



ANALISIS KEMAMPUAN BERPIKIR KOMBINATORIAL MAHASISWA
DALAM MENYELESAIKAN KAJIAN *R-DYNAMIC VERTEX COLORING*
DAN PENERAPAN *PROBLEM BASED LEARNING* (PBL) UNTUK
MENINGKATKAN KEMAMPUAN KOMBINATORIALNYA

TESIS

Oleh:

BRIAN JUNED SEPTORY
NIM. 170220101023

PROGRAM STUDI MAGISTER PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER

2018



ANALISIS KEMAMPUAN BERPIKIR KOMBINATORIAL MAHASISWA
DALAM MENYELESAIKAN KAJIAN *R-DYNAMIC VERTEX COLORING*
DAN PENERAPAN *PROBLEM BASED LEARNING* (PBL) UNTUK
MENINGKATKAN KEMAMPUAN KOMBINATORIALNYA

TESIS

Oleh

Brian Juned Septory

NIM 170220101023

Dosen Pembimbing 1 : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.
Dosen Pembimbing 2 : Prof. Drs. I Made Tirta, M.Sc., Ph.D.
Dosen Penguji 1 : Dr. Susanto, M.Pd.
Dosen Penguji 2 : Dr. Hobri, M.Pd.
Dosen Penguji 3 : Dr. Muhtadi Irvan, M.Pd.

**PROGRAM STUDI MAGISTER PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER**

2019



ANALISIS KEMAMPUAN BERPIKIR KOMBINATORIAL MAHASISWA
DALAM MENYELESAIKAN KAJIAN *R-DYNAMIC VERTEX COLORING*
DAN PENERAPAN *PROBLEM BASED LEARNING* (PBL) UNTUK
MENINGKATKAN KEMAMPUAN KOMBINATORIALNYA

TESIS

Diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Magister Pendidikan Matematika (S2) dan mencapai gelar Master Pendidikan

Oleh
Brian Juned Septory
NIM 170220101023

PROGRAM STUDI MAGISTER PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER

2019

HALAMAN PERSEMBAHAN

Dengan segala puji dan syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa atas berkat dan anugerahnya dan atas dukungan dan do'a dari orang-orang tercinta, akhirnya tesis ini dapat diselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya. Oleh karena itu, dengan rasa bangga dan bahagia saya khaturkan rasa syukur dan terimakasih saya kepada:

1. Tuhan YME yang telah memberikan berkat dan anugerah-Nya sehingga tesis ini dapat terselesaikan;
2. Keluarga terkasih Ayahanda Jek Steven Septory dan Ibunda Endah Mulyaning Kaeksi serta kakak perempuan Dian Ekawati Septory yang telah memberikan dukungan doa, motivasi maupun materi tiada henti untuk kesuksesan saya;
3. Teman-teman seperjuangan RG Combinatorics 2018 (Devi, Anggraeni, Rimbi, Yulianita, Putu, Selvi, Ifa) yang selalu berbagi suka maupun duka dan yang selalu memberi semangat dalam menyelesaikan penulisan tesis ini;
4. CGANT research Grup (Ika Hesti Agustin, Dwi Agustin Retno Wardani, Elsa Yuli Kurniawati, Rossanita Nisviasari, Ridho Alfarisi, Rafiantika MegahniaPrihandini, Ermita Riski Albiri, Robiathul adawiyah)
5. Teman-teman seperjuangan Magister Pendidikan Matematika angkatan 2017;
6. Semua pihak yang telah membantu terselesainya tesis ini

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan dari semua pihak dicatat sebagai amal baik oleh Tuhan YME dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Terimakasih yang sebesar-besarnya untuk kalian semua, akhir kata saya persembahkan tesis ini untuk kalian semua, orang-orang yang saya kasihi. Dan semoga tesis ini dapat bermanfaat dan berguna untuk kemajuan ilmu pengetahuan di masa yang akan datang, Amin.

Jember, Januari 2019

Penulis

MOTTO

“Apabila Anda berbuat kebaikan kepada orang lain, maka Anda telah berbuat baik terhadap diri sendiri.”

(Benyamin Franklin)

Bersukacitalah. Tetaplah berdoa. Mengucap syukurlah dalam segala hal, sebab itulah yang di kehendaki Allah di dalam Kristus Yesus bagi kamu

(I Tesalonika 5 : 16-18)

Doakanlah apa yang engkau kerjakan

Dan

Kerjakanlah apa yang engkau doakan

Berdoa dan bekerja keras

(Brian Juned Septory)

HALAMAN PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : BRIAN JUNED SEPTORY

NIM : 170220101023

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa tesis yang berjudul: “ANALISIS KEMAMPUAN BERPIKIR KOMBINATORIAL MAHASISWA DALAM MENYELESAIKAN KAJIAN *R-DYNAMIC VERTEX COLORING* DAN PENERAPAN *PROBLEM BASED LEARNING* (PBL) UNTUK MENINGKATKAN KEMAMPUAN KOMBINATORIALNYA” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata dikemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Januari 2019
Yang menyatakan,

Brian Juned Septory
NIM. 170220101023

TESIS

ANALISIS KEMAMPUAN BERPIKIR KOMBINATORIAL MAHASISWA
DALAM MENYELESAIKAN KAJIAN *R-DYNAMIC VERTEX COLORING*
DAN PENERAPAN *PROBLEM BASED LEARNING* (PBL) UNTUK
MENINGKATKAN KEMAMPUAN KOMBINATORIALNYA

Oleh

Brian Juned Septory

NIM 170220101023

Dosen Pembimbing 1 : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

Dosen Pembimbing 2 : Prof. Drs. I Made Tirta, M.Sc., Ph.D

HALAMAN PERSETUJUAN

ANALISIS KEMAMPUAN BERPIKIR KOMBINATORIAL MAHASISWA
DALAM MENYELESAIKAN KAJIAN *R-DYNAMIC VERTEX COLORING*
DAN PENERAPAN *PROBLEM BASED LEARNING* (PBL) UNTUK
MENINGKATKAN KEMAMPUAN KOMBINATORIALNYA

TESIS

Diajukan untuk dipertahankan di depan Tim Penguji sebagai salah satu persyaratan untuk menyelesaikan Program Magister Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam dengan Program Studi Magister Pendidikan Matematika pada Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember

Nama Mahasiswa : Brian Juned Septory
Nim : 170220101023
Jurusan : Magister Pendidikan MIPA
Fakultas : Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Angkatan Tahun : 2017
Daerah Asal : Kupang
Tempat, Tanggal Lahir : Dili, 25 Januari 1995

Disetujui Oleh:

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D
NIP. 19680802 199303 1 004

Prof. Drs. I Made Tirta, M.Sc., Ph.D
NIP. 19591220 198503 1 002

HALAMAN PENGESAHAN

Tesis berjudul “ANALISIS KEMAMPUAN BERPIKIR KOMBINATORIAL MAHASISWA DALAM MENYELESAIKAN KAJIAN *R-DYNAMIC VERTEX COLORING* DAN PENERAPAN *PROBLEM BASED LEARNING* (PBL) UNTUK MENINGKATKAN KEMAMPUAN KOMBINATORIALNYA” telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember pada:

Hari : Rabu

Tanggal : 30 Januari 2019

Tempat : Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember

Tim Penguji :

Ketua,

Sekretaris,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D

NIP. 19680802 199303 1 004

Anggota 1,

Prof. Drs. I Made Tirta, M.Sc., Ph.D

NIP. 19591220 198503 1 002

Anggota 2,

Anggota 3,

Dr. Susanto, M.Pd.

NIP. 19630616 1 1988 021

Dr. Hobri, M.Pd.

NIP. 19730506 199702 1 001

Dr. Muhtadi Irvan, M.Pd.

NIP. 19851014 201212 2 001

Mengetahui,

Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Universitas Jember

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

NIP. 19680802 199303 1 004

RINGKASAN

ANALISIS KEMAMPUAN BERPIKIR KOMBINATORIAL MAHASISWA DALAM MENYELESAIKAN KAJIAN *R-DYNAMIC VERTEX COLORING* DAN PENERAPAN *PROBLEM BASED LEARNING* (PBL) UNTUK MENINGKATKAN KEMAMPUAN KOMBINATORIAL NYA; Brian Juned Septory, 170220101023; 2019; Program Studi Magister Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember.

Kemampuan berpikir kombinatorial sangat di perlukan dalam setiap pembelajaran. Namun dalam pembelajaran masih belum memaksimalkan kemampuan berpikir kombinatorial pada mahasiswa. Oleh karena itu dalam penelitian ini akan diterapkan *Problem based Learning* untuk meningkatkan kemampuan berpikir kreatif mahasiswa. *Problem based Learning* adalah model mengajar yang mengatur proses pembelajaran sehingga mahasiswa dapat fokus pada permasalahan dan memperoleh pengetahuan yang sebelumnya belum diketahuinya itu tidak melalui pemberitahuan, sebagian atau seluruhnya ditemukan sendiri. Metode penelitian yang akan digunakan dalam penelitian ini adalah metode yang menggabungkan antara metode kualitatif dan metode kuantitatif atau bisa disebut metode gabungan. Penelitian ini akan melibatkan 86 mahasiswa yang terbagi dalam dua kelas, yaitu kelas eksperimen dan kelas kontrol yang terdiri dari 42 mahasiswa dari kelas kontrol dan 44 mahasiswa dari kelas eksperimen. Hasil dari penelitian akan diperoleh melalui post-test dan pre-test.

Temuan pada kelas kontrol ditemukan 12% berada pada kategori level 1 dalam berpikir kombinatorial 24% berada pada kategori level 2 dalam berpikir kombinatorial, 33% berada pada kategori level 3 dalam berpikir kombinatorial dan 31% mahasiswa berada pada level 4 dalam berpikir kombinatorial sedangkan belum ada mahasiswa yang mencapai level 5 pada berpikir kombinatorik. Untuk kelas eksperimen, ditemukan bahwa tidak ada mahasiswa pada level 1 pada berpikir kombinatorial, 9% berada pada kategori level 2 dalam berpikir kombinatorial, 18% berada pada kategori level 3 dalam berpikir kombinatorial, 32% mahasiswa berada pada level 4 dalam berpikir kombinatorial dan 41% mahasiswa berada pada level 5

dalam berpikir kombinatorial. Hasil analisis uji sampel independen menunjukkan bahwa hasil belajar mahasiswa pada tahap pre-tes tidak berbeda dan pada tahap post-tes memiliki analisis yang berbeda menunjukkan nilai signifikan ($p \leq 0,05$) yang berarti bahwa pasca pembelajaran memiliki hasil berbeda.

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan menunjukkan bahwa penerapan PBL memiliki pengaruh yang signifikan terhadap kemampuan berpikir kombinatorial mahasiswa di kelas eksperimen. Mahasiswa di kelas eksperimen menunjukkan kemampuan berpikir kombinatorial mereka dibandingkan dengan kelas kontrol. Hasil penelitian menunjukkan bahwa peningkatan hasil belajar mahasiswa dan kemampuan berpikir kombinatorial dilihat dari posttest. Nilai kelas eksperimen lebih baik karena didukung oleh pembelajaran berbasis masalah (PBL) dalam pembelajaran untuk meningkatkan pemikiran kombinatorial mahasiswa.

PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Tuhan YME, atas segala berkat dan anugerah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis yang berjudul “ANALISIS KEMAMPUAN BERPIKIR KOMBINATORIAL MAHASISWA DALAM MENYELESAIKAN KAJIAN *R-DYNAMIC VERTEX COLORING* DAN PENERAPAN *PROBLEM BASED LEARNING* (PBL) UNTUK MENINGKATKAN KEMAMPUAN KOMBINATORIALNYA”.

Penyusunan tesis ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu pendidikan Universitas Jember;
2. Ketua Program Studi Magister Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember;
3. Para Dosen Program Studi Magister Pendidikan Matematika yang telah memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;
4. Dosen pembimbing dan Validator yang telah meluangkan waktu dan pikiran guna memberikan bimbingan dalam penyusunan tesis ini dengan penuh kesabaran;
5. Dosen penguji yang telah memberikan kritik dan saran yang sangat membantu dalam menyempurnakan tesis ini;
6. Teman-teman angkatan 2017, terimakasih atas dukungan, motivasi, doa serta bantuannya selama ini
7. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu yang telah membantu terselesainya tesis ini;

Semoga bantuan dan bimbingan yang telah diberikan mendapat balasan dari Tuhan YME. Besar harapan bila segenap pemerhati memberikan kritik dan saran demi kesempurnaan penulisan selanjutnya. Semoga tesis ini dapat bermanfaat. Amin.

Jember, Januari 2019

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSEMBAHAN	iv
HALAMAN PERNYATAAN	vi
HALAMAN PERSETUJUAN	viii
HALAMAN PENGESAHAN	ix
RINGKASAN	x
PRAKATA	xii
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR TABEL	xvi
DAFTAR GAMBAR	xvii
DAFTAR DIAGRAM	xix
DAFTAR LAMPIRAN	xx
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Manfaat Penelitian	5
1.5 Spesifikasi perangkat	5
1.6 Kebaruan penelitian.....	6
BAB 2 KAJIAN PUSTAKA	7
2.1 Kemampuan Berpikir Kombinatorik (<i>combinatorial thinking</i>)	7
2.2 Pewarnaan Titik Dinamis (<i>r-dynamic vertex coloring</i>)	8
2.3 Model Pembelajaran <i>Problem-Based Learning</i>	10
2.3.1 Definisi Pembelajaran Model <i>Problem-Based Learning</i>	10
2.3.2 Tujuan Pembelajaran Model <i>Problem-based Learning</i>	11
2.3.3 Prinsip Pembelajaran Model <i>Problem-based learning</i>	11
2.3.4 Karakteristik Pembelajaran Model <i>Problem-based Learning</i> ..	12
2.3.5 Sintaks Pembelajaran Model <i>Problem-based Learning</i>	12

2.3.6 kelebihan dan kelemahan Pembelajaran <i>Problem-based Learning</i>	14
2.3.7 penilaian Pembelajaran Model <i>Problem-based Learning</i>	15
2.4 Perangkat Pembelajaran	16
2.4.1 Rencana Pembelajaran Semester (RPS)	16
2.4.2 Lembar Kerja Mahasiswa (LKM)	16
BAB 3 METODE PENELITIAN	18
3.1 Jenis Penelitian	18
3.2 Definisi Operasional	19
3.3 Subjek dan objek penelitian	20
3.4 Desain Penelitian	20
3.5 Rancangan Penelitian	21
3.5.1 Tahap Studi Penelitian	22
3.5.2 Tahap Analisis Berpikir Kombinatorik	22
3.5.3 tahap penerapan <i>Problem-based Learning</i>	22
3.6 Teknik pengumpulan data	22
3.6.1 Teknik Tes	23
3.6.2 Teknik Nontes	23
3.7 Teknik Analisis Data	24
3.7.1 Teknik Pengolahan dan Analisis Data Instrumen Tes	24
3.7.2 Teknik Pengolahan dan Analisis Data Instrumen Nontes..	26
3.8 Potret Fase	28
3.9 Monograf	29
BAB 4 HASIL DAN PEMBAHASAN	32
4.1 Deskripsi Pelaksanaan Penelitian	32
4.2 Deskripsi kemampuan berpikir kombinatorial	33
4.2.1 Validasi Pre-tes	38
4.2.2 Hasil Pre-tes	41
4.2.3 Analisis hasil Pre-tes	42
4.3 Deskripsi Penerapan <i>Problem based learning</i>	43
4.3.1 Pengembangan perangkat <i>Problem based learning</i>	43

4.3.1.1 Tahap pendefinisian	44
4.3.2.2 Tahap perancangan	46
4.3.3.3 Tahap pengembangan	50
4.3.2 Hasil Post-tes	55
4.3.3 Analisis hasil Post-tes	56
4.3.4 Hasil analisis aktivitas <i>Problem based learning</i>	57
4.3.5 Potret fase	59
4.4 Monograf	76
4.5 Pembahasan Hasil Penelitian	77
BAB 5 KESIMPULAN DAN SARAN	80
5.1 Kesimpulan	80
5.2 Saran	81
DAFTAR PUSTAKA	82
LAMPIRAN	

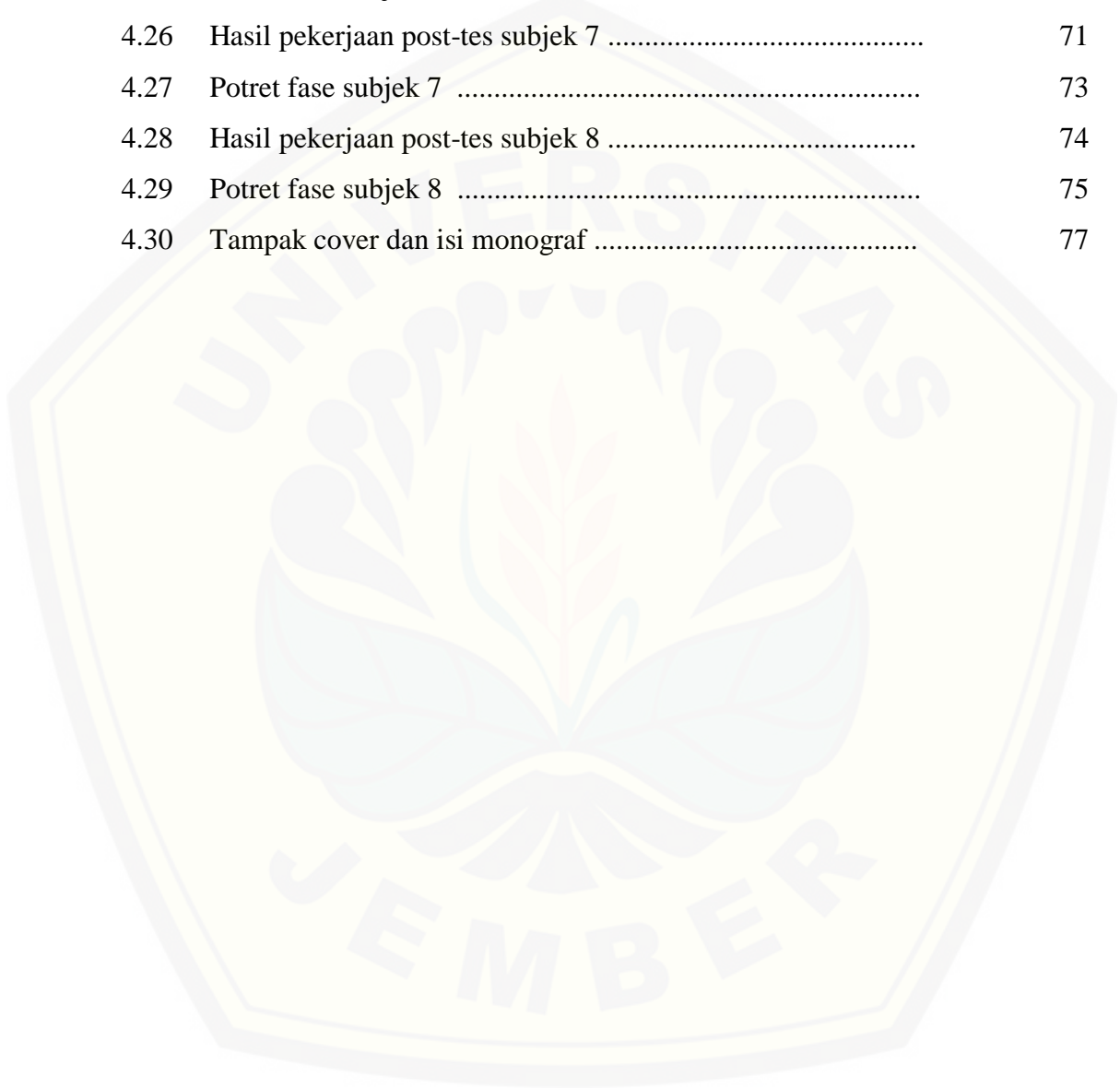
DAFTAR TABEL

	Halaman
2.1 Sintaks Problem-Based Learning.....	13
3.1 Kriteria koefisien korelasi validitas instrumen.....	25
3.2 Kriteria koefisien korelasi reliabilitas instrumen.....	26
4.1 Rekapitulasi hasil validasi tes kemampuan berpikir kombinatorial	38
4.2 Uji homogenitas	42
4.3 Mean hasil pre-tes	43
4.4 Independent hasil t-tes pre-tes	43
4.5 Identitas observer	51
4.6 Tabel pelaksanaan pembelajaran di kelas kontrol dan eksperimen	52
4.7 Normality post-tes	56
4.8 Mean hasil post-tes	57
4.9 Independen sampel t-tes	57

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
2.1 Contoh <i>r-Dynamic Vertex Coloring</i>	9
3.1 bagan penelitian <i>Mixed Methods</i> dengan <i>sequential eksploratory design</i>	21
3.2 Bagan Rancangan penelitian	21
4.1 Distribusi level berpikir kombinatorial hasil pre-tes kelas kontrol	33
4.2 Distribusi level berpikir kombinatorial hasil pre-tes kelas eksperimen	34
4.3 Distribusi level berpikir kombinatorial hasil post-tes kelas kontrol	34
4.4 Distribusi level berpikir kombinatorial hasil post-tes kelas eksperimen	35
4.5 Contoh hasil pekerjaan mahasiswa level 3	36
4.6 Contoh hasil pekerjaan mahasiswa level 4	37
4.7 Contoh hasil pekerjaan mahasiswa level 5	37
4.8 Validasi 1	38
4.9 Validasi 2	39
4.10 Peta konsep materi <i>r-dynamic vertex coloring</i>	45
4.11 Cover RPS	48
4.12 Tampak cover dan isi LKM	49
4.13 Gambar tes (Pre-tes dan post-tes)	50
4.14 Hasil pekerjaan post-tes subjek 1	59
4.15 Potret fase subjek 1	61
4.16 Hasil pekerjaan post-tes subjek 2	61
4.17 Potret fase subjek 2	62
4.18 Hasil pekerjaan post-tes subjek 3.....	63
4.19 Potret fase subjek 3	64

4.20	Hasil pekerjaan post-tes subjek 4	64
4.21	Potret fase subjek 4	66
4.22	Hasil pekerjaan post-tes subjek 5	66
4.23	Potret fase subjek 5	68
4.24	Hasil pekerjaan post-tes subjek 6	68
4.25	Potret fase subjek 6	70
4.26	Hasil pekerjaan post-tes subjek 7	71
4.27	Potret fase subjek 7	73
4.28	Hasil pekerjaan post-tes subjek 8	74
4.29	Potret fase subjek 8	75
4.30	Tampak cover dan isi monograf	77



DAFTAR DIAGRAM

	Halaman
4.1 Distribusi hasil pre-tes kemampuan berpikir kombinatorial mahasiswa di kelas kontrol	4.1
4.2 Distribusi hasil pre-tes kemampuan berpikir kombinatorial mahasiswa di kelas eksperimen	42
4.3 Distribusi hasil post-tes kemampuan berpikir kombinatorik kelas kontrol	55
4.4 Distribusi hasil post-tes kemampuan berpikir kombinatorik kelas eksperimen	56
4.5 Distribusi hasil observasi penerapan <i>Problem based learning</i> subjek pada kelas eksperimen	58

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran A (Matriks Penelitian)

Lampiran B (RPS & RPP)

Lampiran C (Lembar Validasi RPP)

Lampiran D (LKM)

Lampiran E (Monograf)

Lampiran F (Lembar validasi LKM)

Lampiran G (Rubrik penilaian LKM)

Lampiran H (Lembar observasi)

Lampiran I (Lembar validasi observasi)

Lampiran J (Pedoman wawancara)

Lampiran K (Lembar validasi Pedoman wawancara)

Lampiran L (Hasil Validasi)

Lampiran M (Paper, Hasil turnyitin, sertifikat, LoA)

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Pendidikan merupakan suatu bagian yang tidak dapat di pisahkan dalam kehidupan manusia . Di dalam pendidikan begitu banyak terkandung nilai positif yang merupakan pembangun kepribadian dan jati diri individu menjadi manusia seutuhnya. Setiap manusia di harapkan mampu menjadi individu yang memiliki kematangan dalam kecerdasan spiritual, emosional dan intelektual.

Dewasa ini Pendidikan di Indonesia semakin maju dengan berbagai aspek pendukungnya , baik itu lembaga kependidikan, tenaga pendidik maupun sarana dan prasarana pendukung lainnya. Perwujudan kecerdasan bangsa sangat di tentukan oleh sistem pendidikan yang terdapat di Indonesia. Dengan sistem pendidikan yang tertata dengan begitu baiknya dalam menyambut tujuan pendidikan maka tujuan pendidikan nasional dapat terwujud dengan semestinya.

Seperti yang tertuang dalam Undang-undang RI Nomor 20 Tahun 2003 Tentang Sistem Pendidikan Nasional Pasal 1 yang menegaskan bahwa Pendidikan adalah : Usaha sadar dan terencana untuk mewujudkan suasana belajar dan proses pembelajaran agar peserta didik secara aktif mengembangkan potensi dirinya untuk memiliki kekuatan spiritual keagamaan, pengendalian diri, kepribadian, kecerdasan, akhlak mulia, serta keterampilan yang diperlukan dirinya, masyarakat, bangsa dan negara.

Bertalian dengan hal tersebut standar nasional pendidikan yang tertuang dalam Permenristek no 44 tahun 2015 tentang Standar nasional Perpendidikan tinggi (SNPT) pasal 1 ayat 2 yang menegaskan bahwa Standar Nasional Pendidikan adalah : kriteria minimal tentang pembelajaran pada jenjang pendidikan tinggi di perpendidikan tinggi di seluruh wilayah hukum Negara Kesatuan Republik Indonesia. Kemudian didukung oleh perpres no 8 tahun 2012 tentang KKNI pasal 1 ayat 1 yang menegaskan bahwa Kerangka Kualifikasi Nasional Indonesia, yang selanjutnya di singkat KKNI, adalah kerangka penjenjangan kualifikasi kompetensi yang dapat menyandingkan, menyetarakan, dan mengintegrasikan antara bidang pendidikan dan bidang pelatihan kerja serta pengalaman kerja dalam rangka

pemberian pengakuan kompetensi kerja sesuai dengan struktur pekerjaan di berbagai sektor.

Pendidikan berjalan beriringan bersama waktu yang terus berputar dan jaman yang terus berlalu menjadikan pendidikan melekat pada setiap individu-individu manusia. Sehingga pendidikan menjadi sebuah syarat penting dalam pembangunan karakter manusia. Di jaman sekarang ini pendidikan menjadi semakin sistematis dengan ilmu yang di pelajari mulai dari ilmu pengetahuan sosial, ilmu pengetahuan alam, matematika, bahasa dan berbagai cabang ilmu lainnya.

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu yang memiliki keterkaitan pada beberapa cabang ilmu lainnya. Bertalian dengan pandangan tersebut maka implementasi matematika dalam kehidupan terlihat nyata, Khususnya untuk teori *Graph* dalam matematika yang memiliki peranan penting jika diterapkan dalam bidang kehidupan. Misalnya dengan *vertex coloring* dalam aplikasinya kita dapat menentukan sistem penyimpanan bahan kimia berbahaya, membuat jadwal pemindahan binatang di kebun binatang, pembudidayaan ikan nila dan masih banyak kegunaan dari teori tersebut.

Teori *Graph* sangat di perlukan dalam kehidupan, sehingga dalam pendidikan tinggi teori *Graph* mendapat tempat dalam mata kuliah matematika diskrit yang terdapat pada beberapa program studi di fakultas dalam lembaga pendidikan tinggi. Di dalam perkuliahan dengan materi teori *Graph* khususnya *r-dynamic vertex coloring* dibutuhkan kemampuan berpikir kombinatorial (*combinatorial thinking*) yang merupakan keterampilan yang dibutuhkan pebelajar dalam menempuh kajian dalam kombinatorik khususnya dalam teori graf.

Perkuliahan dengan materi teori graf dalam kajian *r-dynamic vertex coloring* dan kemampuan berpikir kombinatorial (*combinatorial thinking*) memiliki sebuah keterkaitan karena jika menempuh mata kuliah dengan kajian tersebut maka sangat di butuhkan kemampuan berpikir kombinatorial. Dengan demikian dalam perkuliahan di perlukan strategi dan rancangan yang tepat untuk menumbuhkan dan mengoptimalkan kemampuan berpikir kombinatorial mahasiswa.

Perangkat pembelajaran yang di persiapkan dan digunakan dalam pelaksanaan pembelajaran haruslah memiliki hasil bermakna dalam proses dan hasil perkuliahan mahasiswa. Perangkat pembelajaran tersebut di harapkan mampu mengembangkan kemampuan berpikir kombinatorial mahasiswa. Dengan demikian Perangkat pembelajaran yang di rancang haruslah di buat dengan seksama agar tujuan mampu menumbuhkan dan mengembangkan kemampuan keterampilan berpikir kombinatorial mahasiswa.

Solusi yang di tawarkan oleh penulis adalah dengan merancang perangkat pembelajaran berupa rencana pembelajaran, lembar kerja dan mahasiswa (LKM) pada materi *r-dynamic vertex coloring* dengan berbasis *Problem based Learning* (PBL). Berdasarkan solusi tersebut maka penulis berasumsi bahwa rencana pembelajaran, lembar kerja mahasiswa (LKM) tersebut dapat memberikan pengaruh yang baik dalam meningkatkan perkembangan kemampuan berpikir kombinatorial mahasiswa.

Pelaksanaan pembelajaran dengan menggunakan perangkat pembelajaran yang mengacu pada model *Problem-based Learning* dapat digunakan untuk melihat kemampuan berpikir kombinatorial mahasiswa dengan di tuangkan dalam sebuah potret fase berdasarkan indikator yang terdapat dalam kemampuan berpikir kombinatorial. Dengan demikian pada pelaksanaan penelitian ini akan menghasilkan sebuah monograf hasil dari pekerjaan mahasiswa dan sesuai kebutuhan peneliti dalam menunjang penelitian ini.

Berdasarkan uraian tersebut di atas maka penulis perlu untuk melakukan penelitian lebih lanjut. Olehnya itu, penulis mengangkat judul Analisis Kemampuan berpikir kombinatorial Mahasiswa Dalam Menyelesaikan Kajian *r-Dynamic Vertex Coloring* Dan Penerapan *Problem Based Learning* (PBL) Untuk Meningkatkan Keterampilan Kombinatorialnya.

1.2 Rumusan Masalah

Adapun permasalahan yang dapat dirumuskan dari penelitian ini adalah :

1. Bagaimanakah level kemampuan berpikir kombinatorial mahasiswa dalam menyelesaikan permasalahan dalam kajian *r-dynamic vertex coloring* ?

2. Bagaimanakah penerapan *Problem Based Learning* (PBL) dapat meningkatkan kemampuan berpikir kombinatorial mahasiswa dalam menyelesaikan masalah dalam kajian *r-dynamic vertex coloring*?
3. Bagaimana potret fase kemampuan berpikir kombinatorial mahasiswa pada kajian *r-dynamic vertex coloring*?
4. Bagaimanakah bentuk monograf hasil penerapan perangkat pembelajaran *Problem based Learning* pada kajian *r-dynamic vertex coloring*?

1.3 Tujuan Penelitian

Penelitian yang kami lakukan ini bertujuan :

1. Untuk mengetahui kemampuan berpikir kombinatorial mahasiswa dalam menyelesaikan permasalahan kajian *r-dynamic vertex coloring*
2. Untuk mengetahui penerapan *Problem Based Learning* (PBL) dalam meningkatkan keterampilan kombinatorial mahasiswa pada kajian *r-dynamic vertex coloring*
3. Untuk mengetahui potret fase kemampuan berpikir kombinatorial mahasiswa dalam kajian *r-dynamic vertex coloring*
4. Untuk menentukan bentuk monograf penerapan *Problem based Learning* pada kajian *r-dynamic vertex coloring*

1.4 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan memberikan manfaat terhadap perbaikan kualitas pendidikan dan perkuliahan, di antaranya :

- a) Bagi peneliti, Memperluas wawasan peneliti dalam pembuatan perangkat pembelajaran dalam perkuliahan khususnya kajian dalam teori graf.
- b) Bagi dosen, dapat meningkatkan dan mengembangkan keterampilan dosen dalam membuat inovasi dalam pembuatan perangkat pembelajaran yakni, Dapat menghasilkan perangkat pembelajaran berbasis *Problem based learning* (PBL) terkhusus untuk kajian *r-dynamic vertex coloring* sehingga dapat meningkatkan kualitas proses perkuliahan.

- c) Bagi mahasiswa, dapat mengembangkan pemahaman terhadap kajian *r-dynamic vertex coloring* dan menumbuhkan kemampuan berpikir kombinatorialnya.
- d) Bagi universitas, dapat membangun minat dosen dalam mengembangkan kreatifitas pengembangan perangkat pembelajaran berdasarkan model *Problem Based Learning*.
- e) Bagi peneliti lain, sebagai referensi dalam pengembangan penelitian dengan bidang kajian sejenis.

1.5 Spesifikasi Perangkat

- a) Lembar kerja Mahasiswa (LKM) pada penelitian ini memiliki spesifikasi berisi permasalahan terkait *r-dynamic vertex coloring* yang mengacu pada komponen dalam model *Problem-based Learning* (PBL).
- b) Monograf yang dihasilkan merupakan hasil dari pekerjaan mahasiswa dalam menyelesaikan permasalahan dalam kajian *r-dynamic vertex coloring* dan sesuai dengan kebutuhan peneliti dalam menunjang penelitian.

1.6 Kebaruan Penelitian

- a) Pengembangan monograf pada kajian *r-dynamic vertex coloring* dalam teori graf. Monograf ini berisi materi pengembangan matematika pendidikan tinggi pada mata kuliah matematika diskrit khususnya kajian *r-dynamic vertex coloring* yang mana menggunakan theorema dalam mencari bilangan kromatik dari pewarnaan titik dinamis graf operasi corona. Hal ini dijadikan acuan peneliti dalam menganalisis kemampuan berpikir kombinatorial mahasiswa.
- b) Permasalahan *r-dynamic vertex coloring* dalam bentuk soal dengan level berbeda yang dibuat oleh peneliti, sehingga memudahkan dalam menganalisis kemampuan berpikir kombinatorial mahasiswa.
- c) Penerapan model pembelajaran *Problem-based Learning* (PBL) agar mahasiswa menemukan pewarnaan graf *r-dynamic vertex coloring*.



BAB 2 KAJIAN PUSTAKA

2.1 Kemampuan berpikir kombinatorial (*combinatorial thinking*)

Proses berpikir kombinatorial adalah aspek khusus dari pemikiran matematis. Proses berpikir kombinatorial erat kaitannya dengan usaha siswa dalam memecahkan masalah, salah satunya yaitu memecahkan masalah matematika, Menurut (Grauman, 2002). Pemikiran kombinatorik yaitu sebagai cara untuk memecahkan masalah. Peserta didik harus menggunakan pemikiran kombinatorik dan menemukan cara yang sistematis untuk memastikan bahwa semua kemungkinan telah di bahas.

Kemampuan *combinatorial thinking* menurut Karplus (dalam Nur, 2013) adalah kemampuan yang ditandai dengan siswa dapat menyusun pasangan objek dengan objek lain berdasarkan syarat yang diberikan serta mampu mempertimbangkan hal yang mungkin dan yang tidak mungkin. Sedangkan Widiyastuti dan Suci (2017) mengatakan bahwa kemampuan berpikir kombinatorial adalah salah satu kemampuan dalam perkembangan kognitif pada tahap operasional formal yang ditandai dengan siswa dapat mempertimbangkan seluruh alternatif cara penyelesaian yang mungkin dalam situasi tertentu.

Rezaie (2011), mengidentifikasi empat tahap dalam proses berpikir kombinatorial. Adapun tahap tersebut adalah sebagai berikut.

1. Identifikasi beberapa masalah

Pada tahap ini peserta didik di harapkan menemukan dengan lebih teliti permasalahan yang disajikan dalam soal. Peserta didik mulai memahami permasalahan yang terdapat dalam soal. Misalnya dalam penelitian ini mengambil materi pewarnaan titik dinamis pada graf maka peserta didik digarapkan sudah mengetahui kardinalitas titik dan sisi dari graf yang dimaksud.

2. Pemahaman kembali masalah yang di temukan

Tahap ini mengharapakan peserta didik agar lebih memahami permasalahan yang telah di temukannya pada tahap pertama. Pada tahap ini peserta didik sudah mempunyai pemahaman untuk mencoba menyelesaikan soal meski belum sempurna. Misalnya ketika diminta untuk memberikan pewarnaan pada graf beserta

fungsinya maka peserta didik sudah mampu memberikan warna sesuai dengan definisi yang di maksud pada graf tersebut.

3. Pemaparan masalah dengan sistematis

Pada tahap ini peserta didik diharapkan dapat memaparkan masalah yang telah ditemukan dan menuliskannya dengan sistematis. Peserta didik juga sudah mampu menyelesaikan dan menemukan solusi dari permasalahan yang terdapat dalam soal. Misalnya peserta didik telah mampu menemukan pewarnaan titik dinamis beserta fungsinya secara utuh untuk sebuah graf tertentu.

4. Pengubahan masalah menjadi permasalahan kombinatorial lain

Pada tahap ini peserta didik di harapkan mampu mengubah soal yang di terima menjadi penyelesaian dalam masalah kombinatorial lain. Peserta didik mampu menjelaskan tahap penyelesaiannya secara sistematis sesuai dengan konsep yang ada. Sehingga, pada tahap ini peserta didik tidak hanya mampu menyelesaikan soal, namun peserta didik juga mampu memberikan penjelasan dari hasil penyelesaiannya.

Kombinatorik adalah salah satu bidang matematika yang berkaitan dengan perhitungan, baik sebagai sarana dan tujuan dalam memperoleh hasil dan karakterisasi properti dari struktur terbatas (Dafik 2018). Graumann (2002) menganggap *combinatorial thinking* sebagai alat untuk memecahkan masalah. Dalam pandangan tersebut, *combinatorial thinking* adalah aspek khusus dari pemikiran matematika.

Menurut Dafik (2018) terdapat lima faktor yang mempengaruhi keterampilan *combinatorial thinking*, dimana masing-masing indikator memiliki beberapa indikator yang berbeda. Indikator dan sub indikator dari *combinatorial thinking* disajikan dalam tabel 2.1.

Tabel 2.1 Indikator yang Mempengaruhi Kemampuan berpikir kombinatorik

Indikator	Sub Indikator
Mengidentifikasi beberapa kasus	a. Mengidentifikasi properti/ karakteristik dari masalah b. Menerapkan beberapa kasus

Indikator	Sub Indikator
Mengenali pola dari semua kasus	<ul style="list-style-type: none"> a. Mengidentifikasi pola dari penyelesaian kasus b. Memperluas pola dari penyelesaian kasus yang diperoleh
Mengeneralisasi semua kasus	<ul style="list-style-type: none"> a. Menerapkan simbolisasi matematika b. Menghitung kardinalitas c. Mengembangkan algoritma
Membuktikan secara matematis	<ul style="list-style-type: none"> a. Melakukan perhitungan argumen b. Menguji algoritma c. Mengembangkan sebuah bijeksi d. Menguji bijeksi e. Menerapkan pembuktian induktif, deduktif, dan kualitatif
Mempertimbangkan dengan masalah kombinatorial lain	<ul style="list-style-type: none"> a. Melakukan interpretasi b. Mengusulkan masalah terbuka c. Mengetahui masalah kombinatorial baru d. Menemukan aplikasi yang potensial

Berdasarkan uraian mengenai indikator proses berpikir kombinatorial tersebut dapat dirumuskan indikator-indikator yang akan di gunakan dalam penelitian ini pengembangan indikator tersebut berdasarkan pendapat Dafik (2018) dan disesuaikan dengan materi pewarnaan titik dinamis (*r-Dynamic coloring*).

Tabel 2.2 Pengembangan Indikator kemampuan berpikir kombinatorial

Faktor	Indikator	Pengembangan Indikator berdasarkan Materi <i>r-dynamic vertex coloring</i> .
Mengidentifikasi beberapa kasus	<ul style="list-style-type: none"> a. Mengidentifikasi properti/ karakteristik dari masalah b. Menerapkan beberapa kasus 	Membedakan contoh dan bukan contoh dari graf <i>r-dynamic vertex coloring</i> .

Faktor	Indikator	Pengembangan Indikator berdasarkan Materi <i>r-dynamic vertex coloring</i> .
		Menerapkan konsep awal yang telah dipahami mahasiswa pada graf sederhana.
Mengenali pola dari semua kasus	a. Mengidentifikasi pola dari penyelesaian kasus b. Memperluas pola dari penyelesaian kasus yang diperoleh	Mengetahui pola pewarnaan graf berdasarkan <i>r-dynamic vertex coloring</i> . Melakukan ekspansi graf sebelumnya berdasarkan <i>r-dynamic vertex coloring</i> .
Mengeneralisasi semua kasus	a. Menerapkan simbolisasi matematika b. Menghitung kardinalitas c. Mengembangkan algoritma	Memberikan simbol pada graf. Menghitung kardinalitas dari suatu graf. Menghitung kardinalitas dari suatu graf yang diekspan.
Membuktikan secara matematis	a. Melakukan perhitungan argumen b. Menguji algoritma c. Mengembangkan sebuah bijeksi d. Menguji bijeksi e. Menerapkan pembuktian induktif,	Menentukan kardinalitas dari suatu graf yang diekspan sebanyak n . Membuktikan kardinalitas yang telah ditemukan. Membuat fungsi titik, fungsi sisi, dan fungsi bobot suatu graf berdasarkan <i>r-dynamic vertex coloring</i> . Menguji fungsi titik, fungsi sisi, dan fungsi bobot suatu graf berdasarkan <i>r-dynamic vertex coloring</i> .

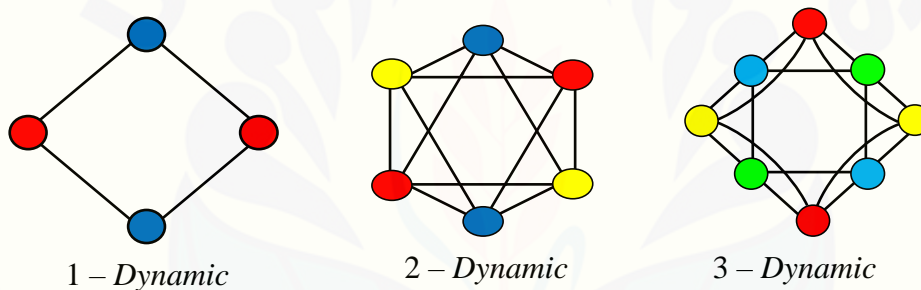
Faktor	Indikator	Pengembangan Indikator berdasarkan Materi <i>r-dynamic vertex coloring</i> .
	deduktif, dan kualitatif	Membuktikan fungsi titik, fungsi sisi, dan fungsi bobot suatu graf berdasarkan <i>r-dynamic vertex coloring</i> .
Mempertimbangkan dengan masalah kombinatorial lain	a. Melakukan interpretasi b. Mengusulkan masalah terbuka c. Mengetahui masalah kombinatorial baru d. Menemukan aplikasi yang potensial	Menjelaskan alur pengerjaan tes yang telah diberikan. Menemukan masalah terbuka yang berkaitan dengan <i>r-dynamic vertex coloring</i> . Mengetahui masalah kombinatorial baru yang berkaitan dengan <i>r-dynamic vertex coloring</i> Menentukan aplikasi pewarnaan graf berdasarkan <i>r-dynamic vertex coloring</i> dalam kehidupan sehari – hari.

2.2 Pewarnaan Titik Dinamis (*r-dynamic vertex coloring*)

Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf yang sederhana, terhubung, dan tidak berarah dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E , serta $d(v)$ adalah derajat dari setiap titik v di $V(G)$. Derajat maksimum dan minimum dari graf G masing-masing di lambangkan dengan $\Delta(G)$ dan $\delta(G)$. Dengan k warna pada graf G , kita memetakan $c : V(G) \Rightarrow S$, dimana $|S| = k$ sehingga setiap dua simpul yang berdekatan memiliki warna yang berbeda. Sebuah *r*-dinamis dengan k warna pada graf G sehingga $|c(N(v))| \geq \min\{r, d(v)\}$ untuk setiap titik v di $V(G)$ dimana $N(v)$ adalah lingkungan v dan $c(S) = \{c(v) : v \in S\}$ untuk setiap titik bagian dari S (Jahanbekam, et al. 2014). Bilangan kromatik *r*-dinamis di tuliskan

dengan $\chi_r(G)$ adalah nilai minimum k sehingga graf G memiliki r -dinamis dengan k -warna.

Lai dan Montgomery (2012) menyatakan sebuah k -pewarnaan titik di katakan pewarnaan titik dinamis jika untuk setiap titik $v \in V(G)$ dengan $d(v) \geq 2$. Titik yang saling bertetangga mempunyai dua warna yang berbeda. Jumlah warna r -dynamic dari graf G dinotasikan $\chi_r(G)$ merupakan warna minimum k pada graf G . Jumlah berwarna 1- *Dynamic* pada Graf G adalah nilai warna yang di perkenalkan sebagai *Chromatic Number* dan dinotasikan $\chi_d(G)$ dan untuk jumlah *Dynamic* ≥ 2 pada graf G adalah nilai warna yang diperkenalkan sebagai *r-Dynamic Chromatic Number*.



Gambar 2.1. contoh 1,2,3 *r-Dynamic Vertex Coloring*

2.3 Model Pembelajaran *Problem-Based Learning*

2.3.1 Definisi Pembelajaran Model *Problem-Based Learning*

Pembelajaran Model *Problem-Based Learning* merupakan salah satu strategi pembelajaran yang menggunakan masalah dunia nyata sebagai suatu konteks bagi peserta didik untuk belajar tentang berpikir kritis dan juga tentang keterampilan pemecahan masalah, serta untuk memperoleh pengetahuan dan konsep yang esensi dalam pengetahuan yang mencakup pengumpulan informasi berkaitan dengan pertanyaan, menyintesa, dan mempresentasikan penemuannya pada orang lain. Peserta didik terlibat dalam penyelidikan untuk pemecahan masalah yang mengintegrasikan keterampilan dan konsep dari berbagai isi materi pelajaran.

Uden and Beaumont (dalam Ismail,dkk, 2018) PBL is a problem model of constructivist learning that helps students to solve problems and to think. Ben dan Erickson (dalam komalasari, 2010 : 59) menegaskan bahwa *Problem Based Learning* merupakan strategi pembelajaran yang melibatkan peserta didik dalam memecahkan masalah dengan mengintegrasikan berbagai konsep dan keterampilan dari berbagai disiplin ilmu. Strategi ini meliputi mengumpulkan dan menyatukan informasi, dan mempresentasikan penemuan. Dalam *Problem based Learning* kemampuan berpikir peserta didik dioptimalisasikan melalui proses kerja kelompok yang sistematis sehingga peserta didik dapat memberdayakan, mengasah, menguji dan mengembangkan kemampuan berpikirnya secara berkesinambungan.

Arends (dalam Hosnan, 2014; 295) mendefinisikan *Problem-based Learning* sebagai model pembelajaran dengan pendekatan pembelajaran peserta didik pada masalah autentik sehingga peserta didik dapat menyusun pengetahuan sendiri, menumbuhkembangkan keterampilan yang lebih tinggi dan mencari/menggali informasi (*inquiry*), memandirikan peserta didik dan meningkatkan kepercayaan diri sendiri. Model *Problem-based Learning* ini menggunakan masalah kehidupan nyata sebagai sesuatu yang di pelajari peserta didik untuk melatih dan meningkatkan keterampilan berpikir kritis dan pemecahan masalah serta mendapatkan pengetahuan konsep-konsep penting dan pendidik membantu peserta didik mencapai ketrampilan mengarahkan diri.

Berdasarkan pendapat diatas, peneliti mendefinisikan bahwa *Problem-based Learning* merupakan model pembelajaran yang menggunakan permasalahan nyata sebagai fokus utama dan sebagai sarana bagi peserta didik untuk mengembangkan keterampilan dalam menyelesaikan masalah, berpikir kritis dan kreatif serta membangun pengetahuan baru melalui penyesalan yang bersifat terbuka (*open ended*).

2.3.2 Tujuan Pembelajaran Model *Problem-Based Learning*

Secara umum tujuan pembelajaran yaitu untuk membantu peserta didik mendapatkan berbagai pengalaman dan mengubah tingkah laku peserta didik, baik dari segi kualitas maupun kuantitas. Perubahan tingkah laku meliputi pengetahuan,

keterampilan dan nilai atau norma yang memiliki fungsi sebagai pengendali sikap dan perilaku peserta didik.

Menurut Kurniasih & Sani (2015: 48) tujuan utama *Problem-based Learning* adalah untuk menggali daya kreativitas peserta didik dalam berpikir dan memotivasi peserta didik untuk terus belajar. Tujuan *Problem-based Learning* tidak untuk menyampaikan pengetahuan dalam jumlah besar pada peserta didik, namun pada pengembangan kemampuan berpikir dan kemampuan pemecahan masalah dan sekaligus mengembangkan kemampuan peserta didik untuk secara aktif membangun pengetahuan sendiri serta untuk mengembangkan kemandirian belajar dan keterampilan sosial peserta didik. Kemandirian belajar dan keterampilan sosial peserta didik dapat terbentuk ketika peserta didik berkolaborasi untuk mengidentifikasi informasi, strategi dan sumber belajar yang relevan untuk menyelesaikan masalah.

