mempunyai sifat Hermitian, dengan syarat utama berupa operator matriks yang digunakan merupakan matriks bujur sangkar (matriks dengan ordo n × n) yang mempunyai nilai determinan yang sama dengan nol. Penyelesaian terhadap persoalan eigen operator matriks hermitian menghasilkan nilai sistem eigen, yaitu suatu bentuk penyelesaian akhir berupa kumpulan dari beberapa macam komponen variabel, diantaranya nilai eigen dan fungsi eigen atau vektor eigen. Tujuan utama dari penelitian ini adalah menentukan solusi lengkap sistem eigen operator matriks hermitian dengan metode analitik dan diagonalisasi matriks ordo $n \times n$.

Jenis penelitian ini adalah *basic research* pada bidang fisika teori berupa pengembangan teori mekanika kuantum. Penelitian ini dilakukan di Laboratorium Fisika Lanjut, Program Studi Pendidikan Fisika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pengetahuan, Universitas Jember. Sumber data yang digunakan dalam penelitian ini bersumber dari buku, jurnal, dan internet tentang persoalan eigen, operator matriks hermitian, metode analitik, metode diagonalisasi matriks, dan sistem eigen. Metode penyelesaian persoalan eigen dalam penelitian ini yaitu menggunakan metode analitik dan diagonalisasi matriks terhadap operator matriks hermitian berordo 2×2, ordo 3×3, dan ordo 4×4 dengan bilangan penyusunnya berupa bilangan riil rasional. Setelah didapatkan solusi lengkap sistem eigen, kemudian hasilnya dianalisis terhadap hasil yang dijadikan sebagai validasi dan dilakukan pembuktian. Desain penelitian yang digunakan diantaranya tahap persiapan, tahap pengembangan teori, tahap hasil pengembangan teori, tahap validasi hasil pengembangan teori, tahap pembahasan, dan tahap kesimpulan.

Berdasarkan hasil penelitian, setiap persoalan eigen operator matriks hermitian mempunyai penyelesaian nilai eigen dan fungsi eigen/vektor eigen sebanyak jumlah ordo operator matriks, dimana dari satu nilai eigen dan fungsi eigen/vektor eigen membentuk satu penyelesaian sistem eigen. Metode analitik lebih efisien digunakan dalam penyelesaian persoalan eigen operator matriks hermitian berordo 2×2, sedangkan metode diagonalisasi matriks lebih efisien digunakan dalam penyelesaan persoalan eigen operator matriks hermitian berordo 3×3 atau lebih. Penyelesaian terhadap persoalan eigen operator matriks hermitian menggunakan metode analitik dengan ordo matriks yang semakin besar mempunyai prosedur penyelesaian yang lebih panjang dan kompleks jika dibandingkan dengan metode diagonalisasi matriks.

PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Allah SWT. atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Solusi Lengkap Sistem Eigen Operator Matriks Hermitian dengan Metode Analitik dan Diagonalisasi Matriks”. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada program studi Pendidikan Fisika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D., selaku Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember yang telah memberikan fasilitas sehingga skripsi ini dapat selesai;
2. Dr. Dwi Wahyuni, M.Kes., selaku Ketua Jurusan Pendidikan MIPA yang telah memberikan fasilitas sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini;
3. Drs. Trapsilo Prihandono, M.Si., selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah membimbing selama penulis menjadi mahasiswa;
4. Drs. Bambang Supriadi, M.Sc., selaku Dosen Pembimbing Utama dan Dr. Yushardi, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu dan pikiran serta perhatiannya guna memberikan bimbingan dan pengarahan demi terselesaikannya penulisan skripsi ini;
5. Drs. Sri Handono Budi Prastowo, M.Si., selaku Dosen Penguji Utama dan Drs. Albertus Djoko Lesmono, M.Si., selaku Dosen Penguji Anggota yang telah meluangkan waktu dan pikirannya guna memberikan pengarahan demi terselesaikannya penulisan skripsi ini;
6. Drs. Alex Harijanto, M.Si., selaku Kepala Laboratorium Fisika yang telah memberikan ijin tempat sehingga penelitian saya dapat terselesaikan;
7. Ayahanda Asid, Ibunda Tasri, Kakak Mustakim, Kakak Ipar Sri Wahyu Ningsih, dan anggota keluarga lainnya yang telah memberikan dorongan dan doanya demi terselesaikannya skripsi ini;

8. Pak Zain, Vela, Fitroh, Tutut, Melvin, Rico, dan Huda yang selalu memberikan do’a dan semangat dalam berdiskusi bersama tentang mekanika kuantum;
9. Bunda Hartatik, Selly, Faizah, Nelly, Linda, Uswatun, Firdaus, Mila, A’an, Yeni, Khaluluk, Henik, keluarga Kos Orange, keluarga Pendidikan Fisika 2015, dan keluarga KSR PMI Unit Universitas Jember yang telah memberikan bantuan, dukungan, dan selalu melatih kesabaran kepada penulis;
10. Serta pihak-pihak lain yang tidak dapat disebutkan satu-persatu yang telah memberikan kontribusi dan bantuannya demi kelancaran pengerjaan skripsi ini.

Penulis juga menerima kritik dan saran dari seua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, April 2019
Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR LAMPIRAN

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Secara umum, Fisika digolongkan menjadi 2, yaitu Fisika Klasik dan Fisika Kuantum. Fisika Klasik lebih banyak membahas tentang Mekanika Klasik, Termodinamika, Elektrodinamika, dan sebagainya. Teori Fisika Klasik tersusun dari pengamatan dan peristiwa yang bersifat makroskopis dengan asumsi bahwa partikel dan gelombang adalah dua pokok bahasan yang saling terpisah. Dalam perkembangannya, teori Fisika Klasik mengalami krisis akibat adanya beberapa penemuan dan peristiwa yang tidak dapat dijelaskan oleh teori Fisika Klasik (Purwanto, 2016:3). Beberapa penemuan dan peristiwa yang melatarbelakangi kegagalan Mekanika Klasik adalah peristiwa radiasi benda hitam (spektrum radiasi termal dari suatu benda pada suhu yang sangat tinggi), peristiwa efek fotolistrik (peristiwa pemancaran elektron dari permukaan logam yang disinari cahaya), dan efek compton (peristiwa hamburan cahaya oleh elektron). Pada tahun 1924, Louis de Broglie mengusulkan konsep dualisme gelombang sebagai bentuk penyelenyesaian dari permasalahan Fisika Klasik (Shiff, 1968:3). Hal inilah yang menjadi awal dari munculnya teori Fisika Kuantum. Teori Fisika Kuantum tersusun dari pengamatan dan peristiwa yang bersifat mikroskopis, yang lebih banyak membahas mengenai Fisika Atom, Fisika Inti, Mekanika Kuantum, Teori Relativitas Einstein, dan sebagainya.

Definisi, hukum, prinsip, konsep, dan fakta dalam kajian Fisika Klasik maupun Fisika Kuantum lebih banyak disajikan dalam bentuk hubungan matematis, sedangkan pemahaman tentang fenomena Fisika dapat ditunjukkan melalui pendekatan secara empiris menggunakan percobaan dan juga melalui pendekatan secara matematis. Pendekatan secara empiris melalui percobaan, umumnya dilakukan untuk memperoleh pemahaman konsep Fisika Klasik. Salah satu contohnya adalah melakukan percobaan konstanta pegas untuk memahami fenomena Fisika bahasan Elastisitas. Pendekatan secara matematis, umumnya dilakukan untuk memperoleh pemahaman konsep Fisika Kuantum. Salah satu contohnya adalah analisis terhadap kasus-kasus yang disajikan dalam Mekanika

Kuantum, seperti perhitungan analitik untuk menyelesaikan persoalan eigen. Hal ini membutuhkan pemahaman Matematika secara mendalam, dengan harapan simbol-simbol dan konsep-konsep yang cenderung matematis tidak memberikan kesulitan yang berarti (Sugiyono, 2016: 7).

Persoalan eigen dalam Fisika mencakup operator, nilai eigen, dan fungsi eigen. Salah satu landasan dasar dalam mempelajari sistem eigen adalah vektor. Vektor dalam suatu operator dapat berbentuk vektor kolom dan vektor baris yang membentuk suatu matriks (Sugiyono, 2016:11). Matriks dapat bertindak sebagai salah satu bentuk operator, yaitu suatu bentuk instruksi matematis yang mampu merubah bentuk suatu fungsi menjadi fungsi lain, akibat mengenai fungsi tersebut. Operator yang digunakan untuk menyelesaikan persoalan eigen dalam hal ini disebut operator matriks hermitian (Purwanto, 2016:121).

Penentuan solusi lengkap dari persoalan eigen operator matriks hermitian menggunakan persamaan umum Eigen (Sugiyono, 2016:24-27). Penyelesaian persoalan eigen dalam Fisika Kuantum tidak dapat dikatakan mudah, karena dalam penyelesaiannya membutuhkan prosedur yang rumit dengan aturan-aturan tertentu agar didapatkan solusi yang diinginkan. Terdapat berbagai metode untuk menyelesaikan solusi lengkap sistem eigen. Pertama, metode kuasa invers, metode ini cenderung digunakan apabila operator matriksnya berupa matriks simetris negatif. Kekurangan dari metode ini adalah akan diperoleh nilai galat (nilai error) yang besar ketika matriks yang digunakan berupa matriks simetris positif (Andriani, 2011:12). Kedua, metode pangkat invers, metode ini cenderung digunakan apabila operator matriksnya berupa himpunan bilangan dengan nilai imajiner (Aryani & Humairoh, 2015:444). Ketiga, metode pangkat berbantuan software, metode ini dapat digunakan untuk mendapatkan nilai eigen secara lebih cepat. Namun kekurangan dari metode ini adalah tergantung nilai error (nilai galat) yang didapatkan, semakin kecil nilai error maka iterasinya akan semakin banyak yang menyebabkan penyebaran datanya semakin melebar, sedangkan apabila nilai error besar maka data yang didapatkan menjadi semakin tidak valid (Chandra & Kusniati, 2016:36). Selain ketiga metode di atas, terdapat metode analitik dan metode diagonalisasi yang lebih umum digunakan dalam menyelesaikan persoalan eigen. Kelebihan penggunaan metode analitik dan metode diagonalisai apabila dibandingkan dengan metode sebelumnya adalah metode penyelesaiannya dilakukan melalui langkah-langkah perhitungan yang sistematis, meskipun prosesnya panjang dan rumit, namun memberikan solusi akhir berupa nilai eksak (Hasan, 2015:2).

Persamaan umum Schrodinger adalah salah satu permasalahan yang berkaitan dengan nilai eigen (Onate *et al.*, 2017:339). Persamaan Schrodinger biasanya digunakan untuk menggambarkan suatu keadaan yang tidak dapat dijelaskan pada Mekanika Klasik dan dapat digunakan untuk menyelesaikan berbagai persoalan yang sifatnya mikroskopis (Rahmayani *et al.*, 2014:17). Persamaan Schrodinger menjadi landasan dasar dalam Mekanika Kuantum (Supriadi *et al.*, 2017). Ada kalanya perolehan nilai energi E merupakan bentuk dari nilai eigen, sedangkan untuk fungsi gelombangnya menggambarkan fungsi eigen dan operator dari fungsi eigen. Berdasarkan karakteristik umum dari fungsi gelombangnya, persamaan Schrodinger digolongkan menjadi 2 yaitu persamaan Schrodinger bergantung waktu (gayut waktu) dan persamaan Schrodinger tak bergantung waktu (bebas waktu atau dalam keadaan tunak) (Supriadi *et al.*, 2018:1).

Pada penelitian sebelumnya, terdapat beberapa penelitian yang berkaitan dengan sistem eigen operator matriks hermitian, antara lain: Nurhasimah (2013) menunjukkan bahwa penyelesaian terhadap persoalan matriks hermitian ordo 3×3 dapat diselesaikan dengan metode diagonalisasi matriks. Penyelesaian akhirnya berupa pemaparan dari matriks diagonal dengan nilai diagonalisasinya berupa perolehan nilai eigen; Ning *et al.* (2010) tentang *Incremental Spectral Clustering by Efficiently Updating the Eigen System* menyimpulkan bahwa suatu matriks atau suatu vektor dapat mempengaruhi hasil dari sistem nilai eigen; dan Sari (2015) menyimpulkan bahwa metode diagonalisai matriks dapat menyelesaikan persoalan eigen operator matriks tridiagonal (berordo 3×3) dengan hasil berupa perolehan nilai eigen dan vektor eigen.

Konsep operator hermitian dan sistem eigen mampu memberikan kontribusi besar pada perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi. Dalam bidang ilmu pengetahuan, pendekatan distribusi operator hermitian sangat membantu dalam mempelajari *quantum tunneling* (Maji, 2016:1). Dalam bidang teknologi, metode diagonalisasi pada operator matriks hermitian memberikan manfaat sebagai pengamanan pesan rahasia (Nurhasimah, 2013:1). Selain itu, pengaplikasian matriks dalam kehidupan sehari-hari adalah untuk mengetahui adanya perbedaan genotip dari seseorang, menganalisis sumber suara, dan memerankan peran dalam proses kerja dari sistem tenaga listrik PSS (*Power System Stabilizier*).