2.3.3 Prinsip Pembelajaran Model *Problem-Based Learning*

Menurut Faturrohman (2015: 114) *Problem-based Learning* merupakan model pembelajaran yang mempunyai prinsip utama menggunakan masalah nyata sebagai sarana bagi peserta didik untuk mengembangkan pengetahuan peserta didik untuk mengembangkan pengetahuan sekaligus mengembangkan kemampuan berpikir kritis dan kemampuan pemecahan masalah. Masalah nyata adalah masalah yang terdapat dalam kehidupan sehari-hari dan bermanfaat langsung jika diselesaikan.

Pemilihan atau penentuan masalah nyata dapat dilakukan oleh pendidik maupun peserta didik yang disesuaikan kompetensi dasar tertentu. Masalah bersifat terbuka (*open-ended problem*) yaitu masalah yang memiliki banyak jawaban atau strategi penyelesaian yang mendorong keingintahuan peserta didik untuk mengidentifikasi strategi dan solusi tersebut. Masalah itu juga bersifat terstruktur dengan baik (*ill-structured*) yang tidak dapat diselesaikan secara langsung dengan cara menerapkan rumus atau strategi tertentu, namun membutuhkan informasi lanjut untuk memahami dan perlu mengkombinasikan berapa strategi atau bahkan mengkreasi strategi sendiri untuk menyelesaikannya.

2.3.4 Karakteristik Pembelajaran Model *Problem-Based Learning*

Problem-based Learning memiliki karakteristik tersendiri yang membedakan dengan model pembelajaran yang lain. *Problem-based Learning* berpotensi memberikan pengalaman belajar yang lebih menarik minat dan menyenangkan bagi peserta didik.

Karakteristik *Problem-based Learning* menurut beberapa sumber meliputi: (a) Belajar diawali dengan suatu masalah, (b) Masalah yang di berikan berhubungan dengan dunia nyata peserta didik atau integrasi konsep dan masalah dunia nyata, (c) Keterkaitan masalah dengan berbagai disiplin ilmu, (d) Penyelidikan yang dilakukan bersifat autentik, (e) Menghasilkan dan memamerkan hasil karya, (f) Adanya kolaborasi antar peserta didik, maupun peserta didik dengan pendidik, (g) Menggunakan kelompok kecil.

2.3.5 Sintaks Pembelajaran Model *Problem-based Learning*

Penerapan model pembelajaran *Problem-based Learning* terdiri atas lima langkah utama yang pada dasarnya dimulai dengan pendidik memperkenalkan kepada peserta didik situasi masalah dan diakhiri dengan penyajian dan analisis hasil kerja peserta didik. Kegiatan pembelajaran *Problem-based Learning* diawali dengan aktivitas peserta didik untuk menyelesaikan masalah nyata ditentukan atau disepakati. Proses penyelesaian masalah tersebut berimplikasi pada terbentuknya keterampilan peserta didik dalam menyelesaikan masalah dan berpikir kritis serta sekaligus membentuk pengetahuan baru. Tahapan-tahapan atau sintaks dalam pembelajaran *Problem-based Learning* menurut Magued Iskander (dalam Fathurrohman, 2015:116) pada tabel 2.1 berikut ini:

Tabel 2.3 Sintaks *Problem-based Learning*

Tahapan	Tahapan Pendidik
Tahap 1 Mengorientasikan peserta didik kepada masalah	Pendidik menjelaskan tujuan pembelajaran dan sarana atau logistik yang dibutuhkan. Pendidik memotivasi peserta didik untuk terlibat dalam aktivitas pemecahan masalah nyata yang dipilih atau di tentukan.

<p>Tahap 2</p> <p>Mengorganisasi peserta didik untuk belajar</p>	<p>Pendidik membantu peserta didik menentukan dan mengorganisasi tugas belajar yang berhubungan dengan masalah yang sudah di orientasikan pada tahap sebelumnya.</p>
<p>Tahap 3</p> <p>Membimbing penyelidikan individual maupun kelompok</p>	<p>Pendidik mendorong peserta didik untuk mengumpulkan informasi yang sesuai dan melaksanakan eksperimen untuk mendapatkan kejelasan yang di perlukan untuk menyelesaikan masalah.</p>
<p>Tahap 4</p> <p>Mengembangkan dan menyajikan hasil karya</p>	<p>Pendidik membantu peserta didik untuk berbagi tugas dan merencanakan atau menyiapkan karya yang sesuai sebagai hasil pemecahan masalah dalam bentuk laporan, video atau model.</p>
<p>Tahap 5</p> <p>Menganalisis dan mengevaluasi proses pemecahan masalah</p>	<p>Pendidik membantu peserta didik untuk melakukan refleksi atau evaluasi terhadap proses pemecahan masalah yang dilakukan</p>

Sumber: Magued (2008) dalam Faturrohman (2015)

Tahapan-tahapan pembelajaran *Problem-based Learning* yang di laksanakan secara sistematis berpotensi dapat mengembangkan kemampuan peserta didik dalam menyelesaikan masalah dan sekaligus dapat menguasai pengetahuan yang sesuai dengan kompetensi dasar tertentu.

2.3.6 Kelebihan dan kelemahan Pembelajaran *Problem-based Learning*

Problem-based Learning sebagai salah satu model pembelajaran memiliki berbagai kelebihan, namun demikian juga tidak lepas dari adanya kelemahan yang perlu menjadi pertimbangan dalam menerapkannya. Menurut Kurniasih & sani (2015: 49) keunggulan model *Problem-based Learning*, yaitu:

- a. Mengembangkan pemikiran kritis dan keterampilan kreatif peserta didik,
- b. Meningkatkan kemampuan memecahkan masalah para peserta didik dengan sendirinya,
- c. Meningkatkan motivasi peserta didik dalam belajar,
- d. Membantu peserta didik belajar untuk mentransfer pengetahuan dengan situasi yang serba baru,
- e. Mendorong peserta didik mempunyai inisiatif untuk belajar secara mandiri,
- f. Mendorong kreativitas peserta didik dalam pengungkapan penyelidikan masalah yang telah peserta didik lakukan,
- g. Terjadi pembelajaran yang bermakna,
- h. Peserta didik mengintegrasikan pengetahuan dan keterampilan secara simultan dan mengaplikasikannya dalam konteks yang relevan.
- i. Meningkatkan kemampuan berpikir kritis, menumbuhkan inisiatif peserta didik dalam bekerja, motivasi internal untuk belajar, dan dapat mengembangkan hubungan interpersonal dalam bekerja kelompok.
- j. Mengembangkan minat peserta didik untuk secara terus menerus belajar sekalipun belajar pada pendidikan formal telah berakhir.

Meskipun model pembelajaran ini terlihat baik dan sempurna dalam meningkatkan kemampuan serta kreativitas peserta didik, tapi tetap saja memiliki celah kelemahan (Sanjaya dalam Sutirman, 2013). Kelemahan *Problem-based Learning* meliputi: (Hobri, metodologi penelitian pengembangan (aplikasi pada penelitian pendidikan matematika), 2010)

- a. Peserta didik yang tidak memiliki minat atau tidak mempunyai kepercayaan bahwa masalah yang dipelajari dapat di pecahkan, maka mereka enggan untuk mencoba,
- b. Waktu pelaksanaan yang relatif panjang,
- c. Tanpa adanya pemahaman mengapa mereka berusaha untuk memecahkan masalah yang sedang di pelajari, maka mereka tidak akan belajar apa yang mereka ingin pelajari (pencapaian isi pembelajaran yang rendah).

Untuk mengatasi kelemahan pembelajaran berbasis masalah, pendidik hendaknya membuat persiapan yang matang sebelum menerapkannya dan

memberikan penjelasan yang detail agar peserta didik memahami permasalahan yang di hadapi dengan baik dan mampu menumbuhkan motivasi pada diri peserta didik agar mereka memiliki kepercayaan diri untuk berhasil.

2.3.7 Penilaian dan Evaluasi *Problem-based Learning*

Tidak ada teknik penilaian yang di berikan secara khusus pada pembelajaran model *Problem-based Learning*. Hal penting bagi dosen adalah dapat mengumpulkan informasi penilaian yang valid dan reliabel. Teknik penilaian dan evaluasi yang dipandang cocok untuk model pembelajaran *Problem-based Learning* adalah penilaian kerja (Husnan, 2014: 306) penilaian kerja dilakukan dalam bentuk cheklist dan skala sikap.

Setelah itu, penilaian proses dalam pembelajaran *Problem-based Learning* memungkinkan peserta didik menunjukkan apa yang mereka lakukan ketika berhadapan dengan situasi masalah nyata. Hobri (2010) menyebutkan 2 model *assesment* yang dapat di kembangkan pada *Problem-based Learning* yaitu *authentics assesment* dan *portofolio*. *authentics assesment* mengkondisikan peserta didik untuk melaksanakan peserta didik untuk melaksanakan tugas dengan situasi kehidupan sehari-hari, sedangkan *portofolio* yaitu menilai berdasarkan kumpulan pekerjaan peserta didik dan digunakan oleh peserta didik untuk membuat refleksi tentang kemampuannya.

Pembelajaran *Problem-based Learning* memberikan fasilitas pada peserta didik untuk mengembangkan keterampilan sosial atau keterampilan kolaboratifnya melalui aktivitas diskusi. Keterampilan ini (meliputi keterampilan bekerja sama, keterampilan interpersonal, dan peran aktif dalam kesuksesan kelompok) dapat dinilai melalui observasi.

2.4 Perangkat Pembelajaran

Perangkat pembelajaran yang dimaksud adalah Rencana pembelajaran semester (RPS), Lembar kerja mahasiswa (LKM).

2.4.1 Rencana Pembelajaran Semester (RPS)

Permenristek no 44 tahun 2015 tentang Standar nasional Pendidikan tinggi (SNPT) pasal 12 menjelaskan bahwa Perencanaan proses pembelajaran

disusun untuk setiap mata kuliah dan disajikan dalam rencana pembelajaran semester (RPS). Rencana pembelajaran semester (RPS) ditetapkan dan dikembangkan oleh dosen secara mandiri atau bersama dalam kelompok keahlian suatu bidang ilmu pengetahuan dan/atau teknologi dalam program studi.

2.4.2 Lembar Kerja Mahasiswa (LKM)

Lembar kerja mahasiswa (LKM) merupakan salah satu sarana untuk membantu dan mempermudah dalam kegiatan pembelajaran sehingga akan membantu efektifitas dalam pembelajaran. LKM yang disusun di rancang dan di kembangkan dengan mengacu pada model pembelajaran *Problem-based Learning*. Dalam melaksanakan diskusi dalam pembelajaran LKM di gunakan sebagai media untuk dapat mengemukakan pendapat dalam bentuk tulisan oleh mahasiswa.

Pembelajaran yang dilaksanakn dengan menggunakan LKM mengharuskan pendidik lebih berfungsi sebagai fasilitator, LKM memuat masalah-masalah berdasarkan kajian tertentu. Dengan demikian pendidik tidak perlu menjelaskan semua materi dan contoh-contoh soal secara mendetail kepada mahasiswa namun hanya berupa uraian singkat tentang materi pada kajian pembelajaran yang akan di sampaikan pada mahasiswa.

2.5 Tinjauan Penelitian Terdahulu

Penelitian yang membahas tentang *Problem-based Learning*, berpikir kombinatorial secara luas telah banyak di teliti. Namun tidak ada yang sama persis dengan penelitian yang akan dilaksanakan oleh peneliti. Beberapa penelitian tersebut yang relevan dengan penelitian ini.

1. Ammamiaritha, E. Syahputra, E. Surya. (2017) *Development of Learning Devices Oriented Problem Based Learning to Increase Combinatorial Thinking in Mathematical Problem Solving Ability*.
2. Murtikusuma, Randi Pratama (2014), *Pengembangan Perangkat pembelajaran Matematika Problem-based Learning untuk siswa kelas XI SMK Materi Barisan dan Deret*.
3. Tri utami , yudhi (2017), *Pengembangan Perangkat pembelajaran matematika berbasis Problem-based Learning bernuansa islami untuk mengukur kemampuan berpikir kritis siswa pada pokok bahasan barisan dan deret*.

4. Cahyati , Anggraeny Endah (2016) ,*Pengembangan perangkat pembelajaran matematika pendekatan saintifik model Problem-based Learning dan High order thinking materi barisan dan deret SMK X.*





BAB III METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian yang akan dilaksanakan menggunakan penelitian kombinasi (*mixed methods*). Penelitian ini merupakan pendekatan penelitian yang mengkombinasikan atau mengasosiasikan penelitian kuantitatif dan penelitian kualitatif. Pendekatan ini melibatkan asumsi-asumsi filosofis, aplikasi pendekatan kuantitatif dan kualitatif, serta pencampuran (*mixing*) kedua pendekatan tersebut dalam suatu penelitian.

Menurut Creswell, Plano Clark, Gutmann, and Hanson (dalam Naoko Taguchi, 2018), *mixed methods research* involves “the collection or analysis of both quantitative and qualitative data in a single study in which the data are collected concurrently or sequentially, are given priority, and involve the integration of data”.

Penelitian ini lebih kompleks dari sekedar mengumpulkan dan menganalisis dua jenis data karena melibatkan juga fungsi dari dua pendekatan secara kolektif sehingga kekuatan penelitian ini secara keseluruhan lebih besar jika dibandingkan dengan penelitian kuantitatif atau penelitian kualitatif. Penelitian kombinasi (*mixed methods*) yang dimaksud dalam penelitian ini akan dilaksanakan berupa penelitian kualitatif, kuantitatif dan kualitatif secara berurutan.

3.2 Definisi Operasional

Penelitian yang dilaksanakan memuat tiga variabel inti, yaitu antara lain:

Kemampuan berpikir kombinatorial merupakan sebuah keterampilan berpikir yang memungkinkan pebelajar mampu untuk menginvestigasi beberapa kasus dalam masalah graf, membuat dugaan sementara untuk setiap kasus yang identik, membuktikan hasil dugaan dengan membuat hipotesis untuk kasus identik graf, menggunakan hasil generalisasi untuk menghubungkan pada masalah kombinatorik yang berbeda dengan kasus sebelumnya. Penggunaan berpikir

kombinatorial diterapkan dalam kemampuan mahasiswa dalam menemukan pewarnaan titik dinamis dalam graf yang sudah ditemukan maupun graf baru dengan pewarnaan yang optimal.

Arends (dalam Hosnan, 2014; 295) mendefinisikan *Problem-based Learning* sebagai model pembelajaran dengan pendekatan pembelajaran peserta didik pada masalah autentik sehingga peserta didik dapat menyusun pengetahuan sendiri, menumbuhkembangkan keterampilan yang lebih tinggi dan mencari/menggali informasi (*inquiry*), memandirikan peserta didik dan meningkatkan kepercayaan diri sendiri. Model *Problem-based Learning* ini menggunakan masalah kehidupan nyata sebagai sesuatu yang di pelajari peserta didik untuk melatih dan meningkatkan keterampilan berpikir kritis dan pemecahan masalah serta mendapatkan pengetahuan konsep-konsep penting dan pendidik membantu peserta didik mencapai ketrampilan mengarahkan diri.

Konsep pewarnaan graf *r-dynamic vertex coloring* merupakan konsep lanjutan dari konsep *vertex coloring*. Konsep ini termotifasi dari sebuah pewarnaan titik yang selalu dinamis atau berubah sesuai dengan keadaan tertentu. Tidak seperti konsep pewarnaan titik biasa yang mengharuskan pewarnaan titik tetap pada sebuah keadaan graf, tetapi dalam konsep *r-dynamic vertex coloring* pewarnaan titik yang di berikan selalu dinamis berawal dari pewarnaan minimal hingga pewarnaan optimal dari sebuah graf. Lai dan Montgomery (2012) menyatakan sebuah *k*-pewarnaan titik di katakan pewarnaan titik dinamis jika untuk setiap titik $v \in V(G)$ dengan $d(v) \geq 2$. Titik yang saling bertetangga mempunyai dua warna yang berbeda. Jumlah warna *r-dynamic* dari graf G dinotasikan $\chi_r(G)$ merupakan warna minimum k pada graf G . Jumlah berwarna 1- *Dynamic* pada Graf G adalah nilai warna yang di perkenalkan sebagai *Chromatic Number* dan dinotasikan $\chi_d(G)$ dan untuk jumlah *Dynamic* ≥ 2 pada graf G adalah nilai warna yang diperkenalkan sebagai *r-Dynamic Chromatic Number*.

3.3 Subjek dan objek Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada tahun ajaran 2018/2019 tepatnya di semester Gasal. Tempat penelitian untuk melakukan uji coba terbatas adalah dua kelas perkuliahan (kelas eksperimen dan kelas kontrol) di FKIP Pendidikan Matematika Universitas Jember.

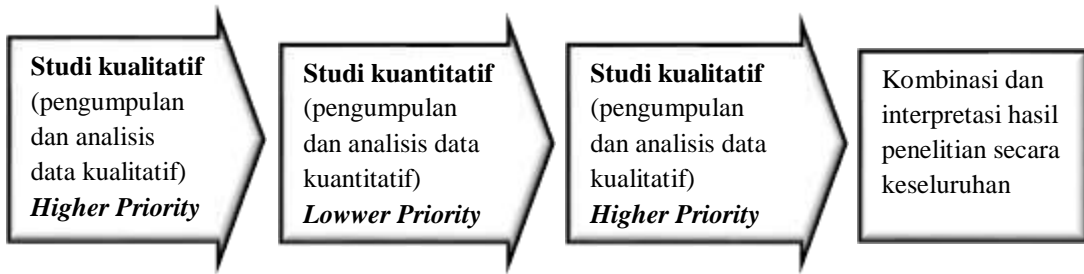
3.4 Desain Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode campuran yang menggabungkan metode penelitian kuantitatif dan kualitatif. Desain yang digunakan adalah Sequential explanatory: Quantitative data is collected first, followed by qualitative data that can explain the findings from quantitative data (e.g., after assessing pragmatic competence at group-level, following up on several participants to gain understanding about their characteristics).

Ciri khas dari desain *sequential* adalah peneliti mengkombinasikan pendekatan kuantitatif dan pendekatan kualitatif dalam penelitiannya secara bertahap (berurutan). *Sequential design* terdiri dari tiga macam , yaitu *sequential eksplanatory design*, *sequential eksploratory design*, dan *sequential transformative design*. Berdasarkan pengertian dari berbagai macam desain *sequential* tersebut maka peneliti memutuskan untuk menggunakan *sequential eksploratory design* dalam penelitian ini.

Creswel (dalam karunia 2015: 155) menjelaskan bahwa desain *sequential eksploratory* pada penelitian kombinasi, dicirikan dengan pengumpulan data dan analisis data kualitatif pada tahap pertama, dan diikuti dengan pengumpulan dan analisis data kuantitatif pada tahap kedua, guna membuat kesimpulan hasil penelitian pada tahap pertama. Prioritas utama pada desain *sequential eksploratory* lebih menekankan pada pengumpulan dan analisis data kualitatif. Proses pencampuran (*mixing*) terjadi ketika peneliti menghubungkan antara analisis data kualitatif dan pengumpulan data kuantitatif.

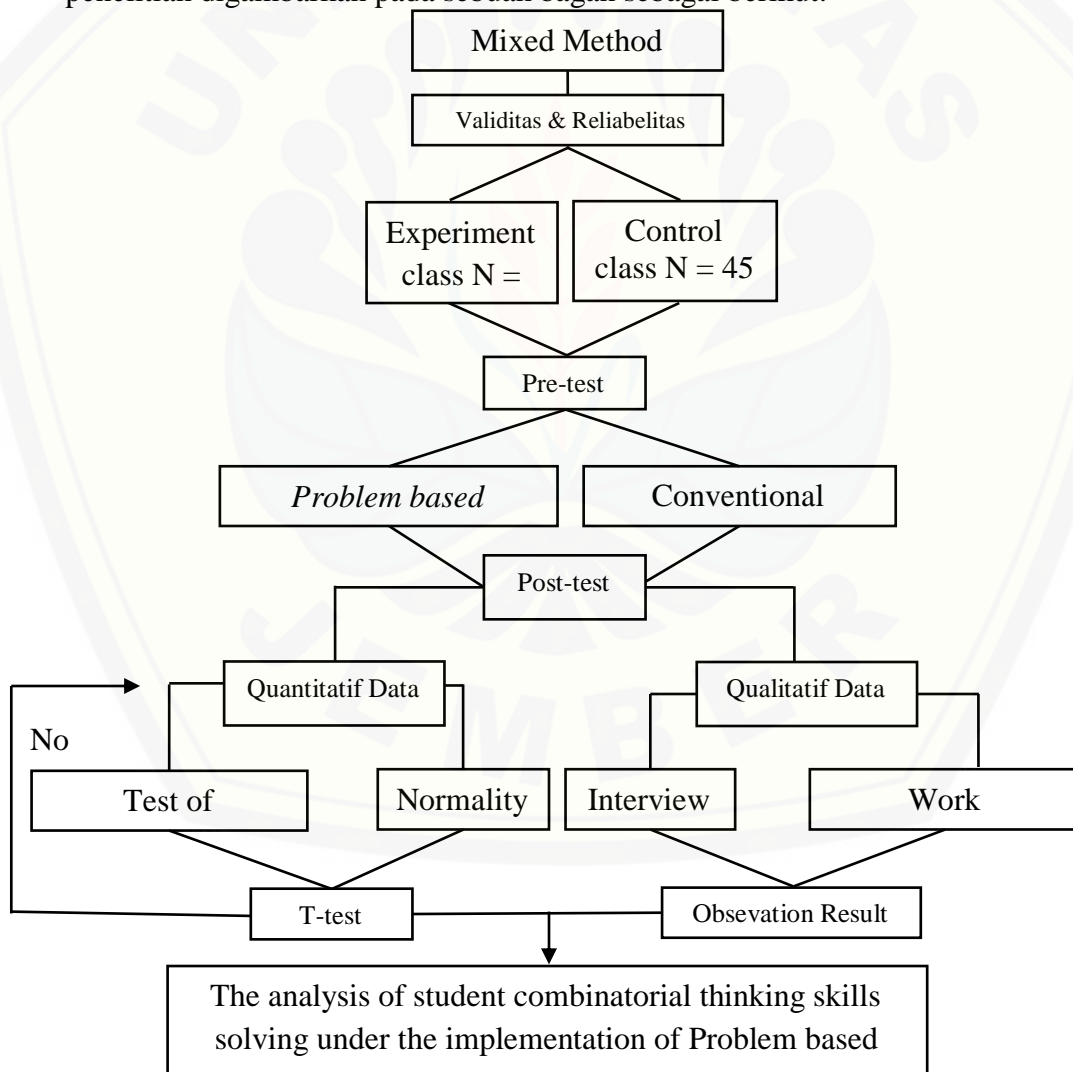
Berdasarkan penjelasan tersebut maka peneliti menggambarkan desain penelitian pada sebuah bagan di bawah ini:



Gambar 3.1 bagan penelitian *Mixed Methods* dengan *sequential exploratory design*

3.5 Rancangan Penelitian

Prosedur penelitian yang dilakukan terdiri tiga tahap sesuai dengan tahapan dalam desain penelitian, yaitu: studi pendahuluan (penelitian kualitatif), analisis kemampuan berpikir kombinatorial (penelitian kuantitatif), dan penerapan *Problem-based Learning* (penelitian kualitatif). Penjelasan prosedur penelitian digambarkan pada sebuah bagan sebagai berikut:



Gambar 3.1 Bagan rancangan penelitian

Berikut ini adalah peneliti yang juga menggunakan *mixed method* dalam penelitiannya.

1. Suntusia, Dafik, Hobri 2018 The effectiveness oresearch based learning in improving students' achievement in solving two-dimensional arithmetic sequence problems *International journal of instruction*. Vol 12 pp 17-32.
2. Tohir, M. Abidin, Z. Dafik. Hobri. 2018. Students creative thinking skills in solving two dimensional arithmetic series through research-based learning, *Journal of Physics: Conf. Series* 1008 (2018) 012072.
3. Hobri. Dafik. Hossain. 2018. The Implementation of Learning Together in Improving Students' Mathematical Performance. *International Journal of Instruction* e-ISSN: 1308-1470

3.5.1 Tahap Studi Pendahuluan

Studi pendahuluan dilaksanakan pada objek penelitian dengan menggunakan penelitian kualitatif dengan tujuan untuk mengetahui kemampuan dasar mahasiswa dalam mengikuti pembelajaran. Dengan melaksanakan studi pendahuluan yang dimaksud maka peneliti dapat menentukan tingkat pemberian masalah dalam tahap analisis kemampuan berpikir kombinatorial.

Tahap studi pendahuluan diawali dengan melaksanakan uji homogenitas bagi beberaoa kelas yang akan digunakan sebagai kelas penelitian, setelah uji homogenitas dilaksanakan maka akan di dapatkan dua kelas yang akan digunakan yaitu kelas eksperimen dan kelas kontrol. Pretes dan postes akan dilaksanakan pada kelas peneltian tersebut untuk kemudian di analisis dan menghasilkan studi pendahuluan.

3.5.2 Tahap analisis kemampuan berpikir kombinatorial

Analisis kemampuan berpikir kombinatorial merupakan inti dari penelitian ini. Analisis kemampuan berpikir kombinatorial di laksanakan dengan menggunakan penelitian kuantitatif beracuan pada hasil studi pendahuluan. Pemberian tes pada analisis tersebut diharapkan mampu membuat peneliti mengetahui tingkat kemampuan berpikir kombinatorial.

Diawali dengan pengembangan instrumen yang akan digunakan dalam analisis keterampilan kombinatorik kemudian melalui proses validitas dan reliabilitas jika tidak valid dan reliabel akan dilaksanakan berulang fase tersebut. Jika instrumen telah valid dan reliabel maka akan digunakan untuk menganalisis kemampuan berpikir kombinatorial dalam kelas penelitian.

Setelah instrumen diberikan maka akan dilaksanakan uji normalitas dan t-tes untuk mendapatkan kesimpulan hasil analisis keterampilan kombinatorik. kemudian akan jadi sebuah acuan dalam pelaksanaan *Problem-based Learning*.

3.5.3 Tahap penerapan *Problem-based Learning*

Penerapan PBL dilaksanakan dengan menggunakan penelitian kualitatif sehingga dapat meningkatkan keterampilan kombinatorik mahasiswa. Penerapan model *Problem-based Learning* dilaksanakan dengan acuan analisis keterampilan kombinatorik pada tahap sebelumnya. Pada tahap ini akan dihasilkan sebuah potret fase merupakan gambaran alur berpikir mahasiswa dalam memecahkan suatu permasalahan. Dalam penelitian ini potret fase mahasiswa didasarkan pada alur kemampuan *combinatorial thinking* mahasiswa dalam menyelesaikan kajian *r-Dynamic Vertex Coloring* berbasis *Problem based learning*.

3.6 Teknik Pengumpulan data

Penelitian pendidikan dengan menggunakan pendekatan penelitian kuantitatif, teknik pengumpulan data biasanya dilakukan dengan teknik tes, sedangkan teknik pengumpulan data pada penelitian dengan pendekatan penelitian kualitatif pada umumnya menggunakan teknik observasi, wawancara yang mendalam, dan dokumentasi. Pada pendekatan penelitian kombinasi teknik pengumpulan data yang digunakan adalah gabungan dari teknik-teknik tersebut.

3.6.1. Teknik Tes

Pengumpulan data melalui teknik tes dilakukan dengan memberikan instrumen tes yang terdiri dari seperangkat pertanyaan/soal untuk memperoleh data mengenai kemampuan siswa terutama pada aspek kognitif. Pengumpulan data melalui teknik tes dapat dilakukan sebelum atau sesudah perlakuan, bahkan dapat dilakukan saat studi pendahuluan sebelum penelitian dimulai. teknik tes yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

a) Data pretes

Data pretes diperoleh melalui tes yang dilaksanakan sebelum perlakuan diberikan. Materi yang di teskan pada saat pretes adalah materi yang akan diteliti selama penelitian. Dengan mengetahui bagaimana kemampuan awal mahasiswa sebelum penelitian, peneliti memiliki acuan untuk menentukan kemampuan akhir atau peningkatan kemampuan seperti apa yang diharapkan di akhir penelitian sehingga memudahkan peneliti untuk menyusun rancangan penelitian.

b) Data Postes

Data postes di peroleh melalui tes yang diselenggarakan setelah perlakuan diberikan pada akhir penelitian. Data pstes digunakan untuk mengetahui gambaran mengenai kemampuan akhir/pencapaian kemampuan siswa pada materi tertentu. Tes yang diberikan pada saat postes dapat serupa atau sama persis dengan tes yang diberikan pada saat pretes.

3.6.2. Teknik nontes

Pengumpulan data melalui teknik non tes yang digunakan ditempuh dengan beberapa cara berikut:

a) *Interview* (wawancara)

Pengumpulan data melalui wawancara dilakukan dengan memberikan serangkaian pertanyaan yang diajukan secara langsung oleh peneliti kepada responden. Pelaksanaan wawancara di laksanakan dengan menggunakan instrumen pedoman wawancara.

b) Kuesioner

Pengumpulan data melalui kuesioner dilakukan dengan memberikan instrumen berupa daftar pertanyaan yang harus di jawab oleh orang yang menjadi subjek dalam penelitian (responden). Daftar pertanyaan yang disusun dalam pertanyaan terbuka yang dituangkan dalam bentuk instrumen angket.

3.7 Teknik Analisis Data

3.7.1. Teknik Pengolahan dan analisis data instrumen tes

Data yang di peroleh dari instrumen tes masih berupa data mentah yang penggunaannya masih sangat terbatas. Data mentah tersebut dapat memberikan informasi yang di perlukan guna menjawab rumusan masalah dan menyelesaikan masalah dalam penelitian.

a) Validitas instrumen

Sebuah tes dikatakan valid apabila tes tersebut mengukur apa yang hendak diukur. Dengan kata lain, validitas suatu instrumen merupakan tingkat ketepatan suatu instrumen untuk mengukur sesuatu yang harus diukur.

Lembar validasi digunakan untuk menguji kevalidan angket, soal tes berpikir kritis, dan pedoman wawancara. Instrument pada penelitian ini divalidasi oleh dua dosen pendidikan matematika dengan tujuan agar instrument yang digunakan bias memberikan informasi yang sangat jelas dan akurat.

Langkah-langkah untuk menentukan tingkat kevalidan instrument (Hobri, 2010) sebagai berikut.

1. Menghitung rata-rata dari semua validator untuk setiap aspek penilaian dengan rumus sebagai berikut.

$$I_i = \frac{\sum_{j=1}^n V_{ij}}{n}$$

Keterangan :

I_i = rata-rata nilai aspek ke-i;

V_{ij} = data nilai dari validator ke-j terhadap indicator ke-i;

j = validator 1,2,3;

i = indikator 1,2,...n

n = banyaknya indikator

- Menghitung nilai rata-rata total untuk semua aspek dengan cara menjumlahkan semua I_i dan dibagi dengan banyaknya aspek. Secara matematika dapat dituliskan sebagai berikut.

$$V_a = \frac{\sum_{i=1}^k I_i}{k}$$

Keterangan:

V_a = nilai rata-rata total untuk semua aspek;

I_i = rata-rata nilai aspek ke- i ;

i = aspek yang dinilai: 1,2,3,... k ;

k = banyaknya aspek;

- Menentukan tingkat kevalidan instrument dengan merujuk pada nilai V_a yang disajikan dalam Tabel 3.1 berikut.

Nilai V_a	Tingkat Kevalidan
$1 \leq V_a < 2$	Tidak Valid
$2 \leq V_a < 3$	Kurang Valid
$3 \leq V_a < 4$	Cukup Valid
$4 \leq V_a < 5$	Valid
$V_a = 5$	Sangat Valid

Tabel 3.1 Kriteria validitas instrumen

Pada Penelitian ini, instrumen dapat digunakan jika nilai V_a berada pada $4 \leq V_a < 5$.

b) Reliabilitas

Reliabilitas suatu instrumen adalah kekonsistenan instrumen tersebut bila diberikan pada subjek yang sama meskipun oleh orang yang berbeda, waktu yang berbeda, atau tempat yang berbeda, maka akan memberikan hasil yang sama atau relatif sama (tidak berbeda secara signifikan). Tinggi rendahnya derajat reliabilitas suatu instrumen di tentukan oleh nilai koefisien korelasi antara butir soal atau item pernyataan dan pertanyaan dalam instrumen tersebut yang di notasikan dengan r .

Tolak ukur untuk menginterpretasikan derajat reliabilitas instrumen di tentukan berdasarkan kriteria menurut Guilford dalam (Kurniasih & Sani, 2015) berikut.

Koefisien korelasi	Korelasi	Interpretasi reliabilitas
$0,90 \leq r \leq 1,00$	Sangat tinggi	Sangat tetap / sangat baik
$0,70 \leq r < 0,90$	Tinggi	Tetap / baik
$0,40 \leq r < 0,70$	Sedang	Cukup tetap / cukup baik
$0,20 \leq r < 0,40$	Rendah	Tidak tetap / buruk
$r < 0,20$	Sangat rendah	Sangat tidak tetap / sangat buruk

Tabel 3.2 Kriteria koefisien korelasi reliabilitas instrumen

c) Uji normalitas

Uji normalitas merupakan salah satu uji prasyarat untuk memenuhi asumsi kenormalan dalam analisis data statistik parametrik. Pengujian ini dilakukan untuk mengetahui apakah sebaran data berdistribusi normal atau tidak. Data dikatakan berdistribusi normal jika data memusat pada nilai rata-rata dan median sehingga kurvanya menyerupai lonceng yang simetris. Dengan profit data semacam ini, maka data tersebut dianggap bisa mewakili populasi.

d) Uji Homogenitas

Homogenitas data mempunyai makna, bahwa data memiliki varians atau keragaman nilai yang sama secara statistik. Uji homogenitas merupakan salah satu uji prasyarat analisis data statistik parametrik pada teknik komparasional (membandingkan). Uji homogenitas dilakukan untuk mengetahui apakah varians data dari sampel yang dianalisis homogen atau tidak.

3.7.2. Teknik pengolahan dan analisis data instrumen nontes

Data yang diperoleh dari instrumen nontes berupa data kualitatif yang diolah dengan cara di kuantifikasi dan dianalisis secara deskriptif.berikut adalah cara yang digunakan untuk mengolah dan menganalisis data instrumen non tes.

Data hasil wawancara diolah dan dianalisis secara deskriptif. Temuan-temuan hasil wawancara diuraikan secara sistematis guna menjawab permasalahan dalam

penelitian. Analisis data angket dapat dilakukan dengan cara menentukan persentase jawaban responden untuk masing-masing item pernyataan atau pertanyaan dalam angket yang selanjutnya dianalisis secara deskriptif kemudian dianalisis secara kuantitatif.

1.8 Potret fase

Potret Fase merupakan gambaran alur berpikir mahasiswa dalam memecahkan suatu permasalahan. Dalam penelitian ini potret fase mahasiswa didasarkan pada alur kemampuan *combinatorial thinking* mahasiswa dalam menyelesaikan kajian *r-Dynamic Vertex Coloring* berbasis *Problem based learning*. Berikut beberapa langkah untuk mengetahui potret fase mahasiswa,

1. Menyediakan pertanyaan yang bertuliskan indikator dari kemampuan *combinatorial thinking* berdasarkan hasil observasi dari pengerjaan Post.
2. Melakukan wawancara dengan meminta mahasiswa mengambil sebuah kartu indikator untuk setiap langkah pengerjaan Post-tes dengan ada pengembalian kartu indikator, sehingga langkah yang diambil oleh mahasiswa dapat berulang.
3. Menulis urutan dari setiap kartu indikator yang diambil oleh mahasiswa dan menggambar urutan tersebut dalam bentuk graf sehingga ada langkah yang diulang.

1.9 Monograf

Penelitian ini akan menghasilkan sebuah monograf *r-dynamic vertex coloring*. Monograf dalam penelitian merupakan buku yang berisi materi *r-dynamic vertex coloring* yang menyajikan munculnya konsep *r-dynamic vertex coloring*, hasil-hasil penelitian terdahulu yang berkaitan dengan *r-dynamic vertex coloring*, dan hasil penelitian terbaru yang ditemukan oleh peneliti serta aplikasi *r-dynamic vertex coloring*.

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1. Kesimpulan

Penelitian ini dilakukan untuk menganalisis kemampuan berpikir kombinatorial dan penerapan pembelajaran berbasis masalah. Temuan pada kelas kontrol ditemukan 12% berada pada kategori level 1 dalam berpikir kombinatorial, 24% berada pada kategori level 2 dalam berpikir kombinatorial, 33% berada pada kategori level 3 dalam berpikir kombinatorial dan 31% mahasiswa berada pada level 4 dalam berpikir kombinatorial sedangkan belum ada mahasiswa yang mencapai level 5 pada berpikir kombinatorial. Untuk kelas eksperimen, ditemukan bahwa tidak ada mahasiswa pada level 1 pada berpikir kombinatorial, 9% berada pada kategori level 2 dalam berpikir kombinatorial, 18% berada pada kategori level 3 dalam berpikir kombinatorial, 32% mahasiswa berada pada level 4 dalam berpikir kombinatorial dan 41% mahasiswa berada pada level 5 dalam berpikir kombinatorial. Hasil analisis uji sampel independen menunjukkan bahwa hasil belajar mahasiswa pada tahap pre-tes tidak berbeda dan pada tahap post-tes memiliki analisis yang berbeda menunjukkan nilai signifikan ($p \leq 0,05$) yang berarti bahwa pasca pembelajaran memiliki hasil berbeda.

Penelitian yang telah dilakukan menunjukkan bahwa penerapan PBL memiliki pengaruh yang signifikan terhadap kemampuan berpikir kombinatorial siswa di kelas eksperimen. Siswa di kelas eksperimen menunjukkan kemampuan berpikir kombinatorial mereka dibandingkan dengan kelas kontrol. Hasil penelitian menunjukkan bahwa peningkatan hasil belajar siswa dan kemampuan berpikir kombinatorial dilihat dari posttest. Nilai hasil Post-tes kelas eksperimen lebih baik karena didukung oleh pembelajaran berbasis masalah (PBL) dalam pembelajaran untuk meningkatkan pemikiran kombinatorial siswa.

Kajian *r-Dynamic Vertex Coloring* berbasis *Problem based learning*, Alur berpikir kombinatorial dituangkan dalam potret fase mahasiswa dengan jumlah 8 tiga mahasiswa di temukan subjek 1, subjek 2 dan subjek 3 berada pada level 3 dalam berpikir kombinatorial, subjek 4 dan subjek 5 berada pada level 4 dalam

berpikir kombinatorial dan subjek 6,7 dan 8 berada pada level 5 dalam kombinatorik. Dapat di ketahui perbedaan alur pemikiran dari mahasiswa pada kelas kontrol memiliki alur yang relatif rendah dan eksperimen memiliki alur pemikiran relatif lebih tinggi dapat dilihat dari jumlah indikator yang dikuasai oleh setiap mahasiswa.

Proses pengembangan monograf dilakukan setelah didapatkan hasil dari 8 mahasiswa telah mengetahui kemampuan berpikir kombinatorial mereka. Dari 8 mahasiswa di temukan 4 bentuk pola pewarnaan titik dinamis yang berbeda kemudian peneliti meneliti apakah ke 4 bentuk tersebut bisa di kembangkan setelah diteliti keempat bentuk dasar tersebut bisa di kembangkan. Langkah selanjutnya peneliti membuat rumus generalisasi dari keempat pola tersebut dan ditulis dalam monograf.

5.2. Saran

Pada penelitian analisis kemampuan berpikir kombinatorial mahasiswa dalam kajian *r-dynamic vertex coloring* terdapat saran sebagai berikut :

1. Monograf yang sudah dibuat oleh peneliti sebaiknya bisa dikembangkan lebih banyak lagi penemuan tentang pola pewarnaan titik terbaru.
2. Tes kemampuan berpikir kombinatorial akan lebih baik jika diuji cobakan pada banyak mahasiswa yang berbeda dan kelas yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

- Ammamiaritha, E. Syahputra, E. Surya. 2017 Development of Learning Devices Oriented Problem Based Learning to Increase Combinatorial Thinking in Mathematical Problem Solving Ability. *Advances in sosial science, education and Humanities research*. Vol 104 pp 334-339
- Faturrohman, M. (2015). *model-model pembelajaran inovatif alternatif desain pembelajaran yang menyenangkan*. jogjakarta: Ar-ruzz media.
- Hobri. (2010). *metodologi penelitian pengembangan (aplikasi pada penelitian pendidikan matematika)*. Jember: pena salsabila.
- Hobri. Dafik. Hossain. 2018. The Implementation of Learning Together in Improving Students' Mathematical Performance. *International Journal of Instruction* e-ISSN: 1308-1470
- Hosnan, M. (2014). *pendekatan saintifik dan kontekstual dalam pembelajaran abad 21*. Bogor: Ghalia Indonesia.
- Ismail, N. S., Harun, J., Zakaria, M. Z., & Salleh, S. M. (2018). The Effect of Mobile Problem-Based Learning Application DicScience PBL on Students' Critical Thinking. *thinking skills and creativity*, 177-195.
- Komalasari, K. (2010). *pembelajaran kontekstual konsep dan aplikasi*. bandung: Refika Aditama.
- Kurniasih, I., & Sani, B. (2015). *ragam pengembangan model pembelajaran untuk peningkatan profesionalisme guru*. Yogyakarta: kata pena.
- Lestari, K. E., & Yudhanegara, M. R. (2015). *penelitian pendidikan matematika*. Bandung: refika aditama.
- Murtikusuma, R. P. (2014). *pengembangan perangkat pembelajaran matematika model problem based learning untuk siswa kelas XI SMK materi barisan dan deret*. Malang: UM.

- Nur, A.S dan Rahman, A. 2013. Pemecahan Masalah Matematika sebagai Sarana Mengembangkan Penalaran Formal Siswa Sekolah Menengah Pertama. *Jurnal Sainsmat 2*, (I), 84-92.
- Rezaia, M., & Zahra, G. (2011). what do i mean combinatorial thinking? *procedia sosial and behavioral sciences*, 122-126.
- Sutirman. (2013). *media dan model-model pembelajaran inovatif*. graha ilmu.
- Suntusia, Dafik, Hobri 2018 The effectiveness oresearch based learning in improving students' achievement in solving two-dimensional arithmetic sequence problems *International journal of instruction*. Vol 12 pp 17-32.
- Taguchi, N. (2018). Description and explanation of pragmatic development: Quantitative, qualitative, and mixed methods research. *an internasional journal of educational technology and appllied linguistis (System)*, 23-32.
- Tohir, M. Abidin, Z. Dafik. Hobri. 2018. Students creative thinking skills in solving two dimensional arithmetic series through research-based learning, *Journal of Physics: Conf. Series 1008* (2018) 012072.
- Widiyastuti, Erni dan Suci, U. 2017. *Deskripsi Kemampuan Berpikir kombinatorial Matematis Siswa*. Purwokerto: Universitas Muhammadiyah Purwokerto.

Lampiran A. Matriks Penelitian

JUDUL	PERMASALAHAN	VARIABEL	INDIKATOR	SUMBER DATA	METODE PENELITIAN
Analisis Kemampuan Berpikir Kombinatorial Mahasiswa Dalam Menyelesaikan Kajian <i>r-Dynamic Vertex Coloring</i> Dan Penerapan <i>Problem Based Learning</i> (PBL)	<ol style="list-style-type: none"> 1. Bagaimanakah level kemampuan berpikir kombinatorial mahasiswa dalam menyelesaikan permasalahan dalam kajian <i>r-dynamic vertex coloring</i> ? 2. Bagaimanakah penerapan <i>Problem Based Learning</i> (PBL) dapat meningkatkan kemampuan berpikir kombinatorial 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Kemampuan berpikir kombinatorial 2. <i>r-Dynamic Vertex Coloring</i> 3. Pembelajaran <i>Problem based Learning</i>. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Kemampuan berpikir kombinatorial mahasiswa menggunakan pembelajaran <i>Problem based Learning</i> 2. Hasil pengembangan perangkat pembelajaran <i>Problem based learning</i> 3. <i>Potret fase</i> kemampuan berpikir kombinatorial 4. Monograf hasil dari pembelajaran 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Kepustakaan 2. Validator: Dosen 3. Mahasiswa Pendidikan Matematika 	Penelitian Kombinasi (<i>Mixed Methods</i>)

	<p>mahasiswa dalam menyelesaikan masalah dalam kajian <i>r-dynamic vertex coloring</i>?</p> <p>3. Bagaimana potret fase kemampuan berpikir kombinatorial mahasiswa pada kajian <i>r-dynamic vertex coloring</i>?</p> <p>4. Bagaimanakah monograf hasil penerapan perangkat pembelajaran <i>Problem based Learning</i> pada kajian <i>r-dynamic vertex coloring</i>?</p>		<p><i>Problem-based Learning</i></p>		
--	---	--	--------------------------------------	--	--

Lampiran B. Perangkat Pembelajaran (RPS dan RPP)





UNIVERSITAS JEMBER
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

RENCANA PEMBELAJARAN SEMESTER (RPS)

MATA KULIAH	KODE	Rumpun MK	BOBOT (sks)	SEMESTER	Tgl Penyusunan
Matematika Diskrit	KPM1404	Pendidikan Matematika	4	4	20-2-2018
OTORISASI	Dosen Pengembang RPS	Koordinator MK	Ketua Prodi	Dekan/Wakil Dekan 1	
	Lioni Anka Monalisa, S.Pd., M.Pd Saddam Hussien, S.Pd., M.Pd	Prof. Drs. SLAMIN, M.Comp.Sc., Ph.D	Susu Setiawani, S.Si., M.Sc.	Prof. Dafik, M.Sc., Ph.D	
	Capaian Pembelajaran (CP)				
CPL – Prodi					
S-A6	bekerjasama dan memiliki kepekaan sosial serta kepedulian terhadap masyarakat dan lingkungan;				
S-A8	menginternalisasi nilai, norma, dan etika akademik;				
S-A9	menunjukkan sikap bertanggungjawab atas pekerjaan dibidang keahliannya secara mandiri;				
PP-A2	Menguasai dasar – dasar berpikir matematis melalui kajian konsep matematika				
PP-A3	Menguasai konsep matematika yang diperlukan untuk pemecahan masalah				
PP-A4	Menguasai konsep matematika yang diperlukan untuk melaksanakan pembelajaran di satuan pendidikan dasar dan menengah, serta untuk studi lanjut				
KK-1	Mampu merencanakan, mengimplementasikan, dan mengevaluasi pembelajaran matematika secara inovatif dengan mengaplikasikan konsep pedagogik-didaktik matematika dan keilmuan matematika serta memanfaatkan berbagai sumber belajar dan IPTEKS yang berorientasi pada kecakapan hidup;				
KU-1	mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi yang memperhatikan dan menerapkan nilai humaniora yang sesuai dengan bidang keahliannya;				
CP-MK					
	Mahasiswa mampu menjelaskan konsep dasar teori bilangan , Barisan, Deret, Relasi Rerulang, Induksi Matematika, Prinsip Dasar Menghitung, Permutasi dan Kombinasi, Prinsip Rumah Merpati, Representasi Bilangan dalam Komputer, Aljabar Boole dan Sirkuit Digital, Konsep Dasar Teori Graf, Pewarnaan Graf, Sirkuit dan Siklus, Masalah Ekstrim, Berhitung dalam Graf, dan Pelabelan Graf.				

Deskripsi Singkat Mata Kuliah	Matakuliah ini berisi kajian tentang Teori Bilangan, Barisan, Deret, Relasi Rerulang, Induksi Matematika, Prinsip Dasar Menghitung, Permutasi dan Kombinasi, Prinsip Rumah Merpati, Representasi Bilangan dalam Komputer, Aljabar Boole dan Sirkuit Digital, Konsep Dasar Teori Graf, Pewarnaan Graf, Sirkuit dan Siklus, Masalah Ekstrim, Berhitung dalam Graf, dan Pelabelan Graf.	
Materi Pembelajaran/ Pokok Bahasan	<ol style="list-style-type: none"> 1. Teori Bilangan 2. Barisan 3. Deret 4. Relasi Rerulang 5. Induksi Matematika 6. Prinsip Dasar Menghitung 7. Permutasi dan Kombinasi 8. Prinsip Rumah Merpati 9. Representasi Bilangan dalam Komputer 10. Aljabar Boole dan Sirkuit Digital 11. Konsep Dasar Teori Graf 12. Pewarnaan Graf 13. Sirkuit dan Siklus 14. Masalah Ekstrim 15. Berhitung dalam Graf 16. Pelabelan Graf 	
Daftar Pustaka/ Referensi	<ol style="list-style-type: none"> A. R. Johnsonbaugh, Discrete Mathematics, Prentice Hall. B. L. Lovasz, J. Pelikan, K. Vesztergombi, 2003, Discrete Mathematics Elementary and Beyond, Springer-Verlag C. P. Grossman, 2002, Discrete Mathematics for Computing, Palgrave Macmillan New York. D. P. Flecher, H. Hoyle and C.W. Patty, 1991, Foundation of Discrete Mathematics, PSW-KENT Publishing Company. E. N. Hartsfield and G. Ringel, 1994, Pearls in Graph Theory, Academic Press. 	
Media Pembelajaran	<i>Software</i>	<i>Hardware</i>
	<ol style="list-style-type: none"> 1. MS Word 2. MS PPT 3. Browser: E-learning UNEJ 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Proyektor 2. LCD 3. Laptop / Komputer
Team Teaching	Prof. Drs. SLAMIN, M.Comp.Sc., Ph.D [A] Prof. Dafik, M.Sc., Ph.D [B] Lioni Anka Monalisa, S.Pd., M.Pd [C]	

Saddam Hussen, S.Pd., M.Pd [D]						
Matakuliah Prasarat						
Minggu ke-	Kemampuan Akhir yang Diharapkan (KAD)	Indikator	Kriteria dan Bentuk Penilaian	Metode Pembelajaran [Estimasi Waktu]	Materi Pembelajaran [Pustaka]	Bobot Penilaian (%)
1-2	Pemahaman regulasi perkuliahan dan materi-materi yang akan dilaksanakan dan pengenalan dasar teori bilangan			Bentuk: Kuliah, Diskusi dan Latihan. Tugas terstruktur pembagian dan persiapan materi [2*100 menit]	Kontrak kuliah, RPS, RPP, RTM, Silabus, Pendahuluan Pengenalan buku-buku panduan yang biasa digunakan dan pengenalan matematika diskrit. [C,D]	
3	Mahasiswa mampu menganalisis dan memberikan solusi untuk mengatasi permasalahan pola bilangan dalam barisan	Kemampuan mahasiswa dalam mengerjakan soal terkait permasalahan pola bilangan dalam barisan dengan tepat	Kriteria: Ketepatan dan penguasaan materi Metode: Tanya Jawab	Bentuk: Kuliah, Diskusi dan Latihan Model: <i>cooperatif Learning</i> [100 menit]	Barisan [C,D]	2%
4	Mahasiswa mampu menganalisis dan memberikan solusi untuk mengatasi pola jumlah barisan bilangan dalam deret	Kemampuan mahasiswa dalam mengerjakan soal terkait permasalahan pola jumlah barisan bilangan dalam deret dengan tepat	Kriteria: Ketepatan dan penguasaan materi Metode: Tanya Jawab	Bentuk: Kuliah, Diskusi dan Latihan Model <i>cooperatif Learning</i> [100 menit]	Deret [C,D]	2%
5	Mahasiswa mampu menganalisis dan memberikan solusi untuk mengatasi pola barisan relasi berulang, menentukan persamaannya dan solusi eksplisitnya	Kemampuan mahasiswa dalam mengerjakan soal terkait pola barisan relasi berulang, menentukan persamaannya dengan tepat	Kriteria: Ketepatan dan penguasaan materi Metode: Tanya Jawab	Bentuk: Kuliah, Diskusi dan Latihan Model: <i>cooperatif Learning</i> [100 menit]	Relasi berulang [C,D]	2%

6-7	Mahasiswa mampu menganalisis dan memberikan solusi untuk mengatasi induksi matematika dan pembuktian pola umum barisan dan deret	Mahasiswa mampu menganalisis dan memberikan solusi untuk mengatasi permasalahan yang berhubungan dengan induksi matematika dengan tepat	Kriteria: Ketepatan dan penguasaan materi Metode: Tanya Jawab	Bentuk: Kuliah, Diskusi dan Latihan Model: <i>cooperatif Learning</i> [2*100 menit]	Induksi matematika [C,D]	2%
8-9	Mahasiswa mampu menganalisis dan memberikan solusi untuk mengatasi fenomena sehari-hari yang dapat diselesaikan dengan prinsip dasar menghitung	Mahasiswa mampu menganalisis dan memberikan solusi terkait aturan penjumlahan, perkalian dengan tepat	Kriteria: Ketepatan dan penguasaan materi Metode: Tanya Jawab	Bentuk: Kuliah, Diskusi dan Latihan Model: <i>cooperatif Learning</i> [2*100 menit]	Prinsip dasar menghitung [C,D]	2%
10-11	Mahasiswa mampu menganalisis dan memberikan solusi untuk mengatasi permutasi	Mahasiswa mampu menganalisis dan memberikan solusi terkait aturan permutasi dengan tepat	Kriteria: Ketepatan dan penguasaan materi Metode: Tanya Jawab	Bentuk: Kuliah, Diskusi dan Latihan Model: <i>cooperatif Learning</i> [2*100 menit]	Permutasi [C,D]	2%
12-13	Mahasiswa mampu menganalisis dan memberikan solusi untuk mengatasi kombinasi dan generalisasi kombinasi	Mahasiswa mampu menganalisis dan memberikan solusi terkait aturan kombinasi dengan tepat	Kriteria: Ketepatan dan penguasaan materi Metode: Tanya Jawab	Bentuk: Kuliah, Diskusi dan Latihan Model: <i>cooperatif Learning</i> [2*100 menit]	Kombinasi [C,D]	2%
14-15	Mahasiswa mampu menganalisis dan memberikan solusi untuk mengatasi prinsip rumah merpati	Mahasiswa mampu menganalisis dan memberikan solusi terkait permasalahan rumah merpati dengan tepat	Kriteria: Ketepatan dan penguasaan materi Metode: Tanya Jawab	Bentuk: Kuliah, Diskusi dan Latihan Model: <i>cooperatif Learning</i> [2*100 menit]	Prinsip rumah merpati [C,D]	2%
16	UTS					30%
17	Mahasiswa mampu menganalisis dan memberikan solusi untuk mengatasi permasalahan representasi bilangan bulat dalam komputer	Kemampuan mahasiswa dalam merepresentasikan bilangan bulat kedalam komputer	Kriteria: Ketepatan dan penguasaan materi Metode: Tanya Jawab	Kuliah, Diskusi dan Latihan Model: <i>Discovery Learning</i> [100 menit]	Representasi Bilangan Bulat dalam Komputer [A,B]	2%

Digital Repository Universitas Jember

18	Mahasiswa mampu menganalisis dan memberikan solusi untuk mengatasi permasalahan representasi bilangan riil dalam komputer	Kemampuan mahasiswa dalam merepresentasikan bilangan riil kedalam komputer	Kriteria: Ketepatan dan penguasaan materi Metode: Tanya Jawab	Kuliah, Diskusi dan Latihan Model: <i>Discovery Learning</i> [100 menit]	Representasi Bilangan Riil dalam Komputer [A,B]	2%
19	Mahasiswa mampu menganalisis dan memberikan solusi untuk mengatasi permasalahan konsep bilangan untuk memecahkan masalah aljabar Boole	Kemampuan mahasiswa dalam menyelesaikan permasalahan aljabar Boole	Kriteria: Ketepatan dan penguasaan materi Metode: Tanya Jawab	Kuliah, Diskusi dan Latihan Model: <i>Discovery Learning</i> [100 menit]	Aljabar Boole [A,B]	2%
20	Pembahasan aljabar Boole dan sirkuit digital	Kemampuan mahasiswa dalam menganalisis dan memberikan solusi sirkuit digital menggunakan aljabar Boole	Kriteria: Ketepatan dan penguasaan materi Metode: Tanya Jawab	Kuliah, Diskusi dan Latihan Model: <i>Discovery Learning</i> [100 menit]	Sirkuit Digital [A,B]	2%
21	Mahasiswa mampu menganalisis dan memberikan solusi untuk mengatasi permasalahan yang berhubungan dengan representasi bilangan dalam komputer, aljabar Boole, dan sirkuit digital	Kemampuan mahasiswa dalam menyelesaikan permasalahan mengenai representasi bilangan, dalam komputer, aljabar Boole, dan sirkuit digital	Kriteria: Ketepatan dan penguasaan materi Metode: Tanya Jawab	Latihan Soal Model: <i>Discovery Learning</i> [100 menit]	Representasi Bilangan dalam Komputer, Aljabar Boole dan Sirkuit Digital [A,B]	2%
22	Mahasiswa mampu memahami Konsep dasar teori graf	Kemampuan mahasiswa dalam menyelesaikan permasalahan mengenai konsep dasar teori graf	Kriteria: Ketepatan dan penguasaan materi Metode: Tanya Jawab	Kuliah, Diskusi dan Latihan Model: <i>Discovery Learning</i> [100 menit]	Konsep dasar teori graf [A,B]	2%
23-24	Mahasiswa mampu menganalisis dan memberikan solusi untuk	Kemampuan mahasiswa dalam menyelesaikan	Kriteria: Ketepatan dan penguasaan materi	Bentuk: Kuliah, Diskusi dan Latihan Model: <i>Discovery Learning</i>	Pewarnaan dalam graf [A,B]	2%

	mengatasi permasalahan yang berhubungan dengan Pewarnaan graf	permasalahan mengenai pewarnaan graf dengan tepat	Metode: Tanya Jawab	[2*100 menit]		
25	Mahasiswa mampu menganalisis dan memberikan solusi untuk mengatasi permasalahan yang berhubungan dengan Sirkuit dan siklus	Kemampuan mahasiswa dalam menyelesaikan permasalahan sirkuit dan siklus dengan tepat	Kriteria: Ketepatan dan penguasaan materi Metode: Tanya Jawab	Kuliah, Diskusi dan Latihan Model: <i>Discovery Learning</i> [100 menit]	Sirkuit dan siklus [A,B]	2%
26	Mahasiswa mampu menganalisis dan memberikan solusi untuk mengatasi permasalahan yang berhubungan dengan Masalah ekstrim	Kemampuan mahasiswa dalam menyelesaikan permasalahan masalah ekstrim dengan tepat	Kriteria: Ketepatan dan penguasaan materi Metode: Tanya Jawab	Kuliah, Diskusi dan Latihan Model: <i>Discovery Learning</i> [100 menit]	Masalah ekstrim [A,B]	2%
27-28	Mahasiswa mampu menganalisis dan memberikan solusi untuk mengatasi permasalahan yang berhubungan dengan Berhitung dalam graf	Kemampuan mahasiswa dalam menyelesaikan permasalahan mengenai berhitung dalam graf	Kriteria: Ketepatan dan penguasaan materi Metode: Tanya Jawab	Bentuk: Kuliah, Diskusi dan Latihan Model: <i>Discovery Learning</i> [2*100 menit]	Berhitung dalam graf [A,B]	2%
30-31	Mahasiswa mampu menganalisis dan memberikan solusi untuk mengatasi permasalahan yang berhubungan dengan Pelabelan graf	Kemampuan mahasiswa dalam menyelesaikan permasalahan mengenai representasi bilangan, dalam computer, aljabar Boole, dan sirkuit digital	Kriteria: Ketepatan dan penguasaan materi Metode: Tanya Jawab	Bentuk: Kuliah, Diskusi dan Latihan Model: <i>Discovery Learning</i> [2*100 menit]	Pelabelan graf [A,B]	2%
32	UAS					32%

Catatan:

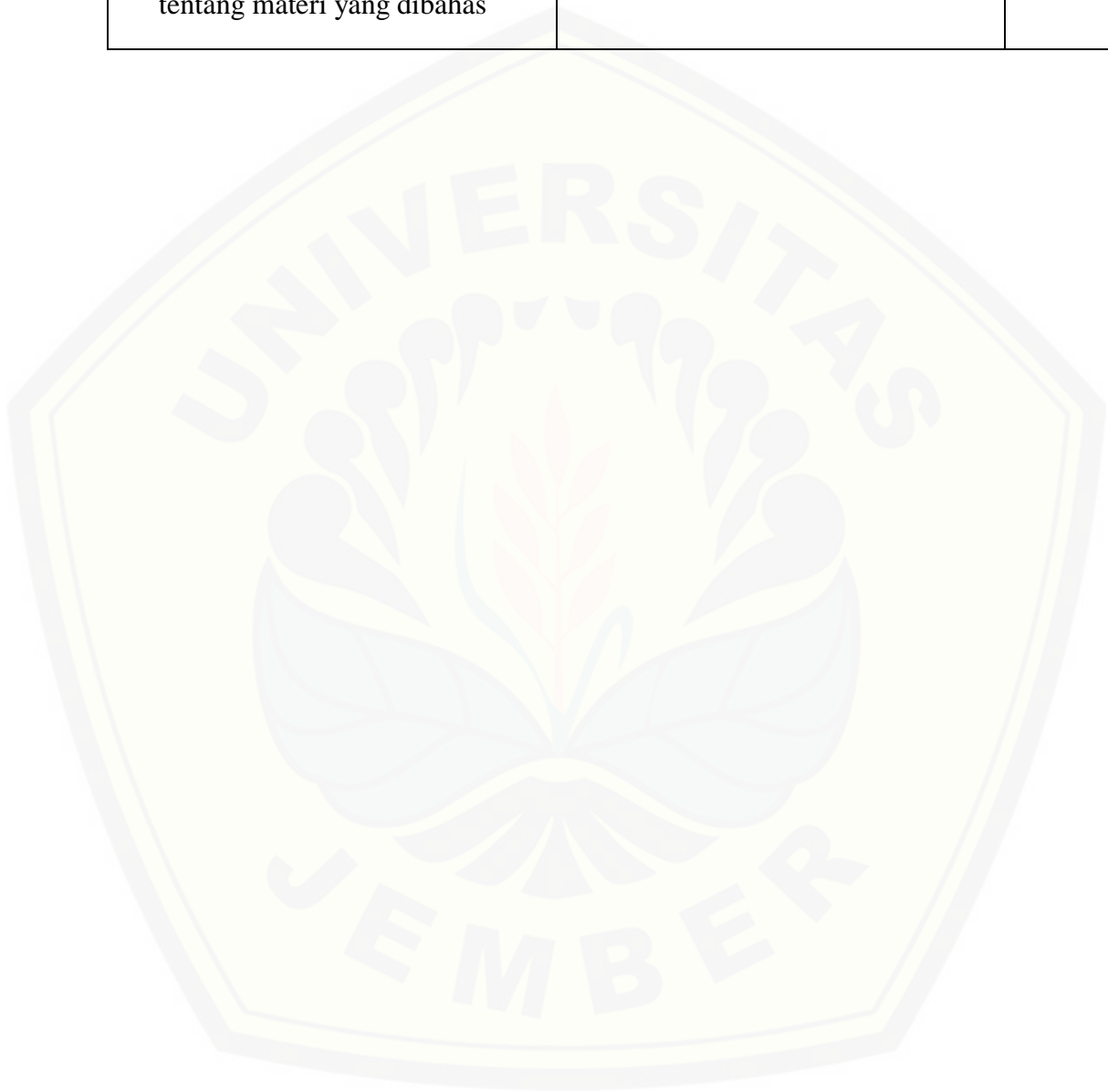
RENCANA PEMBELAJARAN

Fakultas/Prodi	: Keguruan dan Ilmu Pendidikan/Pendidikan Matematika
Mata Kuliah/Kode	: Matematika Diskrit/KPM1409
Semester	: Ganjil
SKS	: 4
Dosen Pengampu	: Prof. Drs. Dafik, M.Sc.,Ph.D Arika Indah Kristiana, S.Si.,M.Pd
Bahan Kajian	: <i>r-dynamic Vertex Coloring</i>
Pertemuan ke	: 1 (2 x 50menit)
Kemampuan Akhir Yang Diharapkan	: Mahasiswa mampu menganalisis dan memberikan solusi untuk mengatasi permasalahan yang berhubungan dengan pewarnaan graf.
Indikator	: - Kemampuan mahasiswa dalam menyelesaikan permasalahan mengenai pewarnaan graf dengan tepat - Mahasiswa mampu memahami dan mengembangkan <i>r-dynamic vertex coloring</i> dari suatu graf
Sub Bahan Kajian	: Kardinalitas, bilangan kromatik fungsi pewarnaan titik dinamis pada graf
Sumber Pembelajaran	:
Media Pembelajaran	: Laptop dan LCD
Pendekatan/metode	:
Skenario Pembelajaran :	

- **Pertemuan 1** : Kardinalitas dan bilangan kromatik pewarnaan titik dinamis pada graf

KEGIATAN PEMBELAJARAN		ESTIMASI WAKTU
Kegiatan Pendahuluan		15'
Dosen	Mahasiswa	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Mengucapkan salam bersama dengan mahasiswa membaca doa sebelum memulai perkuliahan 2. Membangkitkan pengetahuan mahasiswa dengan memberikan contoh-contoh penerapan graf dalam kehidupan sehari-hari. 3. Menyampaikan tujuan pembelajaran yaitu mengetahui konsep dasar graf (kardinalitas) 4. Membangkitkan pengetahuan mahasiswa dengan memberikan contoh-contoh penerapan graf dalam kehidupan sehari-hari 5. Menjelaskan bahan kajian yang akan dipelajari tentang kardinalitas graf 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Menjawab salam dan bersama dengan dosen membaca doa sebelum memulai perkuliahan 2. Memperhatikan dan jika perlu mencatat tujuan pembelajaran 3. Memperhatikan dan jika perlu mencatat tujuan pembelajaran 4. Memperhatikan contoh yang diberikan dosen 5. Mendengarkan penjelasan dosen terkait bahan kajian yang akan dipelajari tentang kardinalitas graf 	15
Kegiatan Inti		75'
Dosen	Mahasiswa	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Membagi mahasiswa dalam beberapa kelompok yang heterogen 2. Membagikan LKM untuk diselesaikan secara berkelompok 3. Memberikan referensi (pengetahuan awal) berupa jurnal penelitian 4. Memberikan penjelasan mengenai jurnal tersebut 5. Mengobservasi mahasiswa saat berdiskusi 6. Menunjuk kelompok untuk mempresentasikan hasil diskusi 7. Mengevaluasi jalannya presentasi 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Membentuk kelompok belajar sesuai arahan dosen 2. Menerima LKM yang diberikan dosen 3. Menerima referensi yang diberikan oleh dosen 4. Mendengarkan penjelasan dosen 5. Melakukan diskusi 6. Mempresentasikan hasil diskusi 7. Mendengarkan evaluasi dari dosen 	75

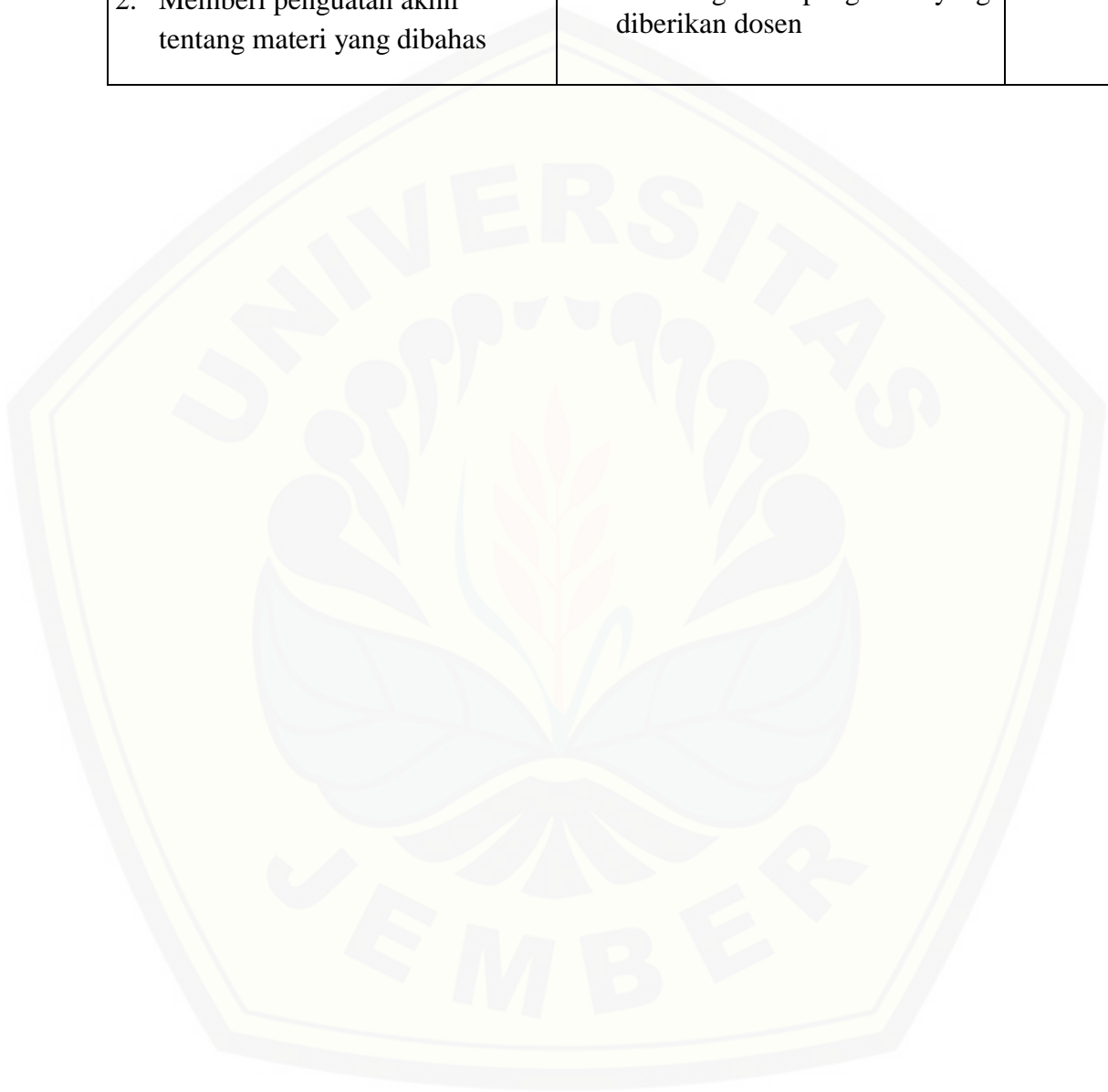
Kegiatan Penutup		10'
Dosen	Mahasiswa	
<ol style="list-style-type: none">1. Mengarahkan mahasiswa untuk membuat kesimpulan2. Memberi penguatan akhir tentang materi yang dibahas	<ol style="list-style-type: none">1. Membuat kesimpulan2. Mendengarkan penguatan yang diberikan dosen	10



• **Pertemuan 2** : fungsi pewarnaan titik dinamis pada graf

KEGIATAN PEMBELAJARAN		ESTIMASI WAKTU
Kegiatan Pendahuluan		15'
Dosen	Mahasiswa	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Mengucapkan salam bersama dengan mahasiswa membaca doa sebelum memulai perkuliahan 2. Membangkitkan pengetahuan mahasiswa dengan memberikan contoh-contoh penerapan graf dalam kehidupan sehari-hari. 3. Menyampaikan tujuan pembelajaran yaitu fungsi pewarnaan titik dinamis pada graf 4. Membangkitkan pengetahuan mahasiswa dengan memberikan contoh-contoh penerapan graf dalam kehidupan sehari-hari 5. Menjelaskan bahan kajian yang akan dipelajari tentang fungsi pewarnaan titik pada graf 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Menjawab salam dan bersama dengan dosen membaca doa sebelum memulai perkuliahan 2. Memperhatikan dan jika perlu mencatat tujuan pembelajaran 3. Memperhatikan dan jika perlu mencatat tujuan pembelajaran 4. Memperhatikan contoh yang diberikan dosen 5. Mendengarkan penjelasan dosen terkait bahan kajian yang akan dipelajari tentang fungsi pewarnaan titik pada graf 	15
Kegiatan Inti		75'
Dosen	Mahasiswa	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Membagi mahasiswa dalam beberapa kelompok yang heterogen 2. Membagikan LKM untuk diselesaikan secara berkelompok 3. Memberikan referensi (pengetahuan awal) berupa jurnal penelitian 4. Memberikan penjelasan mengenai jurnal tersebut 5. Mengobservasi mahasiswa saat berdiskusi 6. Menunjuk kelompok untuk mempresentasikan hasil diskusi 7. Mengevaluasi jalannya presentasi 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Membentuk kelompok belajar sesuai arahan dosen 2. Menerima LKM yang diberikan dosen 3. Menerima referensi yang diberikan oleh dosen 4. Mendengarkan penjelasan dosen 5. Melakukan diskusi 6. Mempresentasikan hasil diskusi 7. Mendengarkan evaluasi dari dosen 	75

Kegiatan Penutup		10'
Dosen	Mahasiswa	
1. Mengarahkan mahasiswa untuk membuat kesimpulan 2. Memberi penguatan akhir tentang materi yang dibahas	1. Membuat kesimpulan 2. Mendengarkan penguatan yang diberikan dosen	10



RENCANA PEMBELAJARAN

Fakultas/Prodi	: Keguruan dan Ilmu Pendidikan/Pendidikan Matematika
Mata Kuliah/Kode	: Matematika Diskrit/KPM1409
Semester	: Ganjil
SKS	: 4
Dosen Pengampu	: Prof. Drs. Dafik, M.Sc.,Ph.D Arika Indah Kristiana, S.Si.,M.Pd
Bahan Kajian	: <i>r-dynamic Vertex Coloring</i>
Pertemuan ke	: 1 (2 x 50menit)
Kemampuan Akhir Yang Diharapkan:	Mahasiswa mampu menganalisis dan memberikan solusi untuk mengatasi permasalahan yang berhubungan dengan pewarnaan graf.
Indikator	: - Kemampuan mahasiswa dalam menyelesaikan permasalahan mengenai pewarnaan graf dengan tepat - Mahasiswa mampu memahami dan mengembangkan <i>r-dynamic vertex coloring</i> dari suatu graf
Sub Bahan Kajian	: Kardinalitas, bilangan kromatik dan fungsi pewarnaan titik dinamis pada graf
Sumber Pembelajaran	:
Media Pembelajaran	: Laptop dan LCD
Pendekatan/metode	: Pembelajaran berbasis masalah (<i>Problem Based Learning</i>)
Skenario Pembelajaran :	

- **Pertemuan 1** : Kardinalitas dan bilangan kromatik pewarnaan titik dinamis pada graf

KEGIATAN PEMBELAJARAN		ESTIMASI WAKTU
Kegiatan Pendahuluan		15'
Dosen	Mahasiswa	
1. Mengucapkan salam bersama dengan mahasiswa membaca doa sebelum memulai perkuliahan 2. Membangkitkan pengetahuan mahasiswa dengan memberikan contoh-contoh penerapan graf dalam kehidupan sehari-hari.	1. Menjawab salam dan bersama dengan dosen membaca doa sebelum memulai perkuliahan 2. Memperhatikan dan jika perlu mencatat tujuan pembelajaran 3. Memperhatikan contoh yang diberikan dosen	15
Kegiatan Inti		75'
Dosen	Mahasiswa	
Mengorientasikan Peserta didik kepada masalah		
1. Pendidik menjelaskan tujuan pembelajaran dan sarana atau logistik yang dibutuhkan. Pendidik memotivasi peserta didik untuk terlibat dalam aktivitas pemecahan masalah nyata yang dipilih atau ditentukan. 2. Menjelaskan bahan kajian yang akan dipelajari tentang kardinalitas graf dan bilangan kromatik pewarnaan dinamis pada graf	1. Mendengarkan penjelasan tujuan pembelajaran dan sarana atau logistik yang dibutuhkan. Pendidik memotivasi peserta didik untuk terlibat dalam aktivitas pemecahan masalah nyata yang dipilih atau ditentukan. 2. Mendengarkan penjelasan dosen terkait bahan kajian yang akan dipelajari tentang kardinalitas graf dan bilangan kromatik pewarnaan dinamis pada graf.	10
Mengorganisasi peserta didik untuk belajar		
1. Membagi mahasiswa dalam beberapa kelompok yang heterogen 2. Membagikan LKM untuk diselesaikan secara berkelompok 3. Memberikan referensi (pengetahuan awal) berupa jurnal penelitian 4. Memberikan penjelasan mengenai jurnal tersebut	1. Membentuk kelompok belajar sesuai arahan dosen 2. Menerima LKM yang diberikan dosen 3. Menerima referensi yang diberikan oleh dosen 4. Mendengarkan penjelasan dosen 5. Peserta didik menentukan dan mengorganisasi tugas belajar yang	15

5. Pendidik membantu peserta didik menentukan dan mengorganisasi tugas belajar yang berhubungan dengan masalah yang sudah di orientasikan pada tahap sebelumnya.	berhubungan dengan masalah yang sudah di orientasikan pada tahap sebelumnya.	
Membimbing penyelidikan individual maupun kelompok		
Pendidik mendorong peserta didik untuk mengumpulkan informasi yang sesuai dan melaksanakan eksperimen untuk mendapatkan kejelasan yang di perlukan untuk menyelesaikan masalah.	peserta didik mengumpulkan informasi yang sesuai dan melaksanakan eksperimen untuk mendapatkan kejelasan yang di perlukan untuk menyelesaikan masalah	20
Mengembangkan dan menyajikan hasil karya		
Pendidik membantu peserta didik untuk berbagi tugas dan merencanakan atau menyiapkan karya yang sesuai sebagai hasil pemecahan masalah dalam bentuk laporan, video atau model.	peserta didik berbagi tugas dan merencanakan atau menyiapkan karya yang sesuai sebagai hasil pemecahan masalah dalam bentuk laporan, video atau model.	15
Menganalisis dan mengevaluasi proses pemecahan masalah		
Pendidik membantu peserta didik untuk melakukan refleksi atau evaluasi terhadap proses pemecahan masalah yang dilakukan	peserta didik untuk melakukan refleksi atau evaluasi terhadap proses pemecahan masalah yang dilakukan	15
Kegiatan Penutup		10'
Dosen	Mahasiswa	
1. Mengarahkan mahasiswa untuk membuat kesimpulan	1. Membuat kesimpulan	5'
2. Memberi penguatan akhir tentang materi yang dibahas	2. Mendengarkan penguatan yang diberikan dosen	5'

Penilaian Hasil Belajar :

- 1) Prosedur penilaian
 - a. Penilaian proses yaitu proses selama kegiatan pembelajaran berlangsung
 - b. Penilaian hasil yang berupa tes akhir kegiatan dari Tugas LKM
- 2) Jenis penilaian : Non tes (pengamatan)

- **Pertemuan 2** : Fungsi pewarnaan titik dinamis pada graf

KEGIATAN PEMBELAJARAN		ESTIMASI WAKTU
Kegiatan Pendahuluan		15'
Dosen	Mahasiswa	
1. Mengucapkan salam bersama dengan mahasiswa membaca doa sebelum memulai perkuliahan 2. Membangkitkan pengetahuan mahasiswa dengan memberikan contoh-contoh penerapan graf dalam kehidupan sehari-hari.	1. Menjawab salam dan bersama dengan dosen membaca doa sebelum memulai perkuliahan 2. Memperhatikan dan jika perlu mencatat tujuan pembelajaran 3. Memperhatikan contoh yang diberikan dosen	15
Kegiatan Inti		75'
Dosen	Mahasiswa	
Mengorientasikan Peserta didik kepada masalah		
1. Pendidik menjelaskan tujuan pembelajaran dan sarana atau logistik yang dibutuhkan. Pendidik memotivasi peserta didik untuk terlibat dalam aktivitas pemecahan masalah nyata yang dipilih atau di tentukan. 2. Menjelaskan bahan kajian yang akan dipelajari tentang fungsi pewarnaan titik dinamis pada graf	1. Mendengarkan penjelasan tujuan pembelajaran dan sarana atau logistik yang dibutuhkan. Pendidik memotivasi peserta didik untuk terlibat dalam aktivitas pemecahan masalah nyata yang dipilih atau di tentukan. 2. Mendengarkan penjelasan dosen terkait bahan kajian yang akan dipelajari tentang fungsi pewarnaan titik dinamis pada graf.	10
Mengorganisasi peserta didik untuk belajar		
1. Membagi mahasiswa dalam beberapa kelompok yang heterogen 2. Membagikan LKM untuk diselesaikan secara berkelompok 3. Memberikan referensi (pengetahuan awal) berupa jurnal penelitian 4. Memberikan penjelasan mengenai jurnal tersebut 5. Pendidik membantu peserta didik menentukan dan mengorganisasi tugas belajar yang berhubungan	1. Membentuk kelompok belajar sesuai arahan dosen 2. Menerima LKM yang diberikan dosen 3. Menerima referensi yang diberikan oleh dosen 4. Mendengarkan penjelasan dosen 5. Peserta didik menentukan dan mengorganisasi tugas belajar yang berhubungan dengan masalah	15

dengan masalah yang sudah di orientasikan pada tahap sebelumnya.	yang sudah di orientasikan pada tahap sebelumnya.	
Membimbing penyelidikan individual maupun kelompok		
Pendidik mendorong peserta didik untuk mengumpulkan informasi yang sesuai dan melaksanakan eksperimen untuk mendapatkan kejelasan yang di perlukan untuk menyelesaikan masalah.	peserta didik mengumpulkan informasi yang sesuai dan melaksanakan eksperimen untuk mendapatkan kejelasan yang di perlukan untuk menyelesaikan masalah	20
Mengembangkan dan menyajikan hasil karya		
Pendidik membantu peserta didik untuk berbagi tugas dan merencanakan atau menyiapkan karya yang sesuai sebagai hasil pemecahan masalah dalam bentuk laporan, video atau model.	peserta didik berbagi tugas dan merencanakan atau menyiapkan karya yang sesuai sebagai hasil pemecahan masalah dalam bentuk laporan, video atau model.	15
Menganalisis dan mengevaluasi proses pemecahan masalah		
Pendidik membantu peserta didik untuk melakukan refleksi atau evaluasi terhadap proses pemecahan masalah yang dilakukan	peserta didik untuk melakukan refleksi atau evaluasi terhadap proses pemecahan masalah yang dilakukan	15
Kegiatan Penutup		10'
Dosen	Mahasiswa	
1. Mengarahkan mahasiswa untuk membuat kesimpulan	1. Membuat kesimpulan	5'
2. Memberi penguatan akhir tentang materi yang dibahas	2. Mendengarkan penguatan yang diberikan dosen	5'

Penilaian Hasil Belajar :

- 1) Prosedur penilaian
 - a. Penilaian proses yaitu proses selama kegiatan pembelajaran berlangsung
 - b. Penilaian hasil yang berupa tes akhir reseacrh dari Tugas LKM
- 2) Jenis penilaian : Non tes (pengamatan)

Lampiran C. Lembar Validasi RPP

LEMBAR VALIDASI

RENCANA PELAKSANAAN PEMBELAJARAN (RPP)

Mata Kuliah : Matematika Diskrit
 Materi : *r-Dynamic Vertex Coloring*
 Kelas/Semester :
 Nama Validator :

A. Tujuan

Tujuan penggunaan instrumen ini digunakan untuk mengukur kevalidan RPP dalam pelaksanaan pembelajaran matematika yang implementasinya menggunakan pendekatan pembelajaran *Problem-based Learning* untuk meningkatkan kemampuan berpikir kombinatorial Peserta didik.

B. Petunjuk

Berikan tanda (\checkmark) pada kolom yang sesuai dengan pendapat anda.

Keterangan skala penilaian:

- 1: berarti “tidak cukup”
- 2: berarti “cukup baik”
- 3: berarti “baik”
- 4: berarti “sangat baik”

C. Penilaian ditinjau dari beberapa aspek

No.	Aspek yang dinilai	Skala penilaian			
		1	2	3	4
I. Perumusan tujuan pembelajaran					
1.	Kejelasan kompetensi inti dan kompetensi dasar				
2.	Kesesuaian kompetensi inti dan kompetensi dasar dengan tujuan pembelajaran				

3.	Ketepatan penjabaran kompetensi dasar kedalam indikator				
4.	Kesesuaian indikator dengan tujuan pembelajaran				
5.	Kesesuaian indikator dengan tingkat perkembangan peserta didik				
II. Isi RPP					
1.	Sistematika penyusunan RPP				
2.	Kesesuaian urutan kegiatan pembelajaran dengan pendekatan <i>Problem-based Learning</i>				
3.	Kejelasan tahap-tahap kegiatan pembelajaran dari pendahuluan, inti dan penutup				
III. Bahasa dan tulisan					
1.	Menggunakan bahasa yang sesuai dengan kaidah bahasa yang baku (EYD)				
2.	Bahasa yang digunakan bersifat komunikatif dan mudah dipahami				
IV. Waktu					
1.	Kesesuaian alokasi waktu yang digunakan				
2.	Rincian waktu untuk setiap tahap pembelajaran				

D. Penilaian umum

Kesimpulan penilaian secara umum**):

a. Rencana Pelaksanaan Pembelajaran ini:

1: berarti “tidak baik”

2: berarti “cukup baik”

3: berarti “baik”

4: berarti “sangat baik”

b. Rencana Pelaksanaan Pembelajaran ini:

1: belum dapat digunakan dan masih memerlukan konsultasi

2: dapat digunakan dengan banyak revisi

3: dapat digunakan dengan sedikit revisi

4: dapat digunakan tanpa revisi

***Lingkarilah nomor atau angka sesuai dengan pilihan anda*

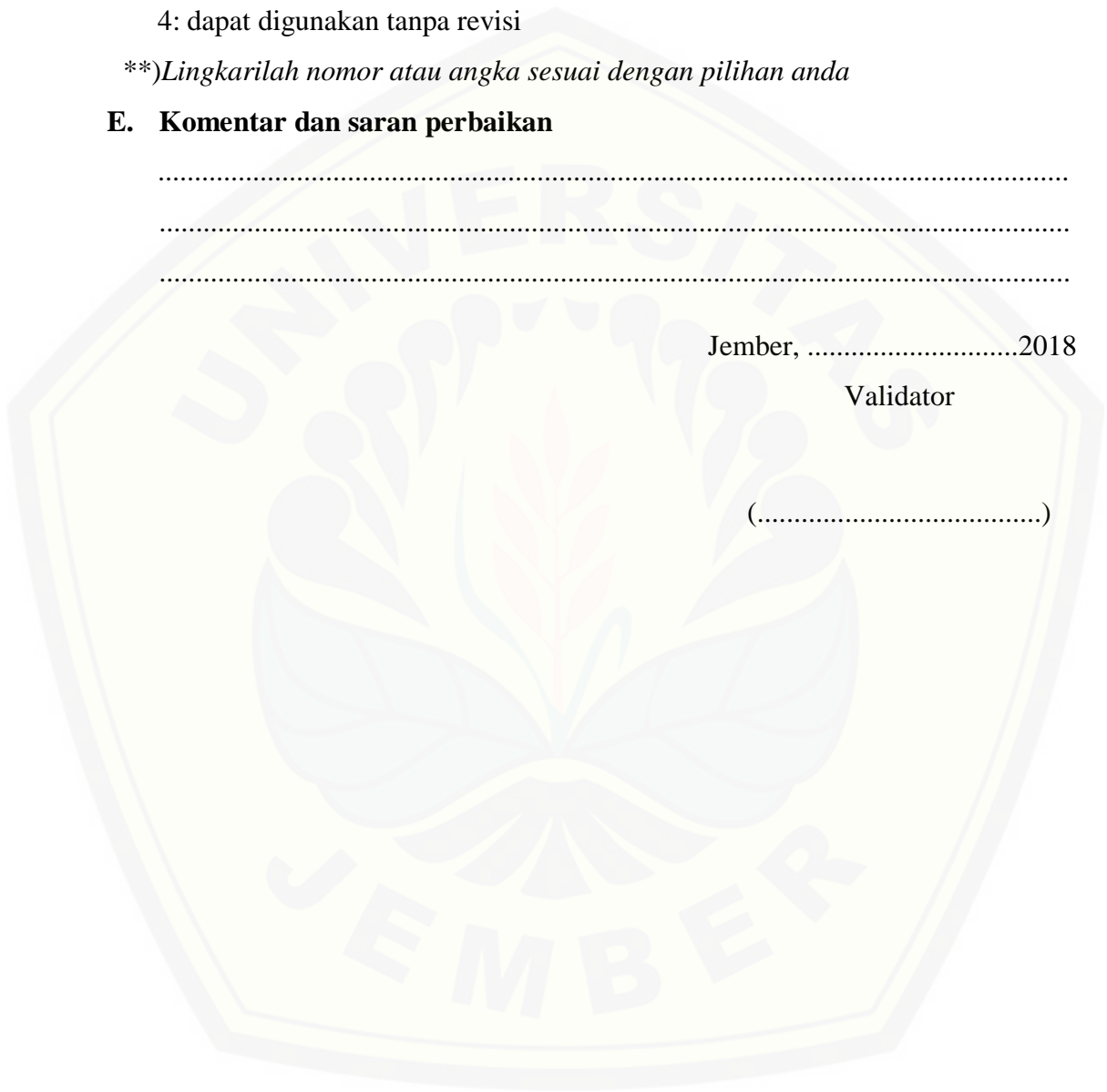
E. Komentar dan saran perbaikan

.....
.....
.....

Jember,2018

Validator

(.....)



Lampiran D. Lembar Kerja Mahasiswa (LKM)



LKM

Pewarnaan Titik Dinamis (*r-Dynamic Vertex Coloring*)

MATEMATIKA DISKRIT

MAGISTER PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER

Lembar Kerja Mahasiswa

Tes kemampuan berpikir kombinatorik *r-Dynamic Vertex Coloring*

Kemampuan yang di harapkan

Mampu meningkatkan kemampuan berpikir kombinatorik dalam menemukan dan mengembangkan pewa

rnaan titik dinamis (*r-Dynamic vertex coloring*)

Indikator

Mahasiswa dapat menentukan *r-Dynamic Vertex coloring* dari sebuah graf.

Petunjuk !!

1. Berdoalah sebelum mengerjakan LKM
2. Waktu pengerjaan **45 menit**
3. Tuliskan nama dan NIM pada tempat yang telah disediakan
4. Pahami permasalahan yang di berikan dengan baik
5. Kerjakan LKM sesuai dengan permasalahan yang di berikan
6. Kerjakan latihan sesuai perintah.
7. Jika terdapat hal yang tidak jelas silahkan bertanya.

Nama anggota kelompok

1.

NIM.

2.

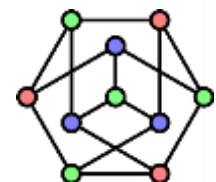
NIM.

3.

NIM.

4.

NIM.



Pengenalan Pewarnaan Titik Dinamis

(*r-Dynamic Vertex Coloring*)

Pewarnaan titik dinamis (*r-Dynamic Vertex Coloring*) merupakan salah satu konsep graf. Pada LKM ini akan di bahas cara menentukan pewarnaan titik dinamis suatu graf, dengan definisi sebagai berikut :

Definisi

Lai dan Montgomery (2012) menyatakan sebuah k -pewarnaan titik di katakan pewarnaan titik dinamis jika untuk setiap titik $v \in V(G)$ dengan $d(v) \geq 2$. Titik yang saling bertetangga mempunyai dua warna yang berbeda.

Jumlah warna *r-dynamic* dari graf G dinotasikan $\chi_r(G)$ merupakan warna minimum k pada graf G . Jumlah berwarna 1- *Dynamic* pada Graf G adalah nilai warna yang di perkenalkan sebagai *Chromatic Number* dan dinotasikan $\chi_d(G)$ dan untuk jumlah *Dynamic* ≥ 2 pada graf G adalah nilai warna yang diperkenalkan sebagai *r-Dynamic Chromatic Number*.

Keterangan :

- V = Himpunan titiki kosong dari simpul-simpul (*vertices* atau *node*), atau dapat ditulis , $V = \{ x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \}$.
- E = Himpunan sisi (*edge*) yang menghubungkan sepasang simpul, atau dapat ditulis $E = \{ x_1x_2, x_3x_4, \dots, x_{n-1}x_n \}$.
- $|V|$ = Jumlah titik suatu graf (*order*)
- $|E|$ = Jumlah sisi suatu graf (*size*)
- P_n = Graf lintasan dengan sebarang titik n dengan titik berhingga
- S_n = Graf lintasan dengan sebarang titik n dengan titik berhingga
- $|c(N(v))|$ = Kardinalitas *coloring* pada tetangga *vertex*
- $d(v)$ = Derajat Vertex
- χ = Bilangan kromatik
- $\chi_r(G)$ = Jumlah warna *r-Dynamic* dari graf G (warna minimum k pada graf G).

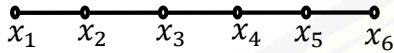


Kegiatan I

Amatilah graf di bawah ini !

Tuliskanlah kardinalitas yang meliputi titik, jumlah titik, sisi dan jumlah sisi dari graf tersebut !

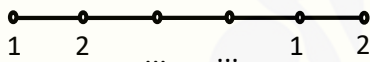
1. Graf Lintasan (Path Graf) dengan 6 titik



$$\begin{aligned} V &= \{x_1, \dots, x_3, \dots, x_5, x_6\}. \\ |V| &= 6 \\ E &= \{x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_4x_5, x_5x_6\}. \\ |E| &= 5 \end{aligned}$$

Berikan pewarnaan titik dinamis (*r-Dynamic vertex coloring*) pada Path Graf dengan $n = 6$ di bawah ini !

Kasus 1



$$r = 1$$

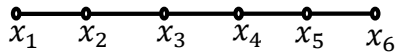
1. $|c(N(x_1))| \geq \min\{r, d(x_1)\}$
1 $\geq \{1,1\}$
2. $|c(N(x_2))| \geq \min\{r, d(x_2)\}$
1 $\geq \{1,2\}$
3. $|c(N(x_3))| \geq \min\{r, d(x_3)\}$
... $\geq \{...,...\}$
4. $|c(N(x_4))| \geq \dots\dots\dots$
... $\geq \{...,...\}$
5. $\dots\dots\dots \geq \dots\dots\dots$
... $\geq \{...,...\}$
6. $\dots\dots\dots \geq \dots\dots\dots$
... $\geq \{...,...\}$

$$\chi_1(P_6) = 2$$

Sehingga di peroleh Himpunan warna titik sebagai berikut !

$$c(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } x_1, x_3, x_5 \\ 2, & \text{untuk } x_2, x_4, x_6 \end{cases}$$

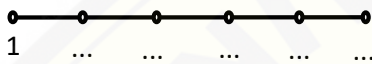
2. Graf Lintasan (Path Graf) dengan 6 titik



$$\begin{cases} V = \{x_1, \dots, \dots, \dots, \dots\}. \\ |V| = \dots \\ E = \{ \dots, \dots, \dots, \dots, \dots \}. \\ |E| = \dots \end{cases}$$

Berikan pewarnaan titik dinamis (*r-Dynamic vertex coloring*) pada Path Graf dengan $n = 6$ di bawah ini !

Kasus 2



$r = 2$

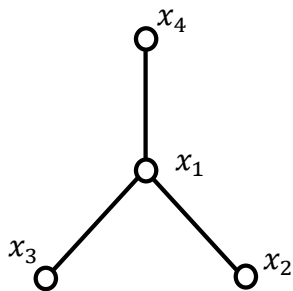
$$\begin{aligned} 1. & \quad |c(N(x_1))| \geq \min\{r, d(x_1)\} \\ & \quad \quad \quad 1 \geq \{2, 1\} \\ 2. & \quad |c(N(x_2))| \geq \min\{r, d(x_2)\} \\ & \quad \quad \quad \dots \geq \{2, 2\} \\ 3. & \quad |c(N(x_3))| \geq \min\{r, d(x_3)\} \\ & \quad \quad \quad \dots \geq \{\dots, \dots\} \\ 4. & \quad |c(N(x_4))| \geq \dots \\ & \quad \quad \quad \dots \geq \{\dots, \dots\} \\ 5. & \quad \dots \geq \dots \\ & \quad \quad \quad \dots \geq \{\dots, \dots\} \\ 6. & \quad \dots \geq \dots \\ & \quad \quad \quad \dots \geq \{\dots, \dots\} \end{aligned}$$

$\chi_2(P_6) = 3$

Sehingga di peroleh Himpunan warna titik sebagai berikut !

$$c(x_i) = \begin{cases} 1, \text{ untuk } \dots, \dots \\ 2, \text{ untuk } \dots, \dots \\ 3, \text{ untuk } \dots, \dots \end{cases}$$

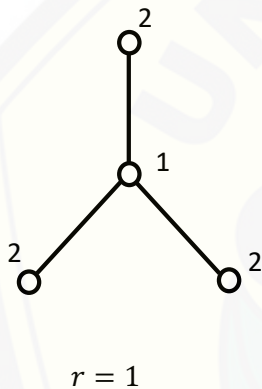
3. Graf Bintang (Star Graf) dengan 4 titik



$$\begin{aligned}
 V &= \{x_1, \dots, \dots, \dots, \dots\}. \\
 |V| &= n \\
 E &= \{\dots, \dots, \dots, \dots, \dots\}. \\
 |E| &= \dots
 \end{aligned}$$

Berikan pewarnaan titik dinamis (*r-Dynamic vertex coloring*) pada Star Graf dengan $n = 4$ di bawah ini !