Fokus utama kajian dan pembaharuan dalam penelitian ini adalah penggunaan 2 macam metode yang berbeda dalam menyelesaikan persoalan eigen, yaitu metode analitik dan metode diagonalisasi matriks. Kelebihan dari penelitian ini adalah hasil akhir dari penelitian ini, yaitu berupa pemaparan solusi lengkap sistem eigen berupa nilai eigen dan fungsi eigen atau vektor eigen. Hal ini menjadi salah satu kelebihan dari penelitian ini karena penelitian sebelumnya baru sampai pada penentuan nilai eigen saja, seperti yang telah dilakukan oleh Sari (2015). Selain itu, pada penelitian ini akan digunakan matriks dengan ordo 2×2, ordo 3×3, dan ordo 4×4. Penerapan jumlah ordo yang semakin besar akan membutuhkan perhitungan yang semakin kompleks dan rumit.

Berdasarkan uraian tentang perkembangan ilmu fisika, kaitan antara matematika dan fisika dalam mekanika kuantum, pengenalan matriks, operator matriks hermitian, dan pemaparan mengenai penelitian sebelum-sebelumnya, sehingga perlu adanya penelitian lebih lanjut mengenai penyelesaian sistem eigen operator matriks hermite dengan judul *Solusi Lengkap Sistem Eigen Operator Matriks Hermitian dengan Metode Analitik dan Diagonalisasi Matriks*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan, maka dapat dirumuskan suatu permasalahan, yaitu: Bagaimana solusi lengkap sistem eigen operator matriks hermitian dengan metode analitik dan diagonalisasi matriks ordo $n \times n$?

1.3 Tujuan

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah menentukan solusi lengkap sistem eigen operator matriks hermitian dengan metode analitik dan diagonalisasi matriks ordo $n \times n$.

1.4 Batasan Masalah

Adapun batasan-batasan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

a. Operator yang digunakan berupa operator matriks hermitian.
b. Entri-entri bilangan penyusun operator matriks hermitian yang digunakan berupa bilangan bebas riil rasional.
c. Penggunaan angka nol hanya pada diagonal utama atau diagonal sekunder saja, tidak pada keduanya.
d. Hasil diskriminan matriks bernilai lebih dari nol.
e. Metode penyelesaian yang digunakan fokus pada metode analitik dan metode diagonalisasi matriks.
f. Ordo matriks yang digunakan adalah matriks ordo 2×2, 3×3, dan 4×4.

1.5 Manfaat

Manfaat yang dapat diperoleh dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

a. Bagi peneliti, dapat menambah wawasan, pengetahuan, dan pengalaman tentang Mekanika Kuantum dan Fisika Kuantum tentang solusi lengkap terhadap operator matriks hermitian dengan metode penyelesaian yang lebih dari satu, selain itu dapat menjadi acuan dan pertimbangan untuk melakukan eksperimen dan pengembangan dengan tema yang serupa di masa depan.
b. Bagi Pembaca, dapat menjadi sumber belajar dalam mempelajari Fisika Kuantum dan Mekanika Kuantum pokok bahasan solusi lengkap sistem eigen dengan 2 metode penyelesaian yang berbeda dan dapat menjadi referensi serta acuan untuk melakukan penelitian lebih lanjut tentang tema yang serupa.
c. Bagi Lembaga, dapat memberikan tambahan referensi untuk kegiatan pembelajaran di perkuliahan tentang operator matriks hermitian dan sistem eigen.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persoalan Eigen

Operator Q yang bekerja pada fungsi φ akan berlaku persamaan eigen sebagai berikut.

$$Q\varphi = a\varphi \tag{2.1}$$

dengan a adalah bilangan dan φ adalah suatu fungsi, masing-masing disebut sebagai nilai eigen dan fungsi eigen dari operator Q. Apabila hanya terdapat satu buah fungsi eigen untuk setiap satu buah nilai eigen, yaitu

$$\begin{aligned} Q\varphi &= a\varphi \\ Q\psi &= b\psi \end{aligned} \tag{2.2}$$

dengan $a \neq b$ dan $\varphi \neq \psi$, maka sistemnya dapat dikatakan sebagai sistem non-degenerasi. Sedangkan apabila terdapat lebih dari satu buah fungsi eigen untuk satu buah nilai eigen, yaitu

$$\begin{aligned} Q\varphi &= a\varphi \\ Q\psi &= a\psi \end{aligned} \tag{2.3}$$

maka sistemnya dikatakan sebagai sistem degenerasi, meskipun $\varphi \neq \psi$. φ dan ψ yang merupakan fungsi eigen degenerasi, sebagaimana persamaan (2.3), akan mempunyai kombinasi linier berupa fungsi eigen seperti pada persamaan (2.4)

$$\begin{aligned} Q\,(c_1\varphi + c_2\emptyset) &= c_1 Q\varphi + c_2 Q\emptyset \\ &= c_1 a\varphi + c_2 a\emptyset \\ &= a(c_1\varphi + c_2\emptyset) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Sehingga untuk setiap nilai eigen degenerasinya terdapat tak hingga fungsi eigen.

Terdapat suatu kasus dalam persoalan eigen yang mana didapatkan nilai eigen b riil.

$$b^* = b \tag{2.5}$$

Atau

$$b^* - b = 0 \tag{2.6}$$

Persamaan (2.5) dan (2.6) berlaku dengan adanya suatu pertidaksamaan $(\psi, \psi) \geq 0$, yang secara umum dituliskan sebagai berikut.

$$\int \varphi_n{}^* \varphi_n \, dv = (\varphi_n, \varphi_n) \neq 0 \tag{2.7}$$

Formulasi tersebut didapatkan dari perhitungan berikut.

$$
\begin{aligned}
0 &= \int (b\varphi_n)^* \, \varphi_n \, dv - \int \varphi_n{}^* b\varphi_n \, dv \\
&= \int (b^* \varphi_n{}^*)\varphi_n \, dv - \int \varphi_n{}^* b\varphi_n \, dv \\
&= (b^* - b) \int \varphi_n{}^* \varphi_n \, dv \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Dengan menggunakan persamaan $(H\varphi_m, \varphi_n) = (\varphi_m, H\varphi_n)$ dan dari dua persamaan eigen untuk φ_m, φ_n serta nilai eigen riil dari H, maka

$$(H\varphi_m, \varphi_n) = a(\varphi_m, \varphi_n)$$

$$(\varphi_m, H\varphi_n) = b(\varphi_m, \varphi_n)$$

Atau

$$(a - b)(\varphi_m, \varphi_n) = 0$$

Karena $a \neq b$ untuk $m \neq n$ maka

$$(\varphi_m, \varphi_n) = 0$$

Karena itu, berlaku persamaan (2.8) yang menunjukkan φ_m, φ_n ortogonal.

$$(\varphi_m, \varphi_n) = c\delta_{mn} \qquad (2.8)$$

2.1.1 Nilai dan Fungsi Eigen

Fungsi hasil operasi suatu operator dapat berupa kelipatan konstanta dari fungsi asalnya, atau dapat dituliskan dalam persamaan berikut.

$$\hat{Q}\psi\,(\vec{r}, t) = \lambda\psi(\vec{r}, t) \qquad (2.9)$$

Pada kasus ini, $\psi(\vec{r}, t)$ disebut fungsi eigen (*eigen-function* atau fungsi karakteristik), dan λ disebut nilai eigen (*eigen-value* atau nilai karakteristik) dari operator $\hat{Q}$ (Sugiyono, 2016:24). Misalkan operator $\hat{Q} = d/dx$ maka nilai eigen dari sebuah fungsi $\psi\,(x) = a\exp(\lambda x)$ adalah (dengan catatan bahwa λ dan a konstan):

$$
\begin{aligned}
(\lambda\psi\,(x)) &= \lambda[a \exp(\lambda x)\,] \\
&= \lambda\psi\,(x)
\end{aligned}
$$

Pada kasus tersebut, λ adalah nilai eigen operator d/dx yang berhubungan dengan fungsi eigen $ae^{\lambda x}$.

Sebuah fungsi eigen dapat memiliki nilai real atau nilai kompleks (mengandung bilangan imajiner). Persamaan $\hat{Q}\psi\,(\vec{r},t) = \lambda\psi(\vec{r},t)$ disebut persamaan yang mengandung fungsi eigen dari operator $\hat{Q}$. Suatu operator dapat memiliki beberapa fungsi eigen dengan nilai eigennya masing-masing, sehingga dapat ditulis persamaan:

$$\hat{Q}\psi_n(\vec{r},t) = \lambda_n\psi_n(\vec{r},t) \tag{2.10}$$

Jika fungsi tersebut berdegenerasi (*degenerate*), maka fungsi tersebut dapat dituliskan dalam bentuk umum, yaitu:

$$\psi = \sum_n \lambda_n\psi_n(\vec{r},t) \tag{2.11}$$

Kombinasi linier atau penjumlahan fungsi gelombang (atau keadaan) yang merupakan sebuah fungsi gelombang atau keadaan. Beberapa fungsi gelombang yang dipadukan akan menghasilkan satu fungsi gelombang tunggal.

Pada beberapa kasus, sering dijumpai penerapan matriks untuk persoalan fungsi eigen dan nilai eigen, yang memenuhi persamaan:

$$Q\psi = \lambda\psi \tag{2.12}$$

Pada persamaan (2.12), Q adalah matriks bujur sangkar dan λ adalah bilangan saklar. Untuk solusi non-trivial yaitu $\psi \neq 0$, harga λ yang memenuhi persamaan itu adalah nilai eigen, atau nilai karakteristik dari matriks Q dan solusi yang bersesuaian dengan persamaan yang diberikan $Q\psi = \lambda\psi$ disebut vektor eigen atau vektor karakteristik dari Q.

Jika persamaan (2.12) dinyatakan dalam bentuk sistem persamaan yang terpisah, maka diperoleh matriks:

$$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}$$

Matriks di atas dapat dijabarkan menjadi persamaan:

$$q_{11}\psi_1 + q_{12}\psi_2 = \lambda\psi_1 \tag{2.13}$$

$$q_{21}\psi_1 + q_{22}\psi_2 = \lambda\psi_2 \tag{2.14}$$

Jika ruas kanan dipindahkan ke ruas kiri, maka persamaan (2.13) dan (2.14) menjadi:

$$(q_{11} - \lambda)\psi_1 + q_{12}\psi_2 = 0 \tag{2.15}$$

$$q_{21}\psi_1 + (q_{22} - \lambda)\psi_2 = 0 \tag{2.16}$$

Dari persamaan (2.15) dan (2.16) kemudian ditulis dalam bentuk susunan matriks sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} (q_{11} - \lambda) & a_{12} \\ q_{21} & (a_{22} - \lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Persamaan (2.12) berubah menjadi $Q\psi - \lambda\psi = 0$ atau $(Q - \lambda I)\psi = 0$. Dalam kasus seperti ini, perlu adamya penyisipan matriks satuan ke dalam persamaannya, karena matriks hanya dapat dikurangi dengan matriks lagi. Agar sistem persamaan linier homogen mempunyai solusi yang memadai, maka haruslah $|Q - \lambda I| = 0$. $|Q - \lambda I|$ disebut dengan determinan karakteristik dari operator Q dan $|Q - \lambda I| = 0$ disebut dengan persamaan karakteristiknya. Penjabaran determinan-determinan tersebut akan menghasilkan sebuah polinomial berderajat n dan pemecahan persamaan karakteristiknya memberikan harga λ yang merupakan nilai eigen dari operator Q (Sani dan Kadri, 2017:107).

2.1.2 Vektor Eigen

Vektor eigen merupakan suatu bentuk vektor kolom yang diperoleh dari suatu matriks yang berordo $n \times n$ berdasarkan perolehan nilai eigen (Anton dan Rorres, 2004). Pada persamaan (2.12), nilai ψ mengandung adanya vektor eigen. Vektor eigen mempunyai peran yang sama penting dalam proses diagonalisasi matriks. Sebuah matriks yang berbentuk bujur sangkar dapat memiliki vektor eigen lebih dari satu, tergantung dari seberapa banyak komponen diagonalnya. Matriks dengan ordo 2×2 mempunyai komponen diagonal sebanyak dua, dan mempunyai vektor eigen dari mariks ini juga sebanyak dua. Oleh karena itu, matriks dengan ordo $n \times n$ akan mempunyai vektor eigen sebanyak n (Sugiyono, 2016:28).

2.2 Operator

Operator merupakan suatu bentuk instruksi matematis yang mampu merubah bentuk suatu fungsi menjadi fungsi lain, akibat dikenakannya operator pada fungsi tersebut (Purwanto, 2016:110). Operator biasanya dilambangan dalam bentuk huruf kapital. Kegunaan suatu operator adalah sebagai bentuk representasi variabel dinamis (*observable*) dalam mekanika kuantum. Variabel dinamis (*observable*) dalam mekanika kuantum dituliskan dalam bentuk operasi matematis, sedangkan dalam mekanika klasik dituliskan dalam bentuk suatu fungsi (Juwono, 2017:131). Operator eigen, operator hermitian, dan operator matriks adalah beberapa operator yang ada dalam mekanika kuantum.

2.2.1 Operator Eigen

Persoalan eigen yang diformulasikan dalam persamaan (2.12) memberikan penjelasan bahwa di dalamnya tersusun atas operator eigen, nilai eigen, dan fungsi eigen (Sani dan Kadri, 2017). Operator eigen disimbolkan dengan menggunakan huruf kapital. Operator eigen yang digunakan dalam sistem eigen dapat berupa operator sembarang, misal operator hermitian, operator matriks, maupun operator lainnya. Melalui operator eigen, nilai eigen dan fungsi eigen ternormalisasi atau vektor eigen dapat diselesaikan, sehingga didapatkan penyelesaian akhir dari persoalan eigen.

2.2.2 Operator Hermitian

Setiap operator linier $\hat{Q}$ akan mempunyai konjugat hermitian berupa $\hat{Z}$, sehingga berlaku persamaan (2.17)

$$\int \psi^*(\vec{r},t)\hat{Q}\Phi\,(\vec{r},t)d\tau = \int \left(\hat{Z}\psi(\vec{r},t)\right)^* \Phi\,(\vec{r},t) \tag{2.17}$$

$\psi(\vec{r},t)$ dan $\Phi(\vec{r},t)$ adalah fungsi-fungsi sembarang, dan integral $d\tau$ meliputi seluruh ruang. Apabila dalam suatu penyelesaian didapatkan hasil bahwa $\hat{Q} = \hat{Z}$, maka dikatakan bahwa $\hat{Q}$ bersifat hermitian. Jadi, persamaan (2.17) dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\int \psi^*(\vec{r},t)\hat{Q}\Phi\,(\vec{r},t)d\tau = \int \left(\hat{Q}\psi(\vec{r},t)\right)^* \Phi\,(\vec{r},t) \tag{2.18}$$

Syarat suatu operator hermitian dengan perangkat fungsi eigen yang ortogonal dinyatakan pada persamaan (2.19) berikut.

$$\int \Phi_n{}^*(\vec{r},t)\Phi_m\,(\vec{r},t)d\tau = \delta_{mn} = \begin{cases} 1\ jika\ m = n \\ 0\ jika\ m \neq n \end{cases} \tag{2.19}$$

δ_{mn} adalah *delta kronecker*, dengan nilai sama dengan 1 apabila $m = n$ dan bernilai 0 apabila $m \neq n$. Perangkat fungsi ortogonal dapat dinormalisasi (menjadi perangkat fungsi ortonormal). Perangkat fungsi-fungsi ortonormal dapat dijadikan sebagai basis ruang fungsi atau ruang Hilbert, sehingga fungsi gelombang sembarang $\Phi(\vec{r},t)$ dapat diuraikan atas komponen-komponen pada fungsi basis tersebut, yang dinyatakan dengan persamaan (2.20)

$$\Phi(\vec{r},t) = \sum b_n u_n(\vec{r},t) \tag{2.20}$$

Pada persamaan (2.20), nilai b adalah nilai komponen $\Phi(\vec{r},t)$ pada basis $u_n{}^*(\vec{r},t)$, sehingga nilai b dapat dituliskan dalam bentuk persamaan berikut.

$$b_n = \int u_n{}^*(\vec{r},t)\Phi(\vec{r},t)d\tau \tag{2.21}$$

Perangkat fungsi-fungsi ortonormal bersifat bebas linier. Semua operator observabel bersifat hermitian, mempunyai perangkat fungsi eigen yang ortonormal dan memiliki nilai eigen yang real (Sani dan Kadri, 2017:116).

Jika $\hat{Q}$ adalah operator linier yang mewakili besaran fisik Q dan ψ adalah fungsi keadaan sistem, maka nilai rata-rata Q dapat dinyatakan dalam persamaan berikut.

$$\langle Q \rangle = \int \psi^* \hat{Q} \psi d\tau \tag{2.22}$$

Nilai rata-rata selalu merupakan bilangan real, sehingga nilai $\langle Q \rangle = \langle Q \rangle^*$. Sifat operator hermitian tersebut disebut sifat *hermitian adjoint*. Purwanto (2006:121) menyatakan bahwa syarat utama dari matriks hermitian adalah nilai dari operator konjugat hermitian (operator $Q^\dagger$) akan bernilai sama dengan nilai operator awal (operator Q).

$$Q^\dagger = Q$$

Atau dapat dituliskan dalam persamaan :

$$\int \psi^* \hat{Q} \psi d\tau = \int \psi \left(\hat{Q}\psi\right)^* d\tau \tag{2.23}$$

Menurut Sani dan Kadri (2017:117), $\hat{Q}^\dagger$ adalah sebuah operator *hermitian adjoint* dari sebuah operator $\hat{Q}$, apabila dua fungsi ψ dan φ yang berharga berhingga, dan memenuhi aturan yang dituliskan pada persamaan (2.24)

$$\int \psi^* \hat{Q} \varphi dV = \int \left(\hat{Q}^\dagger \psi\right)^* \varphi \, dV \tag{2.24}$$

Operator hermitian juga mempunyai 2 sifat, diantaranya :

a) $\left(\hat{Q}^{\dagger}\right)^{\dagger} = \hat{Q}$ (2.25)

b) $\left(\hat{Q}\hat{Z}\right)^{\dagger} = \hat{Z}^{\dagger}\hat{Q}^{\dagger}$ (2.26)

2.2.3 Operator Matriks

Dua buah matriks dapat dijumlahkan atau dapat dikurangkan jika dua matriks tersebut memiliki bentuk baris dan kolom yang sama, misal ada 3 buah matriks sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1h} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2h} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{g1} & c_{g2} & \cdots & c_{gh} \end{bmatrix}$$

a) Matriks A dapat dijumlahkan atau dikurangkan dengan matriks B, karena keduanya adalah matriks dengan baris dan kolom yang sama, yaitu $m \times n$.

b) Sedangkan matriks A atau B tidak dapat dijumlahkan atau dikurangkan dengan matriks C karena baris dan kolom pada matriks tersebut berbeda, yaitu $g \times h$.

Penjumlahan dan pengurangan pada matriks hanya akan berlaku bagi komponen-komponen yang bersesuaian saja, sebagaimana berikut.

$$A \pm B = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1k} \pm b_{1k} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2k} \pm b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{b1} \pm b_{b1} & a_{b2} \pm b_{b2} & \cdots & a_{bk} \pm b_{bk} \end{bmatrix}$$

Atau secara sederhana dapat dituliskan dengan persamaan (2.27)

$$A \pm B = \left[a_{ij} + b_{ij}\right] \qquad (2.27)$$

Sedangkan untuk perkalian antara matriks M dengan sebuah bilangan k tertentu (bisa dibilang real atau kompleks), ditulis kM, sehingga nilai k akan dikalikan secara merata pada tiap komponen bilangan matriks M, sebagaimana berikut.

$$kM = \begin{bmatrix} km_{11} & km_{12} & \dots & km_{1k} \\ km_{21} & km_{22} & \dots & km_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ km_{b1} & km_{b2} & \dots & km_{bk} \end{bmatrix}$$

Secara sederhana perkalian antara bilangan k dengan matriks M di atas dapat dituliskan dalam persamaan (2.28)

$$kM = [kM_{ij}] \tag{2.28}$$

Sedangkan untuk perkalian antar dua matriks, matriks $A = [a_{ij}]$ dan matriks $B = [b_{ij}]$ perlu adanya persyaratan tertentu agar kedua matriks tersebut dapat dikalikan. Adapun persyaratannya adalah sebagai berikut.

a. Dua buah matriks dapat dikalikan secara AB bila banyak kolom matriks A sama dengan banyak baris matriks B. Misal matriks A adalah matriks $s \times n$ dan matriks B adalah matriks $n \times t$, maka keduanya dapat dikalikan secara AB menghasilkan matriks baru yaitu $s \times t$:

$$\begin{array}{ccc} A \quad\quad B & \xrightarrow{\text{menjadi}} & AB \\ s \times \boxed{n \quad n} \times t & & s \times t \end{array}$$

b. Dua buah matriks tidak dapat dikalikan secara BA apabila banyak kolom matriks B tidak sama dengan banyak baris matriks A. Misal matriks B adalah matriks $n \times t$ dan matriks A adalah matriks $s \times n$, maka keduanya tidak dapat dikalikan secara BA karena tidak jelas matriks jenis apa yang akan dibentuk :

$$\begin{array}{ccc} B \quad\quad A & \xrightarrow{\text{menjadi}} & AB \\ n \times \boxed{t \quad s} \times n & & ? \end{array}$$

Matriks $A = [a_{ij}]$ dengan indeks $i = 1, 2, 3, \dots, s$ dan indeks $j = 1, 2, 3, \dots, n$, sedangkan matriks $B = [b_{ij}]$ dengan indeks $i = 1, 2, 3, \dots, n$ dan indeks $j = 1, 2, 3, \dots, t$. Perkalian AB dapat ditulis seperti analisa berikut.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1t} \\ . & \ddots & \vdots & . & . \\ . & . & \vdots & . & . \\ . & . & \vdots & \ddots & . \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1t} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & c_{ij} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{s1} & \dots & c_{st} \end{bmatrix}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{l}^{n} a_{il}b_{lj}$$

Dari analisa di atas dapat diketahui bahwa solusi hasil kali matriks tersebut adalah $AB = [c_{ij}]$ dengan komponen c_{ij} yang dapat dtuliskan dalam persamaan berikut.

$$c_{ij} = \sum_{l}^{n} a_{il}b_{lj} \quad (2.29)$$

c_{ij} pada persamaan (2.29) merupakan jumlah total dari hasil kali satu-satu komponen pada baris ke-i matriks A dengan komponen pada kolom ke-j matriks B (Sugiyono, 2016:16).

2.2.4 Operator Matriks Hermitian

Operator matriks hermitian merupakan sebuah operator atau instruksi berupa matriks yang mempunyai sifat hermitian. Salah satu syarat dari operator matriks hermitian adalah matriks yang digunakan harus berupa matriks bujur sangkar (matriks dengan ordo $n \times n$), dimana nilai $n = 2, 3, 4, \ldots dst$. Semakin besar nilai n yang digunakan, maka penyelesaian persoalan eigennya membutuhkan tahapan penyelesaian yang lebih panjang dan kompleks. Selain berupa matriks bujur sangkar, syarat penting lainnya dari operator matriks hermitian adalah operator tersebut mempunyai sifat hermitian, dimana hasil transpose konjugat matriks harus bernilai sama dengan nilai operator awal, seperti pada persamaan (2.23).

2.3 Metode Analitik

Metode analitik merupakan metode penyelesaian persamaan matematika dengan menggunakan perumusan-perumusan aljabar yang sudah baku. Dalam penggunaannya, metode analitik masih berbentuk fungsi analitik yang selanjutnya melalui proses perhitungan menghasilkan suatu nilai yang berupa angka (Mudjiarto dan Krips, 1995:186). Metode analitik menjadi salah satu metode yang biasanya digunakan dalam menyelesaikan persoalan dari operator matriks hermitian. Matriks yang digunakan dalam menyelesaikan persoalan operator matriks hermitian harus berupa matriks bujur sangkar. Sistem eigen atau solusi lengkap dari operator matriks hermitian biasanya menghasilkan beberapa bagian, yaitu fungsi eigen dan nilai eigen. Prosedur penyelesaian persoalan eigen operator matriks hermitian dengan metode analitik berlandaskan pada penggunaan persamaan umum eigen sebagaimana pada persamaan (2.12).

2.4 Metode Diagonalisasi Matriks

Metode diagonalisasi matriks merupakan salah satu cara penyelesaian persoalan eigen dengan melakukan proses diagonalisasi matriks terhadap suatu operator matriks. Syarat utama dari matriks yang dapat didiagonalisasikan adalah matriks tersebut harus berupa matriks bujur sangkar dan memiliki nilai determinan yang sama dengan nol (Nurhasimah, 2013:12). Diagonalisasi matriks dapat dilakukan pada matriks dengan unsur bilangan riil maupun kompleks. Anton dan Rorres (2004) mengatakan bahwa sebuah matriks bujur sangkar Q dikatakan dapat didiagonalisasikan apabila terdapat sebuah matriks N (matriks yang terbentuk dari vektor-vektor eigen) yang dapat ditentukan nilai inversnya sedemikian rupa sehingga hasil perkalian matriks $N^{-1}QN$ menghasilkan sebuah matriks diagonal. Sehingga dapat disimpulkan bahwa matriks N dapat mendiagonalisasikan matriks Q.