Kasus 1



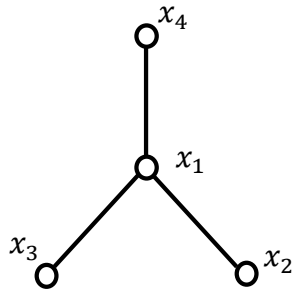
$$\begin{aligned}
 1. \quad & |c(N(x_1))| \geq \min\{r, d(x_1)\} \\
 & \quad \quad \quad 1 \geq \{1, 3\} \\
 2. \quad & |c(N(x_2))| \geq \min\{r, d(x_2)\} \\
 & \quad \quad \quad 1 \geq \{1, 1\} \\
 3. \quad & |c(N(x_3))| \geq \min\{r, d(x_3)\} \\
 & \quad \quad \quad \dots \geq \{\dots, \dots\} \\
 4. \quad & |c(N(x_4))| \geq \dots \\
 & \quad \quad \quad \dots \geq \{\dots, \dots\}
 \end{aligned}$$

$\chi_1(S_4) = 2$

Sehingga diperoleh Himpunan warna titik sebagai berikut !

$$c(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } \dots, \dots, \dots \\ 2, & \text{untuk } \dots, \dots, \dots \end{cases}$$

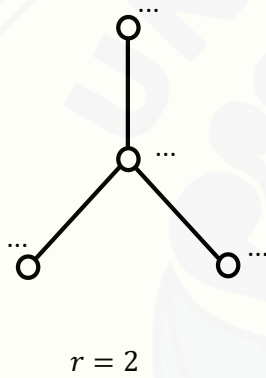
4. Graf Bintang (Star Graf) dengan 4 titik



$$\begin{aligned}
 V &= \{x_1, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots\}. \\
 |V| &= n \\
 E &= \{ \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots \}. \\
 |E| &= \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

Berikan pewarnaan titik dinamis (*r-Dynamic vertex coloring*) pada Star Graf dengan $n = 4$ di bawah ini !

Kasus 2



$$\begin{aligned}
 1. \quad & |c(N(x_1))| \geq \min\{r, d(x_1)\} \\
 & \quad \quad \quad 1 \geq \{2, 1\} \\
 2. \quad & |c(N(x_2))| \geq \min\{r, d(x_2)\} \\
 & \quad \quad \quad 1 \geq \{2, 2\} \\
 3. \quad & |c(N(x_3))| \geq \min\{r, d(x_3)\} \\
 & \quad \quad \quad \dots \geq \{\dots, \dots\} \\
 4. \quad & |c(N(x_4))| \geq \dots \dots \dots \\
 & \quad \quad \quad \dots \geq \{\dots, \dots\}
 \end{aligned}$$

$\chi_2(S_4) = \dots$

Sehingga diperoleh Himpunan warna titik sebagai berikut !

$$c(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } \dots \dots \dots \\ 2, & \text{untuk } \dots, \dots, \dots \\ 3, & \text{untuk } \dots, \dots, \dots \end{cases}$$

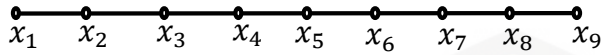


Kegiatan II

Amatilah beberapa graf di bawah ini !

Tuliskanlah kardinalitas yang meliputi titik, jumlah titik, sisi dan jumlah sisi dari graf tersebut !

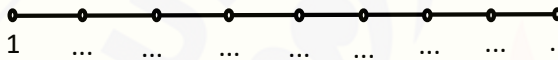
1. Graf Lintasan (Path Graf) dengan 9 titik



$$\begin{aligned} V &= \{x_1, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots\}. \\ |V| &= \dots \\ E &= \{\dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots\}. \\ |E| &= 8 \end{aligned}$$

Berikan pewarnaan titik dinamis (*r-Dynamic vertex coloring*) pada Path Graf dengan $n = 9$ di bawah ini !

Kasus 1



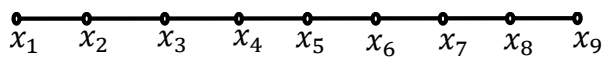
$$r = 1$$

1. $|c(N(x_1))| \geq \min\{r, d(x_1)\}$
1 $\geq \{1, 1\}$
 2. $|c(N(x_2))| \geq \min\{r, d(x_2)\}$
1 $\geq \{1, 2\}$
 3. $|c(N(x_3))| \geq \min\{r, d(x_3)\}$
... $\geq \{\dots, \dots\}$
 4. $|c(N(x_4))| \geq \dots$
... $\geq \{\dots, \dots\}$
 5. $\dots \geq \dots$
... $\geq \{\dots, \dots\}$
 6. $\dots \geq \dots$
... $\geq \{\dots, \dots\}$
 7. $\dots \geq \dots$
... $\geq \{\dots, \dots\}$
 8. $\dots \geq \dots$
... $\geq \{\dots, \dots\}$
 9. $\dots \geq \dots$
... $\geq \{\dots, \dots\}$
- $\chi_1(P_9) = 2$

Sehingga diperoleh Himpunan warna titik sebagai berikut !

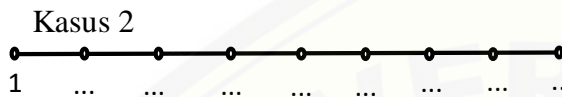
$$c(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } \dots, \dots, \dots \\ 2, & \text{untuk } \dots, \dots, \dots \\ 3, & \text{untuk } \dots, \dots, \dots \end{cases}$$

2. Graf Lintasan (Path Graf) dengan 9 titik



$$\begin{cases} V = \{x_1, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots\}. \\ |V| = \dots \\ E = \{\dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots\}. \\ |E| = 8 \end{cases}$$

Berikan pewarnaan titik dinamis (*r-Dynamic vertex coloring*) pada Path Graf dengan $n = 9$ di bawah ini !



$$r = 2$$

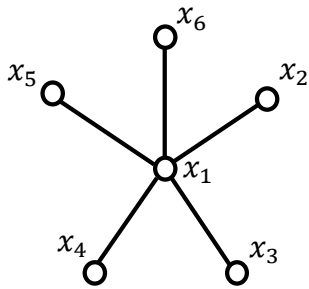
$$\begin{aligned} 1. & \quad |c(N(x_1))| \geq \min\{r, d(x_1)\} \\ & \quad \quad \quad 1 \geq \{2, 1\} \\ 2. & \quad |c(N(x_2))| \geq \min\{r, d(x_2)\} \\ & \quad \quad \quad 2 \geq \{2, 2\} \\ 3. & \quad |c(N(x_3))| \geq \min\{r, d(x_3)\} \\ & \quad \quad \quad \dots \geq \{\dots, \dots\} \\ 4. & \quad |c(N(x_4))| \geq \dots \\ & \quad \quad \quad \dots \geq \{\dots, \dots\} \\ 5. & \quad \dots \geq \dots \\ & \quad \quad \quad \dots \geq \{\dots, \dots\} \\ 6. & \quad \dots \geq \dots \\ & \quad \quad \quad \dots \geq \{\dots, \dots\} \\ 7. & \quad \dots \geq \dots \\ & \quad \quad \quad \dots \geq \{\dots, \dots\} \\ 8. & \quad \dots \geq \dots \\ & \quad \quad \quad \dots \geq \{\dots, \dots\} \\ 9. & \quad \dots \geq \dots \\ & \quad \quad \quad \dots \geq \{\dots, \dots\} \end{aligned}$$

$$\chi_1(P_9) = 2$$

Sehingga diperoleh Himpunan warna titik sebagai berikut !

$$c(x_i) = \begin{cases} 1, \text{ untuk } \dots, \dots, \dots \\ 2, \text{ untuk } \dots, \dots, \dots \\ 3, \text{ untuk } \dots, \dots, \dots \end{cases}$$

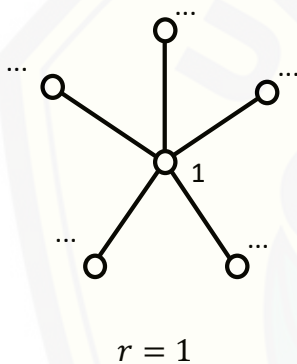
3. Graf Bintang (Star Graf) dengan 6 titik



$$\begin{aligned} V &= \{x_1, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots\}. \\ |V| &= n \\ E &= \{ \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots \}. \\ |E| &= \dots \end{aligned}$$

Berikan pewarnaan titik dinamis (*r-Dynamic vertex coloring*) pada Star Graf dengan $n = 6$ di bawah ini !

Kasus 1



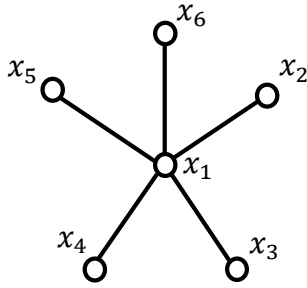
$$\begin{aligned} 1. \quad & |c(N(x_1))| \geq \min\{r, d(x_1)\} \\ & \quad \quad \quad 1 \geq \{1, 1\} \\ 2. \quad & |c(N(x_2))| \geq \min\{r, d(x_2)\} \\ & \quad \quad \quad 1 \geq \{1, 2\} \\ 3. \quad & |c(N(x_3))| \geq \min\{r, d(x_3)\} \\ & \quad \quad \quad \dots \geq \{\dots, \dots\} \\ 4. \quad & |c(N(x_4))| \geq \dots \\ & \quad \quad \quad \dots \geq \{\dots, \dots\} \\ 5. \quad & |c(N(x_5))| \geq \dots \\ & \quad \quad \quad \dots \geq \{\dots, \dots\} \\ 6. \quad & |c(N(x_6))| \geq \dots \\ & \quad \quad \quad \dots \geq \{\dots, \dots\} \end{aligned}$$

$\chi_1(S_6) = 2$

Sehingga di peroleh Himpunan warna titik sebagai berikut !

$$c(x_i) = \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ untuk } \dots, \dots, \dots \\ 2, \text{ untuk } \dots, \dots, \dots, \dots \end{array} \right\}$$

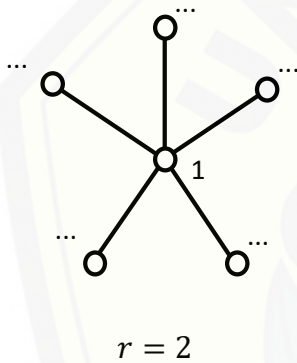
4. Graf Bintang (Star Graf) dengan 6 titik



$$\begin{aligned}
 V &= \{x_1, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots\}. \\
 |V| &= n \\
 E &= \{\dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots\}. \\
 |E| &= \dots
 \end{aligned}$$

Berikan pewarnaan titik dinamis (*r-Dynamic vertex coloring*) pada Star Graf dengan $n = 6$ di bawah ini !

Kasus 2



$$\begin{aligned}
 1. \quad &|c(N(x_1))| \geq \min\{r, d(x_1)\} \\
 &1 \geq \{2, 1\} \\
 2. \quad &|c(N(x_2))| \geq \min\{r, d(x_2)\} \\
 &\dots \geq \{2, 2\} \\
 3. \quad &|c(N(x_3))| \geq \min\{r, d(x_3)\} \\
 &\dots \geq \{\dots, \dots\} \\
 4. \quad &|c(N(x_4))| \geq \dots \\
 &\dots \geq \{\dots, \dots\} \\
 5. \quad &|c(N(x_5))| \geq \dots \\
 &\dots \geq \{\dots, \dots\} \\
 6. \quad &|c(N(x_6))| \geq \dots \\
 &\dots \geq \{\dots, \dots\}
 \end{aligned}$$

$\chi_2(S_6) = 2$

Sehingga diperoleh Himpunan warna titik sebagai berikut !

$$c(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } \dots \\ 2, & \text{untuk } \dots, \dots, \dots, \dots \\ 3, & \text{untuk } \dots, \dots, \dots, \dots \end{cases}$$

MENGEMBANGKAN DAN MENYAJIKAN MASALAH



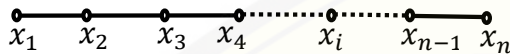
PENYELESAIAN SECARA SISTEMATIS

Kegiatan 3

Amatilah graf di bawah ini !

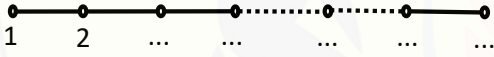
Tuliskanlah kardinalitas yang meliputi pewarnaan titik, jumlah titik dan sisi serta pewarnaan dinamis dari graf tersebut !

Brikanlah pewarnaan titik dinamis (*r-Dynamic vertex coloring*) pada Path Graf dengan titik sebanyak n !



$V = \{ \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots \}$
 $V = \{ x_i, 1 \leq i \leq \dots \}$
 $|V| = \dots$
 $E = \{ \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots \}$
 $E = \{ x_i x_{i+1}, 1 \leq i \leq \dots \}$
 $|E| = \dots$

Kasus 1

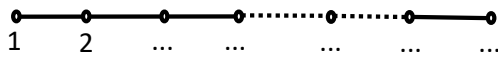


$r = 1$

1.
.....
2.
.....
3.
.....
4.
.....
⋮
⋮
5.
.....
6.
.....
 $\chi_r (P_n) = \dots$

$$\chi_r(P_n) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } \dots \dots \dots \\ 2, & \text{untuk } \dots \dots \dots \end{cases}$$

Kasus 2



$$r = 2$$

1.

2.

3.

4.

⋮

5.

6.

$$\chi_r (P_n) = \dots$$

$$\chi_r(P_n) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } \dots \dots \dots \\ 2, & \text{untuk } \dots \dots \dots \\ 3, & \text{untuk } \dots \dots \dots \end{cases}$$

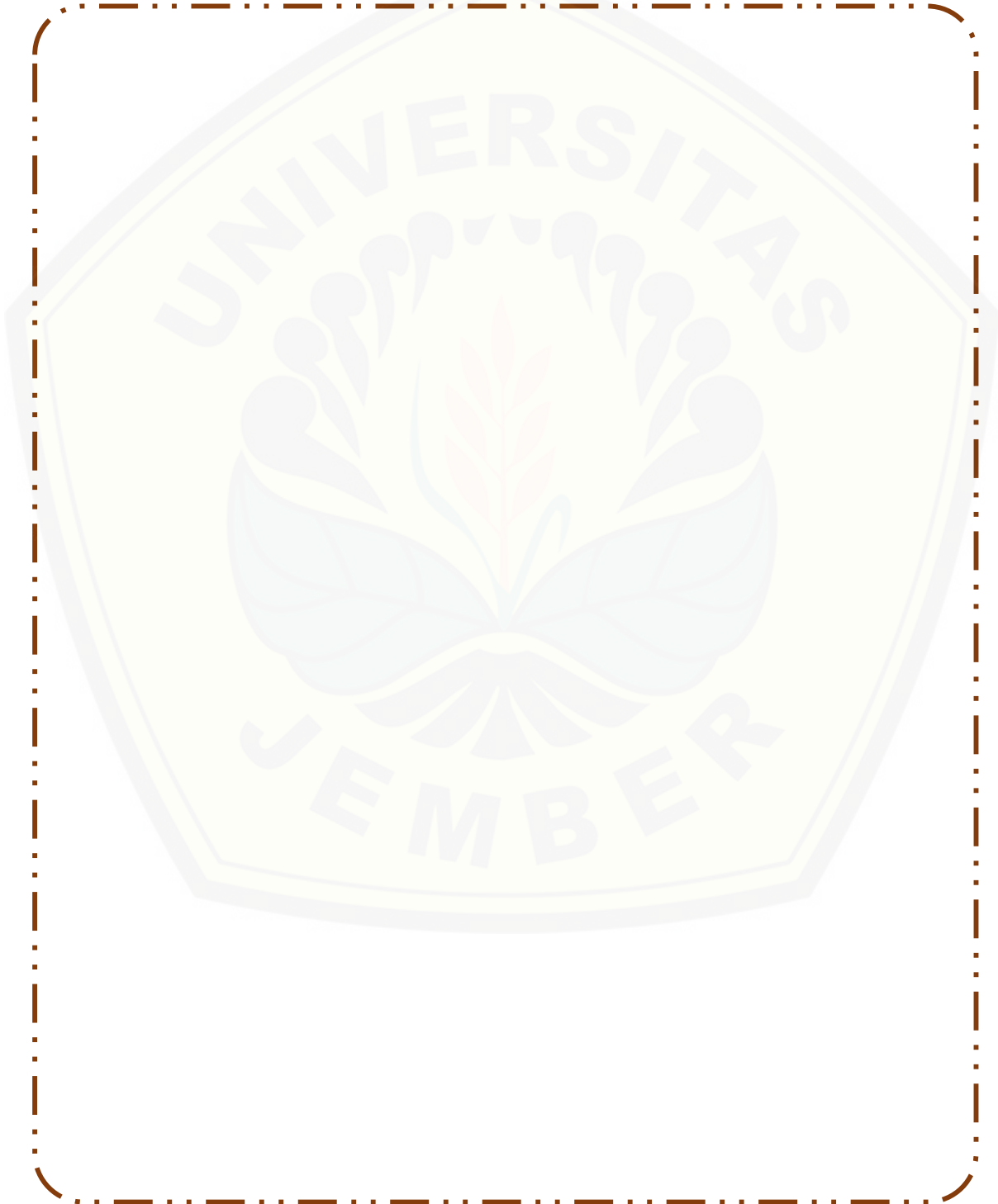
**MENGANALISIS DAN
MENGEVALUASI**



**MENYELESAIKAN MASALAH
KOMBINATORIK LAIN**

Latihan

Carilah minimal 2 graf (selain Path Graf dan Star Graf) , kemudian tentukan kardinalitasnya yang meliputi titik , jumlah titik, dan sisi serta pewarnaan titik dinamisnya !!





MONOGRAF

r-dynamic vertex coloring



Brian Juned Septory

Brian Juned Septory

Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan

Universitas Jember

2019

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Tuhan YME atas berkat dan anugerahNya sehingga Monograf *r-dynamic vertex coloring* telah selesai. Monograf ini berisi tentang hasil-hasil penelitian *r-dynamic vertex coloring* oleh peneliti terdahulu dan juga hasil penelitian dari penulis.

Terima kasih disampaikan kepada Prof. Drs. Dafik, M.Sc, P.hD dan terima kasih juga kepada Prof. Drs. I Made Tirta, M.Sc, P.hD atas kesabarannya dalam membimbing dalam proses pembuatan monograf sehingga dapat selesai dengan baik

Kami menyadari masih terdapat kekurangan dalam monograf ini, untuk itu kritik dan saran terhadap penyempurnaan monograf ini sangat diharapkan. Semoga monograf ini dapat berguna dan bermanfaat bagi setiap pihak yang membutuhkan.

Jember, 2019
Penulis

Brian Juned Septory

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI	ii
DAFTAR GAMBAR	iii
BAB 1 GRAF	1
1.1 Definisi Graf	1
1.2 Graf Khusus	4
1.3 Operasi Korona..	6
BAB 2 PEWARNAAN TITIK DINAMIS (<i>r-dynamic vertex coloring</i>)	8
2.1 Pewarnaan Graf	8
2.2 Pewarnaan Titik Dinamis (<i>r-dynamic vertex coloring</i>)	8
2.3 Aplikasi Pewarnaan Titik Dinamis (<i>r-dynamic vertex coloring</i>) ..	9
BAB 3 HASIL PENELITIAN TERDAHULU	12
BAB 4 HASIL PENELITIAN	16
DAFTAR PUSTAKA	33

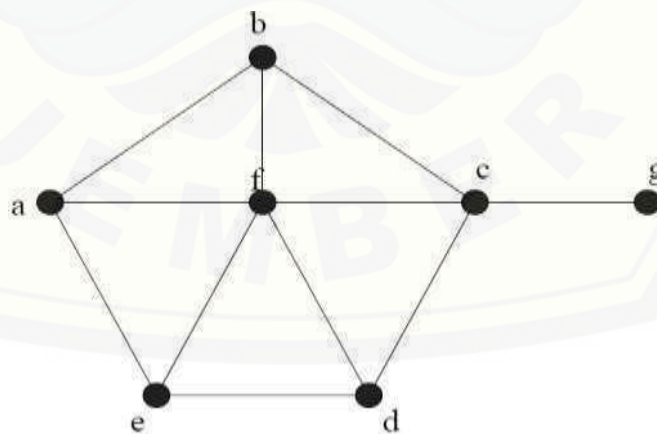
DAFTAR GAMBAR

	Halaman
1 Graf Terhubung	1
2 Graf terhubung dan Graf tidak terhubung	2
3 Graf Sederhana dan Graf tidak Sederhana	3
4 Graf Berhingga dan Graf tidak Berhingga.....	3
5 Graf tidak Berarah dan Graf Berarah	4
6 Graf Bintang S_3 dan S_4	5
7 <i>Graf Lintasan P_4</i>	5
8 Graf Lengkap	5
9 Graf Roda W_n	6
10 Graf Hasil Operasi <i>Corona Product</i> $P_3 \odot H_4$	7
11 Graf Hasil Operasi korona pangkat dua $K_5 \odot^2 F_4$	7
12 Contoh pewarnaan titik pada graf	8
13 Contoh 1,2,3 <i>r-Dynamic Vertex Coloring</i>	9
14 Representasi graf budidaya ikan nila pada pewarnaan graf	10
15 Pewarnaan r-dinamis pada graf $P_t \odot^2 P_s$ dengan $r = 1$..	20
16 Pewarnaan r-dinamis pada graf $P_t \odot^2 P_s$ dengan $r = 3$	21
17 Pewarnaan r-dinamis pada graf $P_t \odot^2 P_s$ dengan $r = 8$	21
18 Pewarnaan r-dinamis pada graf $P_t \odot^2 S_s$ dengan $r = 1$	24
19 Pewarnaan r-dinamis pada graf $P_t \odot^2 S_s$ dengan $r = 3$	24
20 Pewarnaan r-dinamis pada graf $P_t \odot^2 S_s$ dengan $r = 10$	25
21 Pewarnaan r-dinamis pada graf $P_t \odot^2 K_s$ dengan $r = 1$	27
22 Pewarnaan r-dinamis pada graf $P_t \odot^2 K_s$ dengan $r = 5$	28
23 Pewarnaan r-dinamis pada graf $P_t \odot^2 K_s$ dengan $r = 10$	28
24 Pewarnaan r-dinamis pada graf $P_t \odot^2 F_s$ dengan $r = 1$	31
25 Pewarnaan r-dinamis pada graf $P_t \odot^2 F_s$ dengan $r = 4$	31
26 Pewarnaan r-dinamis pada graf $P_t \odot^2 F_s$ dengan $r = 10$	32

BAB 1. Graf

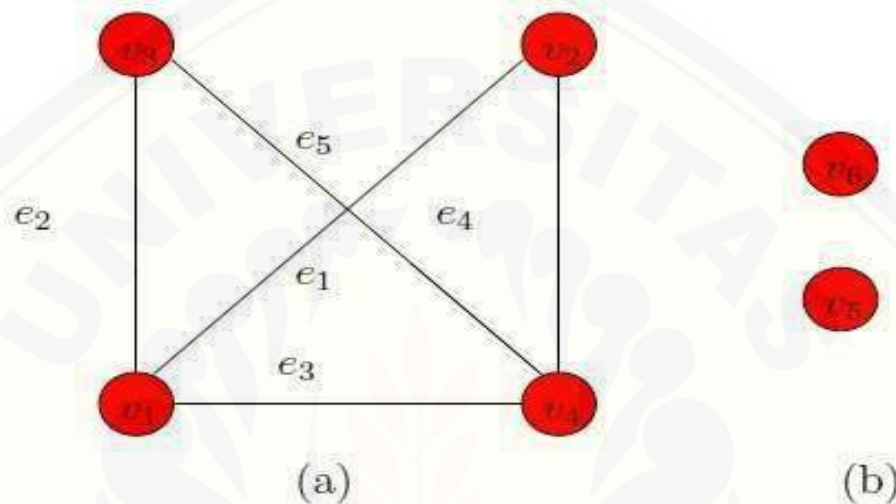
1.1 Definisi Graf

Graf G adalah pasangan himpunan $(V(G), E(G))$ yang ditulis dengan notasi $G = (V, E)$. $V(G)$ merupakan himpunan tak berhingga tak kosong dari elemen yang disebut titik (*vertex*). $E(G)$ sebuah himpunan yang mungkin kosong dari pasangan tak terurut u, v dari titik $u, v \in V(G)$ disebut sisi (*edge*). Sebuah graf G tidak harus memiliki sebuah sisi namun minimal memiliki satu titik. Anggota dari V adalah titik dari G dan anggota dari E adalah sisi dari G . Jadi V adalah titik dari G dan E adalah sisi dari G . Titik atau simpul pada sebuah graf dapat dinomori dengan huruf, misalnya $a, b, c, \dots, v, w, \dots$, dinomori dengan bilangan asli $1, 2, 3, \dots$ atau dinomori dengan gabungan antara huruf dan bilangan asli. Sisi yang menghubungkan simpul u dan simpul v dapat dinyatakan dengan pasangan (u, v) atau dinyatakan dengan lambang e_1, e_2, \dots . Berdasarkan definisi graf yang telah disebutkan di atas dapat dimungkinkan adanya graf yang tidak memiliki sisi tetapi hanya berupa titik. Titik-titik yang berkelompok dan membentuk suatu himpunan titik tanpa sisi maka disebut (*null graph*) atau graf kosong. Graf kosong (*null graph* atau *empty graph*) dinotasikan dengan N_n , dimana n adalah jumlah titik pada graf. Perhatikan Gambar 1.



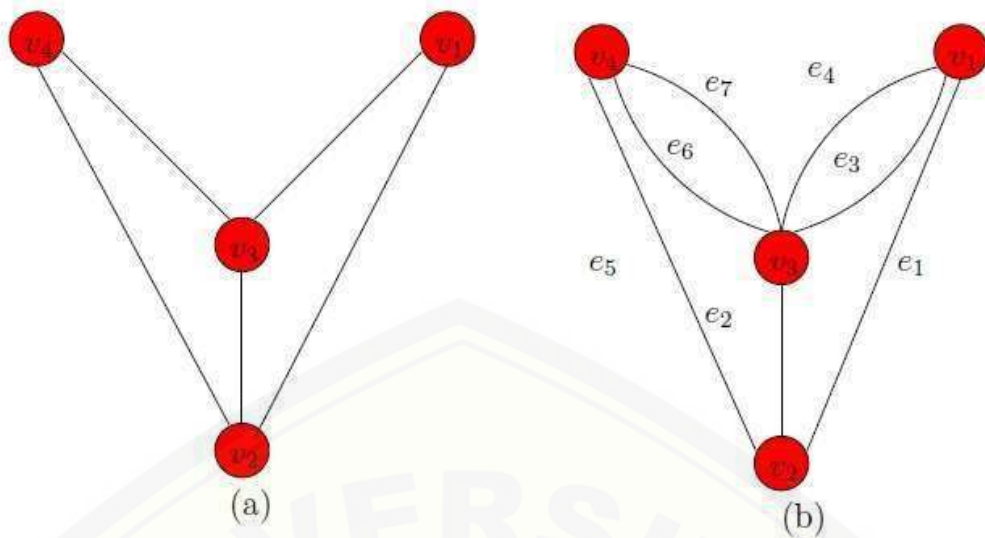
Gambar 1. Graf Terhubung (G)

Pada Gambar 1 di atas graf G memiliki $|V|=7$ dan $|E|=11$ dengan himpunan titik $V=\{a, b, c, d, e, f, g\}$ dan himpunan sisi $E=\{ab, ae, af, bc, bf, cd, cf, cg, de, df, ef\}$ dengan $\Delta(G)=5$ dan $\delta(G)=1$. Suatu graf dikatakan terhubung (connected) jika setiap pasang titik di G dihubungkan dengan suatu path. Jika terdapat titik di G yang tidak dihubungkan dengan suatu path, maka graf G dikatakan tidak terhubung (disconnected) (Rosen, 2003). Berikut Gambar 2 ilustrasi graf terhubung dan tidak terhubung.



Gambar 2. (a) Graf terhubung dan (b) Graf tidak terhubung

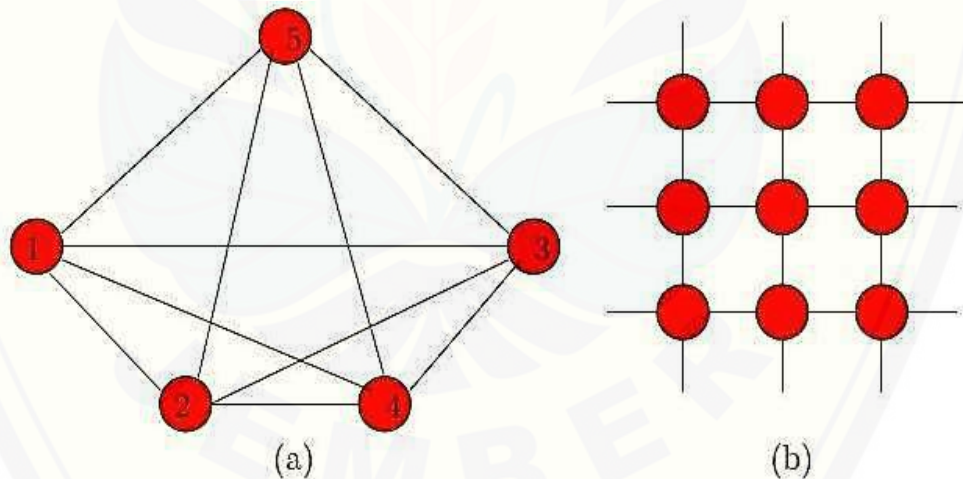
$E(G_b) = \emptyset$, maka G_b adalah graf kosong. Dua titik dikatakan berhubungan (adjacent) jika ada sisi yang menghubungkan keduanya dan sebuah sisi dikatakan menempel untuk titik yang menghubungkan sisi tersebut. Sejumlah sisi yang menempel pada sebuah titik disebut derajat titik (degree). Sebagai contoh, graf pada Gambar 2, v_1 terhubung dengan v_3 dan v_3 terhubung dengan v_4 , dan sisi e_1 menempel dengan titik v_1 dan v_2 . Titik v_4 memiliki derajat 3, dan v_1 memiliki derajat 3. Suatu sisi dapat menghubungkan suatu simpul dengan simpul yang sama atau bisa disebut juga sebuah sisi yang berawal dan berakhir pada verteks yang sama. Sisi yang demikian dinamakan gelang (loop). Dan dua atau lebih sisi yang mempunyai verteks-verteks ujung yang sama disebut dengan sisi paralel. Sebuah graf yang di dalamnya tidak terdapat loop dan sisi paralel disebut dengan graf sederhana. Gambar 3 berikut merupakan contoh dari graf sederhana dan tidak sederhana.



Gambar 3. (a) Graf Sederhana dan (b) Graf tidak Sederhana

Berdasarkan jumlah simpul pada suatu graf, maka secara umum graf dapat digolongkan menjadi dua jenis:

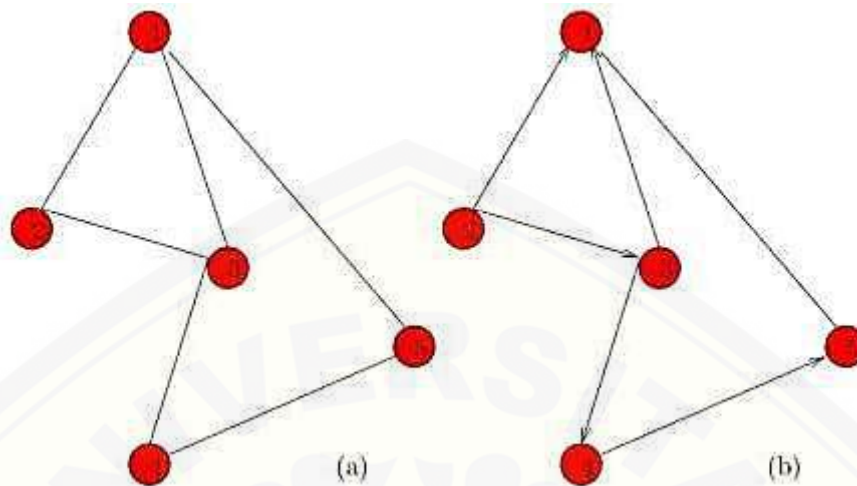
1. Graf berhingga (*nite graf*).
2. Graf tak-berhingga (*unnite graf*).



Gambar 4. (a) Graf Berhingga dan (b) Graf tidak Berhingga

Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dibedakan atas dua jenis:

1. Graf tak-berarah (*undirected graf*).
2. Graf berarah (*directed graf atau digraf*).



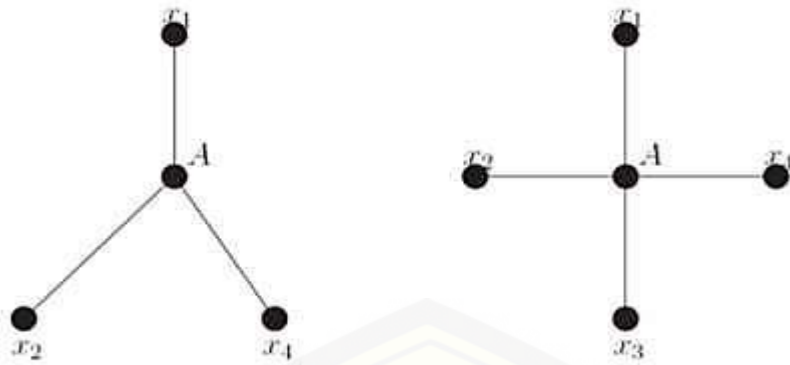
Gambar 5. (a) Graf tidak Berarah dan (b) Graf Berarah

1.2 Graf Khusus

Graf khusus merupakan graf yang memiliki keunikan tidak isomorfosis dengan graf lainnya. Karakteristik bentuknya dapat diperluas sampai order n tetapi simetris. Keunikannya adalah graf khusus tidak isomorfis dengan graf lainnya. Karakteristik bentuknya dapat diperluas sampai order n tetapi simetris. Graf khusus yang sudah populer dinamakan well-known special graph sedangkan grafkhusus yang belum populer tetapi dengan karakteristik graf khusus dinamakan well-defined special graph (Seymour, et. al, 2002). Terdapat beberapa jenis graf sederhana khusus. Berikut desinisi beberapa graf khusus :

a. Graf Bintang (*Star Graph*)

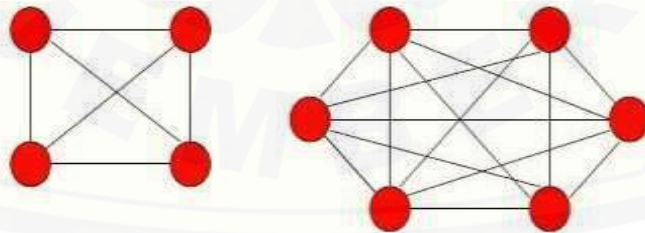
Graf bintang (*Star Graph*), dinotasikan dengan S_n adalah sebuah graf yang terdiri dari n sisi dan $n + 1$ titik, dimana satu titik sebagai titik pusat, yaitu titik yang berderajat n . Contoh graf bintang dapat dilihat pada gambar di bawah ini.

Gambar 6. Graf Bintang S_3 dan S_4 b. Graf Lintasan (*Path Graph*)

Graf lintasan (*Path Graph*) adalah graf yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan dengan n buah titik dilambangkan dengan P_n dimana $n \geq 2$. Jumlah sisi pada graf lintasan yang terdiri dari n buah titik adalah $n - 1$ sisi. Contoh graf lintasan dapat dilihat pada gambar di bawah ini.

Gambar 7. Graf Lintasan P_4 c. Graf lengkap (*Complete Graph*)

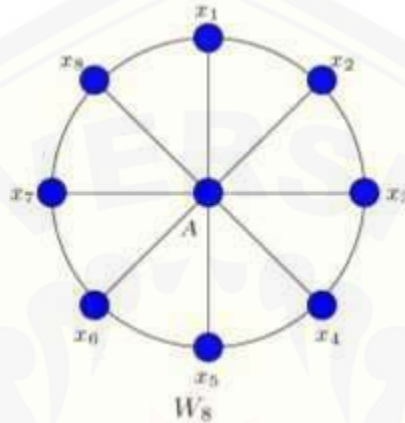
Graf lengkap (*Complete Graph*) adalah graf sederhana yang setiap titiknya mempunyai sisi ke semua titik lainnya. Graf lengkap dengan n buah titik dilambangkan dengan K_n . Jumlah sisi pada graf lengkap yang terdiri dari n buah titik adalah $n(n - 1)/2$ sisi. Contoh dari graf lengkap bisa dilihat pada Gambar di bawah ini.



Gambar 8. Graf Lengkap

d. Graf Roda (*Wheel Graph*)

Graf roda (*Wheel Graph*) W_n ($n \geq 3$) adalah graf yang didapat dengan menghubungkan semua titik dari graf siklus C_n dengan suatu titik yang disebut titik pusat. Graf roda memiliki $V(G) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{A\} = n + 1$ dan $E(G) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\} \cup \{Ax_i; 1 \leq i \leq n\} = 2n$. Contoh graf roda dapat dilihat pada gambar di bawah ini.

Gambar 9. Graf Roda W_n

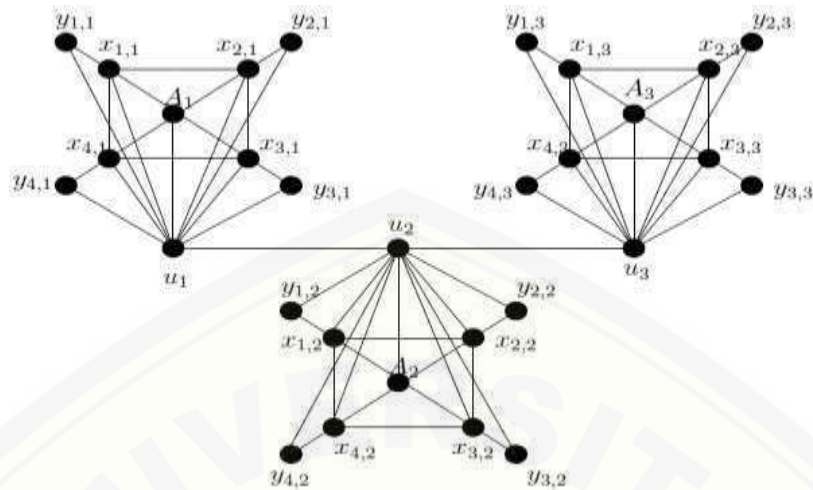
1.3 Operasi Graf

Operasi graf merupakan operasi terhadap dua buah graf atau lebih sehingga menghasilkan graf baru. Salah satu operasi graf yang digunakan pada penelitian ini yaitu operasi korona (*crown product*).

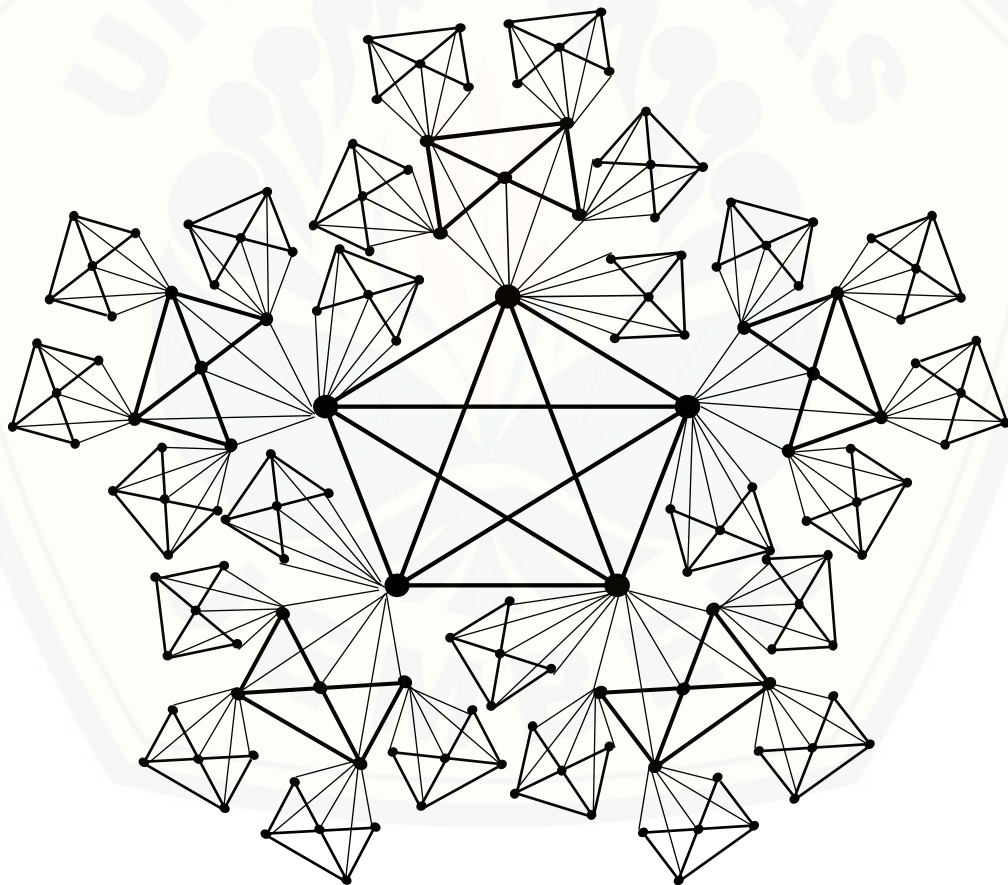
Corona product dari dua graf $G_1(V_1, E_1)$ dan $G_2(V_2, E_2)$ dinotasikan dengan $G_1 \odot G_2$, yaitu graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah duplikat dari graf G_1 dan $|V(G_1)|$ duplikat dari $G_2, G_{2,1}, G_{2,2}, G_{2,3}, \dots, G_{2,|V(G_1)|}$, kemudian menghubungkan titik ke- i dari G_1 ke setiap titik di $G_{2,i}$ $i = 1, 2, 3, \dots, |V(G_1)|$.

Berdasarkan perkembangannya, operasi korona di ekspan hingga pangkat ke- l ($G_1 \odot^l G_2$). Operasi korona dari dua buah graf G_1 dan G_2 adalah graf $G_1 \odot G_2$ yang diperoleh dengan mengambil sebuah duplikat dari graf G_1 dan $|V(G_1)|$ duplikat dari G_2 , dimana simpul ke- l dari graf G_1 bertetangga dengan setiap titik pada duplikat ke- 2 dari graf G_2 . Untuk bilangan bulat $l \geq 2$, maka ditetapkan graf $G_1 \odot^l G_2$ secara rekursif dari $G_1 \odot G_2$ sebagai $G_1 \odot^l G_2 = (G_1 \odot^{l-1} G_2) \odot G_2$. Graf $H_1 \odot^l H_2$ juga disebut sebagai operasi l -korona dari graf G_1 dan G_2 . Contoh operasi korona

pangkat satu dan pangkat dua dapat dilihat pada Gambar di bawah ini.



Gambar 10. Graf Hasil Operasi Corona Product $P_3 \odot H_4$



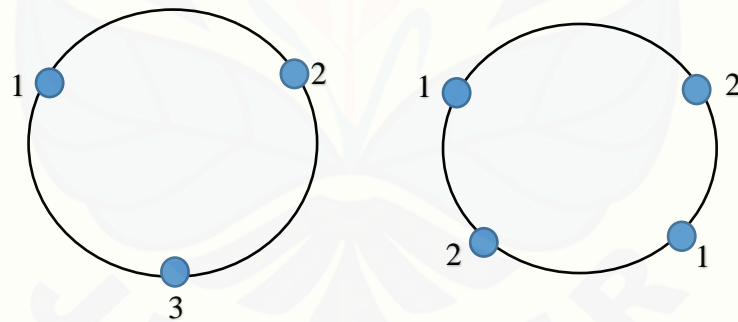
Gambar 11. Graf Hasil Operasi korona pangkat dua $K_5 \odot^2 F_4$

BAB 2. Pewarnaan Titik Dinamis (*r*-dynamic vertex coloring)

2.1 Pewarnaan Graf

Pewarnaan merupakan kegiatan memberi warna pada sebuah objek. Dalam teori graf, pewarnaan graf merupakan suatu bentuk pelabelan graf, yaitu dengan memberi warna pada elemen graf yang akan dijadikan subjek dalam suatu penelitian. Pewarnaan graf adalah memberikan warna pada objek tertentu pada graf. Objek tersebut dapat berupa titik, sisi, maupun wilayah. Pewarnaan titik maupun pewarnaan sisi pada graf merupakan salah satu topik dalam teori graf yang kaya dengan aplikasi.

Pewarnaan titik pada graf G merupakan pemberian warna pada titik-titik graf G , satu warna untuk setiap titik, sehingga titik-titik yang bertetangga diwarnai dengan warna berbeda. Pewarnaan titik dapat dianggap sebagai fungsi $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ sedemikian hingga $c(u) \neq c(v)$ jika u dan v merupakan dua titik yang bertetangga. Gambar berikut merupakan contoh dari pewarnaan titik pada graf.



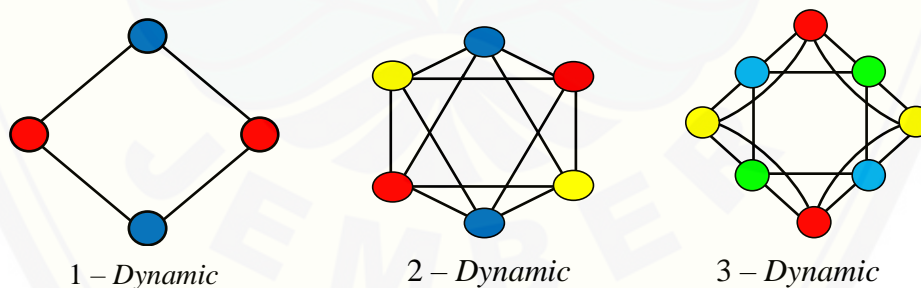
Gambar 12. Contoh pewarnaan titik pada graf.

2.2 Pewarnaan titik *r*-dinamis pada graf

Suatu graf G disebut *k*-colorable jika dibutuhkan k warna untuk memberikan pewarnaan pada graf G , dimana k merupakan bilangan bulat positif. Nilai minimum untuk k yang dibutuhkan pada pewarnaan graf G disebut bilangan kromatik pada G . Pewarnaan *r*-dinamis merupakan pengembangan dari pewarnaan *k*-warna dinamis yang diperkenalkan oleh Alishashi pada tahun 2007.

Definisi mengenai pewarnaan titik r -dinamis sebagai berikut. Misalkan $G = (V, E)$ adalah Graf yang sederhana, terhubung, dan graf tak berarah dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E dan $d(v)$ adalah derajat dari setiap $v \in V(G)$. Derajat maksimum dan derajat minimum G dilambangkan dengan $\Delta(G)$ dan $\delta(G)$. Dengan k warna pada graf G , kita memetakan $c : V(G) \Rightarrow S$, dimana $|S| = k$ sehingga setiap dua titik yang bertetangga memiliki warna yang berbeda. Sebuah r -dinamis dengan k warna pada graf G sehingga $|c(N(v))| \geq \min\{r, d(v)\}$ untuk setiap titik v di $V(G)$ dimana $N(v)$ adalah lingkungan v dan $c(S) = \{c(v) : v \in S\}$ untuk setiap titik bagian dari S (Jahanbekam, et al. 2014). Bilangan kromatik r -dinamis di tuliskan dengan $\chi_r(G)$ adalah nilai minimum k sehingga graf G memiliki r -dinamis dengan k -warna.

Sebuah k -pewarnaan titik di katakan pewarnaan titik dinamis jika untuk setiap titik $v \in V(G)$ dengan $d(v) \geq 2$. Titik yang saling bertetangga mempunyai dua warna yang berbeda. Jumlah warna r -dynamic dari graf G dinotasikan $\chi_r(G)$ merupakan warna minimum k pada graf G . Jumlah berwarna 1- Dynamic pada Graf G adalah nilai warna yang di perkenalkan sebagai *Chromatic Number* dan dinotasikan $\chi_d(G)$ dan untuk jumlah $Dynamic \geq 2$ pada graf G adalah nilai warna yang diperkenalkan sebagai *r -Dynamic Chromatic Number*. Berikut contoh gambar pewarnaan titik r -dinamis pada graf.



Gambar 13. Contoh 1,2,3 r -Dynamic Vertex Coloring

2.3 Aplikasi Pewarnaan titik dinamis

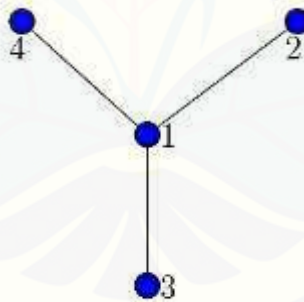
Ikan nila merupakan jenis ikan untuk konsumsi dan hidup di air tawar. Ikan ini cenderung sangat mudah dikembangbiakkan serta sangat mudah dipasarkan karena merupakan salah satu jenis ikan yang paling sering dikonsumsi sehari-hari

oleh Masyarakat. Dengan teknik budidaya yang sangat mudah, serta pemasarannya yang cukup luas, sehingga budidaya ikan nila sangat layak dilakukan, baik skala rumah tangga maupun skala besar atau perusahaan.

Cara budidaya ikan nila terdiri dari beberapa tahapan yang sangat penting untuk diketahui, yaitu mulai dari persiapan kolam, penerbaran benih ikan, pencegahan penyakit, dan masa pemanenan.

Kolam ikan adalah salah satu hal yang paling penting untuk membudidayakan ikan nila. Sarana berupa kolam yang perlu disediakan dalam usaha budidaya ikan nila tergantung dalam sistem pemeliharaan (sistem 1 kolam, sistem 2 kolam, dst). Adapun kolam yang biasa digunakan dalam budidaya ikan nila yaitu, Kolam Pemeliharaan Induk/Kolam Pemijahan, Kolam Pemeliharaan Benih/Kolam Pendederan, Kolam Pembesaran dan Kolam/tempat Pemberokan.