2.5 Sistem Eigen Operator Matriks Hermite

Sistem eigen operator matriks hermitian merupakan suatu bentuk pemaparan akhir berupa kumpulan dari beberapa macam komponen variabel, diantaranya terdapat operator yang digunakan, nilai eigen, dan fungsi eigen. Operator yang digunakan berupa operator matriks hermitian yang berordo $n \times n$. Untuk menyelesaikan solusi lengkap dari persoalan sistem eigen operator matriks hermitian dibutuhkan adanya suatu metode penyelesaian secara khusus. Dua diantara metode yang dapat digunakan adalah metode analitik dan metode diagonalisasi matriks, dimana keduanya mempunyai prosedur penyelesaian yang bereda.

2.5.1 Sistem Eigen Operator Matriks Hermitian dengan Metode Analitik

Menurut Alatas (2012) dan McMahon (2006), prosedur penyelesaian operator matriks hermitian dengan menggunakan metode analitik adalah sebagai berikut.

a) Mensubtitusikan operator matriks hermitian ke dalam persamaan eigen

$$Q\psi = \lambda\psi$$

b) Dari persamaan karakteristik yang diperoleh pada langkah sebelumnya akan memiliki solusi apabila determinan matriks bujur sangkar sama dengan nol

c) Menentukan nilai eigen

Menurut Sugiyono (2016:24) Banyaknya nilai eigen tergantung dari banyaknya jumlah ordo pada operator matriks yang digunakan. Operator matriks hermitian dengan ordo $n \times n$ akan mempunyai jumlah nilai eigen maksimal sebanyak n.

d) Menentukan fungsi eigen ternormalisasi berdasarkan pada perolehan masing-masing nilai eigen.

e) Menuliskan operator, nilai eigen, dan fungsi eigen ke dalam persamaan eigen sehingga didapatkan solusi lengkap sistem eigen.

2.5.2 Sistem Eigen Operator Matriks Hermitian dengan Metode Diagonalisasi Matriks

Prosedur penyelesaian diagonalisasi dari suatu matriks hermitian berdasarkan penelitian yang telah dilakukan oleh Nurhasimah (2013:13) adalah sebagai berikut.

a) Penentuan n vektor eigen dari matriks Q yang bebas linier, misalkan $N1, N2, \ldots, Nn$

b) Membentuk sebuah matriks N yang tersusun atas komponen $N1, N2, \ldots, Nn$ yang merupakan hasil vektor-vektor kolom dari matriks Q

c) Melakukan perkalian antar matriks $N^{-1}QN$ sehingga didapatkan matriks diagonal dengan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sebagai entri-entri diagonalnya secara berurutan, dimana $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ merupakan nilai-nilai eigen yang terkait dengan vektor eigen Ni (dengan $i = 1, 2, \ldots, n$).

BAB 3. METODE PENELITIAN

3. 1 Jenis, Waktu, dan Tempat Penelitian

Jenis penelitian ini ialah penelitian *basic research*. Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil 2018/2019. Tempat penelitian ialah Laboratorium Fisika Lanjut, Program Studi Pendidikan Fisika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pengetahuan, Universitas Jember.

3. 2 Definisi Operasional

Definisi operasional dalam penelitian ini digunakan agar tidak terjadi kesalahan-kesalahan dalam mengartikan istilah penelitian yang digunakan. Adapun variabel-variabel yang akan diteliti dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

a) Operator Matriks Hermitian

Operator matriks hermitian merupakan suatu bentuk instruksi matematis (operator) yang mampu merubah bentuk suatu fungsi menjadi fungsi lain, akibat mengenai fungsi tersebut, dimana operatornya berupa operator matriks hermitian. Matriks yang digunakan adalah matriks bujur sangkar yang mempunyai nilai determinan yang sama dengan nol.

b) Persoalan Eigen

Persoalan eigen yang dimaksud dalam penelitian ini berupa operator matriks hermitian yang akan dicari solusi nilai eigen dan fungsi eigen/vektor eigennya. Permasalahan eigen ini akan dicari solusi lengkapnya menggunakan dua metode yang berbeda, yaitu metode analitik dan metode diagonalisasi matriks.

c) Nilai dan Fungsi Eigen

Nilai eigen merupakan nilai karakteristik dari suatu matriks bujur sangkar. Nilai eigen diperoleh melalui perhitungan Horner terhadap persamaan pangkat yang diperoleh dari proses determinan persamaan karakteristik. Dengan adanya suatu operator yang dikenakan pada suatu fungsi, akan diperoleh hasil operasi berupa kelipatan dari bentuk fungsi semula, atau dengan kata lain fungsi tersebut merupakan fungsi eigen untuk operator yang digunakan.

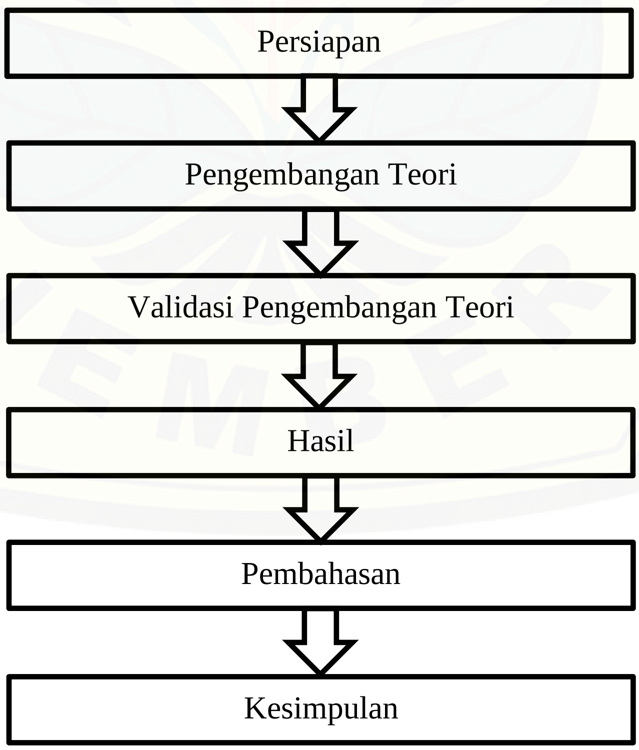
d) Metode Analitik

Metode analitik merupakan metode penyelesaian persamaan matematika dengan menggunakan perumusan-perumusan aljabar yang sudah baku. Metode analitik yang digunakan dalam penelitian ini berupa perhitungan matematis yang umumnya digunakan dalam menyelesaikan persoalan eigen. Sistem eigen yang diperoleh melalui metode ini menunjukkan nilai eigen dan fungsi eigen yang ternormalisasikan.

e) Metode Diagonalisasi Matriks

Metode diagonalisasi matriks merupakan cara dalam membentuk matriks diagonal dari suatu operator matriks. Syarat utama dari matriks yang dapat didiagonalisasikan adalah matriks tersebut harus berupa matriks bujur sangkar dan memiliki nilai determinan yang sama dengan nol. Penyelesaian akhirnya berupa matriks bujur sangkar diagonalisasi dengan entri-entri bilangan diagonal utamanya berupa nilai eigen.

3. 3 Langkah Penelitian



Gambar 3.1 Bagan Langkah-langkah Penelitian

a) Tahap Persiapan

Tahap persiapan merupakan tahapan awal dalam penelitian ini, dimana menyiapkan bahan-bahan kajian yang dapat mendukung penelitian ini, yaitu berupa buku kalkulus, aljabar linier, fisika matematika, fisika modern, mekanika kuantum, serta jurnal-jurnal yang berkaitan dengan operator matriks, operator hermitian, nilai dan fungsi eigen, dan proses diagonalisasi matriks.

b) Pengembangan Teori

Pada tahapan selanjutnya ialah pengembangan teori dari bahan-bahan yang telah didapatkan pada tahapan sebelumnya. Teori yang dikembangkan ialah solusi lengkap sistem eigen operator matriks hermitian, dimana metode penyelesaian yang digunakan fokus pada metode analitik dan metode diagonalisasi matriks. Ordo matriks yang digunakan adalah matriks ordo 2×2, 3×3, dan 4×4.

c) Validasi Pengembangan Teori

Tahap ini adalah tahap untuk membandingkan hasil penyelesaian akhir dalam menyelesaikan persoalan eigen operator matriks hermitian ordo 2×2, 3×3, dan 4×4, baik dalam metode analitik maupun dalam metode diagonalisasi matriks. Acuan validasi yang digunakan adalah penyelesaian persoalan eigen operator matriks berordo 2×2 menggunakan metode analitik dan penyelesaian persoalan eigen operator matriks berordo 3×3 menggunakan metode diagonalisasi matriks.

d) Hasil

Pada tahap ini adalah tahap perhitungan secara manual sesuai dengan metode analitik dan metode diagonalisasi matriks dalam menentukan solusi lengkap sistem eigen operator matriks hermitian. Hasil dari perhitungan diharapkan sesuai dengan dasar teori dan hasil penelitian-penelitian sebelumnya yang serupa. Perhitungan akan dilakukan dengan menyelesaikan persoalan matriks ordo 2×2, 3×3, dan 4×4, dimana pada masing-masing ordo tersusun atas bilangan riil rasional.

e) Pembahasan

Hasil dari penyelesaian persoalan eigen dengan menggunakan metode analitik dan diagonalisasi matriks selanjutnya akan dijelaskan secara rinci mengenai solusi lengkap sistem eigen operator matriks hermitian pada setiap ordo yang berbeda. Hasil yang didapatkan divalidasi dengan hasil penelitian sebelumnya, dan akan dibahas mengenai proses masing-masing metode yang digunakan, serta keefektifan penggunaan metode analitik dan diagonalisasi matriks dalam menyelesaikan persoalan eigen dengan ordo yang berbeda.

f) Kesimpulan

Hasil dari pembahasan selanjutnya ditarik kesimpulan untuk menjawab rumusan permasalahan penelitian.

3. 4 Teori Hasil Pengembangan

Berdasarkan dari telaah teori-teori yang telah ada sebelumnya, maka untuk mendapatkan hasil penelitian yang di inginkan telah didapatkan hasil pengembangan teori sebagai berikut ini.

A. Solusi lengkap sistem eigen operator matriks hermitian dengan metode analitik

Langkah pertama yang dilakukan dalam penelitian ini adalah menentukan operator matriks yang akan digunakan, yaitu :

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1b} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2b} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{a1} & q_{a2} & \cdots & q_{ab} \end{bmatrix}$$

Operator matriks Q disubtitusikan ke dalam persamaan Eigen $Q\psi = \lambda\psi$, dimana ψ merupakan fungsi Eigen $\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_l \end{bmatrix}$ (dengan nilai $l = 3,4, \ldots dst$) sehingga didapatkan persamaan karakteristik sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} (q_{11} - \lambda) & q_{12} & \cdots & q_{1b} \\ q_{21} & (q_{22} - \lambda) & \cdots & q_{2b} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{a1} & q_{a2} & \cdots & (q_{ab} - \lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_l \end{bmatrix} = 0$$

Melalui persamaan karakteristik di atas, kemudian ditentukan determinan matriksnya. Proses determinan matriks terhadap matriks baru di atas menghasilkan persamaan pangkat yang sama dengan nol. Proses subtitusi masing-masing variabel persamaan pangkat ke dalam metode Horner akan menghasilkan nilai-nilai Eigen λ_n. Banyaknya nilai Eigen tergantung dari jumlah ordo yang digunakan dalam operator matriks Hermitian. Langkah selanjutnya, untuk mendapatkan fungsi Eigen, subtitusikan masing-masing nilai Eigen λ_n ke dalam persamaan Eigen $Q\psi = \lambda_n\psi$

$$\begin{bmatrix} q_{11}\psi_1 + q_{12}\psi_2 + \cdots + q_{1b}\psi_l \\ q_{21}\psi_1 + q_{22}\psi_2 + \cdots + q_{2b}\psi_l \\ \vdots \\ q_{a1}\psi_1 + q_{a2}\psi_2 + \cdots + q_{ab}\psi_l \end{bmatrix} = \lambda_n \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_l \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh fungsi Eigen sebagai berikut

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\psi_n \\ t\psi_n \\ \vdots \\ u\psi_n \end{bmatrix} \rightarrow \psi = \psi_n \begin{bmatrix} s \\ t \\ \vdots \\ u \end{bmatrix}$$

Dimana *s*, *t*, dan *u* merupakan suatu nilai yang didapatkan dari hasil subtitusi matriks diatas, dan ψ_n dapat berupa ψ_1, ψ_2, atau ψ_l yang merupakan fungsi acuan untuk mendapatan nilai *s*, *t*, dan *u*. Nilai ψ_n dapat diperoleh dengan mensubtitusikan fungsi Eigen ke dalam syarat normalisasi $\psi^T\psi = 1$. Setelah diperoleh fungsi Eigen untuk masing-masing nilai Eigen, maka dapat dituliskan sistem Eigen sebagai berikut

$$Q\psi = \lambda_n\psi$$

$$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1b} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2b} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{a1} & q_{a2} & \cdots & q_{ab} \end{bmatrix} \psi_n \begin{bmatrix} s \\ t \\ \vdots \\ u \end{bmatrix} = \lambda_n\psi_n \begin{bmatrix} s \\ t \\ \vdots \\ u \end{bmatrix}$$

Langkah terakhir adalah pembuktian terhadap kevalidan hasil sistem eigen yang telah didapatkan. Pembuktian dilakukan dengan melakukan perkalian antar matriks dalam persamaan umum eigen. Perolehan hasil pembuktian yang sama antara ruas kanan dan ruas kiri menunjukkan bahwa penyelesaian persoalan eigen yang telah diperoleh adalah benar.

B. Solusi lengkap sistem eigen operator matriks hermitian dengan metode diagonalisasi matriks

Langkah pertama yang dilakukan dalam penelitian ini adalah menentukan operator matriks yang akan digunakan, yaitu :

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1b} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2b} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{a1} & q_{a2} & \cdots & q_{ab} \end{bmatrix}$$

Operator matriks Q disubtitusikan ke dalam persamaan Eigen $QN = \lambda N$, dimana N merupakan vektor Eigen $N = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_l \end{bmatrix}$ (dengan nilai $l = 3,4, \ldots dst$) sehingga didapatkan persamaan karakteristik sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} (q_{11} - \lambda) & q_{12} & \cdots & q_{1b} \\ q_{21} & (q_{22} - \lambda) & \cdots & q_{2b} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{a1} & q_{a2} & \cdots & (q_{ab} - \lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_l \end{bmatrix} = 0$$

Melalui persamaan karakteristik di atas, kemudian ditentukan determinan matriksnya. Proses determinan matriks terhadap matriks baru di atas menghasilkan persamaan pangkat yang sama dengan nol. Proses subtitusi masing-masing variabel persamaan pangkat ke dalam metode Horner akan menghasilkan nilai-nilai Eigen λ_n. Banyaknya nilai Eigen tergantung dari jumlah ordo yang digunakan dalam operator matriks Hermitian.

Langkah selanjutnya, untuk mendapatkan vektor Eigen, gunakan masing-masing nilai Eigen λ_n ke dalam matriks persamaan karakteristik sehingga didapatkan vektor-vektor kolom $(N1, N2, \ldots, Nn)$. Gabungan dari $N1, N2, \ldots, Nn$ akan membentuk suatu matriks baru berupa matriks N. Matriks N dapat mendiagonalisasikan persoalan operator matriks eigen Q, sehingga dapat dituliskan solusi penyelesaian sistem eigen. Langkah terakhir adalah pembuktian proses diagonalisasi matriks dengan melakukan perkalian antar matriks

$$N^{-1}QN$$

Hasil yang diperoleh akan membentuk suatu matriks diagonal dengan entri-entri diagonalnya berupa nilai eigen dari persoalan eigen.

3.5 Validasi Hasil Pengembangan Teori

Pembanding atau validasi hasil pengembangan teori di sini menggunakan matriks bujur sangkar ordo 2×2 dengan metode analitik dan matriks bujur sangkar ordo 3×3 dengan metode diagonalisasi matriks. Pembanding hasil simulasi atau pengembangan teori di sini berdasarkan pada penelitian sebelumnya. Adapun pembanding hasil pengembangan teorinya adalah sebagai berikut.

A. Sistem eigen operator matriks hermitian berordo 2×2 dengan metode analitik

Persoalan eigen matriks ordo 2×2 diberikan operator *A* sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan operator matriks hermitian di atas, diperoleh 2 buah nilai eigen yaitu

$$\lambda_1 = 1 \qquad \text{dan} \qquad \lambda_2 = -1$$

Dari kedua nilai eigen, diperoleh 2 buah fungsi eigen sebagai berikut.

$$\psi = \psi_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{dan} \qquad \psi = \psi_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Fungsi eigen ternormalisasi dapat dilakukan dengan menggunakan syarat normalisasi. Sehingga persoalan eigennya mempunyai 2 buah solusi sistem eigen sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \psi_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\psi_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{dan} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \psi_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1\psi_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(McMahon, 2006:210)

B. Sistem eigen operator matriks hermitian berordo 3×3 dengan metode diagonalisasi matriks

Persoalan eigen matriks ordo 3×3 diberikan operator *A* sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan operator matriks hermitian di atas, diperoleh 3 buah nilai sebagai berikut.

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = 1, \qquad \text{dan} \qquad \lambda_3 = 2$$

Dari ketiga nilai eigen di atas, diperoleh 3 buah vektor kolom yang membentuk suatu matriks baru sebagai berikut.

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh hasil akhir berupa matriks diagonalisasi (matriks P dapat mendiagonalisasikan matriks A)

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Nurhasimah, 2013:13)

BAB 5. PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang didapatkan mengenai solusi lengkap sistem eigen operator matriks hermitian dengan metode analitik dan diagonalisasi matriks, dapat disimpulkan bahwa setiap persoalan eigen yang menggunakan operator matriks hermitian mempunyai solusi lengkap sistem eigen sebanyak jumlah ordo operator matriks. Semakin besar ordo operator matriks hermitian dalam persoalan eigen, maka semakin kompleks proses penyelesaian sistem eigennya, baik dengan metode analitik maupun dengan metode diagonalisasi matriks. Penggunaan metode analitik lebih efisien untuk menyelesaikan persoalan eigen operator matriks hermitian berordo 2×2, sedangkan metode diagonalisasi matriks lebih efisien digunakan untuk menyelesaikan persoalan eigen operator matriks hermitian berordo 3×3 atau lebih.

5.2 Saran

Dalam penelitian ini, telah digunakan persoalan eigen berupa operator matriks hermitian yang tersusun atas bilangan riil rasional sampai pada ordo 4×4. Saran yang bisa diberikan untuk penelitian selanjutnya adalah penggunaan persoalan eigen berupa operator matriks hermitian yang tersusun atas bilangan riil irasional atau bilangan kompleks. Selain itu, juga dapat dilakukan penelitian dengan operator matriks berordo lebih dari 4×4.

DAFTAR PUSTAKA

Alatas, H. 2009. *Buku Pelengkap Fisika Matematika*. Edisi 1. Bogor: IPB Press.

Andriani, Y. 2011. Menentukan nilai eigen tak dominan suatu matriks definit negatif menggunakan metode kuasa invers dengan shift. *Jurnal Penelitian Sains*. 14(1A): 8-12.

Anton dan Rorres. 2004. *Aljabar Linier Elementer Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.

Aryani, F., dan R. D. Humairoh. 2015. Penentuan nilai eigen tak dominan matriks hermit menggunakan metode pangkat invers dengan nilai shift. *Prosiding Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi, dan Industri ISSN:2085-9902*. 7: 441-447.

Chandra, N. E., dan W. Kusniati. 2016. Aplikasi metode pangkat dalam mengaproksimasi nilai eigen kompleks pada matriks. *Unisda Journal of Mathematics and Computer Science (UJMC)*. 2(1): 36-40.

Hasan, M. 2015. Perbandngan Solusi Numerik dan Solusi Analitik pada Persamaan Panas. *Skripsi*. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim.

Juwono, A M. 2017. *Pendahuluan Fisika Kuantum*. Malang: University of Brawijaya Press.

Lajnah Pentashih Mushaf Al-Qur'an Departemen Agama Republik Indonesia. 2007. *Al-Qur'an Dan Terjemahannya Special for Woman*. Jakarta: Sy9ma Creative Media Corp.

Maji, K. 2016. Hermite-distributed approximating functional-based formulation of multiconfiguration time-dependent hartree method: a case study of quantum tunnelling in a coupled double-well system. *Pramana-J. Physics*. 87(34): 1-8.

McMahon, D. 2006. *Quantum Mechanics*. The McGraw-Hill Companies, Inc.

Mudjiarto, R., dan F. J. Krips. 1995. *Matematika Fisika 1*. Bandung: ITB.

Ning, H., W. Xu., Y. Chi., Y. Gong., dan T. S. Huang. 2010. Incremental spectral clustering by efficiently updating the eigen system. *Pattern Recocnition*. 43: 113-127.

Nurhasimah. 2013. Diagonalisasi Secara Uniter Pada Matriks Hermitian. *Skripsi*. Pekanbaru: UIN Sultan Syarif Kasim Riau.

Onate, C. A., M. C. Onyeaju., A. N. Ikot., J. O. A. Idiodi., dan J. O. Ojonubah. 2017. Eigen solution, shannon entropy and fisher information under the eckart manning rosen potential model. *Journal of the korean physical society*. 70 (4): 339-347.

Purcell, E. J., dan D. Varberg. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analisis.* 1987. Jakarta: Erlangga.

Purwanto, A. 2016. *Fisika Kuantum Edisi Revisi.* Yogyakarta: Gava Media.

Rahmayani, H., Hidayati., dan P. Razi. 2014. Perhitungan tingkat energi sumur potensial keadaan terikat melalui persamaan Schrodinger menggunakan metode beda hingga. *Pillar of Physics.* 1: 17-24.

Sani, R. A. Dan M. Kadri. *Fisika Kuantum*. 2017. Jakarta: Bumi Aksara.

Sari, N. M., S. Gemawati, dan A. Sirait. 2015. Menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tridiagonal. *Jurnal Online Mahasiswa FMIPA*. 2 (1): 194-204.

Schiff, I. 2012. *Quantum Mechanics: 3rd Edition*. Tokyo: Kogakusha Company.

Sugiyono, V. 2013. *Mekanika Kuantum*. Yogyakarta: CAPS (Center for Academic Publishing Service).

Supriadi, B., S. H. B. Prastowo., A. F. Amrullah., dan Z. R. Ridlo. 2017. Solusi Efek Terobosan Penghalang Ganda Dengan Persamaan Schrodinger Dua Dimensi. *Proceeding*. 42-48. SNF FMIPA UNESA.

Supriadi, B., S. H. B. Prastowo., S. Bahri., Z. R. Ridlo., dan T. Prihandono. 2018. The stark effect on the wave function of tritium in relativistic condition. *Journal of Physics: Conference Series 997*. 1-7.

LAMPIRAN A. MATRIKS PENELITIAN

MATRIKS PENELITIAN

NAMA : NUR AIDA
NIM : 150210102078
RG : 3 (THEORITICAL PHYSICS LEARNING RESEARCH)

JUDUL	TUJUAN PENELITIAN	VARIABEL	DATA DAN TEKNIK PENGAMBILAN DATA	METODE PENELITIAN
Solusi Lengkap Sistem Eigen Operator Matriks Hermite dengan Metode Analitik dan Diagonalisasi Matriks	Menentukan solusi lengkap sistem eigen operator matriks hermite dengan metode analitik dan diagonalisasi matriks ordo n ×n	1. Variabel bebasnya adalah operator matriks Hermite 2. Variabel kontrolnya adalah metode analitik dan diagonalisasi matriks 3. Variabel terikatnya adalah solusi lengkap sistem eigen	1. Sumber data yang digunakan adalah jurnal penelitian yang terkait dan buku mekanika kuantum, aljabar linier, dan fisika matematika, serta internet 2. Teknik pengambilan data dilakukan dengan cara menggunakan perhitungan matematis manual	1. Jenis Penelitian ini adalah penelitian basic research 2. Tempat penelian : Lab. Fisika Lanjut Ged.3 FKIP Unej

Menyetujui,
Dosen Pembimbing Utama

Drs. Bambang Supriadi, M.Sc.
NIP. 19680710 199302 1 00 1

Menyetujui,
Dosen Pembimbing Anggota

Dr. Yushardi, S.Si., M.Si.
NIP. 19650420 199512 1 00 1

LAMPIRAN B. SISTEM EIGEN OPERATOR MATRIKS HERMITIAN BUJUR SANGKAR BERORDO 2 × 2

A. Metode Analitik

Langkah pertama yang dilakukan dalam penelitian ini adalah menentukan operator matriks hermite ordo 2 × 2, yaitu :

$$Q = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}$$

Operator matriks Q disubtitusikan ke dalam persamaan Eigen $Q\psi = \lambda\psi$, dimana ψ merupakan fungsi Eigen $\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}$ sehingga didapatkan

$$\begin{bmatrix} (-4-\lambda) & -1 \\ 10 & (7-\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = 0$$