Akan tetapi beberapa pembudidaya ikan nila kurang memperhatikan pemanfaatan lahan dan pemisahan anakan nila sesuai dengan fase pertumbuhannya sehingga banyak lahan yang tidak efektif dan kerusakan benih ikan nila. Oleh karena itu peneliti mempunyai solusi untuk permasalahan tersebut dengan menggunakan aplikasi pewarnaan r-dinamis dalam teori graf.



Gambar 14. Representasi graf budidaya ikan nila pada pewarnaan graf

Budidaya ikan nila di aplikasikan pada pewarnaan r-dinamis pada graf bintang sebanyak n titik bergantung pada luas lahan yang tersedia. Titik graf bintang minimal terdapat 4 titik. Titik tengah pada graf bintang merupakan kolam indukan ikan nila. Titik disekitarnya merupakan kolam anakan berdasarkan fase pertumbuhan. Sisi merupakan penghubung titik kolam indukan dengan titik kolam anakan untuk mempermudah pemindahan telur pada kolam anakannya. Pewarnaan

dalam hal ini yaitu perbedaan fase pertumbuhan pada ikan nila. Titik anakan minimal terdapat 3 titik dengan pembagian titik 1 adalah kolam pemeliharaan benih, titik 2 adalah kolam pembesaran, dan titik 3 adalah kolam bagi ikan yang sudah siap di panen. Untuk pembudidaya pemula dalam hal ini adalah $r = 1$ membutuhkan 2 warna, yaitu warna indukan dan warna kolam pemeliharaan benih. Pewarnaan selanjutnya semakin berkembangnya fase ikan maka warna kolam yang dibutuhkan semakin banyak sampai masa panen.



BAB 3. Hasil Penelitian Terdahulu

Pada bagian ini disajikan beberapa rangkuman hasil pewarnaan titik r -dinamis yang dapat digunakan sebagai rujukan pada monograf ini. Rangkuman yang tersedia pada bagian ini merupakan hasil penelitian pewarnaan titik r -dinamis terdahulu.

- (Kristiana, 2017) Diberikan graf $G = P_n \odot P_m$ merupakan sebuah graf korona dari graf P_n dan P_m . Untuk $n, m \geq 2$, bilangan kromatik r -dinamisnya adalah:

$$\chi_r(G) = \begin{cases} 3 & ; r = 1, 2 \\ r + 1 & ; 3 \leq r \leq \Delta - 1 \\ m + 3 & ; r \geq \Delta \end{cases}$$

- (Kristiana, 2017) Diberikan graf $G = P_n \odot C_m$ merupakan sebuah graf korona dari graf P_n dan C_m . Untuk $n, m \geq 3$, bilangan kromatik r -dinamisnya adalah:

$$\chi_{r=1,2}(G) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } m \text{ genap atau } m = 3k, k \geq 1 \\ 4, & \text{untuk } m \text{ ganjil atau } m = 5 \end{cases}$$

$$\chi_{r=3}(G) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } m = 3k, k \geq 1 \\ 6, & \text{untuk } m = 5 \\ 5, & \text{untuk } m \text{ lainnya} \end{cases}$$

$$\chi_r(G) = \begin{cases} r + 1 & ; 4 \leq r \leq \Delta - 1 \\ m + 3 & ; r \geq \Delta \end{cases}$$

- (Kristiana, 2017) Diberikan graf $G = P_n \odot W_m$ merupakan sebuah graf korona dari graf P_n dan W_m . Untuk $n, m \geq 3$, bilangan kromatik r -dinamisnya adalah:

$$\chi_{r=1,2,3}(G) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } m \text{ genap} \\ 5, & \text{untuk } m \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$\chi_{r=4}(G) = \begin{cases} 5, & \text{untuk } m = 3k, k \geq 1 \\ 7, & \text{untuk } m = 5 \\ 6, & \text{untuk } m \text{ lainnya} \end{cases}$$

$$\chi_r(G) = \begin{cases} r + 1 & ; 5 \leq r \leq \Delta - 1 \\ m + 4 & ; r \geq \Delta \end{cases}$$

- (Kristiana, 2018) Diberikan graf $G = H \odot W_m$ merupakan sebuah graf korona dari sebarang graf H dan W_m . Bilangan kromatik r -dinamisnya adalah:

$$\chi_{r=1,2,3}(G) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } m \text{ genap} \\ 5, & \text{untuk } m \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$\chi_{r=4,5}(G) = \begin{cases} r + 1, & \text{untuk } m = 3k, k \geq 1 \\ 7, & \text{untuk } m = 5 \\ 6, & \text{untuk } m \text{ lainnya} \end{cases}$$

$$\chi_r(G) = \begin{cases} r + 1 & ; 6 \leq r \leq \Delta(H) + m + 1 \\ \Delta(H) + m + 2; & r \geq \Delta(H) + m + 2 \end{cases}$$

- (Kristiana, 2018) $\chi_r(H \odot W_m) = \chi_r(W_m) + 1$
- (Kristiana, 2018) Diberikan graf $G = S_n \odot W_m$ merupakan sebuah graf korona dari sebarang graf S_n dan W_m . Bilangan kromatik r -dinamisnya adalah:

$$\chi_{r=1,2,3}(G) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } m \text{ genap} \\ 5, & \text{untuk } m \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$\chi_{r=4,5}(G) = \begin{cases} r + 1, & \text{untuk } m = 3k, k \geq 1 \\ 7, & \text{untuk } m = 5 \\ 6, & \text{untuk } m \text{ lainnya} \end{cases}$$

$$\chi_r(G) = \begin{cases} r + 1 & ; 6 \leq r \leq n + m + 1 \\ n + m + 2; & r \geq n + m + 2 \end{cases}$$

- (Kristiana, 2018) Diberikan graf $G = W_n \odot W_m$ merupakan sebuah graf korona dari sebarang graf W_n dan W_m . Bilangan kromatik r -dinamisnya adalah:

$$\chi_{r=1,2,3}(G) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } m \text{ genap} \\ 5, & \text{untuk } m \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$\chi_{r=4,5}(G) = \begin{cases} r + 1, & \text{untuk } m = 3k, k \geq 1 \\ 7, & \text{untuk } m = 5 \\ 6, & \text{untuk } m \text{ lainnya} \end{cases}$$

$$\chi_r(G) = \begin{cases} r + 1 & ; 6 \leq r \leq n + m + 1 \\ n + m + 2; & r \geq n + m + 2 \end{cases}$$

- (Kristiana, 2018) Diberikan graf $G = W_n \odot H$ merupakan sebuah graf korona dari sebarang graf W_n dan H . Bilangan kromatik r -dinamisnya adalah:

$$\chi_r(G) = \begin{cases} \chi_{r=1,2}(G) \geq \begin{cases} 3, \text{ untuk } n \text{ genap} \\ 4, \text{ untuk } n \text{ ganjil} \end{cases} \\ r + 1 & ; 3 \leq r \leq n + |V(H)| + 1 \\ n + |V(H)| + 2 & ; r \geq n + |V(H)| + 2 \end{cases}$$

- (Kristiana, 2018) $\chi_{r=1,2}(W_n \odot H) = \chi_{r=1,2}(W_m)$

$$\chi_{r=1,2}(G) = \begin{cases} 3 & ; r = 1, 2 \\ r + 1 & ; 3 \leq r \leq \Delta - 1 \\ m + 3 & ; r \geq \Delta \end{cases}$$

- (Kristiana, 2018) Diberikan graf $G = K_n \odot H$ merupakan sebuah graf korona dari graf K_n dan graf $H \neq C_m$ dan W_m untuk $n \geq 4$, bilangan kromatik r -dinamisnya adalah:

$$\chi_r(K_n \odot H) = \begin{cases} \chi_r(K_n) & ; r = 1, 2 \\ r + 1 & ; n \leq r \leq n + |V(H)| - 1 \\ n + |V(H)| & ; r \geq n + |V(H)| \end{cases}$$

- (Kristiana, 2018) Diberikan graf $G = K_n \odot S_m$ merupakan sebuah graf korona dari graf K_n dan graf S_m untuk $n \geq 4$ dan $m \geq 3$, bilangan kromatik r -dinamisnya adalah:

$$\chi_r(K_n \odot S_m) = \begin{cases} n & ; 1 \leq r \leq n - 1 \\ r + 1 & ; n \leq r \leq m + n \\ m + n + 1 & ; r \geq m + n + 1 \end{cases}$$

- (Kristiana, 2018) Diberikan graf $G = K_n \odot F_m$ merupakan sebuah graf korona dari graf K_n dan graf F_m untuk $n \geq 4$ dan $m \geq 3$, bilangan kromatik r -dinamisnya adalah:

$$\chi_r(K_n \odot F_m) = \begin{cases} n & ; 1 \leq r \leq n - 1 \\ r + 1 & ; n \leq r \leq m + n \\ m + n + 1 & ; r \geq m + n + 1 \end{cases}$$

- (Kristiana, 2018) Diberikan graf $G = H \odot K_m$ merupakan sebuah graf korona dari graf $H \neq C_n$ dan W_n dan K_m untuk $m \geq 4$, bilangan kromatik r -dinamisnya adalah:

$$\chi_r(P_n \odot H) = \begin{cases} \chi_r(K_m) + 1 & ; 1 \leq r \leq m \\ r + 1 & ; m + 1 \leq r \leq m + \Delta(H) \\ \Delta(H) + m + 1 & ; r \geq m + \Delta(H) + 1 \end{cases}$$

- (Kristiana, 2018) Diberikan graf $G = S_n \odot K_m$ merupakan sebuah graf korona dari graf S_n dan graf K_m untuk $n \geq 3$, $m \geq 4$, bilangan kromatik r -dinamisnya adalah:

$$\chi_r(S_n \odot K_m) = \begin{cases} r + 1 & , n \leq r \leq n + m \\ n + m + 1 & , r \geq n + m + 1 \end{cases}$$

- (Kristiana, 2018) Diberikan graf $G = F_n \odot K_m$ merupakan sebuah graf korona dari graf F_n dan graf K_m untuk $n \geq 3$, $m \geq 4$, bilangan kromatik r -dinamisnya adalah:

$$\chi_r(F_n \odot K_m) = \begin{cases} m + 1 & ; 1 \leq r \leq m \\ r + 1 & ; n \leq r \leq m + n \\ m + n + 1 & ; r \geq m + n + 1 \end{cases}$$

- (Kristiana, 2018) Diberikan graf $G = K_n \odot K_m$ merupakan sebuah graf korona dari graf K_n dan graf K_m untuk $n, m \geq 3$, bilangan kromatik r -dinamisnya adalah:

i. Untuk $n \leq m$

$$\chi_r(G) = \begin{cases} m + 1 & ; 1 \leq r \leq m \\ r + 1 & ; m + 1 \leq r \leq m + n - 1 \\ m + n & ; r \geq m + n \end{cases}$$

ii. Untuk $n > m$

$$\chi_r(G) = \begin{cases} n & ; 1 \leq r \leq n - 1 \\ r + 1 & ; m + 1 \leq r \leq m + n - 1 \\ m + n & ; r \geq m + n \end{cases}$$

BAB 4. Hasil Penelitian

Dalam monograf ini, kita akan mempelajari batas bawah bilangan kromatik r-dinamis dari $\chi_r(P_t \odot^2 P_s)$, $\chi_r(P_t \odot^2 S_s)$, $\chi_r(P_t \odot^2 K_s)$ dan $\chi_r(P_t \odot^2 F_s)$.

Langkah-langkah untuk mendapatkan bilangan kromatik pewarnaan titik r-dinamis:

- Tentukan operasi graf yang akan digunakan;
Tahap ini merupakan tahap awal yang harus dilakukan oleh peneliti.
- Tentukan graf khusus yang akan digunakan;
Setelah menentukan operasi graf yang akan digunakan, pilihlah graf-graf khusus yang belum pernah diteliti sebelumnya.
- Beri notasi pada setiap titik pada graf hasil operasi yang telah ditentukan;
Notasikan titik-titik pada graf dengan x_1, x_2, x_3, \dots atau y_1, y_2, y_3, \dots
Proses ini harus dilakukan agar mengetahui letak dan nama dari setiap titik.
- Tentukan kardinalitas titik dan sisi beserta derajat maksimum dan derajat minimum pada graf;
Setelah menotasikan titik, kita akan mengetahui banyaknya titik dan sisi pada sebuah graf. Hal ini untuk memudahkan peletakan warna dan melihat fungsi warna pada sebuah graf.
- Beri warna seminimal mungkin pada setiap titik pada graf sesuai dengan definisi pewarnaan titik r-dinamis;
Proses ini merupakan awal dari proses pewarnaan, berikut algoritma pemilihan warna pada titik:
 - Pilihlah titik dengan derajat terbesar pada sebuah graf
 - Beri warna pada titik tersebut, untuk mempermudah pilihlah warna 1
 - Beri warna titik tetangganya dengan warna selain 1 dan banyaknya warna adalah titik tetangga ditambah 1

- Tinjau titik lainnya menggunakan algoritma di atas
- Pastikan warna sudah minimal dan memenuhi syarat pewarnaan r-dinamis
- Jika banyaknya warna telah memenuhi syarat pewarnaan titik r-dinamis, maka lanjutlah ke langkah selanjutnya. Namun, jika belum memenuhi syarat pewarnaan titik r-dinamis maka kembali pada poin sebelumnya.
- Tentukan fungsi pewarnaan yang telah didapatkan pada poin sebelumnya;
Proses ini akan melihat pola pewarnaan titik r-dinamis pada sebuah graf.
- Tulislah pola warna titik pada pewarnaan titik r-dinamis pada graf;
Tujuan dari proses ini yaitu merepresentasikan pola pewarnaan pada simbol matematis.
- Tercipta Teorema;
Setelah pola pewarnaan berhasil ditemukan, maka kita bisa menyajikannya pada sebuah Teorema.
- Lakukan hal yang sama pada graf lainnya dengan operasi graf yang sama;
Tujuan dari proses ini yaitu ingin melihat pola-pola pada graf lain untuk melihat karakteristik pada operasi graf tersebut.
- Sajikan dalam Lema;
Setelah terlihat karakteristik pada graf-graf yang telah dihasilkan, maka bisa diumumkan dengan Lema.

Berikut Observasi menurut Montgomery, yang akan menjadi penguat hasil-hasil penelitian pada monograf ini:

Observasi 1. Diberikan $\Delta(H)$ adalah derajat maksimum pada graf H . Maka $\chi_r(H) \geq \min\{\Delta(H), r\} + 1$

Observasi 2. Diberikan graf $(H = H_1 \odot^2 H_2)$ adalah operasi graf korona, maka $\delta(H) = \delta(H_2) + 1$ dan $\Delta(H) = \Delta(H) + 2|V(H_2)|$, di mana $\Delta(H)$ adalah derajat maksimum H dan $\delta(H)$ adalah derajat minimum dari H .

Lema 1. Diberikan graf $H = P_t \odot^2 H_2$; $H_2 \neq C_s$ dan W_s , maka:

$$\chi_r(H) \geq \begin{cases} \delta + 1 & ; \text{ untuk } 1 \leq r \leq \delta \\ r + 1 & ; \text{ untuk } \delta + 1 \leq r < \Delta \\ \Delta + 1 & ; \text{ untuk } r \geq \Delta \end{cases}$$

Bukti. Berdasarkan definisi korona dari dua graf yang ditetapkan, $V(P_t \odot^2 H_2) = V(P_t) \cup \bigcup_{\alpha=1}^t V(H_\alpha) \cup V(H_1) V(H_2)^2$ dan $\Delta(P_t \odot^2 H_2) = \Delta(H_1) + 2 |V(H_2)|$ Untuk $1 \leq r \leq \delta$, berdasarkan Observasi 1 dan dipilih $r = \delta$, maka $\chi_r(H = P_t \odot^2 H_2) \geq \min \{r, \Delta(H)\} + 1 = \min \{\delta, \Delta(P_t) + 2 |V(H_2)\} + 1 = \delta + 1$.

Untuk $\delta + 1 \leq r < \Delta$, mengacu pada Observasi 1 dan dengan memilih $r_1 = \delta + 1$, kita dapatkan $\chi_{r_1}(H = P_t \odot^2 H_2) \geq \min \{r, \Delta(H)\}$. Karena $\delta(H_2)$ adalah derajat minimum pada graf H_2 dan $|V(H_2)|$ adalah banyaknya titik pada graf H_2 , dengan demikian $\delta(H_2) \leq |V(H_2)|$ dan $\chi_{r_1}(P_t \odot^2 H_2) \geq \delta(H_2) + 1 = r + 1$. Jika kita memilih $r_2 = \delta(H_2) + 2$, kita dapatkan $\chi_{r_2}(P_t \odot^2 H_2) \geq \min \{\delta(H_2) + 2, \Delta(P_t) + 2 |V(H_2)\} + 1 = \delta(H_2) + 2 + 1 = r_2 + 1$.

Untuk $r \geq \Delta$, dengan $\Delta(P_t \odot^2 H_2) = \Delta(H_1) + 2 |V(H_2)|$ dan $r \geq \Delta(H_1) + 2 |V(H_2)|$, berdasarkan Observasi 1 dan dengan memilih $r = \Delta(P_t) + 2 |V(H_2)|$, maka didapatkan $\chi_r(H = P_t \odot^2 H_2) \geq \min \{r, \Delta(H = P_t \odot^2 H_2)\} + 1 = \min \{\Delta, \Delta\} + 1 = \Delta + 1$.

Teorema 1. Diberikan $H = P_t \odot^2 P_s$; $n, s \geq 3$, maka:

$$\chi_r(H) \geq \begin{cases} 3 & ; \text{ untuk } 1 \leq r \leq 2 \\ r + 1 & ; \text{ untuk } \delta + 1 \leq r < 2s + 2 \\ 2s + 3 & ; \text{ untuk } r \geq 2s + 2 \end{cases}$$

Bukti. Graf $P_t \odot^2 P_s$ memiliki himpunan titik $V(P_t \odot^2 P_s) = \{x_\alpha; 1 \leq \alpha \leq t\} \cup \{x_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s\} \cup \{x_{\alpha,\beta,\gamma}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s, 1 \leq \gamma \leq s\} \cup \{y_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s\}$ dan himpunan sisi $E(P_t \odot^2 P_s) = \{x_\alpha x_{\alpha+1}; 1 \leq \alpha \leq t - 1\} \cup \{x_\alpha y_{\alpha+\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s\} \cup \{y_{\alpha,\beta} y_{\alpha,\beta+1}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s - 1\} \cup \{x_\alpha x_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s\} \cup \{x_\alpha x_{\alpha,\beta+1}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s - 1\} \cup \{x_{\alpha,\beta} x_{\alpha,\beta,\gamma}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s, 1 \leq \gamma \leq s\} \cup \{x_{\alpha,\beta} x_{\alpha,\beta,\gamma+1}; 1 \leq$

$\alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s, 1 \leq \gamma \leq s - 1$ }. Kardinalitas titik dan sisinya adalah $|V(P_t \odot^2 P_s)| = t(s^2 + 2s + 1), |E(P_t \odot^2 P_s)| = 2ts^2 + 3ts - t - 1$ berurutan. Jadi, $\Delta(P_t \odot^2 P_s) = 2p(H_2) + 2 = 2s + 2$ dan $\delta(P_t \odot^2 P_s) = 2$. Kita definisikan ke dalam 3 kasus, yaitu untuk $\chi_{1 \leq r \leq 2}(P_t \odot^2 P_s), \chi_{3 \leq r < 2s+2}(P_t \odot^2 P_s), \chi_{r \geq 2s+2}(P_t \odot^2 P_s)$.

Kasus 1: Untuk 3; $1 \leq r \leq 2$

Berdasarkan Lemma 1, batas bawah untuk $1 \leq r \leq 2$ adalah $\chi_r(P_t \odot^2 P_s) \geq \delta + 1 = 2 + 1 = 3$. Untuk menemukan batas atas untuk $\chi_r(P_t \odot^2 P_s)$, kita petakan $c_1: V(P_t \odot^2 P_s) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 c_1(x_\alpha) &= \begin{cases} 1; & \alpha \text{ ganjil} \\ 2; & \alpha = 2 \end{cases} \\
 c_1(x_{\alpha,\beta}) &= \begin{cases} 1; & \alpha = 2; \beta \text{ ganjil} \\ 2; & \alpha = 1 \text{ mod } 2; \beta = 1 \text{ mod } 2 \\ 3; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 0 \text{ mod } 2 \end{cases} \\
 c_1(x_{\alpha,\beta}^\gamma) &= \begin{cases} 1; & \alpha, \beta, \gamma \text{ ganjil}; 1 \leq \alpha \leq t; \beta \text{ genap}; \gamma \text{ ganjil} \\ 2; & 1 \leq \alpha \leq t; \gamma \text{ genap}; \alpha = 2; \beta, \gamma \text{ ganjil} \\ 3; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta \text{ ganjil}; \gamma = 1 \text{ mod } 2 \end{cases} \\
 c_1(y_{\alpha,\beta}) &= \begin{cases} 1; & \alpha = 2; \beta = 1 \text{ mod } 2 \\ 2; & \alpha = 1 \text{ mod } 2; \beta = 1 \text{ mod } 2 \\ 3; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 0 \text{ mod } 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Jelas terlihat c_1 memenuhi batas atas untuk $\chi_{1 \leq r \leq 2}(P_t \odot^2 P_s) \leq 3$. Oleh karena itu benar bahwa $\chi_{1 \leq r \leq 2}(P_t \odot^2 P_s) = 3$.

Kasus 2: Untuk $r+1; 3 \leq r < 2s+2$

Berdasarkan Lemma 1, batas bawah untuk $3 \leq r < 2s+2$ adalah $\chi_r(P_t \odot^2 P_s) \geq r+1$. Untuk menemukan batas atas untuk $\chi_r(P_t \odot^2 P_s)$, kita petakan $c_2: V(P_t \odot^2 P_s) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 c_2(x_\alpha) &= \begin{cases} 1; & \alpha \text{ ganjil} \\ 2; & \alpha = 2 \end{cases} \\
 c_2(x_{\alpha,\beta}) &= \begin{cases} 3 & ; 1 \leq \alpha \leq t; \beta \text{ ganjil}; r = 3 \\ 4 & ; 1 \leq \alpha \leq t; \beta \text{ genap}; r = 3 \\ (r-2) + \beta & ; 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 0 \text{ mod } 2 \end{cases} \\
 c_2(x_{\alpha,\beta}^\gamma) &= 1, 2, \dots, 2s+2 \neq c(x_{\alpha,\beta}) \cap cN(x_{\alpha,\beta}); \\
 & 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; 1 \leq \gamma \leq s; 3 \leq r \leq 2s+1
 \end{aligned}$$

$$c_2(y_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 1 & ; \alpha \text{ genap}; \beta = 1 \text{ mod } 3; 3 \leq r \leq 2s \\ 2 & ; \alpha \text{ ganjil}; \beta = 1 \text{ mod } 3; 3 \leq r \leq 2s \\ 3 & ; 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 2 \text{ mod } 3; 3 \leq r \leq 2s + 1 \\ 4 & ; 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 0 \text{ mod } 3; 3 \leq r \leq 2s + 1 \\ s + 2 & ; 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 1 \text{ mod } 3; r = 2s + 1 \end{cases}$$

Jelas terlihat c_2 memenuhi batas atas untuk $\chi_{3 \leq r < 2s+2}(P_t \odot^2 P_s) \leq r+1$. Oleh karena itu benar bahwa $\chi_{3 \leq r < 2s+2}(P_t \odot^2 P_s) = r+1$.

Kasus 3: Untuk $2s + 3; r \geq 2s + 2$

Berdasarkan Lemma 1, batas bawah untuk $r \geq 2s + 2$ adalah $\chi_{r \geq 2s+2} \geq 2s + 2 + 1 = 2s + 3$. Untuk menemukan batas atas, kita petakan $c_3 : V(P_t \odot^2 P_s) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, sebagai berikut:

$$c_3(x_\alpha) = \begin{cases} 1; & \alpha \equiv 1 \text{ mod } 3 \\ 2; & \alpha \equiv 2 \text{ mod } 3 \\ 3; & \alpha \equiv 0 \text{ mod } 3 \end{cases}$$

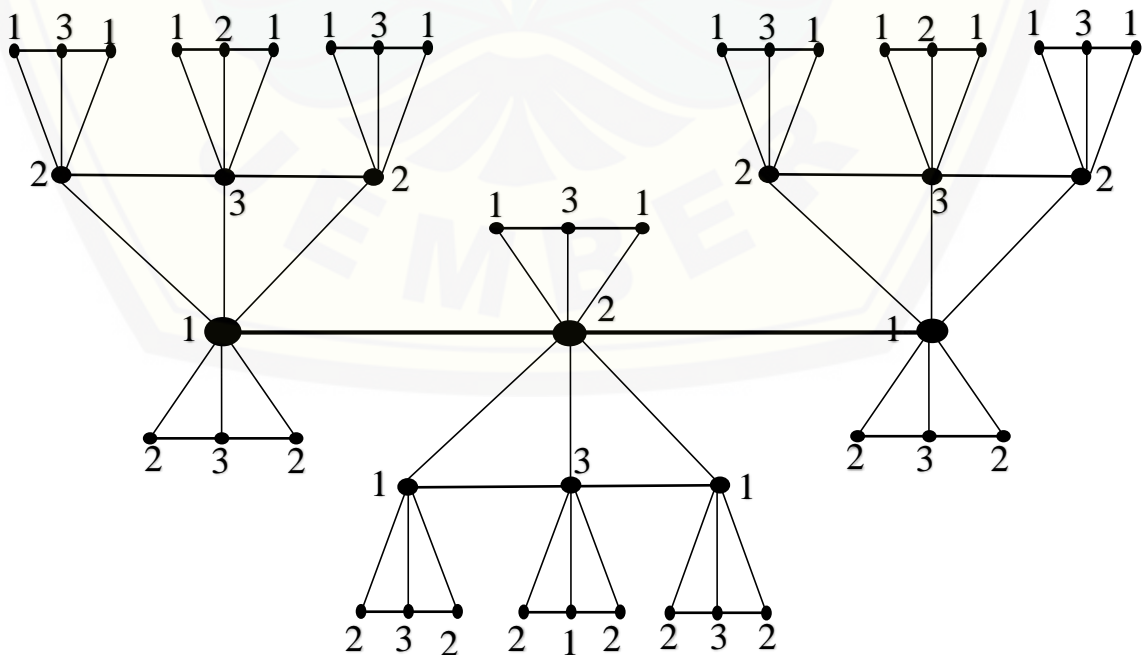
$$c_3(x_{\alpha,\beta}) = \beta + s + 3; 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; r = 2s + 3$$

$$c_3(x_{\alpha,\beta}^y) = \begin{cases} 1, 3, 4, \dots, s + 1; & \alpha \text{ genap}; 1 \leq \beta \leq s; 1 \leq r \leq s \\ 2, 3, 4, \dots, s + 1; & \alpha \text{ ganjil}; 1 \leq \beta \leq s; 1 \leq r \leq s \end{cases}$$

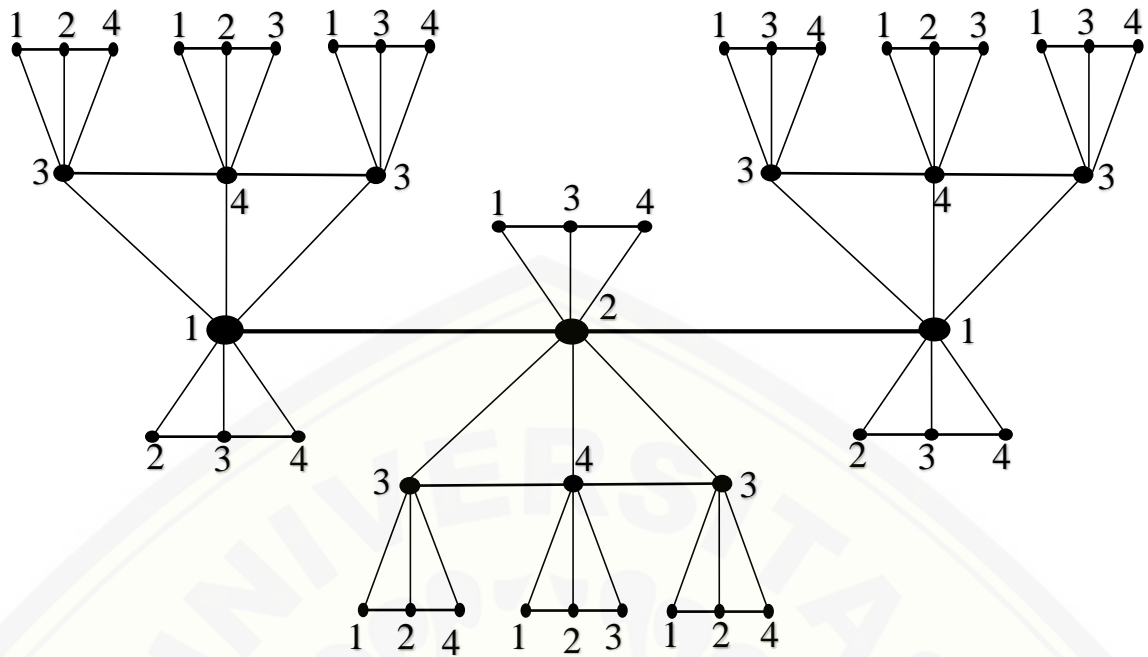
$$c_3(y_{\alpha,\beta}) = \beta + 3; 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; r = 2s + 3$$

Jelas terlihat c_3 memenuhi batas atas untuk $\chi_{r \geq 2s+2} \geq 2s + 3$. Oleh karena itu benar bahwa $\chi_{r \geq 2s+2} = 2s + 3$.

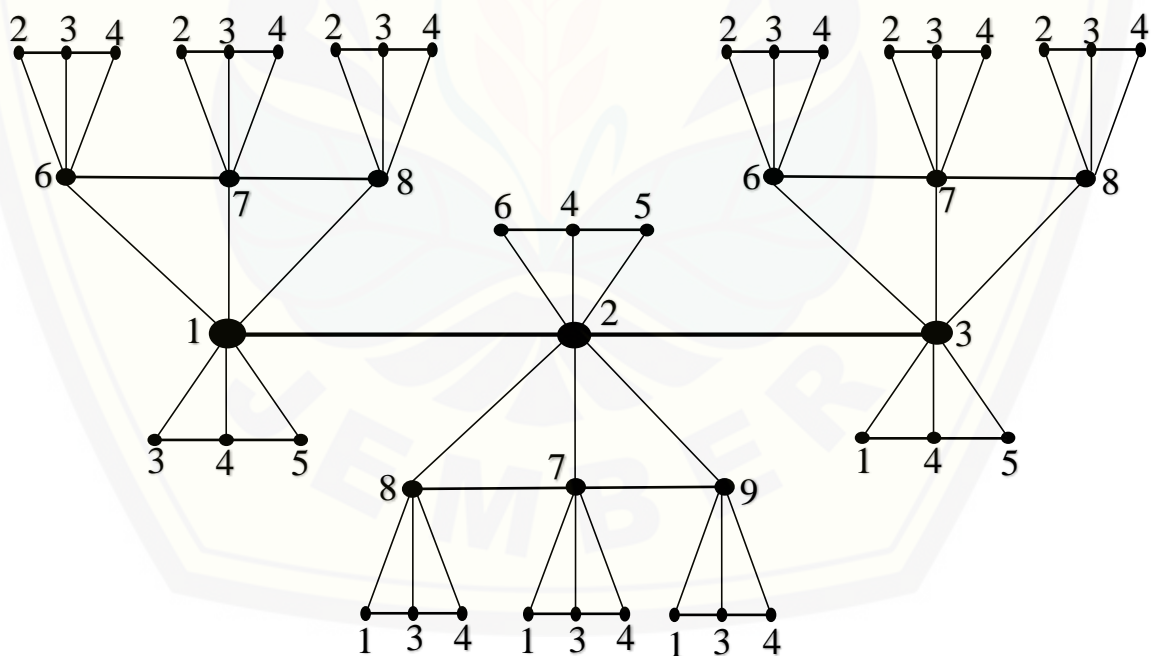
Berikut contoh gambar pewarnaan r-dinamis pada graf $P_t \odot^2 P_s$.



Gambar 15. Pewarnaan r-dinamis pada graf $P_t \odot^2 P_s$ dengan $r = 1$



Gambar 16. Pewarnaan r-dinamis pada graf $P_t \odot^2 P_s$ dengan $r = 3$



Gambar 17. Pewarnaan r-dinamis pada graf $P_t \odot^2 P_s$ dengan $r = 8$

Teorema 2. Diberikan $H = P_t \odot^2 S_s$; $t, s \geq 3$, maka:

$$\chi_r(H) \geq \begin{cases} 3 & ; \text{ untuk } 1 \leq r \leq 2 \\ r + 1 & ; \text{ untuk } \delta + 1 \leq r < 2s + 2 \\ 2s + 3 & ; \text{ untuk } r \geq 2s + 2 \end{cases}$$

Bukti. Graf $P_t \odot^2 S_s$ memiliki himpunan titik $V(P_t \odot^2 S_s) = \{x_\alpha; 1 \leq \alpha \leq t\} \cup \{x_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq 3, 1 \leq \beta \leq s\} \cup \{x_{\alpha,\beta,\gamma}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s, 1 \leq \gamma \leq s\} \cup \{y_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s\}$ dan himpunan sisi $E(P_t \odot^2 S_s) = \{x_\alpha x_{\alpha+1}; 1 \leq \alpha \leq t - 1\} \cup \{x_\alpha y_{\alpha+\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s\} \cup \{y_{\alpha,\beta} y_{\alpha,\beta+1}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s - 1\} \cup \{x_\alpha x_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s\} \cup \{x_\alpha x_{\alpha,\beta+1}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s - 1\} \cup \{x_{\alpha,\beta} x_{\alpha,\beta,\gamma}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s, 1 \leq \gamma \leq s\} \cup \{x_{\alpha,\beta} x_{\alpha,\beta,\gamma+1}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s, 1 \leq \gamma \leq s - 1\}$. Kardinalitas titik dan sisinya adalah $|V(P_t \odot^2 S_s)| = ts^2 + 2ts + t$, $|E(P_t \odot^2 S_s)| = 2ts^2 + 3ts - t - 1$ berurutan. Jadi, $\Delta(P_t \odot^2 S_s) = 2p(H_2) + 2 = 2s + 2$ dan $\delta(P_t \odot^2 S_s) = 2$. Kita definisikan ke dalam 3 kasus, yaitu untuk $\chi_{1 \leq r \leq 2}(P_t \odot^2 S_s)$, $\chi_{3 \leq r < 2s+2}(P_t \odot^2 S_s)$, $\chi_{r \geq 2s+2}(P_t \odot^2 S_s)$.

Kasus 1: Untuk 3; $1 \leq r \leq 2$

Berdasarkan Lemma 1, batas bawah untuk $1 \leq r \leq 2$ adalah $\chi_r(P_t \odot^2 S_s) \geq \delta + 1 = 2 + 1 = 3$. Untuk menemukan batas atas untuk $\chi_r(P_t \odot^2 S_s)$, kita petakan $c_1: V(P_t \odot^2 S_s) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, sebagai berikut:

$$c_1(x_\alpha) = \begin{cases} 1; & \alpha \text{ ganjil} \\ 2; & \alpha = 2 \end{cases}$$

$$c_1(x_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 1; & \alpha = 2; 1 \leq \beta \leq s - 1 \\ 2; & \alpha \text{ ganjil}; 1 \leq \beta \leq s - 1 \\ 3; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 0 \text{ mod } 2 \end{cases}$$

$$c_1(x_{\alpha,\beta,\gamma}^\gamma) = \begin{cases} 1; & \alpha, \beta, \gamma \text{ ganjil}; 1 \leq \alpha \leq t; \beta \text{ genap}; \gamma \text{ ganjil} \\ 2; & 1 \leq \alpha \leq t; \gamma \text{ genap}; \alpha = 2; \beta, \gamma \text{ ganjil} \\ 3; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta \text{ ganjil}; \gamma = 1 \text{ mod } 2 \end{cases}$$

$$c_1(y_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 1; & \alpha = 2; \beta = 1 \text{ mod } 2 \\ 2; & \alpha = 1 \text{ mod } 2; \beta = 1 \text{ mod } 2 \\ 3; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 0 \text{ mod } 2 \end{cases}$$

Jelas terlihat c_1 memenuhi batas atas untuk $\chi_{1 \leq r \leq 2}(P_t \odot^2 S_s) \leq 3$. Oleh karena itu benar bahwa $\chi_{1 \leq r \leq 2}(P_t \odot^2 S_s) = 3$.

Kasus 2: Untuk $r + 1; 3 \leq r < 2s + 2$

Berdasarkan Lemma 1, batas bawah untuk $3 \leq r < 2s + 2$ adalah $\chi_r (P_t \odot^2 S_s) \geq r+1$.

Untuk menemukan batas atas untuk $\chi_r (P_t \odot^2 S_s)$, kita petakanc $2 : V (P_t \odot^2 S_s) \rightarrow \{1,2, \dots, k\}$, sebagai berikut:

$$c_2(x_\alpha) = \begin{cases} 1; & \alpha \text{ ganjil} \\ 2; & \alpha = 2 \end{cases}$$

$$c_2(x_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 3 & ; 1 \leq \alpha \leq t; \beta \text{ ganjil}; r = 3 \\ 4 & ; 1 \leq \alpha \leq t; \beta \text{ genap}; r = 3 \\ (r-2) + \beta & ; 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 0 \text{ mod } 2 \end{cases}$$

$$c_2(x_{\alpha,\beta}^\gamma) = 1,2, \dots, 2s + 2 \neq c(x_{\alpha,\beta}) \cap cN(x_{\alpha,\beta});$$

$$1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; 1 \leq \gamma \leq s; 3 \leq r \leq 2s + 1$$

$$c_2(y_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 1 & ; \alpha \text{ genap}; \beta = 1 \text{ mod } 3; 3 \leq r \leq 2s \\ 2 & ; \alpha \text{ ganjil}; \beta = 1 \text{ mod } 3; 3 \leq r \leq 2s \\ 3 & ; 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 2 \text{ mod } 3; 3 \leq r \leq 2s + 1 \\ 4 & ; 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 0 \text{ mod } 3; 3 \leq r \leq 2s + 1 \\ s + 2 & ; 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 1 \text{ mod } 3; r = 2s + 1 \end{cases}$$

Jelas terlihat c_2 memenuhi batas atas untuk $\chi_{3 \leq r < 2s + 2} (P_t \odot^2 S_s) \leq r+1$. Oleh karena itu benar bahwa $\chi_{3 \leq r < 2s + 2} (P_t \odot^2 S_s) = r+1$.

Kasus 3: Untuk $2s + 3; r \geq 2s + 2$

Berdasarkan Lemma 1, batas bawah untuk $r \geq 2s + 2$ adalah $\chi_{r \geq 2s + 2} \geq 2s + 2 + 1 = 2s + 3$. Untuk menemukan batas atas, kita petakan $c_3 : V(P_t \odot^2 S_s) \rightarrow \{1,2, \dots,k\}$, sebagai berikut:

$$c_3(x_\alpha) = \begin{cases} 1; & \alpha \equiv 1 \text{ mod } 3 \\ 2; & \alpha \equiv 2 \text{ mod } 3 \\ 3; & \alpha \equiv 0 \text{ mod } 3 \end{cases}$$

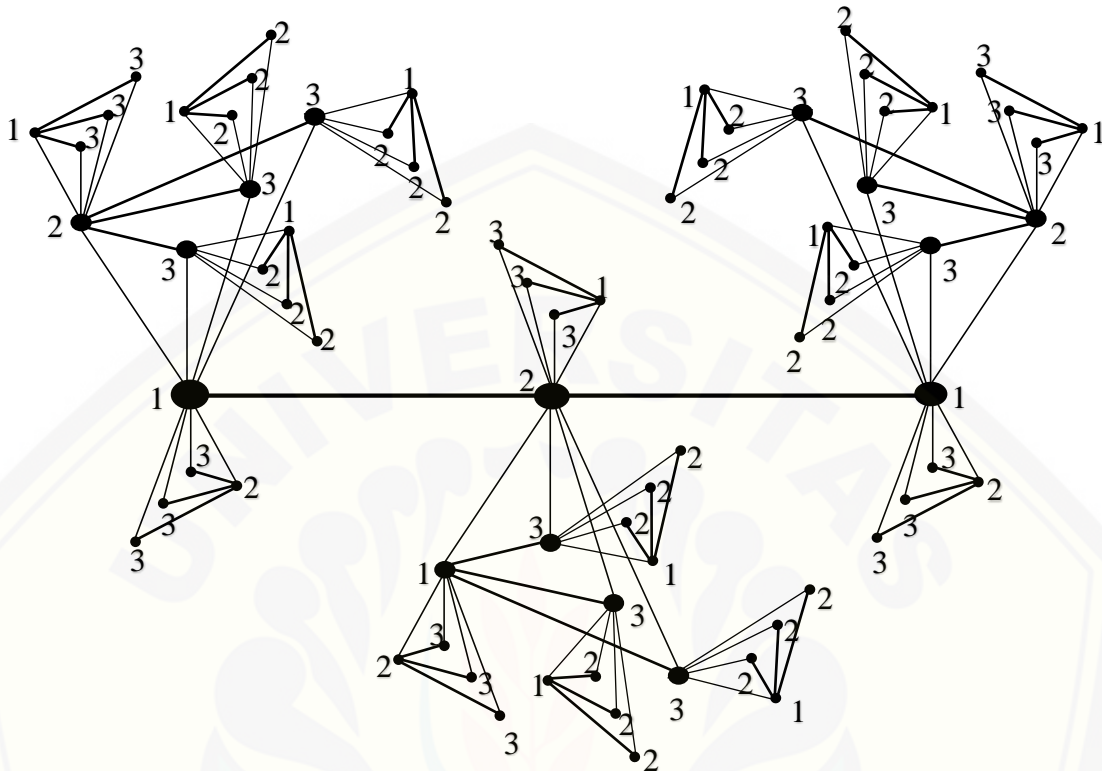
$$c_3(x_{\alpha,\beta}) = \beta + s + 3; 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; r = 2s + 3$$

$$c_3(x_{\alpha,\beta}^\gamma) = \begin{cases} 1,3,4, \dots, s + 1; & \alpha \text{ genap}; 1 \leq \beta \leq s; 1 \leq r \leq s \\ 2,3,4, \dots, s + 1; & \alpha \text{ ganjil}; 1 \leq \beta \leq s; 1 \leq r \leq s \end{cases}$$

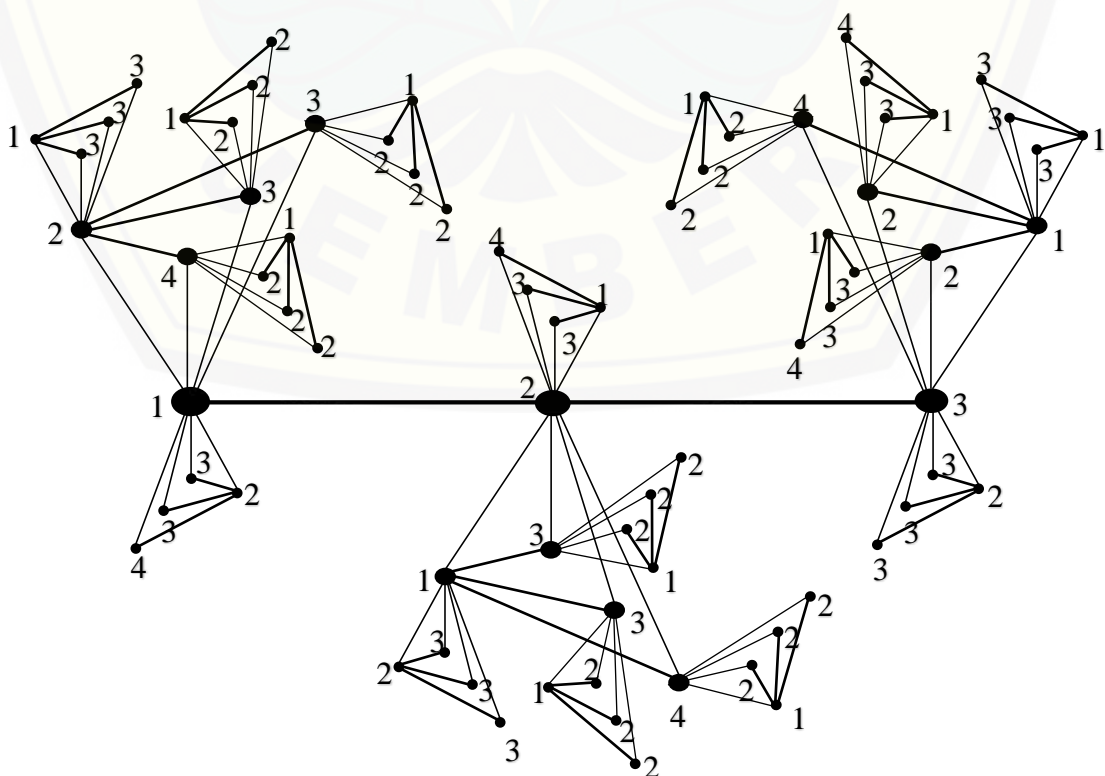
$$c_3(y_{\alpha,\beta}) = \beta + 3; 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; r = 2s + 3$$

Jelas terlihat c_3 memenuhi batas atas untuk $\chi_{r \geq 2s + 2} \geq 2s + 3$. Oleh karena itu benar bahwa $\chi_{r \geq 2s + 2} = 2s + 3$.

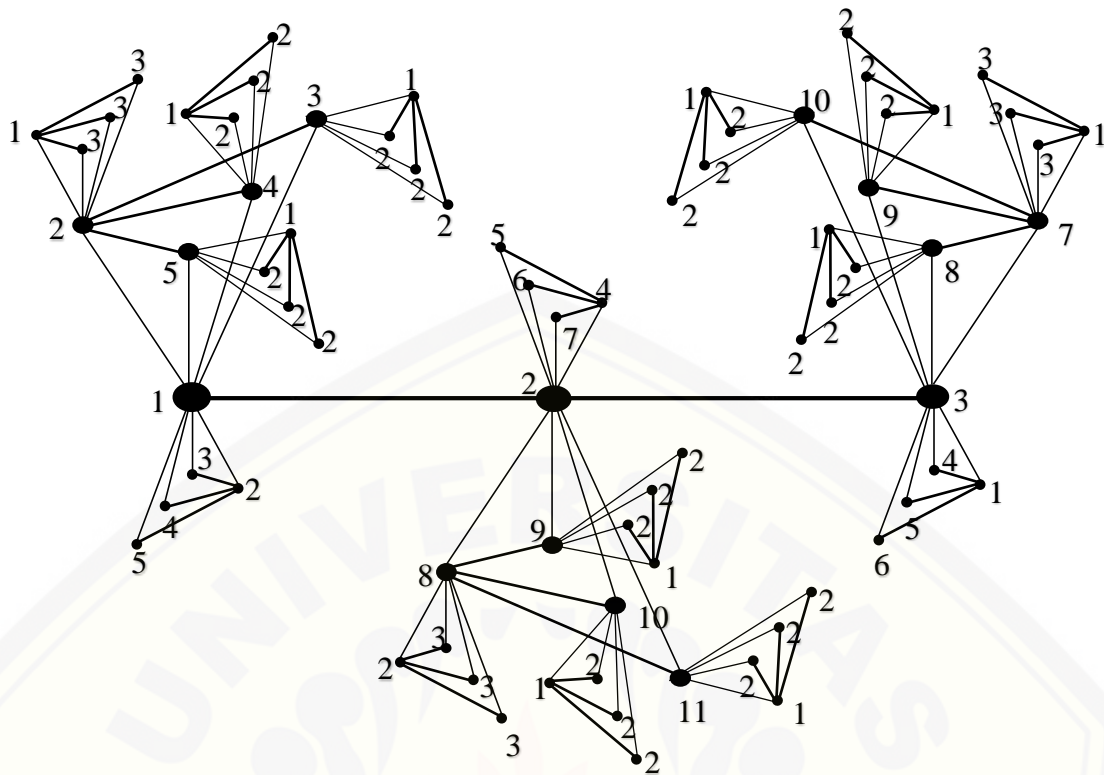
Berikut contoh gambar pewarnaan r-dinamis pada graf $P_t \odot^2 S_s$.