Dari persamaan karakteristik di atas, kemudian ditentukan determinan matriksnya. Proses determinan matriks terhadap persamaan karakteristik di atas menghasilkan persamaan kuadrat yang sama dengan nol, yaitu

$$\lambda^2 - 3\lambda - 18 = 0$$

Hasil subtitusi masing-masing variabel dari persamaan kuadrat di atas ke dalam metode Horner memberikan 2 buah hasil nilai Eigen, yaitu

$$\lambda_1 = 6 \qquad \text{dan} \qquad \lambda_2 = -3$$

Fungsi eigen diperoleh menggunakan masing-masing nilai Eigen λ_1 dan λ_2 ke dalam persamaan Eigen $Q\psi = \lambda_n\psi$, dengan proses sebagai berikut.

a) Untuk $\lambda_1 = 6$, diperoleh

$$\begin{bmatrix} -4\psi_1 - \psi_2 \\ 10\psi_1 + 7\psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\psi_1 \\ \lambda_1\psi_2 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh fungsi Eigen sebagai berikut

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ -10\psi_1 \end{bmatrix} \rightarrow \psi = \psi_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Nilai ψ_1 diperoleh dengan mensubtitusikan fungsi Eigen ke dalam syarat normalisasi $\psi^T\psi = 1$.

$$\left(\psi_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -10 \end{bmatrix}\right)^T \left(\psi_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -10 \end{bmatrix}\right) = 1$$

$$(\psi_1 [1 \quad -10]) \left(\psi_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -10 \end{bmatrix}\right) = 1$$

$$\psi_1{}^2(1+100) = 1$$

$$\psi_1{}^2 = \frac{1}{101}$$

Melalui proses transpose matriks diperoleh nilai $\psi_1 = \sqrt{1/101}$ sehingga

$$\psi = \psi_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -10 \end{bmatrix} = \sqrt{1/101} \begin{bmatrix} 1 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Hasil akhir sistem Eigen untuk $\lambda_1 = 6$ adalah

$$Q\psi = \lambda_1 \psi$$

$$\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 10 & 7 \end{bmatrix} \psi_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -10 \end{bmatrix} = 6\psi_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 10 & 7 \end{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{101}} \begin{bmatrix} 1 \\ -10 \end{bmatrix} = 6\sqrt{\frac{1}{101}} \begin{bmatrix} 1 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan hasil akhir sistem Eigen di atas, diperoleh hasil pembuktian dengan cara perkalian matriks sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 10 & 7 \end{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{101}} \begin{bmatrix} 1 \\ -10 \end{bmatrix} = 6\sqrt{\frac{1}{101}} \begin{bmatrix} 1 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6\sqrt{1/101} \\ -60\sqrt{1/101} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\sqrt{1/101} \\ -60\sqrt{1/101} \end{bmatrix}$$

b) Untuk $\lambda_2 = -3$, diperoleh

$$\begin{bmatrix} -4\psi_1 - \psi_2 \\ 10\psi_1 + 7\psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_2\psi_1 \\ \lambda_2\psi_2 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh fungsi Eigen sebagai berikut

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ -1\psi_1 \end{bmatrix} \rightarrow \psi = \psi_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Nilai ψ_1 diperoleh dengan mensubtitusikan fungsi Eigen ke dalam syarat normalisasi $\psi^T\psi = 1$.

$$\left(\psi_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)^T \left(\psi_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = 1$$

$$(\psi_1[1 \quad -1]) \left(\psi_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = 1$$

$$\psi_1{}^2(1+1) = 1$$

$$\psi_1{}^2 = \frac{1}{2}$$

Melalui proses transpose matriks di atas diperoleh nilai $\psi_1 = \sqrt{1/2}$ sehingga

$$\psi = \psi_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \sqrt{1/2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Hasil akhir sistem Eigen untuk $\lambda_2 = -3$ adalah

$$Q\psi = \lambda_2 \psi$$

$$\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 10 & 7 \end{bmatrix} \psi_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -3\psi_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 10 & 7 \end{bmatrix} \sqrt{1/2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -3\sqrt{1/2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan hasil akhir sistem Eigen di atas, diperoleh hasil pembuktian dengan cara perkalian matriks sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 10 & 7 \end{bmatrix} \sqrt{1/2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -3\sqrt{1/2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3\sqrt{1/2} \\ 3\sqrt{1/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\sqrt{1/2} \\ 3\sqrt{1/2} \end{bmatrix}$$

B. Metode Diagonalisasi Matriks

Langkah pertama yang dilakukan dalam penelitian ini adalah menentukan operator matriks hermite ordo 2 × 2, yaitu :

$$Q = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}$$

Operator matriks Q disubtitusikan ke dalam persamaan Eigen $QN = \lambda N$, dimana N merupakan vektor Eigen $N = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$ sehingga didapatkan

$$\begin{bmatrix} (-4-\lambda) & -1 \\ 10 & (7-\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = 0$$

Dari persamaan karakteristik di atas, kemudian ditentukan determinan matriksnya. Proses determinan matriks terhadap persamaan karakteristik di atas menghasilkan persamaan kuadrat yang sama dengan nol, yaitu

$$\lambda^2 - 3\lambda - 18 = 0$$

Hasil subtitusi masing-masing variabel dari persamaan kuadrat di atas ke dalam metode Horner memberikan 2 buah hasil nilai Eigen, yaitu

$$\lambda_1 = 6 \qquad \text{dan} \qquad \lambda_2 = -3$$

Vektor eigen diperoleh menggunakan masing-masing nilai Eigen λ_1 dan λ_2 ke dalam persamaan Eigen $QN = \lambda_n N$, dengan proses sebagai berikut.

a) Untuk $\lambda_1 = 6$

Subtitusikan $\lambda_1 = 6$ ke dalam bentuk persamaan karakteristik, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} (-4-\lambda_1) & -1 \\ 10 & (7-\lambda_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -10 & -1 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = 0$$

Dengan berpacu pada perolehan bentuk persamaan matriks di atas, maka didapatkan vektor eigen untuk $\lambda_1 = 6$ sebagai berikut.

$$N1 = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -10 \end{bmatrix}$$

b) Untuk $\lambda_2 = -3$

Subtitusikan $\lambda_2 = -3$ ke dalam bentuk persamaan karakteristik, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} (-4-\lambda_2) & -1 \\ 10 & (7-\lambda_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = 0$$

Berpacu pada perolehan bentuk persamaan matriks di atas, maka didapatkan vektor eigen untuk $\lambda_2 = -3$ sebagai berikut.

$$N2 = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian, dapat dituliskan perolehan matriks baru N yang tersusun atas vektor-vektor eigen dari persoalan matriks hermite di atas sebagai berikut

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -10 & -1 \end{bmatrix}$$

Dimana matriks baru N di atas merupakan matriks yang dapat mendiagonalisasikan matriks operator matriks hermite Q. Kemudian dapat dituliskan solusi sistem eigennya yaitu

$$QN_1 = \lambda_1 N_1$$

$$\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 10 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -10 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 1 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Dan

$$QN_2 = \lambda_2 N_2$$

$$\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 10 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Langkah selanjutnya adalah pembuktian proses diagonalisasi matriks N terhadap matriks Q. Proses diagonalisasi matriks dimulai dengan melakukan perhitungan invers terhadap matriks N.

$$N^{-1} = \frac{1}{\det(N)}\, Adj\,(N)$$

$$N^{-1} = \frac{1}{(1)(-1)-(1)(-10)} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N^{-1} = \frac{1}{(9)} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} -1/9 & -1/9 \\ 10/9 & 1/9 \end{bmatrix}$$

Setelah diperoleh nilai invers dari matriks N, kemudian dilakukan operasi perkalian matriks

$$N^{-1}QN = \begin{bmatrix} -1/9 & -1/9 \\ 10/9 & 1/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 10 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -10 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Proses perkalian matriks $N^{-1}QN$ menghasilkan suatu matriks diagonal, dimana nilai diagonalisasinya merupakan nilai eigen itu sendiri.

LAMPIRAN C. SISTEM EIGEN OPERATOR MATRIKS HERMITIAN BUJUR SANGKAR BERORDO 3 × 3

A. Metode Analitik

Langkah pertama yang dilakukan dalam penelitian ini adalah menentukan operator matriks hermitian ordo 3 × 3, yaitu :

$$Q = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Operator matriks Q disubtitusikan ke dalam persamaan Eigen $Q\psi = \lambda\psi$, dimana ψ merupakan fungsi Eigen $\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{bmatrix}$ sehingga didapatkan

$$\begin{bmatrix} (-3-\lambda) & 2 & 2 \\ 2 & (1-\lambda) & 3 \\ 2 & 3 & (1-\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{bmatrix} = 0$$

Dari persamaan karakteristik di atas, kemudian ditentukan determinan matriksnya. Proses determinan matriks terhadap persamaan karakteristik di atas menghasilkan persamaan pangkat tiga yang sama dengan nol, yaitu

$$-\lambda^3 - \lambda^2 + 22\lambda + 40 = 0$$

Hasil subtitusi masing-masing variabel dari persamaan pangkat tiga di atas ke dalam metode Horner memberikan 3 buah hasil nilai Eigen, yaitu

$$\lambda_1 = -2, \qquad \lambda_2 = -4, \qquad \text{dan} \qquad \lambda_3 = 5$$

Fungsi Eigen diperoleh menggunakan masing-masing nilai Eigen λ_1, λ_2, dan λ_3 ke dalam persamaan Eigen $Q\psi = \lambda_n\psi$, dengan proses sebagai berikut.

a) Untuk $\lambda_1 = -2$, diperoleh

$$\begin{bmatrix} -3\psi_1 + 2\psi_2 + 2\psi_3 \\ 2\psi_1 + 1\psi_2 + 3\psi_3 \\ 2\psi_1 + 3\psi_2 + 1\psi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\psi_1 \\ \lambda_1\psi_2 \\ \lambda_1\psi_3 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh fungsi Eigen sebagai berikut

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\psi_2 \\ 1\psi_2 \\ -1\psi_2 \end{bmatrix} \rightarrow \psi = \psi_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Nilai ψ_2 diperoleh dengan mensubtitusikan fungsi Eigen ke dalam syarat normalisasi $\psi^T\psi = 1$.

$$\left(\psi_2\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\right)^T\left(\psi_2\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\right)=1$$

$$(\psi_2[0 \quad 1 \quad -1])\left(\psi_2\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\right)=1$$

$${\psi_2}^2(0+1+1)=1$$

$${\psi_2}^2=\frac{1}{2}$$

Melalui proses transpose matriks diperoleh nilai $\psi_2=\sqrt{1/2}$ sehingga

$$\psi=\psi_2\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}=\sqrt{1/2}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$$

Hasil akhir sistem Eigen untuk $\lambda_1=-2$ adalah

$$Q\psi=\lambda_1\psi$$

$$\begin{bmatrix}-3&2&2\\2&1&3\\2&3&1\end{bmatrix}\psi_2\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}=-2\psi_2\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-3&2&2\\2&1&3\\2&3&1\end{bmatrix}\sqrt{\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}=-2\sqrt{\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$$

Berdasarkan hasil akhir sistem Eigen di atas, diperoleh hasil pembuktian sebagai berikut

$$\begin{bmatrix}-3&2&2\\2&1&3\\2&3&1\end{bmatrix}\sqrt{\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}=-2\sqrt{\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0\\-2\sqrt{1/2}\\2\sqrt{1/2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-2\sqrt{1/2}\\2\sqrt{1/2}\end{bmatrix}$$

b) Untuk $\lambda_2=-4$, diperoleh

$$\begin{bmatrix}-3\psi_1+2\psi_2+2\psi_3\\2\psi_1+1\psi_2+3\psi_3\\2\psi_1+3\psi_2+1\psi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_2\psi_1\\\lambda_2\psi_2\\\lambda_2\psi_3\end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh fungsi Eigen sebagai berikut

$$\psi=\begin{bmatrix}\psi_1\\\psi_2\\\psi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\psi_2\\1\psi_2\\1\psi_2\end{bmatrix}\rightarrow\psi=\psi_2\begin{bmatrix}-4\\1\\1\end{bmatrix}$$

Nilai ψ_2 diperoleh dengan mensubtitusikan fungsi Eigen ke dalam syarat normalisasi $\psi^T\psi = 1$.

$$\left(\psi_2\begin{bmatrix}-4\\1\\1\end{bmatrix}\right)^T\left(\psi_2\begin{bmatrix}-4\\1\\1\end{bmatrix}\right) = 1$$

$$(\psi_2[-4 \quad 1 \quad 1])\left(\psi_2\begin{bmatrix}-4\\1\\1\end{bmatrix}\right) = 1$$

$${\psi_2}^2(16+1+1) = 1$$

$${\psi_2}^2 = \frac{1}{18}$$

Melalui proses transpose matriks diperoleh nilai $\psi_2 = \sqrt{1/18}$ sehingga

$$\psi = \psi_2\begin{bmatrix}-4\\1\\1\end{bmatrix} = \sqrt{1/18}\begin{bmatrix}-4\\1\\1\end{bmatrix}$$