Gambar 18. Pewarnaan r-dinamis pada graf $P_t \odot^2 S_s$ dengan $r = 1$



Gambar 19. Pewarnaan r-dinamis pada graf $P_t \odot^2 S_s$ dengan $r = 3$



Gambar 20. Pewarnaan r-dinamis pada graf $P_t \odot^2 S_s$ dengan $r = 10$

Teorema 3. Diberikan $H = P_t \odot^2 K_s$; $t, s \geq 3$, maka:

$$\chi_r(H) \geq \begin{cases} 3 & ; \text{ untuk } 1 \leq r \leq 2 \\ r + 1 & ; \text{ untuk } \delta + 1 \leq r < 2s + 2 \\ 2s + 3 & ; \text{ untuk } r \geq 2s + 2 \end{cases}$$

Bukti. Graf $P_t \odot^2 K_s$ memiliki himpunan titik $V(P_t \odot^2 K_s) = \{x_\alpha; 1 \leq \alpha \leq t\} \cup \{x_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s\} \cup \{x_{\alpha,\beta,\gamma}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s, 1 \leq \gamma \leq s\} \cup \{y_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s\}$ dan himpunan sisi $E(P_t \odot^2 K_s) = \{x_\alpha x_{\alpha+1}; 1 \leq \alpha \leq t - 1\} \cup \{x_\alpha y_{\alpha+\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s\} \cup \{y_{\alpha,\beta} y_{\alpha,\beta+1}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s - 1\} \cup \{x_\alpha x_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s\} \cup \{x_\alpha x_{\alpha,\beta+1}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s - 1\} \cup \{x_{\alpha,\beta} x_{\alpha,\beta,\gamma}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s, 1 \leq \gamma \leq s\} \cup \{x_{\alpha,\beta} x_{\alpha,\beta,\gamma+1}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s, 1 \leq \gamma \leq s - 1\}$. Kardinalitas titik dan sisinya adalah $|V(P_t \odot^2 K_s)| = t(s^2 + 2s + 1), |E(P_t \odot^2 K_s)| = 2ts^2 + 3ts - t - 1$ berurutan. Jadi, $\Delta(P_t \odot^2 K_s) = 2p(H_2) + 2 = 2s + 2$ dan $\delta(P_t \odot^2 K_s) =$

2. Kita definisikan ke dalam 3 kasus, yaitu untuk $\chi_{1 \leq r \leq 2} (P_t \odot^2 K_s)$, $\chi_{3 \leq r < 2s+2} (P_t \odot^2 K_s)$, $\chi_{r \geq 2s+2} (P_t \odot^2 K_s)$.

Kasus 1: Untuk $3; 1 \leq r \leq 2$

Berdasarkan Lemma 1, batas bawah untuk $1 \leq r \leq 2$ adalah $\chi_r(P_t \odot^2 K_s) \geq \delta + 1 = 2 + 1 = 3$. Untuk menemukan batas atas untuk $\chi_r(P_t \odot^2 K_s)$, kita petakan $c_1: V(P_t \odot^2 K_s) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, sebagai berikut:

$$c_1(x_\alpha) = \begin{cases} 1; & \alpha \text{ ganjil} \\ 2; & \alpha = 2 \end{cases}$$

$$c_1(x_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 1; & \alpha = 2; \beta \text{ ganjil} \\ 2; & \alpha = 1 \text{ mod } 2; \beta = 1 \text{ mod } 2 \\ 3; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 0 \text{ mod } 2 \end{cases}$$

$$c_1(x_{\alpha,\beta}^\gamma) = \begin{cases} 1; & \alpha, \beta, \gamma \text{ ganjil}; 1 \leq \alpha \leq t; \beta \text{ genap}; \gamma \text{ ganjil} \\ 2; & 1 \leq \alpha \leq t; \gamma \text{ genap}; \alpha = 2; \beta, \gamma \text{ ganjil} \\ 3; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta \text{ ganjil}; \gamma = 1 \text{ mod } 2 \end{cases}$$

$$c_1(y_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 1; & \alpha = 2; \beta = 1 \text{ mod } 2 \\ 2; & \alpha = 1 \text{ mod } 2; \beta = 1 \text{ mod } 2 \\ 3; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 0 \text{ mod } 2 \end{cases}$$

Jelas terlihat c_1 memenuhi batas atas untuk $\chi_{1 \leq r \leq 2} (P_t \odot^2 K_s) \leq 3$. Oleh karena itu benar bahwa $\chi_{1 \leq r \leq 2} (P_t \odot^2 K_s) = 3$.

Kasus 2: Untuk $r+1; 3 \leq r < 2s+2$

Berdasarkan Lemma 1, batas bawah untuk $3 \leq r < 2s+2$ adalah $\chi_r(P_t \odot^2 K_s) \geq r+1$. Untuk menemukan batas atas untuk $\chi_r(P_t \odot^2 K_s)$, kita petakan $c_2: V(P_t \odot^2 K_s) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, sebagai berikut:

$$c_2(x_\alpha) = \begin{cases} 1; & \alpha \text{ ganjil} \\ 2; & \alpha = 2 \end{cases}$$

$$c_2(x_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 3 & ; 1 \leq \alpha \leq t; \beta \text{ ganjil}; r = 3 \\ 4 & ; 1 \leq \alpha \leq t; \beta \text{ genap}; r = 3 \\ (r-2) + \beta & ; 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 0 \text{ mod } 2 \end{cases}$$

$$c_2(x_{\alpha,\beta}^\gamma) = 1, 2, \dots, 2s+2 \neq c(x_{\alpha,\beta}) \cap cN(x_{\alpha,\beta});$$

$$1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; 1 \leq \gamma \leq s; 3 \leq r \leq 2s+1$$

$$c_2(y_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 1 & ; \alpha \text{ genap}; \beta = 1 \text{ mod } 3; 3 \leq r \leq 2s \\ 2 & ; \alpha \text{ ganjil}; \beta = 1 \text{ mod } 3; 3 \leq r \leq 2s \\ 3 & ; 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 2 \text{ mod } 3; 3 \leq r \leq 2s+1 \\ 4 & ; 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 0 \text{ mod } 3; 3 \leq r \leq 2s+1 \\ s+2 & ; 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 1 \text{ mod } 3; r = 2s+1 \end{cases}$$

Jelas terlihat c_2 memenuhi batas atas untuk $\chi_{3 \leq r < 2s+2} (P_t \odot^2 K_s) \leq r+1$. Oleh

karena itu benar bahwa $\chi_{3 \leq r < 2s+2} (P_t \odot^2 K_s) = r+1$.

Kasus 3: Untuk $2s + 3; r \geq 2s + 2$

Berdasarkan Lemma 1, batas bawah untuk $r \geq 2s + 2$ adalah $\chi_{r \geq 2s+2} \geq 2s + 2 + 1 = 2s + 3$. Untuk menemukan batas atas, kita petakan $c_3 : V(P_t \odot^2 K_s) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, sebagai berikut:

$$c_3(x_\alpha) = \begin{cases} 1; & \alpha \equiv 1 \pmod 3 \\ 2; & \alpha \equiv 2 \pmod 3 \\ 3; & \alpha \equiv 0 \pmod 3 \end{cases}$$

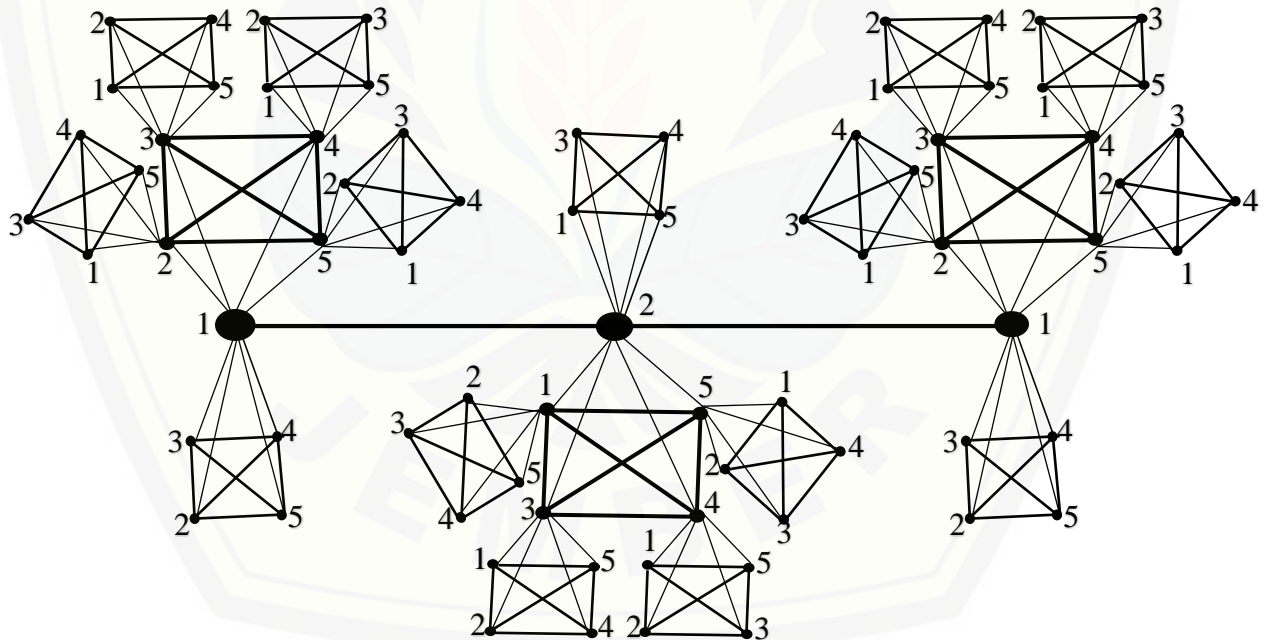
$$c_3(x_{\alpha,\beta}) = \beta + s + 3; 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; r = 2s + 3$$

$$c_3(x_{\alpha,\beta}^\gamma) = \begin{cases} 1, 3, 4, \dots, s + 1; & \alpha \text{ genap}; 1 \leq \beta \leq s; 1 \leq r \leq s \\ 2, 3, 4, \dots, s + 1; & \alpha \text{ ganjil}; 1 \leq \beta \leq s; 1 \leq r \leq s \end{cases}$$

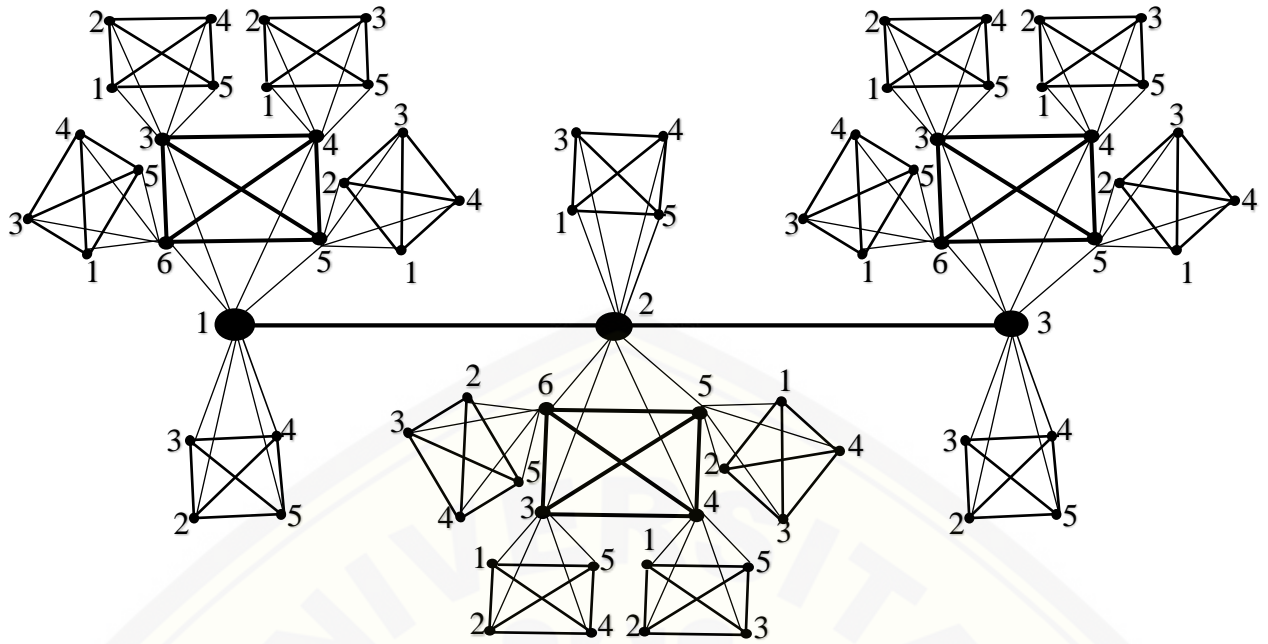
$$c_3(y_{\alpha,\beta}) = \beta + 3; 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; r = 2s + 3$$

Jelas terlihat c_3 memenuhi batas atas untuk $\chi_{r \geq 2s+2} \geq 2s + 3$. Oleh karena itu benar bahwa $\chi_{r \geq 2s+2} = 2s + 3$.

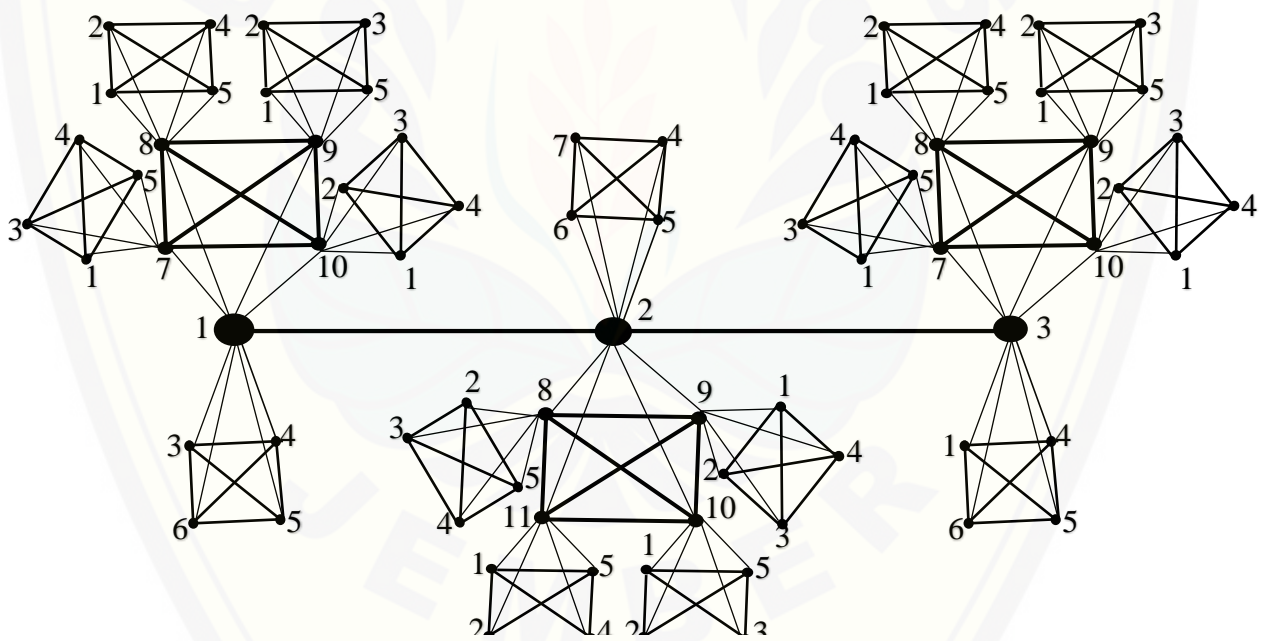
Berikut contoh gambar pewarnaan r-dinamis pada graf $P_t \odot^2 K_s$.



Gambar 21. Pewarnaan r-dinamis pada graf $P_t \odot^2 K_s$ dengan $r = 1$



Gambar 22. Pewarnaan r -dinamis pada graf $P_t \odot^2 K_s$ dengan $r = 5$



Gambar 23. Pewarnaan r -dinamis pada graf $P_t \odot^2 K_s$ dengan $r = 10$

Teorema 4. Diberikan $H = P_t \odot^2 F_s$; $t, s \geq 3$, maka:

$$\chi_r(H) \geq \begin{cases} 4 & ; \text{ untuk } 1 \leq r \leq 2 \\ r + 1 & ; \text{ untuk } \delta + 1 \leq r < 2s + 2 \\ 2s + 3 & ; \text{ untuk } r \geq 2s + 2 \end{cases}$$

Bukti. Graf $P_t \odot^2 F_s$ memiliki himpunan titik $V(P_t \odot^2 F_s) = \{x_\alpha; 1 \leq \alpha \leq t\} \cup \{x_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s\} \cup \{x_{\alpha,\beta,\gamma}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s, 1 \leq \gamma \leq s\} \cup \{y_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s\}$ dan himpunan sisi $E(P_t \odot^2 F_s) = \{x_\alpha x_{\alpha+1}; 1 \leq \alpha \leq t - 1\} \cup \{x_\alpha y_{\alpha+\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s\} \cup \{y_{\alpha,\beta} y_{\alpha,\beta+1}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s - 1\} \cup \{x_\alpha x_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s\} \cup \{x_\alpha x_{\alpha,\beta+1}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s - 1\} \cup \{x_{\alpha,\beta} x_{\alpha,\beta,\gamma}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s, 1 \leq \gamma \leq s\} \cup \{x_{\alpha,\beta} x_{\alpha,\beta,\gamma+1}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s, 1 \leq \gamma \leq s - 1\}$. Kardinalitas titik dan sisinya adalah $|V(P_t \odot^2 F_s)| = t(s^2 + 2s + 1)$, $|E(P_t \odot^2 F_s)| = 2ts^2 + 3ts - t - 1$ berurutan. Jadi, $\Delta(P_t \odot^2 F_s) = 2p(H_2) + 2 = 2s + 2$ dan $\delta(P_t \odot^2 F_s) = 2$. Kita definisikan ke dalam 3 kasus, yaitu untuk $\chi_{1 \leq r \leq 2}(P_t \odot^2 F_s)$, $\chi_{3 \leq r < 2s+2}(P_t \odot^2 F_s)$, $\chi_{r \geq 2s+2}(P_t \odot^2 F_s)$.

Kasus 1: Untuk $3; 1 \leq r \leq 2$

Berdasarkan Lemma 1, batas bawah untuk $1 \leq r \leq 2$ adalah $\chi_r(P_t \odot^2 F_s) \geq \delta + 1 = 2 + 1 = 3$. Untuk menemukan batas atas untuk $\chi_r(P_t \odot^2 F_s)$, kita petakan $c_1: V(P_t \odot^2 F_s) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, sebagai berikut:

$$c_1(x_\alpha) = \begin{cases} 1; & \alpha \text{ ganjil} \\ 2; & \alpha = 2 \end{cases}$$

$$c_1(x_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 1; & \alpha = 2; \beta \text{ ganjil} \\ 2; & \alpha = 1 \text{ mod } 2; \beta = 1 \text{ mod } 2 \\ 3; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 0 \text{ mod } 2 \end{cases}$$

$$c_1(x_{\alpha,\beta,\gamma}^y) = \begin{cases} 1; & \alpha, \beta, \gamma \text{ ganjil}; 1 \leq \alpha \leq t; \beta \text{ genap}; \gamma \text{ ganjil} \\ 2; & 1 \leq \alpha \leq t; \gamma \text{ genap}; \alpha = 2; \beta, \gamma \text{ ganjil} \\ 3; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta \text{ ganjil}; \gamma = 1 \text{ mod } 2 \end{cases}$$

$$c_1(y_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 1; & \alpha = 2; \beta = 1 \text{ mod } 2 \\ 2; & \alpha = 1 \text{ mod } 2; \beta = 1 \text{ mod } 2 \\ 3; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 0 \text{ mod } 2 \end{cases}$$

Jelas terlihat c_1 memenuhi batas atas untuk $\chi_{1 \leq r \leq 2}(P_t \odot^2 F_s) \leq 3$. Oleh karena itu benar bahwa $\chi_{1 \leq r \leq 2}(P_t \odot^2 F_s) = 3$.

Kasus 2: Untuk $r + 1; 3 \leq r < 2s + 2$

Berdasarkan Lemma 1, batas bawah untuk $3 \leq r < 2s + 2$ adalah $\chi_r (P_t \odot^2 F_s) \geq r + 1$.

Untuk menemukan batas atas untuk $\chi_r (P_t \odot^2 F_s)$, kita petakanc $2 : V (P_t \odot^2 F_s) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, sebagai berikut:

$$c_2(x_\alpha) = \begin{cases} 1; & \alpha \text{ ganjil} \\ 2; & \alpha = 2 \end{cases}$$

$$c_2(x_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 3 & ; 1 \leq \alpha \leq t; \beta \text{ ganjil}; r = 3 \\ 4 & ; 1 \leq \alpha \leq t; \beta \text{ genap}; r = 3 \\ (r - 2) + \beta & ; 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 0 \text{ mod } 2 \end{cases}$$

$$c_2(x_{\alpha,\beta}^\gamma) = 1, 2, \dots, 2s + 2 \neq c(x_{\alpha,\beta}) \cap cN(x_{\alpha,\beta});$$

$$1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; 1 \leq \gamma \leq s; 3 \leq r \leq 2s + 1$$

$$c_2(y_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 1 & ; \alpha \text{ genap}; \beta = 1 \text{ mod } 3; 3 \leq r \leq 2s \\ 2 & ; \alpha \text{ ganjil}; \beta = 1 \text{ mod } 3; 3 \leq r \leq 2s \\ 3 & ; 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 2 \text{ mod } 3; 3 \leq r \leq 2s + 1 \\ 4 & ; 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 0 \text{ mod } 3; 3 \leq r \leq 2s + 1 \\ s + 2 & ; 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 1 \text{ mod } 3; r = 2s + 1 \end{cases}$$

Jelas terlihat c_2 memenuhi batas atas untuk $\chi_{3 \leq r < 2s + 2} (P_t \odot^2 P_s) \leq r + 1$. Oleh karena itu benar bahwa $\chi_{3 \leq r < 2s + 2} (P_t \odot^2 F_s) = r + 1$.

Kasus 3: Untuk $2s + 3; r \geq 2s + 2$

Berdasarkan Lemma 1, batas bawah untuk $r \geq 2s + 2$ adalah $\chi_{r \geq 2s + 2} \geq 2s + 2 + 1 = 2s + 3$. Untuk menemukan batas atas, kita petakan $c_3 : V(P_t \odot^2 F_s) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, sebagai berikut:

$$c_3(x_\alpha) = \begin{cases} 1; & \alpha \equiv 1 \text{ mod } 3 \\ 2; & \alpha \equiv 2 \text{ mod } 3 \\ 3; & \alpha \equiv 0 \text{ mod } 3 \end{cases}$$

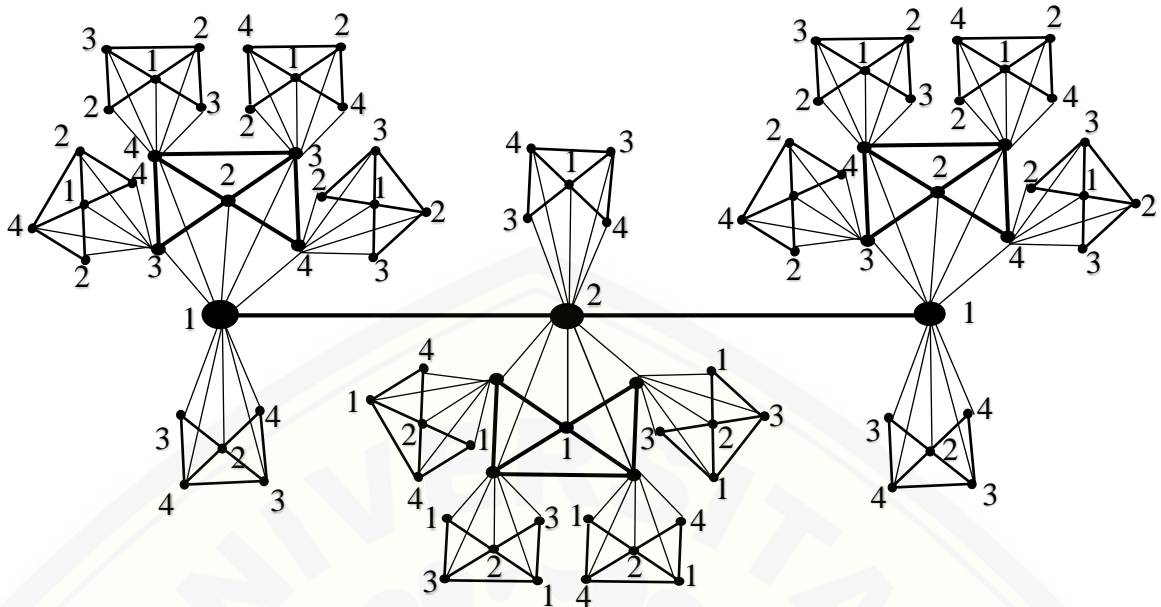
$$c_3(x_{\alpha,\beta}) = \beta + s + 3; 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; r = 2s + 3$$

$$c_3(x_{\alpha,\beta}^\gamma) = \begin{cases} 1, 3, 4, \dots, s + 1; & \alpha \text{ genap}; 1 \leq \beta \leq s; 1 \leq r \leq s \\ 2, 3, 4, \dots, s + 1; & \alpha \text{ ganjil}; 1 \leq \beta \leq s; 1 \leq r \leq s \end{cases}$$

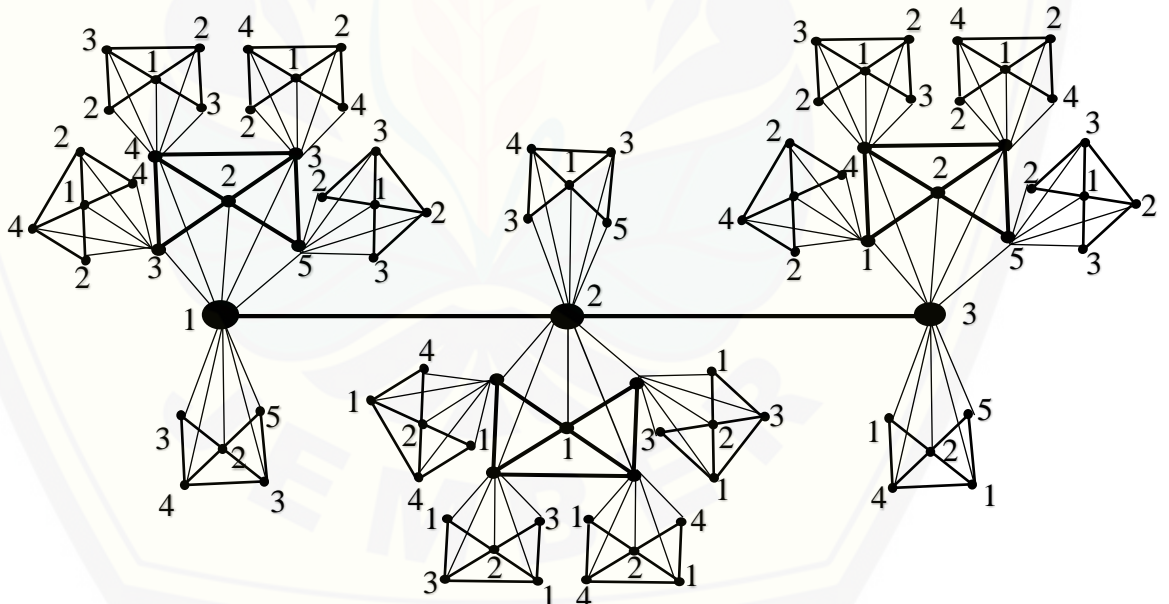
$$c_3(y_{\alpha,\beta}) = \beta + 3; 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; r = 2s + 3$$

Jelas terlihat c_3 memenuhi batas atas untuk $\chi_{r \geq 2s + 2} \geq 2s + 3$. Oleh karena itu benar bahwa $\chi_{r \geq 2s + 2} = 2s + 3$.

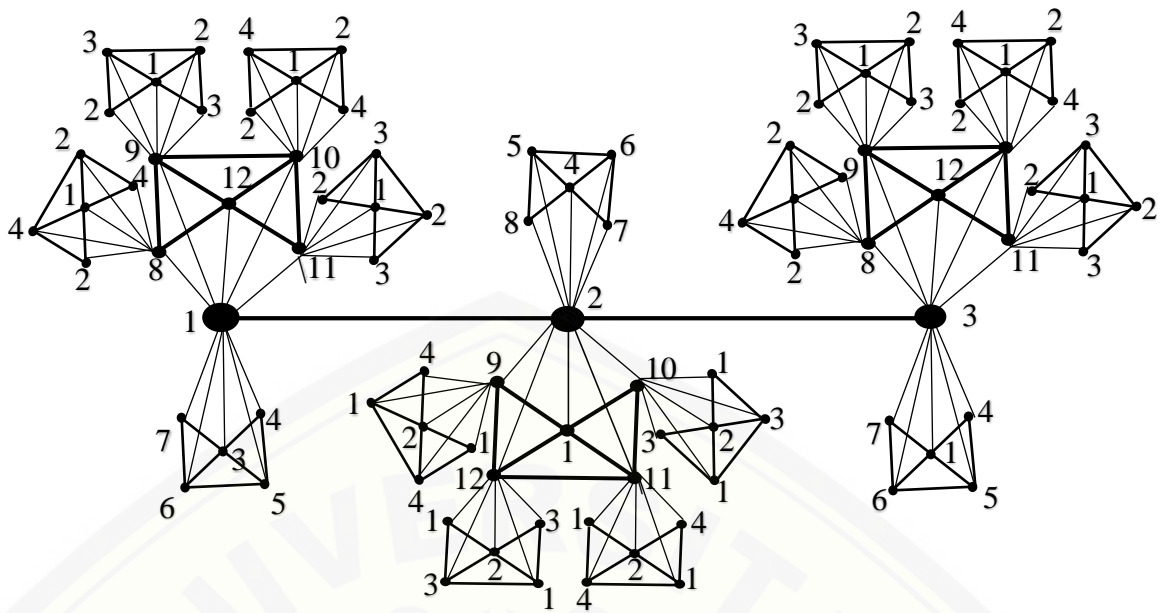
Berikut contoh gambar pewarnaan r-dinamis pada graf $P_t \odot^2 F_s$.



Gambar 24. Pewarnaan r-dinamis pada graf $P_t \odot^2 F_s$ dengan $r = 1$



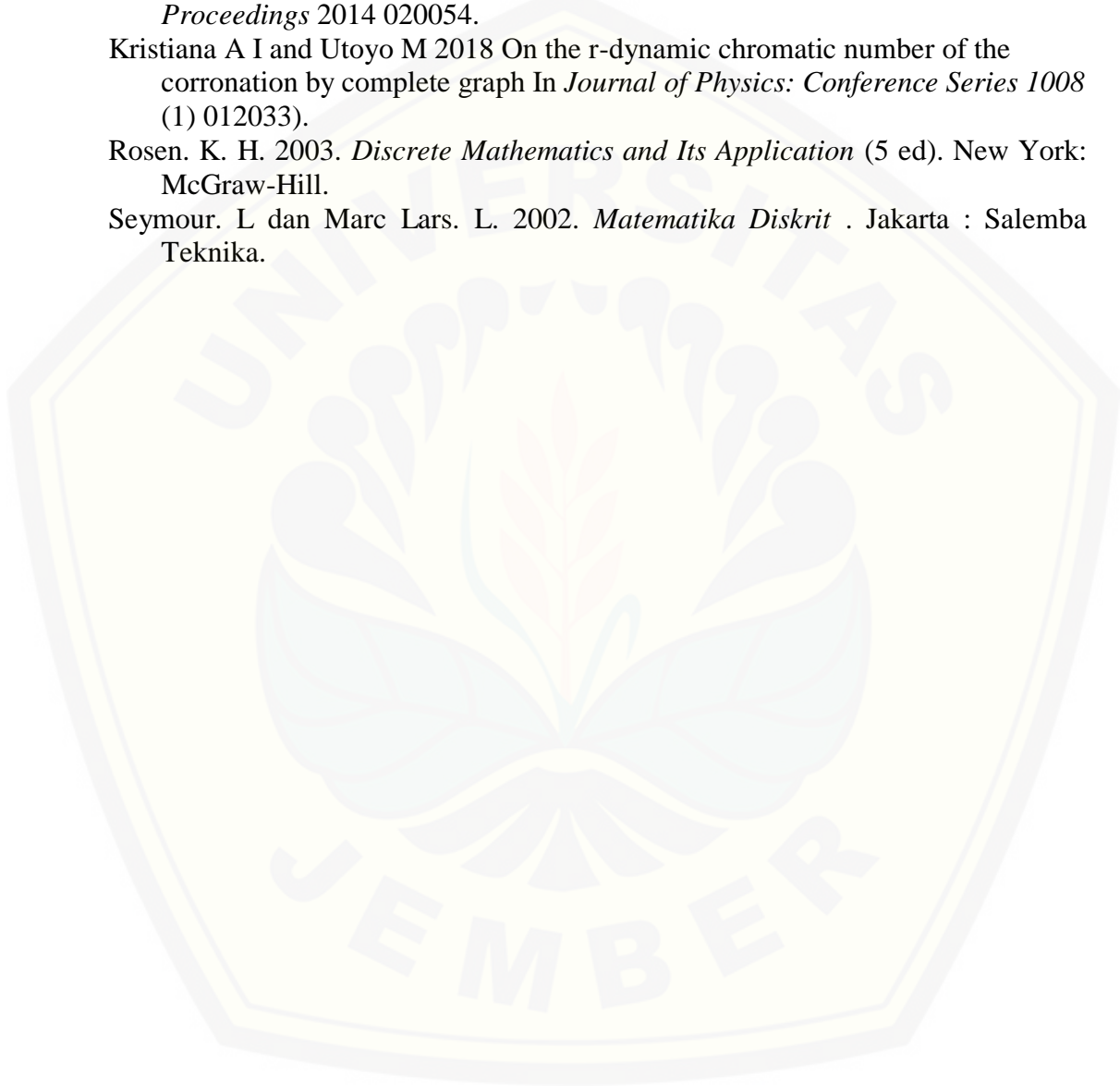
Gambar 25. Pewarnaan r-dinamis pada graf $P_t \odot^2 F_s$ dengan $r = 4$



Gambar 26. Pewarnaan r -dinamis pada graf $P_t \odot^2 F_s$ dengan $r = 10$

DAFTAR PUSTAKA

- Kristiana A I 2017 On r-dynamic Chromatic Number of the coronation of path and several graphs *International Journal of Advanced Engineering, Research and Science* 04 96-101.
- Kristiana A I, Utoyo M I and Da_k 2018 The lower bound of the r-dynamic chromatic number of corona product by wheel graphs *AIP Conference Proceedings* 2014 020054.
- Kristiana A I and Utoyo M 2018 On the r-dynamic chromatic number of the coronation by complete graph In *Journal of Physics: Conference Series* 1008 (1) 012033).
- Rosen. K. H. 2003. *Discrete Mathematics and Its Application* (5 ed). New York: McGraw-Hill.
- Seymour. L dan Marc Lars. L. 2002. *Matematika Diskrit* . Jakarta : Salemba Teknika.



Lampiran F. Lembar Validasi LKM

LEMBAR VALIDASI

LEMBAR KERJA MAHASISWA (LKM)

Mata Kuliah : Matematika Diskrit
 Materi : *r-dynamic vertex coloring*
 Kelas/Semester :
 Nama Validator :

A. Tujuan

Tujuan penggunaan instrument ini digunakan untuk mengukur kevalidan LKM dalam pelaksanaan pembelajaran matematika yang implementasinya berbasis *Problem-based Learning* untuk meningkatkan *combinatorial thinking* peserta didik.

B. Petunjuk

Berikan tanda cek (\checkmark) pada kolom yang sesuai dengan pendapat anda!

Keterangan skala penilaian:

- 1: berarti “tidak baik”
- 2: berarti “cukup baik”
- 3: berarti “baik”
- 4: berarti “sangat baik”

C. Penilaian ditinjau dari beberapa aspek

No.	Aspek yang dinilai	Skala penilaian			
		1	2	3	4
I. Format					
1.	LKM memiliki petunjuk pengerjaan yang jelas				
II. Isi LKM					
1.	LKM disajikan secara sistematis				
2.	Kebenaran konsep dan materi				
3.	Masalah yang diangkat sesuai kognisi peserta didik				

4.	Setiap kegiatan mempunyai tujuan yang jelas				
5.	Kegiatan yang disajikan menumbuhkan kemampuan berpikir kombinatorial peserta didik				
6.	Penyajian LKM menarik				
I. Bahasa dan tulisan					
1.	Soal dirumuskan dengan bahasa yang sederhana dan tidak menimbulkan makna ganda atau ambigu				
2.	Menggunakan istilah-istilah yang mudah dipahami				
3.	Dirumuskan dengan mengikuti kaidah bahasa Indonesia yang baku (EYD)				
4.	Bahasa yang digunakan komunikatif				

D. Penilaian Umum

Kesimpulan penilaian secara umum **):

a. LKM pembelajaran ini:

1: berarti “tidak baik”

2: berarti “cukup baik”

3: berarti “baik”

4: berarti “sangat baik”

b. LKM Pembelajaran ini:

1: belum dapat digunakan dan masih memerlukan konsultasi

2: dapat digunakan dengan banyak revisi

3: dapat digunakan dengan sedikit revisi

4: dapat digunakan tanpa revisi

**) *Lingkarilah nomor atau angka sesuai dengan pilihan anda*

E. Komentar dan saran perbaikan

.....

Jember,2018

Validator

(.....)



Lampiran G. Rubrik Penilaian LKM

**RUBRIK PENILAIAN LKM
(LEMBAR KERJA MAHASISWA)**

I. Aspek format LKM

No.	Indikator penilaian	Rubrik
1.	LKM memiliki petunjuk pengerjaan yang jelas	(1) Jika petunjuk pengerjaan tidak jelas (2) Jika petunjuk pengerjaan kurang jelas (3) Jika petunjuk pengerjaan cukup jelas (4) Jika petunjuk pengerjaan sudah jelas

II. Aspek isi LKM

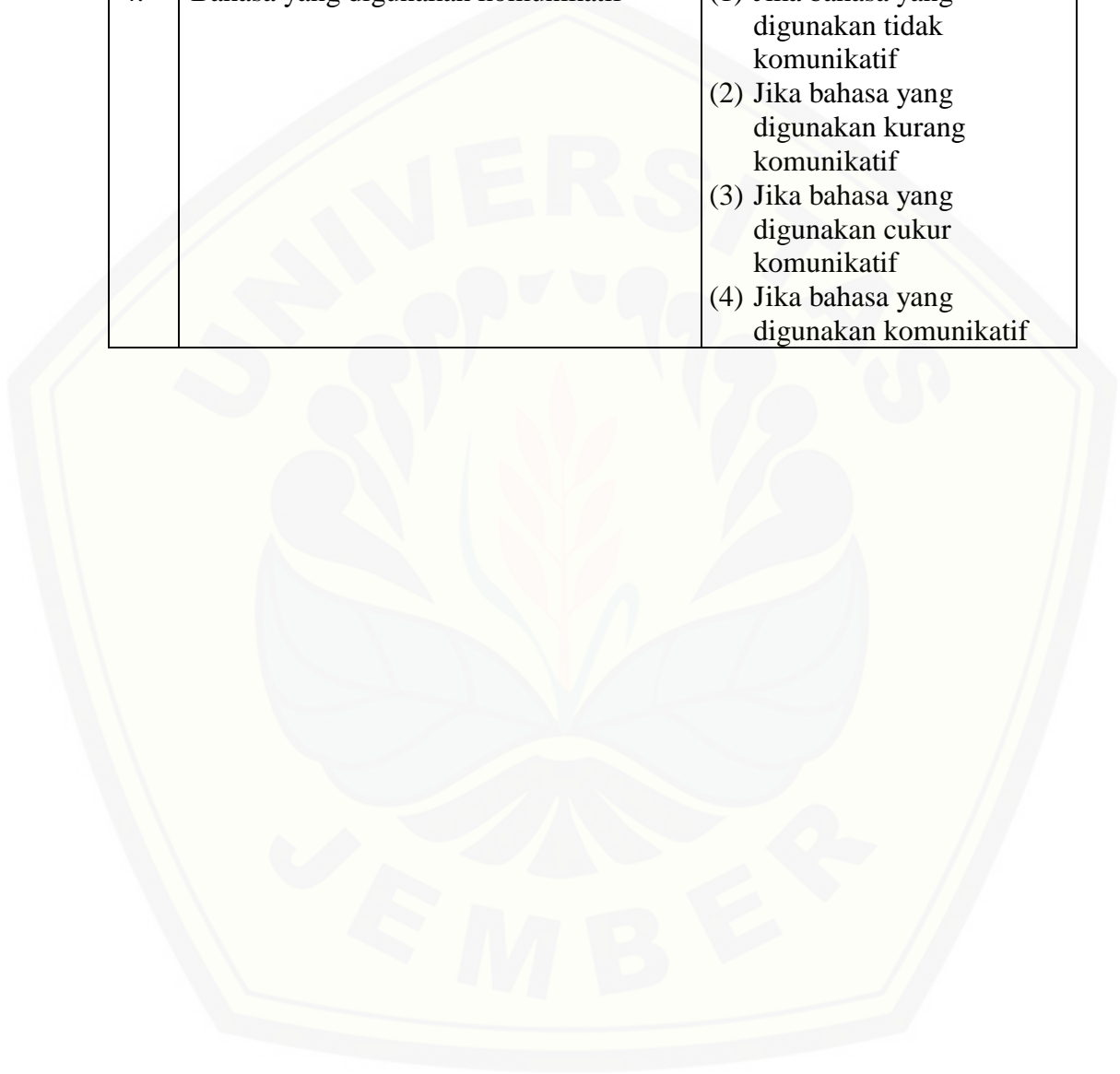
No.	Indikator penilaian	Rubrik
1.	LKM disajikan secara sistematis	(1) Jika LKM disajikan tidak secara sistematis (2) Jika LKM disajikan kurang secara sistematis (3) Jika LKM disajikan cukup secara sistematis (4) Jika LKM disajikan sudah secara sistematis
2.	Kebenaran konsep dan materi	(1) Jika konsep dan materi tidak benar (2) Jika konsep dan materi kurang benar (3) Jika konsep dan materi cukup benar (4) Jika konsep dan materi sudah benar
3.	Masalah yang diangkat sesuai dengan kognisi peserta didik	(1) Jika masalah yang diangkat tidak sesuai dengan kognisi peserta (2) Jika masalah yang diangkat kurang sesuai dengan kognisi peserta (3) Jika masalah yang diangkat cukup sesuai dengan kognisi peserta

		(4) Jika masalah yang diangkat sudah sesuai dengan kognisi peserta
4.	Setiap kegiatan mempunyai tujuan yang jelas	<p>(1) Jika setiap kegiatan mempunyai tujuan yang tidak jelas</p> <p>(2) Jika setiap kegiatan mempunyai tujuan yang kurang jelas</p> <p>(3) Jika setiap kegiatan mempunyai tujuan yang cukup jelas</p> <p>(4) Jika setiap kegiatan mempunyai tujuan yang sudah jelas</p>
5.	Kegiatan yang disajikan menumbuhkan kemampuan berpikir kombinatorial peserta didik	<p>(1) Jika kegiatan yang disajikan tidak menumbuhkan kemampuan berpikir kombinatorial peserta didik</p> <p>(2) Jika kegiatan yang disajikan kurang menumbuhkan kemampuan berpikir kombinatorial peserta didik</p> <p>(3) Jika kegiatan yang disajikan cukup menumbuhkan kemampuan berpikir kombinatorial peserta didik</p> <p>(4) Jika kegiatan yang disajikan sudah menumbuhkan kemampuan berpikir kombinatorial peserta didik</p>
6.	Penyajian LKM menarik	<p>(1) Jika penyajian LKM tidak menarik</p> <p>(2) Jika penyajian LKM kurang menarik</p> <p>(3) Jika penyajian LKM cukup menarik</p> <p>(4) Jika penyajian LKM sudah menarik</p>

III. Bahasa dan tulisan

No.	Indikator penilaian	Rubrik
1.	Soal dirumuskan dengan bahasa yang sederhana dan tidak menimbulkan makna ganda atau ambigu	(1) Jika soal tidak dirumuskan dengan bahasa yang sederhana dan tidak menimbulkan makna ganda atau ambigu (2) Jika soal kurang dirumuskan dengan bahasa yang sederhana dan tidak menimbulkan makna ganda atau ambigu (3) Jika soal cukup dirumuskan dengan bahasa yang sederhana dan tidak menimbulkan makna ganda atau ambigu (4) Jika soal sudah dirumuskan dengan bahasa yang sederhana dan tidak menimbulkan makna ganda atau ambigu
2.	Menggunakan istilah-istilah yang mudah dipahami	(1) Jika tidak menggunakan istilah-istilah yang mudah dipahami (2) Jika kurang menggunakan istilah-istilah yang mudah dipahami (3) Jika cukup menggunakan istilah-istilah yang mudah dipahami (4) Jika sudah menggunakan istilah-istilah yang mudah dipahami
3.	Dirumuskan dengan mengikuti kaidah bahasa Indonesia yang baku (EYD)	(1) Jika tidak dirumuskan dengan mengikuti kaidah bahasa Indonesia yang baku (EYD) (2) Jika kurang dirumuskan dengan mengikuti kaidah bahasa Indonesia yang baku (EYD) (3) Jika cukup dirumuskan dengan mengikuti kaidah

		<p>bahasa Indonesia yang baku (EYD)</p> <p>(4) Jika sudah dirumuskan dengan mengikuti kaidah bahasa Indonesia yang baku (EYD)</p>
4.	Bahasa yang digunakan komunikatif	<p>(1) Jika bahasa yang digunakan tidak komunikatif</p> <p>(2) Jika bahasa yang digunakan kurang komunikatif</p> <p>(3) Jika bahasa yang digunakan cukur komunikatif</p> <p>(4) Jika bahasa yang digunakan komunikatif</p>



Lampiran H. Lembar Observasi Keterampilan

LEMBAR OBSERVASI

KETERAMPILAN BERPIKIR PESERTA DIDIK

A. Petunjuk:

Berikut tanda cek (√) pada kolom yang sesuai dengan pendapat anda!

No	Nama Peserta Didik	Sintaks <i>Problem-based Learning</i>	Indikator berpikir kombinatorik				
			1	2	3	4	5
1.		Mengorientasikan peserta didik kepada masalah					
		Mengorganisasi peserta didik untuk belajar					
		Membimbing penyelidikan individual maupun kelompok					
		Mengembangkan dan menyajikan hasil karya					
		Menganalisis dan mengevaluasi proses pemecahan masalah					

Jember,.....2018

Observer

(.....)

Lampiran I. Keterangan aspek

Keterangan aspek yang dikuasai peserta didik

- Indikator 1 : Menyelidiki beberapa kasus
Indikator 2 : Mengenali pola semua kasus
Indikator 3 : Generalisasi untuk semua kasus
Indikator 4 : Membuktikan secara matematis
Indikator 5 : Mengetahui masalah Combinatorial lainnya

Catatan

- Kontroversi : memiliki lebih dari satu penyelesaian
- Menyelidiki beberapa kasus :
 - a. Mengidentifikasi sifat / karakteristik masalah
 - b. Menerapkan pada beberapa kasus
- Mengenali pola semua kasus :
 - a. Mengidentifikasi pola penyelesaian kasus,
 - b. Memperluas pola
- Generalisasi untuk semua kasus :
 - a. Menerapkan simbolisasi matematika,
 - b. Menghitung kardinalitas,
 - c. Mengembangkan suatu algoritma.
- Membuktikan secara matematis
 - a. Melakukan penghitungan argumen,
 - b. Menguji algoritma,
 - c. Mengaplikasikan induktif, deduktif, atau bukti kualitatif.
- Mengetahui masalah Combinatorial lainnya
 - a. Melakukan interpretasi,
 - b. Mengusulkan masalah terbuka,
 - c. Mengetahui masalah kombinatorial baru,
 - d. Menemukan aplikasi potensial.

Lampiran J. Lembar Validasi Observasi Keterampilan

LEMBAR VALIDASI PEDOMAN OBSERVASI KEMAMPUAN BERPIKIR KOMBINATORIK

A. PEDOMAN VALIDASI

- a. Mohon agar Bapak/ Ibu memberikan penilaian terhadap pedoman observasi Kemampuan berpikir kombinatorik ditinjau dari beberapa aspek, penilaian umum dan saran-saran untuk merevisi pedoman observasi kemampuan berpikir kombinatorik yang disusun.
- b. Instrumen ini bertujuan sebagai pedoman observasi untuk mengetahui kemampuan berpikir kombinatorik mahasiswa

B. PETUNJUK PENGISIAN VALIDASI

No.	Aspek	Skor				
		1	2	3	4	5
1.	Kesesuaian isi					
	Kesesuaian dengan indikator berpikir kombinatorik					
2.	konstruksi					
	Kejelasan petunjuk cara melakukan observasi					
	Kejelasan butir pernyataan pada pedoman observasi					
3.	Bahasa					
	Butir pernyataan pada kolom pedoman observasi menggunakan Bahasa Indonesia yang baik dan benar					
Jumlah						
Skor total						
Rata-rata skor (\bar{x})						

- a. Mohon Bapak/ Ibu untuk memberikan skor dengan cara mencentang pada kolom yang telah disediakan sesuai kriteria.
- b. Jika Bapak/ Ibu menganggap perlu ada revisi, maka dimohon Bapak/Ibu memberikan butir revisi pada bagian saran dan kritik pada lembar yang telah disediakan.

C. PENILAIAN

Skor tes kemampuan berpikir kombinatorik :

$1 \leq \bar{x} \leq 2$: tidak valid (belum dapat digunakan)

$2 \leq \bar{x} \leq 3$: kurang valid (dapat digunakan dengan banyak revisi)

$3 \leq \bar{x} \leq 4$: valid (dapat digunakan dengan sedikit revisi)

$4 \leq \bar{x} \leq 5$: sangat valid (dapat digunakan tanpa revisi)

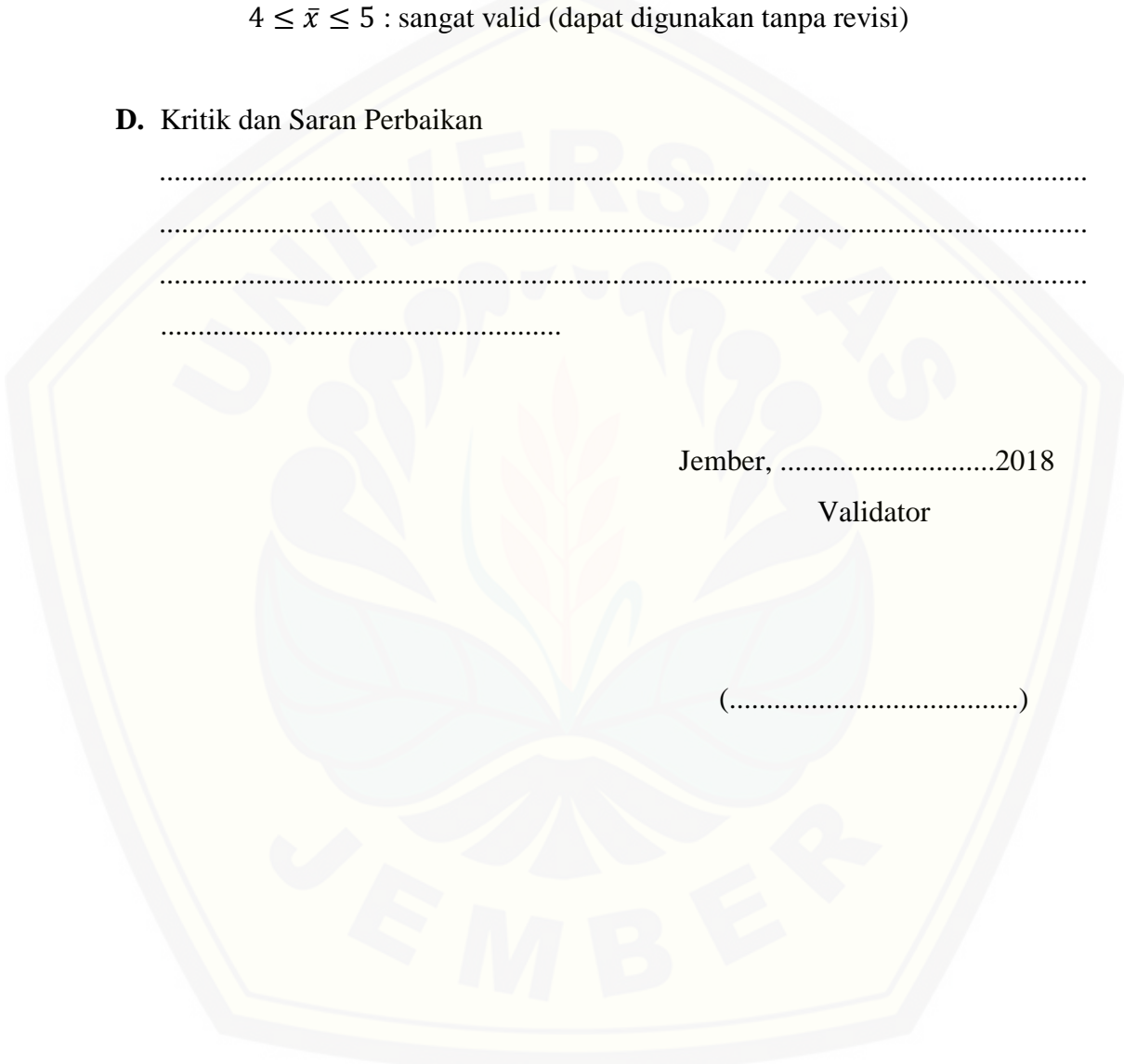
D. Kritik dan Saran Perbaikan

.....
.....
.....
.....

Jember,2018

Validator

(.....)



Lampiran K. Pedoman Wawancara

PEDOMAN WAWANCARA

A. Petunjuk Wawancara

1. Wawancara dilakukan setelah mahasiswa mengerjakan tes hasil belajar (Post-test).
2. Wawancara yang dilakukan dengan peserta didik mengacu pada pedoman wawancara.
3. Wawancara tidak harus berjalan sesuai urutan pertanyaan pada pedoman wawancara dan pertanyaan yang diberikan lanjutan sesuai dengan jawaban responden.
4. Pedoman wawancara hanya digunakan sebagai garis besar saja, dan peneliti diperbolehkan untuk mengembangkan pembicaraan (diskusi) ketika wawancara berlangsung karena wawancara ini tergolong wawancara yang bebas terpimpin.
5. Pada proses wawancara peserta didik kemampuan berpikir kombinatorik yang dilakukan setelah mengerjakan tes hasil belajar (Post-tes)

B. Pedoman Wawancara

Tahapan Proses keterampilan Berpikir Kombinatorial	Pertanyaan
Mengidentifikasi beberapa kasus	Tahapan apa yang Anda lakukan pada saat mendapatkan permasalahan tersebut?
Mengenali pola dari semua kasus	Tahapan apa yang Anda lakukan pada saat mendapatkan permasalahan tersebut?
Menggeneralisasi semua kasus	Tahapan apa yang Anda lakukan pada saat mendapatkan permasalahan tersebut?
Membuktikan secara sistematis	Tahapan apa yang Anda lakukan pada saat mendapatkan permasalahan tersebut?
Mempertimbangkan dengan masalah kombinatorial lain	Tahapan apa yang Anda lakukan pada saat mendapatkan permasalahan tersebut?

Jember,2018

Observer



Lampiran L. Lembar validasi Pedoman Wawancara

LEMBAR VALIDASI PEDOMAN WAWANCARA

A. TUJUAN

Lembar validasi pedoman wawancara ini adalah mengukur kevalidan pedoman wawancara dalam mendapatkan informasi tentang keterampilan berpikir kombinatorial mahasiswa dalam menyelesaikan masalah *r-dynamic vertex coloring*.

B. PETUNJUK

1. Bapa/Ibu dapat memberikan penilaian dengan memberikan tanda cek (✓) pada kolom yang ada.
2. Arti point validitas adalah 1 (tidak baik), 2 (kurang baik), 3 (cukup baik) dan 4 (baik)

C. PENILAIAN

No.	Aspek yang dinilai	Skala Penelitian			
		1	2	3	4
1	Pertanyaan yang diajukan dapat menggali indikator keterampilan berpikir kombinatorik				
2	Pertanyaan yang di ajukan mencerminkan penggunaan bahasa yang baik dan benar				
3	Kalimat pertanyaan tidak mengandung arti ganda				
4	Pertanyaan yang diajukan menggunakan bahasa yang sederhana dan mudah di pahami				

Berdasarkan hal di atas, lembar validasi pedoman wawancara ini:

1. Belum dapat digunakan dan msaih memerlukan konsultasi
2. Dapat digunakan dengan banyak revisi
3. Dapat digunakan dengan sedikit revisi
4. Dapat digunakan tanpa revisi

D. KOMENTAR DAN SARAN PERBAIKAN

.....

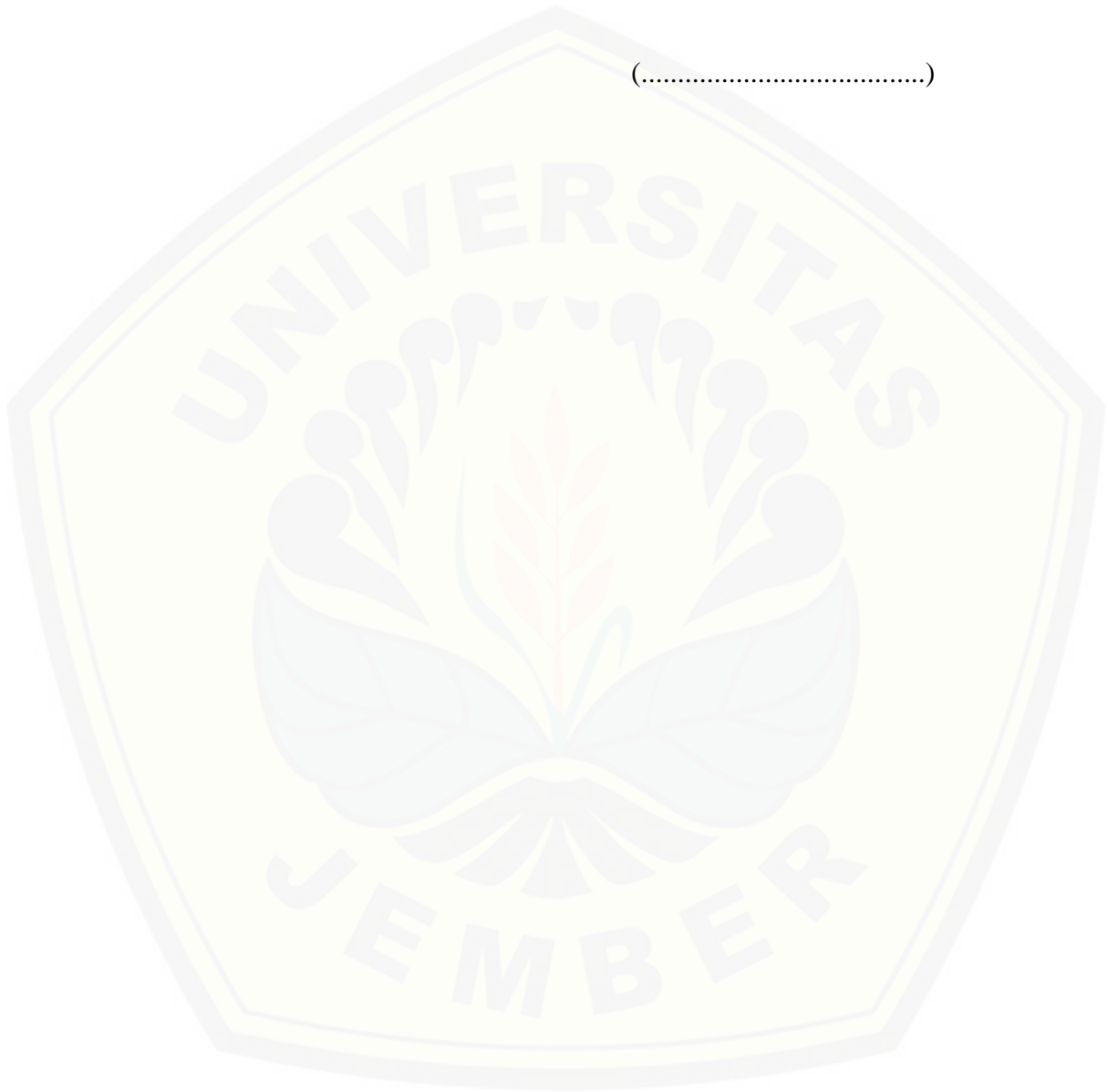
.....



Jember,2018

Validator

(.....)



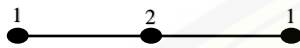


Lampiran M. Tes Keterampilan Berpikir Kombinatorik (Pre-test dan Post Test)

TES KETERAMPILAN BERPIKIR KOMBINATORIK

PRE-TEST

Perhatikan pewarnaan pada graf *Path* (P_3) berikut !



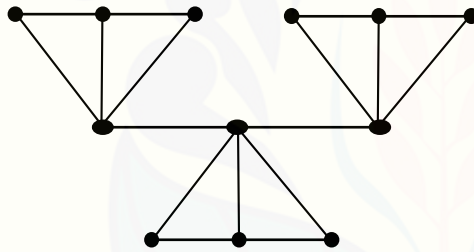
Gambar A



Gambar B

1. Tentukanlah gambar yang menunjukkan pewarnaan titik graf dan berikan alasan anda !

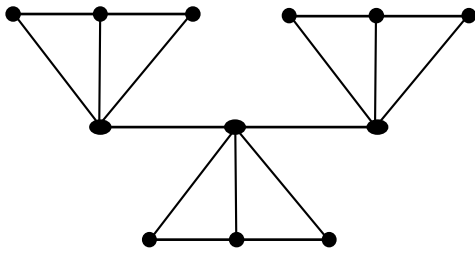
Perhatikanlah Graf $P_3 \odot P_3$ berikut ini !



Berdasarkan Graf $P_3 \odot S_3$ tentukanlah :

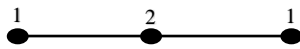
2. Tentukanlah notasi dan kardinalitas titik dan sisi dari graf $P_n \odot S_m$!
3. Tentukanlah pewarnaan titik dinamis beserta fungsi dari graf $P_n \odot S_m$!
4. Carilah sebuah graf baru kemudian tentukanlah pewarnaan titik dinamisnya !

Kerjakanlah pada lembar kerja yang telas di sediakan !

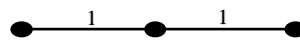


POST-TEST

Perhatikan pewarnaan pada graf *Path* (P_3) berikut !



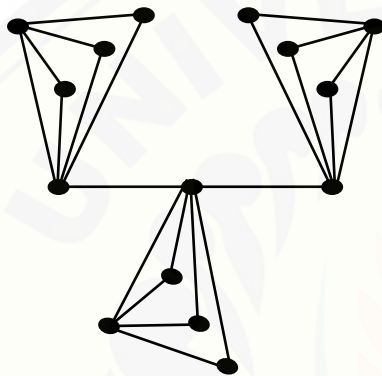
Gambar A



Gambar B

1. Tentukanlah gambar yang menunjukkan pewarnaan titik graf dan berikan alasan anda !

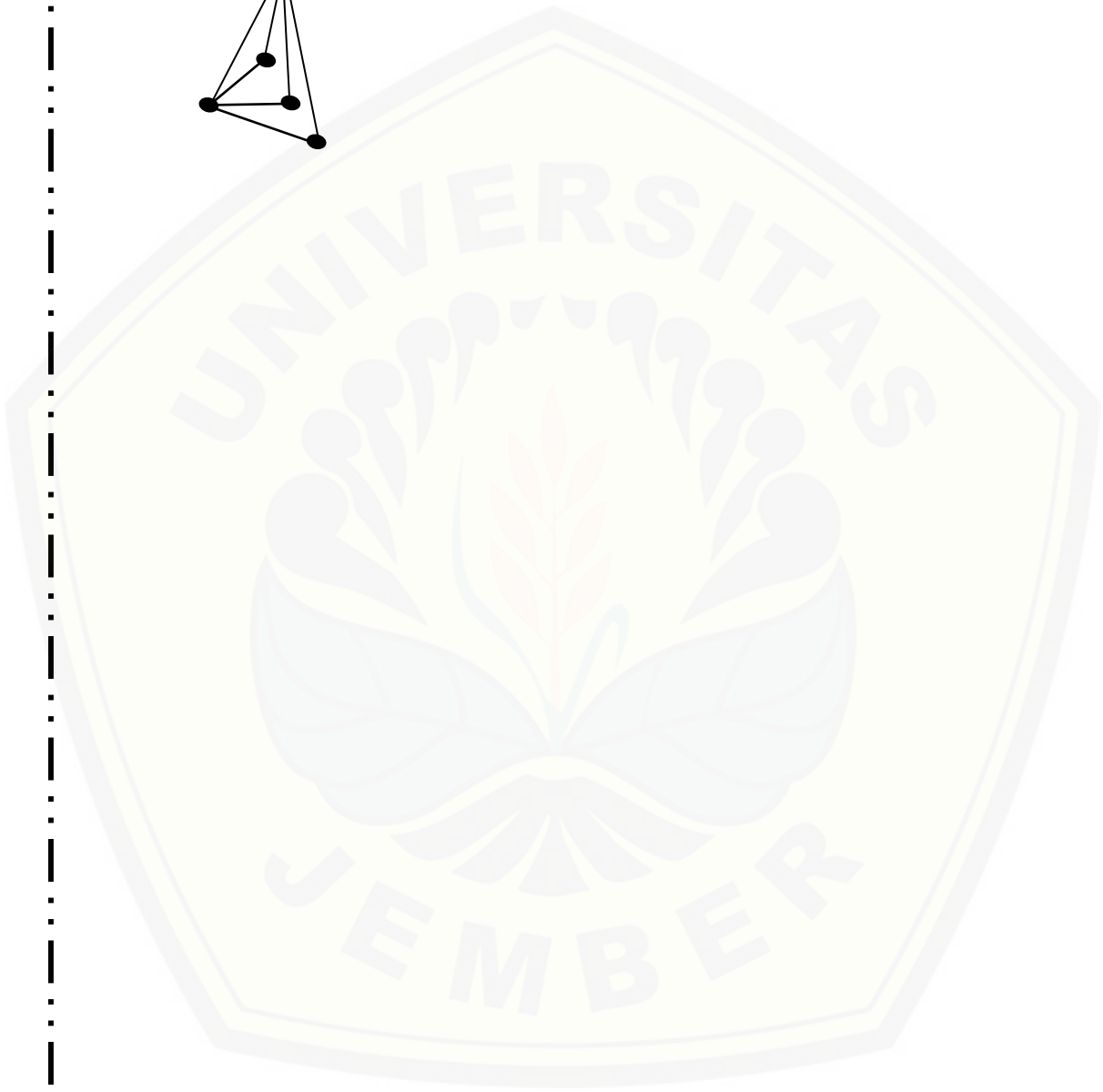
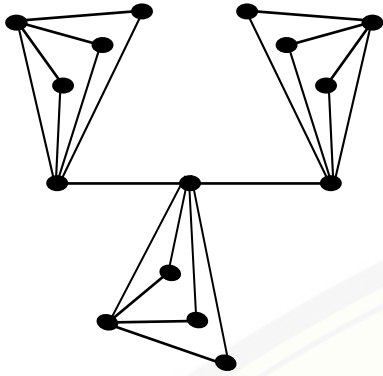
Perhatikanlah Graf $P_3 \odot S_4$ berikut ini !



Berdasarkan Graf $P_3 \odot S_5$ tentukanlah :

2. Tentukanlah notasi dan kardinalitas titik dan sisi dari graf $P_n \odot S_m$!
3. Tentukanlah pewarnaan titik dinamis beserta fungsi dari graf $P_n \odot S_m$!
4. Carilah sebuah graf baru kemudian tentukanlah pewarnaan titik dinamisnya !

Kerjakanlah pada lembar kerja yang telah disediakan !



Lampiran N. Lembar Validasi Tes Keterampilan Berpikir Kombinatorik

LEMBAR VALIDASI TES KETERAMPILAN BERPIKIR KOMBINATORIK

A. PEDOMAN VALIDASI

- a. Mohon agar Bapak/ Ibu memberikan penilaian terhadap tes Keterampilan berpikir kombinatorik ditinjau dari beberapa aspek, penilaian umum dan saran-saran untuk merevisi tes keterampilan berpikir kombinatorik yang disusun.
- b. Instrumen ini bertujuan sebagai tes untuk mengetahui kemampuan berpikir kombinatorik mahasiswa

B. PETUNJUK PENGISIAN VALIDASI

- a. Mohon Bapak/ Ibu untuk memberikan skor dengan cara mencentang pada kolom yang telah disediakan sesuai kriteria.
- b. Jika Bapak/ Ibu menganggap perlu ada revisi, maka dimohon Bapak/Ibu memberikan butir revisi pada bagian saran dan kritik pada lembar yang telah disediakan.

No.	Aspek	Skor				
		1	2	3	4	5
1.	Kesesuaian isi					
2.	Kesesuaian dengan indikator berpikir kombinatorik					
3.	Kejelasan petunjuk cara mengerjakan tes					
4.	Kejelasan butir pertanyaan pada tes keterampilan berpikir kombinatorik					
5.	Butir pernyataan pada tes keterampilan berpikir kombinatorik menggunakan Bahasa Indonesia yang baik dan benar					
Jumlah						
Skor total						
Rata-rata skor (\bar{x})						

C. PENILAIAN

Skor tes kemampuan berpikir kombinatorik :

$1 \leq \bar{x} \leq 2$: tidak valid (belum dapat digunakan)

$2 \leq \bar{x} \leq 3$: kurang valid (dapat digunakan dengan banyak revisi)

$3 \leq \bar{x} \leq 4$: valid (dapat digunakan dengan sedikit revisi)

$4 \leq \bar{x} \leq 5$: sangat valid (dapat digunakan tanpa revisi)

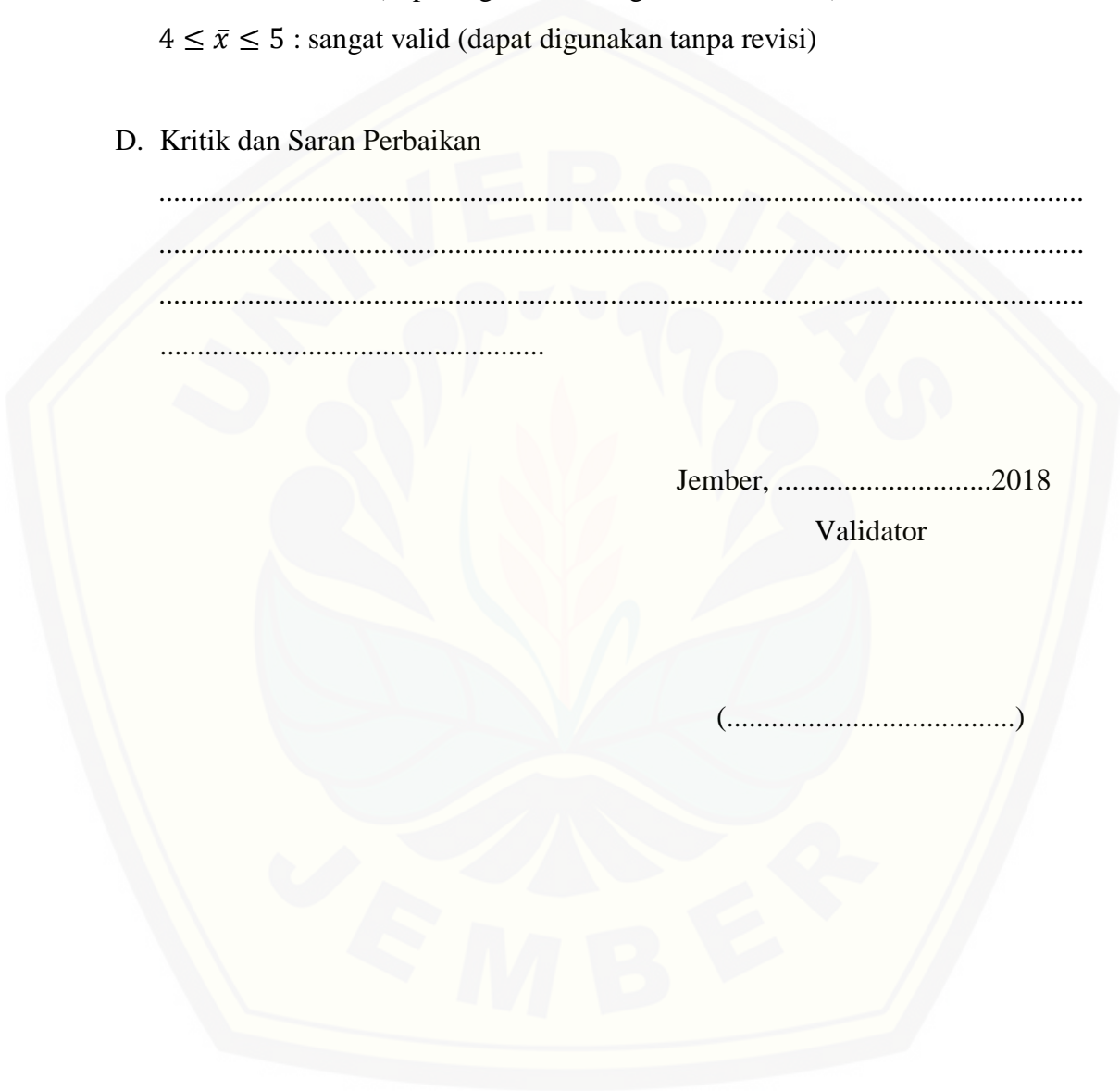
D. Kritik dan Saran Perbaikan

.....
.....
.....
.....

Jember,2018

Validator

(.....)





Lampiran C, Lembar Validasi RPP

LEMBAR VALIDASI

RENCANA PELAKSANAAN PEMBELAJARAN (RPP)

Mata Kuliah : Matematika Diskrit

Materi : *r-Dynamic Vertex Coloring*

Kelas/Semester :

Nama Validator :

A. Tujuan

Tujuan penggunaan instrumen ini digunakan untuk mengukur kevalidan RPP dalam pelaksanaan pembelajaran matematika yang implementasinya menggunakan pendekatan pembelajaran *Problem-based Learning* untuk meningkatkan kemampuan berpikir kreatif Peserta didik.

B. Petunjuk

Berikan tanda (√) pada kolom yang sesuai dengan pendapat anda.

Keterangan skala penilaian:

1: berarti "tidak cukup"

2: berarti "cukup baik"

3: berarti "baik"

4: berarti "sangat baik"

C. Penilaian ditinjau dari beberapa aspek

No.	Aspek yang dinilai	Skala penilaian			
		1	2	3	4
1. Perumusan tujuan pembelajaran					
1.	Kejelasan kompetensi inti dan kompetensi dasar				✓
2.	Kesesuaian kompetensi inti dan kompetensi dasar dengan tujuan pembelajaran				✓
3.	Ketepatan penjabaran kompetensi dasar kedalam indikator				✓

4.	Kesesuaian indikator dengan tujuan pembelajaran			✓	
5.	Kesesuaian indikator dengan tingkat perkembangan peserta didik				✓
II. Isi RPP					
1.	Sistematika penyusunan RPP			✓	
2.	Kesesuaian urutan kegiatan pembelajaran dengan pendekatan <i>Problem-based Learning</i>				✓
3.	Kejelasan tahap-tahap kegiatan pembelajaran dari pendahuluan, inti dan penutup				✓
III. Bahasa dan tulisan					
1.	Menggunakan bahasa yang sesuai dengan kaidah bahasa yang baku (EYD)			✓	
2.	Bahasa yang digunakan bersifat komunikatif dan mudah dipahami				✓
IV. Waktu					
1.	Kesesuaian alokasi waktu yang digunakan				✓
2.	Rincian waktu untuk setiap tahap pembelajaran				✓

D. Penilaian umum

Kesimpulan penilaian secara umum**):

a. Rencana Pelaksanaan Pembelajaran ini:

1: berarti "tidak baik"

2: berarti "cukup baik"

3: berarti "baik"

4: berarti "sangat baik"

b. Rencana Pelaksanaan Pembelajaran ini:

1: belum dapat digunakan dan masih memerlukan konsultasi

2: dapat digunakan dengan banyak revisi

3: dapat digunakan dengan sedikit revisi

4: dapat digunakan tanpa revisi

**)lingkarilah nomor atau angka sesuai dengan pilihan anda

E. Komentar dan saran perbaikan
di naskah

.....
.....
.....

Jember, 11 Mei - 2018

Validator

(Loni A. M.)



Lampiran F. Lembar Validasi LKM

LEMBAR VALIDASI

LEMBAR KERJA MAHASISWA (LKM)

Mata Kuliah : Matematika Diskrit
 Materi : *r-dynamic vertex coloring*
 Kelas/Semester :
 Nama Validator :

A. Tujuan

Tujuan penggunaan instrument ini digunakan untuk mengukur kevalidan LKM dalam pelaksanaan pembelajaran matematika yang implementasinya berbasis *Problem-based Learning* untuk meningkatkan *combinatorial thinking* peserta didik.

B. Petunjuk

Berikan tanda cek (\checkmark) pada kolom yang sesuai dengan pendapat anda!

Keterangan skala penilaian:

- 1: berarti "tidak baik"
- 2: berarti "cukup baik"
- 3: berarti "baik"
- 4: berarti "sangat baik"

C. Penilaian ditinjau dari beberapa aspek

No.	Aspek yang dinilai	Skala penilaian			
		1	2	3	4
I. Format					
1.	LKM memiliki petunjuk pengerjaan yang jelas				\checkmark
II. Isi LKM					
1.	LKM disajikan secara sistematis			\checkmark	
2.	Kebenaran konsep dan materi				\checkmark
3.	Masalah yang diangkat sesuai kognisi peserta didik				\checkmark

4.	Setiap kegiatan mempunyai tujuan yang jelas			✓	
5.	Kegiatan yang disajikan menumbuhkan kemampuan berpikir kreatif peserta didik			✓	
6.	Penyajian LKM menarik				✓
I. Bahasa dan tulisan					
1.	Soal dirumuskan dengan bahasa yang sederhana dan tidak menimbulkan makna ganda atau ambigu			✓	
2.	Menggunakan istilah-istilah yang mudah dipahami				✓
3.	Dirumuskan dengan mengikuti kaidah bahasa Indonesia yang baku (EYD)				✓
4.	Bahasa yang digunakan komunikatif				✓

D. Penilaian Umum

Kesimpulan penilaian secara umum **):

a. LKM pembelajaran ini:

- 1: berarti "tidak baik"
- 2: berarti "cukup baik"
- ③ 3: berarti "baik"
- 4: berarti "sangat baik"

b. LKM Pembelajaran ini:

- 1: belum dapat digunakan dan masih memerlukan konsultasi
- 2: dapat digunakan dengan banyak revisi
- ③ 3: dapat digunakan dengan sedikit revisi
- 4: dapat digunakan tanpa revisi


**): *Lingkirlah nomor atau angka sesuai dengan pilihan anda*

E. Komentar dan saran perbaikan

.....
di raskah

Jember, 11 - 10 - 2018

Validator


(Lepu A.M.)



LEMBAR VALIDASI PEDOMAN WAWANCARA

A. TUJUAN

Lembar validasi pedoman wawancara ini adalah mengukur kevalidan pedoman wawancara dalam mendapatkan informasi tentang keterampilan berpikir kombinatorik mahasiswa dalam menyelesaikan masalah *r-dynamic vertex coloring*.

B. PETUNJUK

1. Bapa/Ibu dapat memberikan penilaian dengan memberikan tanda cek (✓) pada kolom yang ada.
2. Arti point validitas adalah 1 (tidak baik), 2 (kurang baik), 3 (cukup baik) dan 4 (baik)

C. PENILAIAN

No.	Aspek yang dinilai	Skala Penelitian			
		1	2	3	4
1	Pertanyaan yang diajukan dapat menggali indikator keterampilan berpikir kombinatorik			✓	
2	Pertanyaan yang di ajukan mencerminkan penggunaan bahasa yang baik dan benar				✓
3	Kalimat pertanyaan tidak mengandung arti ganda				✓
4	Pertanyaan yang diajukan menggunakan bahasa yang sederhana dan mudah di pahami				✓

Berdasarkan hal di atas, lembar validasi pedoman wawancara ini:

1. Belum dapat digunakan dan msaih memerlukan konsultasi
2. Dapat digunakan dengan banyak revisi
3. Dapat digunakan dengan sedikit revisi
4. Dapat digunakan tanpa revisi

D. KOMENTAR DAN SARAN PERBAIKAN

di naskah

Jember, 11 - 10 - 2018

Validator


(Wani A. Pu.)

**LEMBAR VALIDASI PEDOMAN OBSERVASI KEMAMPUAN BERPIKIR
KOMBINATORIK**

A. PEDOMAN VALIDASI

- a. Mohon agar Bapak/ Ibu memberikan penilaian terhadap pedoman observasi Kemampuan berpikir kombinatorik ditinjau dari beberapa aspek, penilaian umum dan saran-saran untuk merevisi pedoman observasi kemampuan berpikir kombinatorik yang disusun.
- b. Instrumen ini bertujuan sebagai pedoman observasi untuk mengetahui kemampuan berpikir kombinatorik mahasiswa

B. PETUNJUK PENGISIAN VALIDASI

- a. Mohon Bapak/ Ibu untuk memberikan skor dengan cara mencentang pada kolom yang telah disediakan sesuai kriteria
- b. Jika Bapak/ Ibu menganggap perlu ada revisi, maka dimohon Bapak/ Ibu memberikan butir revisi pada bagian saran dan kritik pada lembar yang telah disediakan.

C. PENILAIAN

No.	Aspek	Skor				
		1	2	3	4	5
1.	Kesesuaian isi					
	Kesesuaian dengan indikator berpikir kombinatorik konstruksi				✓	
2.	Kejelasan petunjuk cara melakukan observasi					✓
	Kejelasan butir pernyataan pada pedoman observasi					✓
3.	Bahasa					
	Butir pernyataan pada kolom pedoman observasi menggunakan Bahasa Indonesia yang baik dan benar					✓
Jumlah						
Skor total						
Rata-rata skor (\bar{X})						

➤ Skor tes kemampuan berpikir kombinatorik :

$1 \leq \bar{x} \leq 2$: tidak valid (belum dapat digunakan)

$2 \leq \bar{x} \leq 3$: kurang valid (dapat digunakan dengan banyak revisi)

$3 \leq \bar{x} \leq 4$: valid (dapat digunakan dengan sedikit revisi)

$4 \leq \bar{x} \leq 5$: sangat valid (dapat digunakan tanpa revisi)

D. Kritik dan Saran Perbaikan

.....
di Naskah
.....
.....

Jember, 11 - 10 - 2018
Validator


(Wani A. H.)



Lampiran C: Lembar Validasi RPP

LEMBAR VALIDASI

PENCANA PELAKSANAAN PEMBELAJARAN (RPP)

Mata Kuliah : Matematika Diskrit
 Materi : *r-Dynamic Vertex Coloring*
 Kelas/Semester :
 Nama Validator :

A. Tujuan

Tujuan penggunaan instrumen ini digunakan untuk mengukur kevalidan RPP dalam pelaksanaan pembelajaran matematika yang implementasinya menggunakan pendekatan pembelajaran *Problem-based Learning* untuk meningkatkan kemampuan berpikir kreatif Peserta didik.

B. Petunjuk

Berikan tanda (√) pada kolom yang sesuai dengan pendapat anda.

Keterangan skala penilaian:

- 1: berarti "tidak cukup"
- 2: berarti "cukup baik"
- 3: berarti "baik"
- 4: berarti "sangat baik"

C. Penilaian ditinjau dari beberapa aspek

No.	Aspek yang dinilai	Skala penilaian			
		1	2	3	4
I. Perumusan tujuan pembelajaran					
1.	Kejelasan kompetensi inti dan kompetensi dasar				✓
2.	Kesesuaian kompetensi inti dan kompetensi dasar dengan tujuan pembelajaran				✓
3.	Ketepatan penjabaran kompetensi dasar kedalam indikator				✓

4.	Kesesuaian indikator dengan tujuan pembelajaran				✓
5.	Kesesuaian indikator dengan tingkat perkembangan peserta didik				✓
II. Isi RPP					
1.	Sistematika penyusunan RPP				✓
2.	Kesesuaian urutan kegiatan pembelajaran dengan pendekatan <i>Problem-based Learning</i>				✓
3.	Kejelasan tahap-tahap kegiatan pembelajaran dari pendahuluan, inti dan penutup				✓
III. Bahasa dan tulisan					
1.	Menggunakan bahasa yang sesuai dengan kaidah bahasa yang baku (EYD)				✓
2.	Bahasa yang digunakan bersifat komunikatif dan mudah dipahami				✓
IV. Waktu					
1.	Kesesuaian alokasi waktu yang digunakan				✓
2.	Rincian waktu untuk setiap tahap pembelajaran				✓

D. Penilaian umum

Kesimpulan penilaian secara umum**):

- a. Rencana Pelaksanaan Pembelajaran ini:
 - 1: berarti "tidak baik"
 - 2: berarti "cukup baik"
 - 3: berarti "baik"
 - 4: berarti "sangat baik"
- b. Rencana Pelaksanaan Pembelajaran ini:
 - 1: belum dapat digunakan dan masih memerlukan konsultasi
 - 2: dapat digunakan dengan banyak revisi
 - 3: dapat digunakan dengan sedikit revisi
 - 4: dapat digunakan tanpa revisi

**Lingkirlah nomor atau angka sesuai dengan pilihan anda

E. Komentar dan saran perbaikan

.....
.....
.....

Jember, 5 - 10 - 2018

Validator:



(Erfan)



Lampiran F. Lembar Validasi LKM

LEMBAR VALIDASI

LEMBAR KERJA MAHASISWA (LKM)

Mata Kuliah : Pemodelan Matematika Diskrit
 Materi : *r*-dynamic vertex coloring
 Kelas/Semester :
 Nama Validator :

A. Tujuan

Tujuan penggunaan instrument ini digunakan untuk mengukur kevalidan LKM dalam pelaksanaan pembelajaran matematika yang implementasinya berbasis *Problem-based Learning* untuk meningkatkan *combinatorial thinking* peserta didik.

B. Petunjuk

Berikan tanda cek (√) pada kolom yang sesuai dengan pendapat anda!

Keterangan skala penilaian:

- 1: berarti "tidak baik"
- 2: berarti "cukup baik"
- 3: berarti "baik"
- 4: berarti "sangat baik"

C. Penilaian ditinjau dari beberapa aspek

No.	Aspek yang dinilai	Skala penilaian			
		1	2	3	4
I. Format					
1.	LKM memiliki petunjuk pengerjaan yang jelas				✓
H. Isi LKM					
1.	LKM disajikan secara sistematis				✓
2.	Kebenaran konsep dan materi				✓
3.	Masalah yang diangkat sesuai kognisi peserta didik				✓

4.	Setiap kegiatan mempunyai tujuan yang jelas				✓
5.	Kegiatan yang disajikan menumbuhkan kemampuan berpikir kreatif peserta didik				✓
6.	Penyajian LKM menarik				✓
I. Bahasa dan tulisan					
1.	Soal dirumuskan dengan bahasa yang sederhana dan tidak menimbulkan makna ganda atau ambigu				✓
2.	Menggunakan istilah-istilah yang mudah dipahami				✓
3.	Dirumuskan dengan mengikuti kaidah bahasa Indonesia yang baku (EYD)				✓
4.	Bahasa yang digunakan komunikatif		✓		

D. Penilaian Umum

Kesimpulan penilaian secara umum **):

- a. LKM pembelajaran ini:
 - 1: berarti "tidak baik"
 - 2: berarti "cukup baik"
 - 3: berarti "baik"
 - 4: berarti "sangat baik"
- b. LKM Pembelajaran ini:
 - 1: belum dapat digunakan dan masih memerlukan konsultasi
 - 2: dapat digunakan dengan banyak revisi
 - 3: dapat digunakan dengan sedikit revisi
 - 4: dapat digunakan tanpa revisi

**): *Lingkirlah nomor atau angka sesuai dengan pilihan anda*

E. Komentar dan saran perbaikan

.....

.....

Jember, 5 - 10 - 2018

Validator



(Erfan Y.)



LEMBAR VALIDASI PEDOMAN WAWANCARA

A. TUJUAN

Lembar validasi pedoman wawancara ini adalah mengukur kevalidan pedoman wawancara dalam mendapatkan informasi tentang keterampilan berpikir kombinatorik mahasiswa dalam menyelesaikan masalah *r-dynamic vertex coloring*.

B. PETUNJUK

1. Bapa/Ibu dapat memberikan penilaian dengan memberikan tanda cek (✓) pada kolom yang ada.
2. Arti point validitas adalah 1 (tidak baik), 2 (kurang baik), 3 (cukup baik) dan 4 (baik).

C. PENILAIAN

No.	Aspek yang dinilai	Skala Penelitian			
		1	2	3	4
1	Pertanyaan yang diajukan dapat menggali indikator keterampilan berpikir kombinatorik				✓
2	Pertanyaan yang di ajukan mencerminkan penggunaan bahasa yang baik dan benar				✓
3	Kalimat pertanyaan tidak mengandung arti ganda			✓	
4	Pertanyaan yang diajukan menggunakan bahasa yang sederhana dan mudah di pahami			✓	

Berdasarkan hal di atas, lembar validasi pedoman wawancara ini:

1. Belum dapat digunakan dan msaih memerlukan konsultasi
2. Dapat digunakan dengan banyak revisi
3. Dapat digunakan dengan sedikit revisi
4. Dapat digunakan tanpa revisi

D. KOMENTAR DAN SARAN PERBAIKAN

.....

.....

.....

Jember, 5 - 10 - 2018

Validator


(Erfan Y)

LEMBAR VALIDASI PEDOMAN OBSERVASI KEMAMPUAN BERPIKIR KOMBINATORIK

A. PEDOMAN VALIDASI

- Mohon agar Bapak/ Ibu memberikan penilaian terhadap pedoman observasi Kemampuan berpikir kombinatorik ditinjau dari beberapa aspek, penilaian umum dan saran-saran untuk merevisi pedoman observasi kemampuan berpikir kombinatorik yang penguji susun.
- Instrumen ini bertujuan sebagai pedoman observasi untuk mengetahui kemampuan berpikir kombinatorik mahasiswa.

B. PETUNJUK PENGISIAN VALIDASI

- Mohon Bapak/ Ibu untuk memberikan skor dengan cara mencentang pada kolom yang telah disediakan sesuai kriteria.
- Jika Bapak/ Ibu menganggap perlu ada revisi, maka dimohon Bapak/ Ibu memberikan butir revisi pada bagian saran dan kritik pada lembar yang telah disediakan.

C. PENILAIAN

No.	Aspek	Skor				
		1	2	3	4	5
1.	Kesesuaian isi					✓
	Kesesuaian dengan indikator berpikir kombinatorik konstruksi					✓
2.	Kejelasan petunjuk cara melakukan observasi				✓	
	Kejelasan butir pernyataan pada pedoman observasi Bahasa					✓
3.	Butir pernyataan pada kolom pedoman observasi menggunakan Bahasa Indonesia yang baik dan benar				✓	
Jumlah						
Skor total						
Rata-rata skor (\bar{x})						

➤ Skor tes kemampuan berpikir kombinatorik :

$1 \leq \bar{x} \leq 2$: tidak valid (belum dapat digunakan)

$2 \leq \bar{x} \leq 3$: kurang valid (dapat digunakan dengan banyak revisi)

$3 \leq \bar{x} \leq 4$: valid (dapat digunakan dengan sedikit revisi)

$4 \leq \bar{x} \leq 5$: sangat valid (dapat digunakan tanpa revisi)

D. Kritik dan Saran Perbaikan

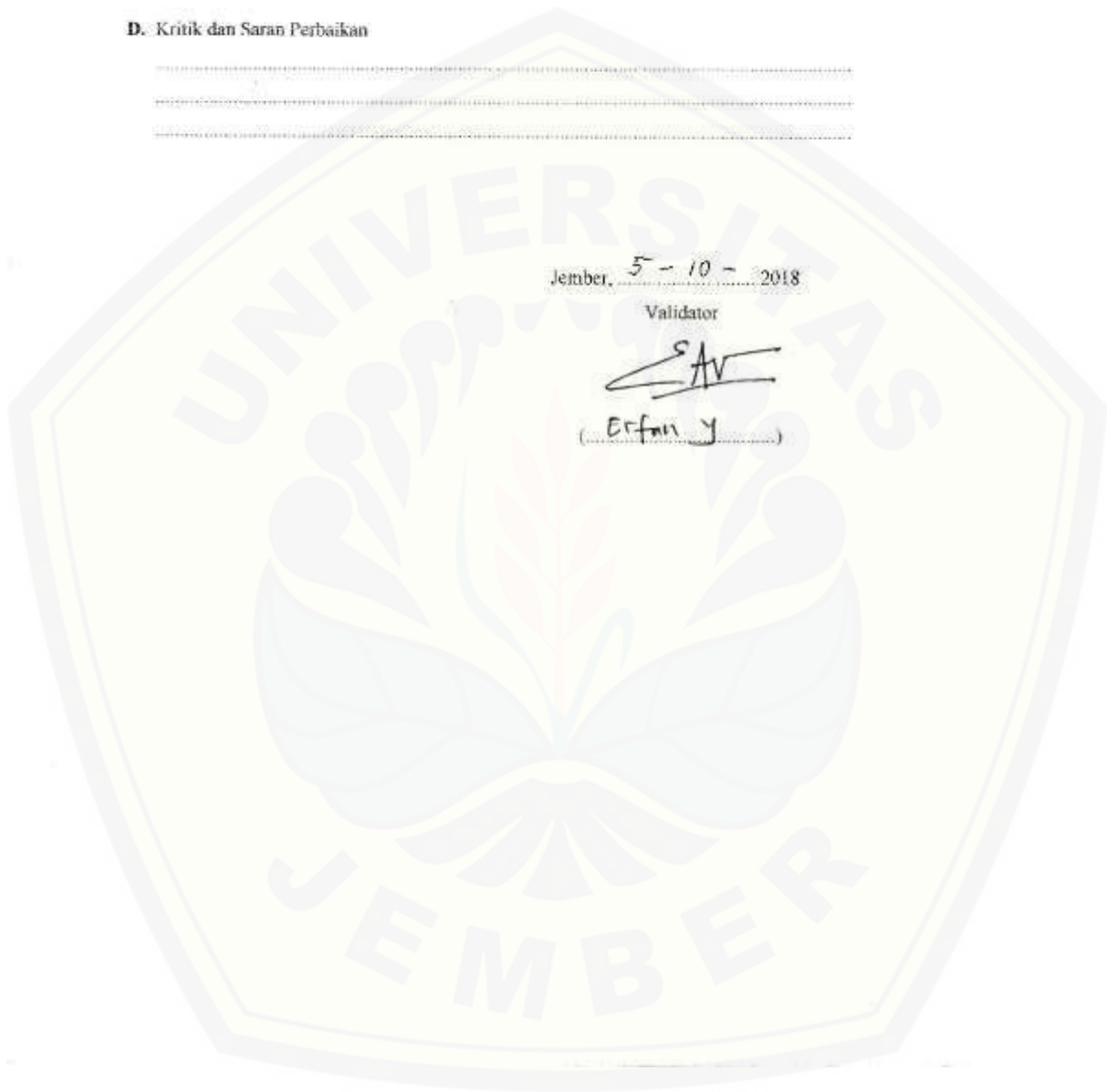
.....
.....
.....

Jember, 5 - 10 - 2018

Validator



(Efan Y)



On r -dynamic chromatic number of coronation of order two of any graphs with path graph

B J Septyory^{1,2*}, Dafik^{1,2*}, A I Kristiana^{1,2}, I H Agustin^{1,3} and D A R Wardani^{1,4}

¹ CGANT University of Jember, Indonesia

² Mathematics Edu. Depart. University of Jember, Indonesia

³ Mathematics Depart. University of Jember, Indonesia

⁴ Mathematics Edu. Depart. IKIP PGRI Jember, Indonesia

* Corresponding Author

E-mail: brianseptyory95@gmail.com; d.dafik@gmail.com

Abstract. In this study we assume every graphs be a simple, finite, nontrivial, connected and undirected graphs with vertex set $V(H)$, edge set $E(H)$ and no isolated vertex. An r -dynamic coloring of a graph H is a proper k -coloring of graph H such that the neighbors of any vertex u accept at least $\min\{r, d(u)\}$ different colors. The r -dynamic chromatic number is the minimum k such that graph H has an r -dynamic k -coloring, it is shown by $\chi_r(H)$. In this research, we interpret the r -dynamic chromatic number of graph corona of order two, denoted by $H_1 \odot^2 H_2$. The *corona* of two graphs H_1 and H_2 is a graph $H_1 \odot H_2$ formed from one copy of H_1 and $|V(H_1)|$ copies of H_2 where the i th vertex of H_1 is adjacent to every vertex in the i th copy of H_2 . For any integer $l \geq 2$, we establish the graph $H_1 \odot^l H_2$ recursively from $H_1 \odot H_2$ as $H_1 \odot^l H_2 = (H_1 \odot^{l-1} H_2) \odot H_2$. Graph $H_1 \odot^l H_2$ is also named as l -corona product of H_1 and H_2 . $X_r = (P_n \odot^2 H_2)$ and H_2 is path graph P_m , star graph S_m , complete graph K_m and fan graph F_m . In this study we will determine the lower bound of r -dynamic chromatic number of corona order two of graphs.

1. Introduction

Every graphs in this research is a simple, finite, nontrivial, connected and undirected graphs, with vertex set $V(H)$, edge set $E(H)$, maximum degree $\Delta(H)$ and minimum degree $\delta(H)$. Akbari [10] defined about r -dynamic coloring of graph, we imply a proper k -coloring of graph H such that the neighbors of any vertex u accept at least $\min\{r, d(u)\}$ different colors, $d(u)$ is the degree of vertex u of graph H . The r -dynamic chromatic number of graph H as $\chi_r(H)$ which is the minimum k such that graph H has an r -dynamic k -coloring. Montgomery[2] introduces this concept with observations as follows :

Observation 1. Let $\Delta(H)$ be the maximum degree of graph H . It holds $\chi_r(H) \geq \min\{\Delta(H), r\} + 1$.

Observation 2. Let $(H) = H_1 \odot^2 H_2$ be corona graph, then we have $\delta(H) = \delta(H_2) + 1$ and $\Delta(H) = \Delta(H) + 2 |V(H_2)|$, where $\Delta(H)$ is maximum degree of H and $\delta(H)$ is minimum degree of H .