Hasil akhir sistem Eigen untuk $\lambda_2 = -4$ adalah

$$Q\psi = \lambda_2\psi$$

$$\begin{bmatrix}-3 & 2 & 2\\2 & 1 & 3\\2 & 3 & 1\end{bmatrix}\psi_2\begin{bmatrix}-4\\1\\1\end{bmatrix} = -4\psi_2\begin{bmatrix}-4\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-3 & 2 & 2\\2 & 1 & 3\\2 & 3 & 1\end{bmatrix}\sqrt{\frac{1}{18}}\begin{bmatrix}-4\\1\\1\end{bmatrix} = -4\sqrt{\frac{1}{18}}\begin{bmatrix}-4\\1\\1\end{bmatrix}$$

Berdasarkan hasil akhir sistem Eigen di atas, diperoleh hasil pembuktian sebagai berikut

$$\begin{bmatrix}-3 & 2 & 2\\2 & 1 & 3\\2 & 3 & 1\end{bmatrix}\sqrt{\frac{1}{18}}\begin{bmatrix}-4\\1\\1\end{bmatrix} = -4\sqrt{\frac{1}{18}}\begin{bmatrix}-4\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}16\sqrt{1/18}\\-4\sqrt{1/18}\\-4\sqrt{1/18}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}16\sqrt{1/18}\\-4\sqrt{1/18}\\-4\sqrt{1/18}\end{bmatrix}$$

c) Untuk $\lambda_3 = 5$, diperoleh

$$\begin{bmatrix}-3\psi_1 + 2\psi_2 + 2\psi_3\\2\psi_1 + 1\psi_2 + 3\psi_3\\2\psi_1 + 3\psi_2 + 1\psi_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_3\psi_1\\\lambda_3\psi_2\\\lambda_3\psi_3\end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh fungsi Eigen sebagai berikut

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\psi_1 \\ 2\psi_1 \\ 2\psi_1 \end{bmatrix} \rightarrow \psi = \psi_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Nilai ψ_1 diperoleh dengan mensubtitusikan fungsi Eigen ke dalam syarat normalisasi $\psi^T \psi = 1$.

$$\left(\psi_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right)^T \left(\psi_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = 1$$

$$(\psi_1 [1 \quad 2 \quad 2]) \left(\psi_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = 1$$

$$\psi_1{}^2 (1 + 4 + 4) = 1$$

$$\psi_1{}^2 = \frac{1}{9}$$

Melalui proses transpose matriks di atas diperoleh nilai $\psi_1 = \sqrt{1/9}$ sehingga

$$\psi = \psi_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \sqrt{1/9} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Hasil akhir sistem Eigen untuk $\lambda_3 = 5$ adalah

$$Q\psi = \lambda_3 \psi$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \psi_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 5\psi_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{9}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 5 \sqrt{\frac{1}{9}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan hasil akhir sistem Eigen di atas, diperoleh hasil pembuktian sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{9}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 5 \sqrt{\frac{1}{9}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5\sqrt{1/9} \\ 10\sqrt{1/9} \\ 10\sqrt{1/9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\sqrt{1/9} \\ 10\sqrt{1/9} \\ 10\sqrt{1/9} \end{bmatrix}$$

B. Metode Diagonalisasi Matriks

Langkah pertama yang dilakukan dalam penelitian ini adalah menentukan operator matriks hermitian ordo 3 × 3, yaitu :

$$Q = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Operator matriks Q disubtitusikan ke dalam persamaan Eigen $QN = \lambda N$, dimana N merupakan fungsi Eigen $N = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}$ sehingga didapatkan

$$\begin{bmatrix} (-3-\lambda) & 2 & 2 \\ 2 & (1-\lambda) & 3 \\ 2 & 3 & (1-\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} = 0$$

Dari persamaan karakteristik di atas, kemudian ditentukan determinan matriksnya. Proses determinan matriks terhadap persamaan karakteristik di atas menghasilkan persamaan karakteristik yang sama dengan nol, yaitu

$$-\lambda^3 - \lambda^2 + 22\lambda + 40 = 0$$

Hasil subtitusi masing-masing variabel dari persamaan pangkat tiga di atas ke dalam metode Horner memberikan 3 buah hasil nilai Eigen, yaitu

$$\lambda_1 = -2, \qquad \lambda_2 = -4, \qquad \text{dan} \qquad \lambda_3 = 5$$

Vektor Eigen diperoleh menggunakan masing-masing nilai Eigen λ_1, λ_2, dan λ_3 ke dalam persamaan Eigen $QN = \lambda_n N$, dengan proses sebagai berikut.

a) Untuk $\lambda_1 = -2$

Subtitusikan $\lambda_1 = -2$ ke dalam bentuk persamaan karakteristik, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} (-3-\lambda_1) & 2 & 2 \\ 2 & (1-\lambda_1) & 3 \\ 2 & 3 & (1-\lambda_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} = 0$$

Dengan berpacu pada perolehan bentuk persamaan matriks di atas, maka didapatkan vektor eigen untuk $\lambda_1 = -2$ sebagai berikut.

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

b) Untuk $\lambda_2 = -4$

Subtitusikan $\lambda_2 = -4$ ke dalam bentuk persamaan karakteristik, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} (-3-\lambda_2) & 2 & 2 \\ 2 & (1-\lambda_2) & 3 \\ 2 & 3 & (1-\lambda_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} = 0$$

Dengan berpacu pada perolehan bentuk persamaan matriks di atas, maka didapatkan vektor eigen untuk $\lambda_2 = -4$ sebagai berikut.

$$N_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c) Untuk $\lambda_3 = 5$

Subtitusikan $\lambda_3 = 5$ ke dalam bentuk persamaan karakteristik, sehingga diperoleh sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} (-3-\lambda_3) & 2 & 2 \\ 2 & (1-\lambda_3) & 3 \\ 2 & 3 & (1-\lambda_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -8 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} = 0$$

Dengan berpacu pada perolehan bentuk persamaan matriks di atas, maka didapatkan vektor eigen untuk $\lambda_3 = 5$ sebagai berikut.

$$N_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian, dapat dituliskan perolehan matriks baru N yang tersusun atas vektor-vektor eigen dari persoalan matriks hermitian di atas sebagai berikut

$$N = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Dimana matriks baru *N* di atas merupakan matriks yang dapat mendiagonalisasikan matriks operator matriks hermitian *Q*. Kemudian dapat dituliskan solusi sistem eigennya yaitu

$$QN_1 = \lambda_1 N_1$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$QN_2 = \lambda_2 N_2$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dan

$$QN_3 = \lambda_3 N_3$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Langkah selanjutnya adalah pembuktian proses diagonalisasi matriks *N* terhadap matriks *Q*. Proses diagonalisasi matriks dimulai dengan melakukan perhitungan invers terhadap matriks *N*.

$$N^{-1} = \frac{1}{\det(N)} Adj\ (N)$$

$$N^{-1} = \frac{1}{(0+8+1)-(-8+0-1)} \begin{bmatrix} 0 & 9 & -9 \\ -4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$N^{-1} = \frac{1}{(18)} \begin{bmatrix} 0 & 9 & -9 \\ -4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 9/18 & -9/18 \\ -4/18 & 1/18 & 1/18 \\ 2/18 & 4/18 & 4/18 \end{bmatrix}$$

Setelah diperoleh nilai invers dari matriks *N*, kemudian dilakukan operasi perkalian matriks

$$N^{-1}QN = \begin{bmatrix} 0 & \frac{9}{18} & \frac{-9}{18} \\ \frac{-4}{18} & \frac{1}{18} & \frac{1}{18} \\ \frac{2}{18} & \frac{4}{18} & \frac{4}{18} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Proses perkalian matriks $N^{-1}QN$ menghasilkan suatu matriks diagonal, dimana nilai diagonalisasinya merupakan nilai eigen itu sendiri.

LAMPIRAN D. SISTEM EIGEN OPERATOR MATRIKS HERMITIAN BUJUR SANGKAR BERORDO 4 × 4

A. Metode Analitik

Langkah pertama yang dilakukan dalam penelitian ini adalah menentukan operator matriks hermitian ordo 4 × 4, yaitu :

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 \\ -6 & -3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operator matriks Q disubtitusikan ke dalam persamaan Eigen $Q\psi = \lambda\psi$, dimana ψ merupakan fungsi Eigen $\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix}$ sehingga didapatkan

$$\begin{bmatrix} (2-\lambda) & 0 & 6 & 0 \\ -6 & (-3-\lambda) & 1 & 9 \\ 0 & 0 & (-8-\lambda) & 2 \\ 0 & 0 & 0 & (1-\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} = 0$$

Dari persamaan karakteristik di atas, kemudian ditentukan determinan matriksnya. Proses determinan matriks terhadap persamaan karakteristik di atas menghasilkan persamaan pangkat empat yang sama dengan nol, yaitu

$$\lambda^4 + 8\lambda^3 - 7\lambda^2 - 50\lambda + 48 = 0$$

Hasil subtitusi masing-masing variabel dari persamaan pangkat empat di atas ke dalam metode Horner memberikan 2 buah hasil nilai Eigen, yaitu

$$\lambda_1 = -3, \qquad \lambda_2 = -8, \qquad \lambda_3 = 1, \qquad \text{dan} \qquad \lambda_4 = 2$$

Fungsi Eigen diperoleh menggunakan masing-masing nilai Eigen λ_1, λ_2, λ_3, dan λ_4 ke dalam persamaan Eigen $Q\psi = \lambda_n\psi$, dengan proses sebagai berikut.

a) Untuk $\lambda_1 = -3$, diperoleh

$$\begin{bmatrix} 2\psi_1 + 0\psi_2 + 6\psi_3 + 0\psi_4 \\ -6\psi_1 - 3\psi_2 + 1\psi_3 + 9\psi_4 \\ 0\psi_1 + 0\psi_2 - 8\psi_3 + 2\psi_4 \\ 0\psi_1 + 0\psi_2 + 0\psi_3 + 1\psi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\psi_1 \\ \lambda_1\psi_2 \\ \lambda_1\psi_3 \\ \lambda_1\psi_4 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh fungsi Eigen sebagai berikut

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\psi_2 \\ 1\psi_2 \\ 0\psi_2 \\ 0\psi_2 \end{bmatrix} \rightarrow \psi = \psi_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nilai ψ_2 diperoleh dengan mensubtitusikan fungsi Eigen ke dalam syarat normalisasi $\psi^T\psi = 1$.

$$\left(\psi_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)^T \left(\psi_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 1$$

$$(\psi_2[0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]) \left(\psi_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 1$$

$${\psi_2}^2 = \frac{1}{1}$$

Melalui proses transpose matriks diperoleh nilai $\psi_2 = 1$ sehingga

$$\psi = \psi_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hasil akhir sistem Eigen untuk $\lambda_1 = -3$ adalah

$$Q\psi = \lambda_1\psi$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 \\ -6 & -3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \psi_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -3\psi_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 \\ -6 & -3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (1) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = (-3)(1) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan hasil akhir sistem Eigen di atas, diperoleh hasil pembuktian sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Untuk $\lambda_2 = -8$, diperoleh

$$\begin{bmatrix} 2\psi_1 + 0\psi_2 + 6\psi_3 + 0\psi_4 \\ -6\psi_1 - 3\psi_2 + 1\psi_3 + 9\psi_4 \\ 0\psi_1 + 0\psi_2 - 8\psi_3 + 2\psi_4 \\ 0\psi_1 + 0\psi_2 + 0\psi_3 + 1\psi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_2\psi_1 \\ \lambda_2\psi_2 \\ \lambda_2\psi_3 \\ \lambda_2\psi_4 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh fungsi Eigen sebagai berikut

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15\psi_3 \\ -23\psi_3 \\ 25\psi_3 \\ 0\psi_3 \end{bmatrix} \rightarrow \psi = \psi_3 \begin{bmatrix} -15 \\ -23 \\ 25 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nilai ψ_3 diperoleh dengan mensubtitusikan fungsi Eigen ke dalam syarat normalisasi $\psi^T\psi = 1$.

$$\left(\psi_3 \begin{bmatrix} -15 \\ -23 \\ 25 \\ 0 \end{bmatrix}\right)^T \left(\psi_3 \begin{bmatrix} -15 \\ -23 \\ 25 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 1$$

$$(\psi_3[-15 \quad -23 \quad 25 \quad 0]) \left(\psi_3 \begin{bmatrix} -15 \\ -23 \\ 25 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 1$$

$${\psi_3}^2(225 + 529 + 625) = 1$$

$${\psi_3}^2 = \frac{1}{1379}$$

Melalui proses transpose matriks diperoleh nilai $\psi_3 = \sqrt{\frac{1}{1379}}$ sehingga

$$\psi = \psi_3 \begin{bmatrix} -15 \\ -23 \\ 25 \\ 0 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{1}{1379}} \begin{bmatrix} -15 \\ -23 \\ 25 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hasil akhir sistem Eigen untuk $\lambda_2 = -8$ adalah

$$Q\psi = \lambda_2\psi$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 \\ -6 & -3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \psi_3 \begin{bmatrix} -15 \\ -23 \\ 25 \\ 0 \end{bmatrix} = -8\psi_3 \begin{bmatrix} -15 \\ -23 \\ 25 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 \\ -6 & -3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{1379}} \begin{bmatrix} -15 \\ -23 \\ 25 \\ 0 \end{bmatrix} = -8\sqrt{\frac{1}{1379}} \begin{bmatrix} -15 \\ -23 \\ 25 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan hasil akhir sistem Eigen di atas, diperoleh hasil pembuktian sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 120\sqrt{1/1379} \\ -184\sqrt{1/1379} \\ 200\sqrt{1/1379} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120\sqrt{1/1379} \\ -184\sqrt{1/1379} \\ 200\sqrt{1/1379} \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) Untuk $\lambda_3 = 1$, diperoleh

$$\begin{bmatrix} 2\psi_1 + 0\psi_2 + 6\psi_3 + 0\psi_4 \\ -6\psi_1 - 3\psi_2 + 1\psi_3 + 9\psi_4 \\ 0\psi_1 + 0\psi_2 - 8\psi_3 + 2\psi_4 \\ 0\psi_1 + 0\psi_2 + 0\psi_3 + 1\psi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_3\psi_1 \\ \lambda_3\psi_2 \\ \lambda_3\psi_3 \\ \lambda_3\psi_4 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh fungsi Eigen sebagai berikut

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -48\psi_4 \\ 155\psi_4 \\ 8\psi_4 \\ 36\psi_4 \end{bmatrix} \rightarrow \psi = \psi_4 \begin{bmatrix} -48 \\ 155 \\ 8 \\ 36 \end{bmatrix}$$

Nilai ψ_4 diperoleh dengan mensubtitusikan fungsi Eigen ke dalam syarat normalisasi $\psi^T\psi = 1$.

$$\left(\psi_4 \begin{bmatrix} -48 \\ 155 \\ 8 \\ 36 \end{bmatrix}\right)^T \left(\psi_4 \begin{bmatrix} -48 \\ 155 \\ 8 \\ 36 \end{bmatrix}\right) = 1$$

$$(\psi_4[-48 \quad 155 \quad 8 \quad 36]) \left(\psi_4 \begin{bmatrix} -48 \\ 155 \\ 8 \\ 36 \end{bmatrix}\right) = 1$$

$${\psi_4}^2(2304 + 24025 + 64 + 1296) = 1$$

$${\psi_4}^2 = \frac{1}{27633}$$

Melalui proses transpose matriks diperoleh nilai $\psi_4 = \sqrt{\frac{1}{27633}}$ sehingga

$$\psi = \psi_4 \begin{bmatrix} -48 \\ 155 \\ 8 \\ 36 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{1}{27633}} \begin{bmatrix} -48 \\ 155 \\ 8 \\ 36 \end{bmatrix}$$

Hasil akhir sistem Eigen untuk $\lambda_3 = 1$ adalah

$$Q\psi = \lambda_3\psi$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 \\ -6 & -3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \psi_4 \begin{bmatrix} -48 \\ 155 \\ 8 \\ 36 \end{bmatrix} = 1\psi_4 \begin{bmatrix} -48 \\ 155 \\ 8 \\ 36 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 \\ -6 & -3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{27633}} \begin{bmatrix} -48 \\ 155 \\ 8 \\ 36 \end{bmatrix} = 1\sqrt{\frac{1}{27633}} \begin{bmatrix} -48 \\ 155 \\ 8 \\ 36 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan hasil akhir sistem Eigen di atas, diperoleh hasil pembuktian sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} -48\sqrt{1/27633} \\ 155\sqrt{1/27633} \\ 8\sqrt{1/27633} \\ 36\sqrt{1/27633} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -48\sqrt{1/27633} \\ 155\sqrt{1/27633} \\ 8\sqrt{1/27633} \\ 36\sqrt{1/27633} \end{bmatrix}$$

d) Untuk $\lambda_4 = 2$, diperoleh

$$\begin{bmatrix} 2\psi_1 + 0\psi_2 + 6\psi_3 + 0\psi_4 \\ -6\psi_1 - 3\psi_2 + 1\psi_3 + 9\psi_4 \\ 0\psi_1 + 0\psi_2 - 8\psi_3 + 2\psi_4 \\ 0\psi_1 + 0\psi_2 + 0\psi_3 + 1\psi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_4\psi_1 \\ \lambda_4\psi_2 \\ \lambda_4\psi_3 \\ \lambda_4\psi_4 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh fungsi Eigen sebagai berikut

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\psi_1 \\ -6\psi_1 \\ 0\psi_1 \\ 0\psi_1 \end{bmatrix} \rightarrow \psi = \psi_1 \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nilai ψ_1 diperoleh dengan mensubtitusikan fungsi Eigen ke dalam syarat normalisasi $\psi^T\psi = 1$.

$$\left(\psi_1 \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)^T \left(\psi_1 \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 1$$

$$(\psi_1[5 \quad -6 \quad 0 \quad 0]) \left(\psi_1 \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 1$$

$${\psi_1}^2(25 + 36 + 0 + 0) = 1$$

$$\psi_1{}^2 = \frac{1}{61}$$

Melalui proses transpose matriks diperoleh nilai $\psi_1 = \sqrt{1/61}$ sehingga

$$\psi = \psi_1 \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{1}{61}} \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hasil akhir sistem Eigen untuk $\lambda_4 = 2$ adalah

$$Q\psi = \lambda_4 \psi$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 \\ -6 & -3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \psi_1 \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\psi_1 \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 \\ -6 & -3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{61}} \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\sqrt{\frac{1}{61}} \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan hasil akhir sistem Eigen di atas, diperoleh hasil pembuktian sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 10\sqrt{1/27633} \\ -12\sqrt{1/27633} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\sqrt{1/27633} \\ -12\sqrt{1/27633} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

B. Metode Diagonalisasi Matriks

Langkah pertama yang dilakukan dalam penelitian ini adalah menentukan operator matriks hermitian ordo 4 × 4, yaitu :

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 \\ -6 & -3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operator matriks Q disubtitusikan ke dalam persamaan Eigen $QN = \lambda N$, dimana N merupakan fungsi Eigen $N = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix}$ sehingga didapatkan

$$\begin{bmatrix} (2-\lambda) & 0 & 6 & 0 \\ -6 & (-3-\lambda) & 1 & 9 \\ 0 & 0 & (-8-\lambda) & 2 \\ 0 & 0 & 0 & (1-\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} = 0$$

Dari persamaan karakteristik di atas, kemudian ditentukan determinan matriksnya. Proses determinan matriks terhadap persamaan karakteristik di atas menghasilkan persamaan karakteristik yang sama dengan nol, yaitu

$$\lambda^4 + 8\lambda^3 - 7\lambda^2 - 50\lambda + 48 = 0$$

Hasil subtitusi masing-masing variabel dari persamaan pangkat empat di atas ke dalam metode Horner memberikan 4 buah hasil nilai Eigen, yaitu

$$\lambda_1 = -3, \qquad \lambda_2 = -8, \qquad \lambda_3 = 1, \qquad \text{dan} \qquad \lambda_4 = 2$$

Vektor Eigen diperoleh menggunakan masing-masing nilai Eigen λ_1, λ_2, λ_3, dan λ_4 ke dalam persamaan Eigen $Q\psi = \lambda_n\psi$, dengan proses sebagai berikut.

a) Untuk $\lambda_1 = -3$

Subtitusikan $\lambda_1 = -3$ ke dalam bentuk persamaan karakteristik, sehingga dperoleh

$$\begin{bmatrix} (2-\lambda_1) & 0 & 6 & 0 \\ -6 & (-3-\lambda_1) & 1 & 9 \\ 0 & 0 & (-8-\lambda_1) & 2 \\ 0 & 0 & 0 & (1-\lambda_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 6 & 0 \\ -6 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} = 0$$

Dengan berpacu pada perolehan bentuk persamaan matriks di atas, maka didapatkan vektor eigen untuk $\lambda_1 = -3$ sebagai berikut.

$$N1 = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Untuk $\lambda_2 = -8$

Subtitusikan $\lambda_2 = -8$ ke dalam bentuk persamaan karakteristik, sehingga dperoleh

$$\begin{bmatrix} (2-\lambda_2) & 0 & 6 & 0 \\ -6 & (-3-\lambda_2) & 1 & 9 \\ 0 & 0 & (-8-\lambda_2) & 2 \\ 0 & 0 & 0 & (1-\lambda_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 6 & 0 \\ -6 & 5 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} = 0$$

Dengan berpacu pada perolehan bentuk persamaan matriks di atas, maka didapatkan vektor eigen untuk $\lambda_2 = -8$ sebagai berikut.

$$N2 = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ -23 \\ 25 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) Untuk $\lambda_3 = 1$

Subtitusikan $\lambda_3 = 1$ ke dalam bentuk persamaan karakteristik, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} (2-\lambda_3) & 0 & 6 & 0 \\ -6 & (-3-\lambda_3) & 1 & 9 \\ 0 & 0 & (-8-\lambda_3) & 2 \\ 0 & 0 & 0 & (1-\lambda_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 0 \\ -6 & -4 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} = 0$$

Dengan berpacu pada perolehan bentuk persamaan matriks di atas, maka didapatkan vektor eigen untuk $\lambda_3 = 1$ sebagai berikut.

$$N3 = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -48 \\ 155 \\ 8 \\ 36 \end{bmatrix}$$

d) Untuk $\lambda_4 = 2$

Subtitusikan $\lambda_4 = 2$ ke dalam bentuk persamaan karakteristik, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} (2-\lambda_4) & 0 & 6 & 0 \\ -6 & (-3-\lambda_4) & 1 & 9 \\ 0 & 0 & (-8-\lambda_4) & 2 \\ 0 & 0 & 0 & (1-\lambda_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 \\ -6 & -5 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} = 0$$

Dengan berpacu pada perolehan bentuk persamaan matriks di atas, maka didapatkan vektor eigen untuk $\lambda_4 = 2$ sebagai berikut.

$$N4 = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian, dapat dituliskan perolehan matriks baru N yang tersusun atas vektor-vektor eigen dari persoalan matriks hermitian di atas sebagai berikut

$$N = \begin{bmatrix} 0 & -15 & -48 & 5 \\ 1 & -23 & 155 & -6 \\ 0 & 25 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 36 & 0 \end{bmatrix}$$

Dimana matriks baru N di atas merupakan matriks yang dapat mendiagonalisasikan matriks operator matriks hermitian Q. Kemudian dapat dituliskan solusi sistem eigennya yaitu

$$QN1 = \lambda_1 N1$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 \\ -6 & -3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$QN2 = \lambda_2 N2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 \\ -6 & -3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -15 \\ -23 \\ 25 \\ 0 \end{bmatrix} = -8 \begin{bmatrix} -15 \\ -23 \\ 25 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$QN3 = \lambda_3 N3$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 \\ -6 & -3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -48 \\ 155 \\ 8 \\ 36 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} -48 \\ 155 \\ 8 \\ 36 \end{bmatrix}$$

Dan

$$QN4 = \lambda_4 N4$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 \\ -6 & -3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Langkah selanjutnya adalah pembuktian proses diagonalisasi matriks *N* terhadap matriks *Q*. Proses diagonalisasi matriks dimulai dengan melakukan perhitungan invers terhadap matriks *N*.

$$N^{-1} = \frac{1}{\det(N)} Adj\ (N)$$

$$N^{-1} = \frac{1}{(-4500)}\begin{bmatrix} -5400 & -4500 & -7380 & 13815 \\ 0 & 0 & -180 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & -125 \\ 900 & 0 & -540 & -1080 \end{bmatrix}$$

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{54}{45} & 1 & \frac{73,8}{45} & \frac{-138,15}{45} \\ 0 & 0 & \frac{1,8}{45} & \frac{-0,4}{45} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1,25}{45} \\ \frac{9}{45} & 0 & \frac{5,4}{45} & \frac{10,8}{45} \end{bmatrix}$$

Setelah diperoleh nilai invers dari matriks *N*, kemudian dilakukan operasi perkalian matriks

$$N^{-1}QN = \begin{bmatrix} \frac{54}{45} & 1 & \frac{73,8}{45} & \frac{-138,15}{45} \\ 0 & 0 & \frac{1,8}{45} & \frac{-0,4}{45} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1,25}{45} \\ \frac{9}{45} & 0 & \frac{5,4}{45} & \frac{10,8}{45} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 \\ -6 & -3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -15 & -48 & 5 \\ 1 & -23 & 155 & -6 \\ 0 & 25 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 36 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N^{-1}QN = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Proses perkalian matriks $N^{-1}QN$ menghasilkan suatu matriks diagonal, dimana nilai diagonalisasinya merupakan nilai eigen itu sendiri.