Montgomery [2] found the lower bound of the r -dynamic chromatic number, $\chi_r(H) \geq \min\{\Delta(H), r\} + 1$ and he found for any tree, $\chi_r(H) = \min\{\Delta, r\} + 1$ and if $r \geq 2$ then

$\chi_r(C_n) = 5$ for $n = 5$, $\chi_r(C_n) = 3$ if $n = 3k, k \geq 1$ and $\chi_r(C_n) = 4$ for n otherwise. Ramya [8] found acyclic coloring of corona of $C_n \odot K_{1,3}, P_n \odot K_2$ and star coloring of corona $P_n \odot K_n$. Pathinathan et.al [7] studied the chromatic number of corona with subdivision vertex and edge for path and cycle graphs. Kristiana et.al conducted two studies on r-dynamic, including [5] and [6] has initiated to determine the lower bound of $\chi_r(P_n \odot H_2)$ and $\chi_r(P_n \odot H_2); H_2 \neq K_m, C_m, W_m$ and $\chi_r(H_n \odot W_m)$. Dafik et.al [3] determined the several classes of graphs and their r-dynamic chromatic numbers.

Furmanczyk [4], given two simple graphs H_1 and H_2 , the corona product of H_1 and H_2 , it is shown by $H_1 \odot H_2$, is a connected graph achieved by catcing a number of vertices $|V(H_1)|$ copy of H_2 , and forming the i^{th} of $V(H_1)$ adjacent to every vertex of the i^{th} copy of $V(H_2)$. Kang et.al [9] found the r-dynamic chromatic number of grid graph for all r, m, n . Akbari, et.al found 2-dynamic chromatic number of cartesian product of path and cycle graph. Taherkhani, et.al [1] proved upper bound of regular graph.

In this research we will continue to determine the r-dynamic chromatic number of corona order two of graphs. The corona of two graphs H_1 and H_2 is a graph $H_1 \odot H_2$ established from one copy of H_1 and $|V(H_1)|$ copies of H_2 where the i th vertex of H_1 is adjacent to every vertex in the i th copy of H_2 . For any integer $l \geq 2$, we establish the graph $H_1 \odot^l H_2$ recursively from $H_1 \odot H_2$ as $H_1 \odot^l H_2 = (H_1 \odot^{l-1} H_2) \odot H_2$. Graph $H_1 \odot^l H_2$ is also named as l -corona product of H_1 and H_2 .

Tilapia is a type of consumption fish and it lives in fresh water. This fish tends to be very easy to breed and market because it is one of the most commonly consumed fish species by the community everyday. That is why mostly people cultivate this fish in household scale or large scale or company. Tilapia fish cultivation consists of several steps that are very important to understand, namely preparation of ponds, fish seed distribution, disease prevention, and harvesting period.

Fish pond is one of the most important things to cultivate tilapia. Facilities in the form of ponds that need to be provided in the cultivation of tilapia fish depends on the maintenance system (system 1 ponds, system 2 ponds, etc.). The ponds commonly used in the cultivation of tilapia are Maintenance Pond Parent or Spawning Pond, Seed Maintenance Pond or Separating Pond, Enlargement pond and Pool or Berokan pond.

However, some tilapia farmers pay less attention about usage of the land and separation of tilapia suitable with its growth phase. So that a lot of non-effective land and tilapia seed damage. Therefore, the researcher has a solution to this problem by using the application of r-dynamic coloring in graph theory.

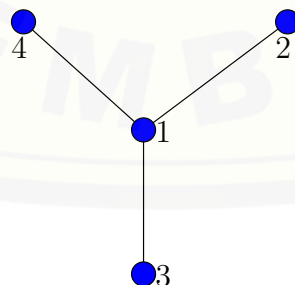


Figure 1. Application of r-Dynamic Coloring

Tilapia cultivation is applied to the r-dynamic staining on the star graph as much as n vertex depends on the available land. The vertex of a star graph has at least 4 vertices. The center vertex on the star graph is a chief tilapia pond. The vertex around is a sapling pond based on

the growth phase. The edge is a connector of the vertex of a chief tilapia pond with the vertex of the sapling pond to facilitate the removal of eggs on the pond of her saplings. Coloring in this case is the difference of the growth phase of the tilapia fish. The vertex of the sapling at least 3 vertices that are: 1) vertex 1 is the seeds maintenance pond. 2) vertex 2 is the enlargement pond. 3) vertex 3 is a pond for fish that are ready for harvest. For beginner cultivators in this case is $r = 1$ need 2 colors, that are the color of the chief of tilapia and the color of the seed maintenance pond. The next coloring depends on the development of the phase, so the pond color is needed more and more until the harvest phase.

2. Result

In this research, we will learn the lower bound of r -dynamic chromatic number of $\chi_r(P_t \odot^2 P_s)$, $\chi_r(P_t \odot^2 S_s)$, $\chi_r(P_t \odot^2 K_s)$ and $\chi_r(P_t \odot^2 F_s)$

Lemma 1. Let $H = P_t \odot^2 H_2; H_2 \neq C_s$ and W_s , then:

$$\chi_r(H) \geq \begin{cases} \delta + 1; & \text{for } 1 \leq r \leq \delta \\ r + 1; & \text{for } \delta + 1 \leq r < \Delta \\ \Delta + 1, & \text{for } r \geq \Delta \end{cases}$$

Proof. Based on the defined of corona order two of graph, $V(P_t \odot^2 H_2) = V(P_t) \cup \bigcup_{\alpha=1}^t V(H_\alpha) \cup V(H_1)V(H_2)^2$ and $\Delta(P_t \odot^2 H_2) = \Delta(H_1) + 2 |V(H_2)|$. For $1 \leq r \leq \delta$, based on the observation 1 and selected $r = \delta$, we found $\chi_r(H = P_t \odot^2 H_2) \geq \min \{r, \Delta(H)\} + 1 = \min \{\delta, \Delta(P_t) + 2 |V(H_2)|\} + 1 = \delta + 1$.

For $\delta + 1 \leq r < \Delta$, respected to Observation 1 and by choosing $r_1 = \delta + 1$, we get $\chi_r(H = P_t \odot^2 H_2) \geq \min \{r, \Delta(H)\}$. Since $\delta(H_2)$ is the minimum degree of graph H_2 and $|V(H_2)|$ is the order of graph H_2 , thus $\delta(H_2) \leq |V(H_2)|$ and $\chi_r(P_t \odot^2 H_2) \geq \delta(H_2) + 1 = r + 1$. if we choose $r_2 = \delta(H_2) + 2$, we get $\chi_r(P_t \odot^2 H_2) \geq \min \{\delta(H_2) + 2, \Delta(P_t) + 2 |V(H_2)|\} + 1 = \delta(H_2) + 2 + 1 = r_2 + 1$.

For $r \geq \Delta$, $\Delta(P_t \odot^2 H_2) = \Delta(H_1) + 2 |V(H_2)|$ then $r \geq \Delta(H_1) + 2 |V(H_2)|$, based on Observation 1 and by choosing $r = \Delta(P_t) + 2 |V(H_2)|$, we found $\chi_r(H = P_t \odot^2 H_2) \min \{r, \Delta(H) = P_t \odot^2 H_2\} + 1 = \min \{\Delta, \Delta\} + 1 = \Delta + 1$. \square

Theorem 1. Let $H = P_t \odot^2 P_s; n, s \geq 3$, then:

$$\chi_r(H) = \begin{cases} 3; & \text{for } 1 \leq r \leq 2 \\ r + 1; & \text{for } 3 \leq r < 2s + 2 \\ 2s + 3, & \text{for } r \geq 2s + 2 \end{cases}$$

Proof. The Graph $P_t \odot^2 P_s$ have vertex set $V(P_t \odot^2 P_s) = \{x_\alpha; 1 \leq \alpha \leq t\} \cup \{x_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s\} \cup \{x_{\alpha,\beta,\gamma}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s, 1 \leq \gamma \leq s\} \cup \{y_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s\}$ and edge set $E(P_t \odot^2 P_s) = \{x_\alpha x_{\alpha+1}; 1 \leq \alpha \leq t-1\} \cup \{x_\alpha y_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s\} \cup \{y_{\alpha,\beta} y_{\alpha,\beta+1}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s-1\} \cup \{x_\alpha x_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s\} \cup \{x_\alpha x_{\alpha,\beta+1}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s-1\} \cup \{x_{\alpha,\beta} x_{\alpha,\beta,\gamma}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s, 1 \leq \gamma \leq s\} \cup \{x_{\alpha,\beta} x_{\alpha,\beta,\gamma+1}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s, 1 \leq \gamma \leq s-1\}$. The vertex and edge cardinality of graph are $|V(P_t \odot^2 P_s)| = t(s^2 + 2s + 1)$, $|E(P_t \odot^2 P_s)| = 2ts^2 + 3ts - t - 1$ respectively. Thus, $\Delta(P_t \odot^2 P_s) = 2p(H_2) + 2 = 2s + 2$ and $\delta(P_t \odot^2 P_s) = 2$. We define tree cases, namely for $\chi_{1 \leq r \leq 2}(P_t \odot^2 P_s)$, $\chi_{3 \leq r < 2s+2}(P_t \odot^2 P_s)$, $\chi_{r \geq 2s+2}(P_t \odot^2 P_s)$.

Case 1 : For 3; $1 \leq r \leq 2$

Based on Lemma 1, the lower bound for $1 \leq r \leq 2$ is $\chi_r(P_t \odot^2 P_s) \geq \delta + 1 = 2 + 1 = 3$. To find upper bound for $\chi_r(P_t \odot^2 P_s)$, we claim $c_1 : V(P_t \odot^2 P_s) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, as follows:

$$c_1(x_\alpha) = \begin{cases} 1; & \alpha \text{ is odd} \\ 2; & \alpha = 2 \end{cases}$$

$$c_1(x_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 1; & \alpha = 2; \beta \text{ is odd} \\ 2; & \alpha = 1 \pmod 2; \beta = 1 \pmod 2 \\ 3; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 0 \pmod 2 \end{cases}$$

$$c_1(x_{\alpha,\beta}^\gamma) = \begin{cases} 1; & \alpha, \beta, \gamma \text{ are odd; } 1 \leq \alpha \leq t, \beta \text{ is even, } \gamma \text{ is odd} \\ 2; & 1 \leq \alpha \leq t, \beta, \gamma \text{ are even; } \alpha = 2; \beta, \gamma \text{ are odd} \\ 3; & 1 \leq \alpha \leq t, \beta \text{ is odd, } \gamma = 1 \pmod 2 \end{cases}$$

$$c_1(y_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 1; & \alpha = 2; \beta = 1 \pmod 2 \\ 2; & \alpha = 1 \pmod 2; \beta = 1 \pmod 2 \\ 3; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 0 \pmod 2 \end{cases}$$

Clearly, c_1 shows the upper bound for $\chi_{1 \leq r \leq 2}(P_t \odot^2 P_s) \leq 3$. Hence, $\chi_{1 \leq r \leq 2}(P_t \odot^2 P_s) = 3$.

Case 2 : For $r + 1; 3 \leq r < 2s + 2$

Based on Lemma 1, the lower bound for $3 \leq r < 2s + 2$ is $\chi_r(P_t \odot^2 P_s) \geq r + 1$. To find upper bound for $\chi_r(P_t \odot^2 P_s)$, we claim $c_2 : V(P_t \odot^2 P_s) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, as follows:

$$c_2(x_\alpha) = \begin{cases} 1; & \alpha \text{ is odd} \\ 2; & \alpha = 2 \end{cases}$$

$$c_2(x_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 3; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta \text{ is odd; } r = 3 \\ 4; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta \text{ is even; } r = 3 \\ (r - 2) + \beta; & 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq t; 4 \leq r \leq 2s + 1 \end{cases}$$

$$c_2(x_{\alpha,\beta}^\gamma) = \begin{cases} 1, 2, \dots, 2s + 2 \neq c(x_{\alpha,\beta}) \cap cN(x_{\alpha,\beta}); \\ 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; 1 \leq \gamma \leq s; 3 \leq r \leq 2s + 1 \end{cases}$$

$$c_2(y_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 1; & \alpha \text{ is even; } \beta = 1 \pmod 3; 3 \leq r \leq 2s \\ 2; & \alpha \text{ is odd; } \beta = 1 \pmod 3; 3 \leq r \leq 2s \\ 3; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 2 \pmod 3; 3 \leq r \leq 2s + 1 \\ 4; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 0 \pmod 3; 3 \leq r \leq 2s + 1 \\ s + 2; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 1 \pmod 3; r = 2s + 1 \end{cases}$$

Clearly, c_2 shows the upper bound for $\chi_{3 \leq r < 2s+2}(P_t \odot^2 P_s) \leq r + 1$. Hence, $\chi_{3 \leq r < 2s+2}(P_t \odot^2 P_s) = r + 1$.

Case 3 : For $2s + 3; r \geq 2s + 2$

Based on Lemma 1, the lower bound for $r \geq 2s + 2$ is $\chi_{r \geq 2s+2} \geq 2s + 2 + 1 = 2s + 3$. To find the upper bound, we claim $c_3 : V(P_t \odot^2 P_s) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, as follows:

$$c_3(x_\alpha) = \begin{cases} 1; & \alpha \equiv 1 \pmod 3 \\ 2; & \alpha \equiv 2 \pmod 3 \\ 3; & \alpha \equiv 0 \pmod 3 \end{cases}$$

$$c_3(x_{\alpha,\beta}) = \beta + s + 3; 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; r = 2s + 3$$

$$c_3(x_{\alpha,\beta}^\gamma) = \begin{cases} 1, 3, 4, \dots, s + 1; & \alpha \text{ is even; } 1 \leq \beta \leq s; 1 \leq \gamma \leq s \\ 2, 3, 4, \dots, s + 1; & \alpha \text{ is odd; } 1 \leq \beta \leq s; 1 \leq \gamma \leq s \end{cases}$$

$$c_3(y_{\alpha,\beta}) = \beta + 3; 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; r = 2s + 3$$

Clearly, c_3 shows the upper bound for $\chi_{r \geq 2s+2}(P_t \odot^2 P_s) \leq 2s + 3$. Hence, $\chi_{r \geq 2s+2}(P_t \odot^2 P_s) = 2s + 3$. \square

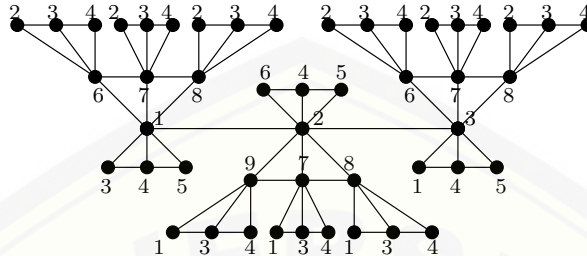


Figure 2. Example of r -Dynamic Coloring of $P_3 \odot^2 P_3$

Theorem 2. Let $H = P_t \odot^2 S_s; t, s \geq 3$, then:

$$\chi_r(H) = \begin{cases} 3; & \text{for } 1 \leq r \leq 2 \\ r + 1; & \text{for } 3 \leq r < 2s + 2 \\ 2s + 3, & \text{for } r \geq 2s + 2 \end{cases}$$

Proof. The Graph $P_t \odot^2 S_s$ have vertex set $V(P_t \odot^2 S_s) = \{x_\alpha; 1 \leq \alpha \leq t\} \cup \{x_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq 3, 1 \leq \beta \leq s\} \cup \{x_{\alpha,\beta}^\gamma; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s, 1 \leq \gamma \leq s\} \cup \{y_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s\}$ and edge set $E(P_t \odot^2 S_s) = \{x_\alpha x_{\alpha+1}; 1 \leq \alpha \leq t-1\} \cup \{x_\alpha y_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s\} \cup \{y_{\alpha,\beta} y_{\alpha,s}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s-1\} \cup \{x_\alpha x_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s\} \cup \{x_{\alpha,\beta} x_{\alpha,s}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s-1\} \cup \{x_{\alpha,\beta} x_{\alpha,\beta,\gamma}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s, 1 \leq \gamma \leq s\} \cup \{x_{\alpha,\beta,\gamma} x_{\alpha,\beta,\gamma}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s, 1 \leq \gamma \leq s-1\}$. The vertex and edge cardinality of graph are $|V(P_t \odot^2 S_s)| = ts^2 + 2ts + t$, $|E(P_t \odot^2 S_s)| = 2ts^2 + 3ts - t - 1$ respectively. Thus, $\Delta(P_t \odot^2 S_s) = 2p(H_2) + 2 = 2s + 2$ and $\delta(P_t \odot^2 S_s) = 2$. We define tree cases, namely for $\chi_{1 \leq r \leq 2}(P_t \odot^2 S_s)$, $\chi_{3 \leq r < 2s+2}(P_t \odot^2 S_s)$, $\chi_{r \geq 2s+2}(P_t \odot^2 S_s)$.

Case 1 : For 3; $1 \leq r \leq 2s + 2$

Based on Lemma 1, the lower bound for $1 \leq r \leq 2$ is $\chi_r(P_t \odot^2 S_s) \geq \delta + 1 = 2 + 1 = 3$. To find upper bound for $\chi_r(P_t \odot^2 S_s)$, we claim $c_4 : V(P_t \odot^2 S_s) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, as follows:

$$c_4(x_\alpha) = \begin{cases} 1; & \alpha \text{ is odd} \\ 2; & \alpha = 2 \end{cases}$$

$$c_4(x_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 1; & \alpha = 2; 1 \leq \beta \leq s - 1 \\ 2; & \alpha \text{ is odd}; 1 \leq \beta \leq s - 1 \\ 3; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = s \end{cases}$$

$$c_4(x_{\alpha,\beta}^\gamma) = \begin{cases} 1; & \alpha \text{ is odd}; 1 \leq \beta \leq s - 1; 1 \leq \gamma \leq s - 1; 1 \leq \alpha \leq t; \beta = s; \gamma = s \\ 2; & \alpha = 2; 1 \leq \beta \leq s; 1 \leq \gamma \leq s - 1; \alpha \text{ is odd}; 1 \leq \beta \leq s; 1 \leq \gamma \leq s - 1 \\ 3; & 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s - 1, k = s \end{cases}$$

$$c_4(y_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 1; & \alpha = 2; \beta = 1 \text{ mod } 2 \\ 2; & \alpha = 1 \text{ mod } 2; \beta = 1 \text{ mod } 2 \\ 3; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 0 \text{ mod } 2 \end{cases}$$

Clearly, c_4 shows the upper bound for $\chi_{1 \leq r \leq 2}(P_t \odot^2 S_s) \leq 3$. Hence, $\chi_{1 \leq r \leq 2}(P_t \odot^2 S_s) = 3$.

Case 2 : For $r + 1; 3 \leq r < 2s + 2$

Based on Lemma 1, the lower bound for $3 \leq r < 2s + 2$ is $\chi_r(P_t \odot^2 S_s) \geq r + 1$. To find upper bound for $\chi_r(P_t \odot^2 S_s)$, we claim $c_5 : V(P_t \odot^2 S_s) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, as follows:

$$c_5(x_\alpha) = \begin{cases} 1; & \alpha \text{ is odd} \\ 2; & \alpha = 2 \end{cases}$$

$$c_5(x_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 1; & \alpha \text{ is even}; 1 \leq \beta \leq s - 1; 3 \leq r \leq s + 1 \\ 2; & \alpha \text{ is odd}; 1 \leq \beta \leq s - 1; 3 \leq r \leq s + 1 \\ 3; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = s; 3 \leq r \leq s \\ \beta + 2; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = s; s + 1 \leq r \leq 2s + 1 \\ s + 3; & 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s - 1; r = s + 2; 1 \leq \alpha \leq t; \beta \text{ is odd}; r = s + 3 \\ s + 4; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta \text{ is even}; r = s + 3 \\ s + \beta + 2; & 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; 2s \leq r \leq 2s + 1 \end{cases}$$

$$c_5(x_{\alpha,\beta}^\gamma) = \begin{cases} 1, 2, 3, \dots, s & ; 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; 1 \leq \gamma \leq s; r = 3 \\ 1, 2, 3, \dots, s + 1 & ; 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; 1 \leq \gamma \leq s \neq c(x_{\alpha,\beta}); s \leq r \leq 2s + 1 \end{cases}$$

$$c_5(y_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 1, 2, 3, \dots, s + 1 & ; 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; 1 \leq \gamma \leq s \neq c(x_\alpha); s \leq r \leq 2s \\ 2s + 2 & ; 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; \gamma = 1; r = 2s + 1 \end{cases}$$

Clearly, c_5 shows the upper bound for $\chi_{3 \leq r < 2s+2}(P_t \odot^2 S_s) \leq r + 1$. Hence, $\chi_{3 \leq r < 2s+2}(P_t \odot^2 S_s) = r + 1$.

Case 3 : For $2s + 3; r \geq 2s + 2$

Based on Lemma 1, the lower bound for $r \geq 2s + 2$ is $\chi_{r \geq 2s+2} \geq 2s + 2 + 1 = 2s + 3$. To find the upper bound, we claim $c_6 : V(P_t \odot^2 S_s) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, as follows:

$$c_6(x_\alpha) = \begin{cases} 1; & \alpha \equiv 1 \pmod{3} \\ 2; & \alpha \equiv 2 \pmod{3} \\ 2s + 3; & \alpha \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

$$c_6(x_{\alpha,\beta}) = \beta + s + 1; 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; r = 2s + 2$$

$$c_6(x_{\alpha,\beta}^\gamma) = \{ 1, 2, 3, \dots, s + 1 \ ; 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; 1 \leq \gamma \leq s; r = 2s + 2$$

$$c_6(y_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} \beta + 2; & 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s - 1; r = 2s + 2 \\ 2s + 2; & 1 \leq \alpha \leq t; j = s; r = 2s + 2 \end{cases}$$

Clearly, c_6 shows the upper bound for $\chi_{r \geq 2s+2}(P_t \odot^2 S_s) \leq 2s + 3$. Hence, $\chi_{r \geq 2s+2}(P_t \odot^2 S_s) = 2s + 3$. \square

Theorem 3. Let $H = P_t \odot^2 K_s; t, s \geq 3$, then:

$$\chi_r(H) = \begin{cases} s + 1; & \text{for } 1 \leq r \leq s \\ r + 1; & \text{for } s + 1 \leq r < 2s + 2 \\ 2s + 3, & \text{for } r \geq 2s + 2 \end{cases}$$

Proof. The Graph $P_t \odot^2 K_s$ have vertex set $V(P_t \odot^2 K_s) = \{x_\alpha; 1 \leq \alpha \leq t\} \cup \{x_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s\} \cup \{x_{\alpha,\beta}^\gamma; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s, 1 \leq \gamma \leq s\} \cup \{y_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s\}$. The vertex and edge cardinality of graph are $|V(P_t \odot^2 K_s)| = ts^2 + 2ts + t$, $|E(P_t \odot^2 K_s)| = 2ts^2 + 3ts + \frac{t(t-5)}{2}$ respectively. Thus, $\Delta(P_t \odot^2 K_s) = 2p(H_2) + 2 = 2s + 2$ and $\delta(P_t \odot^2 K_s) = s$. We determine tree cases, namely for $\chi_{1 \leq r \leq s}(P_t \odot^2 K_s)$, $\chi_{s+1 \leq r < 2s+2}(P_t \odot^2 K_s)$, $\chi_{r \geq 2s+2}(P_t \odot^2 K_s)$.

Case 1 : For $s + 1; 1 \leq r \leq s$

Based on Lemma 1, the lower bound for $1 \leq r \leq s$ is $\chi_r(P_t \odot^2 K_s) \geq \delta + 1 = s + 1$. To find upper bound for $\chi_r(P_t \odot^2 K_s)$, we claim $c_7 : V(P_t \odot^2 K_s) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, as follows:

$$c_7(x_\alpha) = \begin{cases} 1; & \alpha \text{ is odd} \\ 2; & \alpha = 2 \end{cases}$$

$$c_7(x_{\alpha,\beta}) = 1, 2, \dots, s + 1 \neq c(x_\alpha); \quad 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; 1 \leq r \leq s$$

$$c_7(x_{\alpha,\beta}^\gamma) = 1, 2, \dots, s + 1 \neq c(x_{\alpha,\beta}); \quad 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; 1 \leq \gamma \leq s; 1 \leq r \leq s$$

$$c_7(y_{\alpha,\beta}) = 1, 2, \dots, s + 1 \neq c(x_\alpha); \quad 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; 1 \leq r \leq s$$

Clearly, c_7 shows the upper bound for $\chi_{1 \leq r \leq s}(P_t \odot^2 K_s) \leq \delta + 1$. Hence, $\chi_{1 \leq r \leq s}(P_t \odot^2 K_s) = s + 1$.

Case 2 : For $r + 1; s + 1 \leq r < 2s + 2$

Based on Lemma 1, the lower bound for $s + 1 \leq r < 2s + 2$ is $\chi_r(P_t \odot^2 K_s) \geq r + 1$. To find upper bound for $\chi_r(P_t \odot^2 K_s)$, we claim $c_8 : V(P_t \odot^2 K_s) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, as follows:

$$c_8(x_\alpha) = \begin{cases} 1; & \alpha \text{ is odd} \\ 2; & \alpha \text{ is even} \end{cases}$$

$$c_8(x_{\alpha,\beta}) = r + \beta - 3; \quad 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; s + 1 \leq r \leq 2s + 1$$

$$c_8(x_{\alpha,\beta}^\gamma) = \begin{cases} 1, 2, \dots, 2s + 2 \neq c(x_{\alpha,\beta}) \cap cN(x_{\alpha,\beta}); & 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; \\ & 1 \leq \gamma \leq s; s + 1 \leq r \leq 2s + 1 \end{cases}$$

$$c_8(y_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} \beta + 1; & 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; s + 1 \leq r \leq 2s \\ \beta + 2; & 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; r = 2s + 1 \end{cases}$$

Clearly, c_8 shows the upper bound for $\chi_{s+1 \leq r < 2s+2}(P_t \odot^2 K_s) \leq r + 1$. Hence, $\chi_{s+1 \leq r < 2s+2}(P_t \odot^2 K_s) = r + 1$.

Case 3 : For $2s + 3; r \geq 2s + 2$

Based on Lemma 1, the lower bound for $r \geq 2s + 2$ is $\chi_{r \geq 2s+2} \geq 2s + 2 + 1 = 2s + 3$. To find the upper bound, we claim $c_9 : V(P_t \odot^2 K_s) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, as follows:

$$c_9(x_i) = \begin{cases} 1; & \alpha \equiv 1 \pmod{3} \\ 2; & \alpha \equiv 2 \pmod{3} \\ 3; & \alpha \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

$$c_9(x_{\alpha,\beta}) = s + \beta + 3; \quad 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; r = 2s + 2$$

$$c_9(x_{\alpha,\beta}^\gamma) = \begin{cases} 1, 2, \dots, 2s+3 \neq c(x_{\alpha,\beta}) \cap cN(x_{\alpha,\beta}); & 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; \\ & 1 \leq \gamma \leq s; r = 2s+2 \end{cases}$$

$$c_9(y_{\alpha,\beta}) = \beta + 3; \quad 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; r = 2s+2$$

Clearly, c_9 shows the upper bound for $\chi_{r \geq 2s+2}(P_t \odot^2 K_s) \leq 2s+3$. Hence, $\chi_{r \geq 2s+2}(P_t \odot^2 K_s) = 2s+3$. \square

Theorem 4. Let $H = P_t \odot^2 F_s; t, s \geq 3$, then:

$$\chi_r(H) = \begin{cases} 4; & \text{for } 1 \leq r \leq 3 \\ r+1; & \text{for } 4 \leq r < 2s+4 \\ 2s+5, & \text{for } r \geq 2s+4 \end{cases}$$

Proof. The Graph $P_t \odot^2 F_s$ have vertex set $V(P_t \odot^2 F_s) = \{x_\alpha; 1 \leq \alpha \leq t\} \cup \{x_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s+1\} \cup \{x_{\alpha,\beta}^\gamma; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s+1, 1 \leq \gamma \leq s+1\} \cup \{y_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s+1\}$ and edge set $E(P_t \odot^2 F_s) = \{x_\alpha x_{\alpha+1}; 1 \leq \alpha \leq t-1\} \cup \{x_\alpha y_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s+1\} \cup \{y_{\alpha,\beta} y_{\alpha,\beta+1}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s-1\} \cup \{y_{\alpha,s+1} y_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s\} \cup \{x_\alpha x_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s+1\} \cup \{x_\alpha x_{\alpha,\beta+1}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s-1\} \cup \{x_{\alpha s+1} x_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s\} \cup \{x_{\alpha,\beta} x_{\alpha,\beta}^\gamma; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s+1, 1 \leq \beta \leq s+1\} \cup \{x_{\alpha,\beta} x_{\alpha,\beta,\gamma+1}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s+1, 1 \leq \gamma \leq s-1\} \cup \{x_{\alpha,\beta,s} x_{\alpha,\beta}^\gamma; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s+1, 1 \leq \gamma \leq s\}$. The vertex and edge cardinality of graph are $|V(P_t \odot^2 F_s)| = t(s^2 + 4s + 4)$, $|E(P_t \odot^2 F_s)| = 3t(s^2 + 3s) + t - 1$ respectively. Thus, $\Delta(P_t \odot^2 F_s) = 2p(H_2) + 2 = 2s + 4$ and $\delta(P_t \odot^2 F_s) = 3$. We define tree cases, namely for $\chi_{1 \leq r \leq s+1}(P_t \odot^2 F_s)$, $\chi_{s+2 \leq r < \Delta}(P_t \odot^2 F_s)$, $\chi_{r \geq \Delta}(P_t \odot^2 F_s)$.

Case 1 : For 4; $1 \leq r \leq 3$

Based on Lemma 1, the lower bound for $1 \leq r \leq 3$ is $\chi_r(P_t \odot^2 F_s) \geq \delta + 1 = 3 + 1 = 4$. To find upper bound for $\chi_r(P_t \odot^2 F_s)$, we claim $c_{10} : V(P_t \odot^2 F_s) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, as follows:

$$c_{10}(x_\alpha) = \begin{cases} 1; & \alpha = 1 \pmod{2} \\ 2; & \alpha = 0 \pmod{2} \end{cases}$$

$$c_{10}(x_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 1; & \alpha = 0 \pmod{2}; \beta = 1 \pmod{2} \\ 2; & \alpha = 1 \pmod{2}; \beta = 1 \pmod{2} \\ 3; & \alpha = 0 \pmod{2}; \beta = 0 \pmod{2} \\ 4; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = s+1 \end{cases}$$

$$c_{10}(x_{\alpha,\beta}^\gamma) = \begin{cases} 1; & \alpha \text{ is odd}; 1 \leq \beta \leq s+1; \gamma \text{ is odd}; \gamma \neq s+1 \\ & \alpha \text{ is even}; 1 \leq \beta \leq s+1; \gamma \text{ is odd}; \gamma \neq s+1 \\ 2; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta \text{ is even}; \gamma \text{ is even}; \gamma \neq s+1 \\ & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = s+1; \gamma \text{ is even}; \gamma \neq s+1 \\ & \alpha \text{ is even}; \gamma \text{ is odd}; \beta \neq s+1; \gamma \text{ is odd}; \gamma \neq s+1 \\ 3; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta \text{ is odd}; \beta \neq s+1; \gamma \text{ is even}; \gamma \neq s+1 \\ & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = s+1; \gamma = s+1 \\ 4; & 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; \gamma = s+1 \end{cases}$$

$$c_{10}(y_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 1; & \alpha = 0 \pmod{2}; \beta = 1 \pmod{2} \\ 2; & \alpha = 1 \pmod{2}; \beta = 1 \pmod{2} \\ 3; & \alpha = 0 \pmod{2}; \beta = 0 \pmod{2} \\ 4; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = s+1 \end{cases}$$

Clearly, c_{10} shows the upper bound for $\chi_{1 \leq r \leq 3}(P_t \odot^2 F_s) \leq \delta + 1$. Hence, $\chi_{1 \leq r \leq 3}(P_t \odot^2 F_s) = 4$.

Case 2 : For $r + 1; 4 \leq r < 2s + 4$

Based on Lemma 1, the lower bound for $4 \leq r < 2s + 4$ is $\chi_r(P_t \odot^2 F_s) \geq r + 1$. To find upper bound for $\chi_r(P_t \odot^2 F_s)$, we claim $c_{11} : V(P_t \odot^2 F_s) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, as follows:

$$c_{11}(x_\alpha) = \begin{cases} 1; & \alpha = 1 \pmod 2 \\ 2; & \alpha = 0 \pmod 2 \end{cases}$$

$$c_{11}(x_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 1; & \alpha \text{ is even}; \beta = 1 \pmod 3; r = 4 \\ 2; & \alpha \text{ is odd}; \beta = 2 \pmod 3; r = 4 \\ 3; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 2 \pmod 3; r = 4 \\ 4; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 0 \pmod 3; r = 4 \\ 5; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = s + 1; r = 4 \\ r + j - 3; & 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s + 1; 5 \leq r \leq 2s + 3 \end{cases}$$

$$c_{11}(x_{\alpha,\beta}^\gamma) = \begin{cases} 1, 2, \dots, 2s + 4 \neq & c(x_{\alpha,\beta}) \cap cN(x_{\alpha,\beta}); 1 \leq \alpha \leq t; \\ & 1 \leq \beta \leq s; 1 \leq \gamma \leq s; \\ & 4 \leq r \leq 2s + 3 \end{cases}$$

$$c_{11}(y_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 1; & \alpha \text{ is even}; \beta = 1 \pmod 3; 4 \leq r \leq 2s + 2 \\ 2; & \alpha \text{ is odd}; \beta = 2 \pmod 3; 4 \leq r \leq 2s + 2 \\ 3; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 2 \pmod 3; 4 \leq r \leq 2s + 2 \\ 4; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 0 \pmod 3; 4 \leq r \leq 2s + 2 \\ 5; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = s + 1; 4 \leq r \leq 2s + 2 \\ \beta + 2; & 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s + 1; r = 2s + 4 \end{cases}$$

Clearly, c_{11} shows the upper bound for $\chi_{4 \leq r < 2s+4}(P_t \odot^2 F_s) \leq r + 1$. Hence, $\chi_{4 \leq r < 2s+4}(P_t \odot^2 F_s) = r + 1$.

Case 3 : For $2s + 5; r \geq 2s + 4$

Based on Lemma 1, the lower bound for $r \geq 2s + 4$ is $\chi_{r \geq \Delta} \geq 2s + 4 + 1 = 2s + 5$. To find the upper bound, we claim $c_{12} : V(P_t \odot^2 F_s) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, as follows:

$$c_{12}(x_\alpha) = \begin{cases} 1; & \alpha = 1 \\ 2; & \alpha = 2 \\ 2s + 5; & \alpha = 3 \end{cases}$$

$$c_{12}(x_{\alpha,\beta}) = \beta + 6; \quad 1 \leq \alpha \leq 3; 1 \leq \beta \leq s + 1$$

$$c_{12}(x_{\alpha,\beta}^\gamma) = \gamma + 1; \quad 1 \leq \beta \leq t; 1 \leq \beta \leq s + 1$$

$$c_{12}(y_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 2s + 4; & 1 \leq \beta \leq 3; \beta = 1 \\ \beta + 1; & 1 \leq \alpha \leq t; 2 \leq \beta \leq s + 1 \end{cases}$$

Clearly, c_{12} shows the upper bound for $\chi_{r \geq 2s+4}(P_t \odot^2 F_s) \leq 2s + 5$. Hence, $\chi_{r \geq 2s+4}(P_t \odot^2 F_s) = 2s + 5$. \square

3. Conclusion

The open problem of this research is :

Open Problem 1. Determine the lower bounds of $\chi_r(G)$ in another graph of corona order two.

Acknowledgement. We thankfully acknowledge the support from CGANT University of Jember of year 2018.

References

- [1] Ali T 2016 On r-Dynamic Chromatic Number of Graphs *Discrete Applied Mathematics* **201** 222-227.
- [2] Montgomery B 2001 Dynamic Coloring of Graphs (Ph.D Dissertation) West Virginia University
- [3] Dafik, Meganingtyas D E W, Purnomo K D, Tarmidzi M D and Agustin I H 2017 Several classes of graphs and their r-dynamic chromatic numbers *Journal of Physics: Conference Series* **855** (1) 012011.
- [4] Hanna F and Marek K 2016 Equitable Coloring of Corona Products of Cubic Graphs is Harder Than Ordinary Coloring *Ars Mathematica Contemporanea* **10** 333-347.
- [5] Kristiana A I 2017 On r-dynamic Chromatic Number of the coronation of path and several graphs *International Journal of Advanced Engineering, Research and Science* **04** 96-101.
- [6] Kristiana A I, Utoyo M I and Dafik 2018 The lower bound of the r-dynamic chromatic number of corona product by wheel graphs *AIP Conference Proceedings* **2014** 020054.
Kristiana A I and Utoyo M 2018 On the r-dynamic chromatic number of the coronation by complete graph *In Journal of Physics: Conference Series* **1008** (1) 012033).
- [7] Pathinahan T, Arokia M A and Bhuvanewari D 2014 b-Chromatic Number of Subdivision Edge and Vertex Corona *International Journal of Computing Algorithm* **03** 516-520.
- [8] Ramya N 2014 On Coloring of Corona Graphs *Indian Journal of Science and Technology* **7** 9-11.
- [9] Ross K, Tobias M and Douglas B W 2015 On r-Dynamic Coloring of Grids *Discrete Applied Mathematics* **186** 286-290.
- [10] Akbari S, Ghanbari M and Jahanbekam S 2014 On The Dynamic Coloring of Cartesian Product Graphs *Ars Combinatoria* **114** 161-167.

r-dynamic

by Brian Septory

Submission date: 02-Jan-2019 12:28PM (UTC+0700)

Submission ID: 1061127891

File name: rdynamic1.pdf (289.29K)

Word count: 4745

Character count: 15918

11

On r -dynamic chromatic number of coronation of order two of any graphs with path graph

Brian Juned Septory^{1,2*}, Dafik^{1,2*}, Arika Indah Kristiana^{1,2}, Ika Hesti Agustin^{1,3}, Dwi Agustin Retno Wardani^{1,4}

¹ CGANT University of Jember, Indonesia

² Mathematics Edu. Depart. University of Jember, Indonesia

³ Mathematics Depart. University of Jember, Indonesia

⁴ Mathematics Edu. Depart. IKIP PGRI Jember, Indonesia

* Corresponding Author

E-mail: brianseptory95@gmail.com; d.dafik@gmail.com

19

Abstract. In this study we assume every graphs be a simple, finite, nontrivial, connected and undirected graphs with vertex set $V(H)$, edge set $E(H)$ and no isolated vertex. An r -dynamic coloring of a graph H is a proper k -coloring of graph H such that the neighbors of any vertex u accept at least $\min\{r, d(u)\}$ different colors. The r -dynamic chromatic number is the minimum k such that graph H has an r -dynamic k -coloring, it is shown by $\chi_r(H)$. In this research, we interpret the r -dynamic chromatic number of graph corona of order two, denoted by $H_1 \odot^2 H_2$. The corona of two graphs H_1 and H_2 is a graph $H_1 \odot H_2$ formed from one copy of H_1 and $|V(H_1)|$ copies of H_2 where the i th vertex of H_1 is adjacent to every vertex in the i th copy of H_2 . For any integer $l \geq 2$, we establish the graph $H_1 \odot^l H_2$ recursively from $H_1 \odot H_2$ as $H_1 \odot^l H_2 = (H_1 \odot^{l-1} H_2) \odot H_2$. Graph $H_1 \odot^l H_2$ is also named as l -corona product of H_1 and H_2 . $X_r = (P_n \odot^2 H_2)$ and H_2 is path graph P_m , star graph S_m , complete graph K_m and fan graph F_m . In this study we will determine the lower bound of r -dynamic chromatic number of corona order two of graphs.

1. INTRODUCTION

Every graphs in this research is a simple, finite, nontrivial, connected and undirected graphs, with vertex set $V(H)$, edge set $E(H)$, maximum degree $\Delta(H)$ and minimum degree $\delta(H)$. Akbari [10] defined about r -dynamic coloring of graph, we imply a proper k -coloring of graph H such that the neighbors of any vertex u accept at least $\min\{r, d(u)\}$ different colors, $d(u)$ is the degree of vertex u of graph H . The r -dynamic chromatic number of graph H as $\chi_r(H)$ which is the minimum k such that graph H has an r -dynamic k -coloring. Montgomery [2] introduces this concept with observations as follows :

Observation 1. Let $\Delta(H)$ be the maximum degree of graph H . It holds $\chi_r(H) \geq \min\{\Delta(H), r\} + 1$.

Observation 2. Let $(H) = H_1 \odot^2 H_2$ be corona graph, then we have $\delta(H) = \delta(H_2) + 1$ and $\Delta(H) = \Delta(H) + 2 |V(H_2)|$, where $\Delta(H)$ is maximum degree of H and $\delta(H)$ is minimum degree of H .

Montgomery [2] found the lower bound of the r -dynamic chromatic number, $\chi_r(H) \geq \min\{\Delta(H), r\} + 1$ and he found for any tree, $\chi_r(H) = \min\{\Delta, r\} + 1$ and if $r \geq 2$ then

$\chi_r(C_n) = 5$ for $n = 5$, $\chi_r(C_n) = 3$ if $n = 3k, k \geq 1$ and $\chi_r(C_n) = 4$ for n otherwise. Ramya [8] found acyclic coloring of corona of $C_n \odot K_{1,3}, P_n \odot K_2$ and star coloring of corona $P_n \odot K_n$. Pathinathan et.al [7] studied the chromatic number of corona with subdivision vertex and edge for path and cycle graphs. Kristiana et.al conducted two studies on r-dynamic, including [5] and [6] has initiated to determine the lower bound of $\chi_r(P_n \odot H_2)$ and $\chi_r(P_n \odot H_2); H_2 \neq K_m, C_m, W_m$ and $\chi_r(H_n \odot W_m)$. Dafik et.al [3] determined the several classes of graphs and their r-dynamic chromatic numbers.

Furmanczyk [4], given two simple graphs H_1 and H_2 , the corona product of H_1 and H_2 , it is shown by $H_1 \odot H_2$, is a connected graph achieved by catcing a number of vertices $|V(H_1)|$ copy of H_2 , and forming the i^{th} of $V(H_1)$ adjacent to every vertex of the i^{th} copy of $V(H_2)$. Kang et.al [9] found the r-dynamic chromatic number of grid graph for all r, m, n . Akbari, et.al found 2-dynamic chromatic number of cartesian product of path and cycle graph. Taherkhani, et.al [1] proved upper bound of regular graph.

In this research we will continue to determine the r-dynamic chromatic number of corona order two of graphs. The corona of two graphs H_1 and H_2 is a graph $H_1 \odot H_2$ established from one copy of H_1 and $|V(H_1)|$ copies of H_2 where the i th vertex of H_1 is adjacent to every vertex in the i th copy of H_2 . For any integer $l \geq 2$, we establish the graph $H_1 \odot^l H_2$ recursively from $H_1 \odot H_2$ as $H_1 \odot^l H_2 = (H_1 \odot^{l-1} H_2) \odot H_2$. Graph $H_1 \odot^l H_2$ is also named as l -corona product of H_1 and H_2 .

Tilapia is a type of consumption fish and it lives in fresh water. This fish tends to be very easy to breed and market because it is one of the most commonly consumed fish species by the community everyday. That is why mostly people cultivate this fish in household scale or large scale or company. Tilapia fish cultivation consists of several steps that are very important to understand, namely preparation of ponds, fish seed distribution, disease prevention, and harvesting period.

Fish pond is one of the most important things to cultivate tilapia. Facilities in the form of ponds that need to be provided in the cultivation of tilapia fish depends on the maintenance system (system 1 ponds, system 2 ponds, etc.). The ponds commonly used in the cultivation of tilapia are Maintenance Pond Parent or Spawning Pond, Seed Maintenance Pond or Separating Pond, Enlargement pond and Pool or Berokan pond.

However, some tilapia farmers pay less attention about usage of the land and separation of tilapia suitable with its growth phase. So that a lot of non-effective land and tilapia seed damage. Therefore, the researcher has a solution to this problem by using the application of r-dynamic coloring in graph theory.

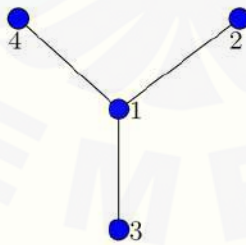


Figure 1. Application of r-Dynamic Coloring

Tilapia cultivation is applied to the r-dynamic staining on the star graph as much as n vertex depends on the available land. The vertex of a star graph has at least 4 vertices. The center vertex on the star graph is a chief tilapia pond. The vertex around is a sapling pond based on

the growth phase. The edge is a connector of the vertex of a chief tilapia pond with the vertex of the sapling pond to facilitate the removal of eggs on the pond of her saplings. Coloring in this case is the difference of the growth phase of the tilapia fish. The vertex of the sapling at least 3 vertices that are: 1) vertex 1 is the seeds maintenance pond. 2) vertex 2 is the enlargement pond. 3) vertex 3 is a pond for fish that are ready for harvest. For beginner cultivators in this case is $r = 1$ need 2 colors, that are the color of the chief of tilapia and the color of the seed maintenance pond. The next coloring depends on the development of the phase, so the pond color is needed more and more until the harvest phase.

2. MAIN RESULTS

In this research, we will learn the lower bound of r -dynamic chromatic number of $\chi_r(P_t \odot^2 P_s)$, $\chi_r(P_t \odot^2 S_s)$, $\chi_r(P_t \odot^2 K_s)$ and $\chi_r(P_t \odot^2 F_s)$

Lemma 1. Let $H = P_t \odot^2 H_2; H_2 \neq C_s$ and W_s , then:

$$\chi_r(H) \geq \begin{cases} \delta + 1; & \text{for } 1 \leq r \leq \delta \\ r + 1; & \text{for } \delta + 1 \leq r < \Delta \\ \Delta + 1, & \text{for } r \geq \Delta \end{cases}$$

Proof. Based on the defined of corona order two of graph, $V(P_t \odot^2 H_2) = V(P_t) \cup \bigcup_{\alpha=1}^t V(H_\alpha) \cup V(H_1)V(H_2)^2$ and $\Delta(P_t \odot^2 H_2) = \Delta(H_1) + 2 |V(H_2)|$. For $1 \leq r \leq \delta$, based on the observation 1 and selected $r = \delta$, we found $\chi_r(H = P_t \odot^2 H_2) \geq \min \{r, \Delta(H)\} + 1 = \min \{\delta, \Delta(P_t) + 2 |V(H_2)|\} + 1 = \delta + 1$.

For $\delta + 1 \leq r < \Delta$, respected to Observation 1 and by choosing $r_1 = \delta + 1$, we get $\chi_r(H = P_t \odot^2 H_2) \geq \min \{r, \Delta(H)\}$. Since $\delta(H_2)$ is the minimum degree of graph H_2 and $|V(H_2)|$ is the order of graph H_2 , thus $\delta(H_2) \leq |V(H_2)|$ and $\chi_r(P_t \odot^2 H_2) \geq \delta(H_2) + 1 = r + 1$. if we choose $r_2 = \delta(H_2) + 2$, we get $\chi_r(P_t \odot^2 H_2) \geq \min \{\delta(H_2) + 2, \Delta(P_t) + 2 |V(H_2)|\} + 1 = \delta(H_2) + 2 + 1 = r_2 + 1$.

For $r \geq \Delta$, $\Delta(P_t \odot^2 H_2) = \Delta(H_1) + 2 |V(H_2)|$ then $r \geq \Delta(H_1) + 2 |V(H_2)|$, based on Observation 1 and by choosing $r = \Delta(P_t) + 2 |V(H_2)|$, we found $\chi_r(H = P_t \odot^2 H_2) \min \{r, \Delta(H) = P_t \odot^2 H_2\} + 1 = \min \{\Delta, \Delta\} + 1 = \Delta + 1$. \square

Theorem 1. Let $H = P_t \odot^2 P_s; n, s \geq 3$, then:

$$\chi_r(H) = \begin{cases} 3; & \text{for } 1 \leq r \leq 2 \\ r + 1; & \text{for } 3 \leq r < 2s + 2 \\ 2s + 3, & \text{for } r \geq 2s + 2 \end{cases}$$

Proof. The Graph $P_t \odot^2 P_s$ have vertex set $V(P_t \odot^2 P_s) = \{x_\alpha; 1 \leq \alpha \leq t\} \cup \{x_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s\} \cup \{x_{\alpha,\beta,\gamma}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s, 1 \leq \gamma \leq s\} \cup \{y_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s\}$ and edge set $E(P_t \odot^2 P_s) = \{x_\alpha x_{\alpha+1}; 1 \leq \alpha \leq t-1\} \cup \{x_\alpha y_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s\} \cup \{y_{\alpha,\beta} y_{\alpha,\beta+1}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s-1\} \cup \{x_\alpha x_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s\} \cup \{x_\alpha x_{\alpha,\beta+1}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s-1\} \cup \{x_{\alpha,\beta} x_{\alpha,\beta,\gamma}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s, 1 \leq \gamma \leq s\} \cup \{x_{\alpha,\beta} x_{\alpha,\beta,\gamma+1}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s, 1 \leq \gamma \leq s-1\}$. The vertex and edge cardinality of graph are $|V(P_t \odot^2 P_s)| = t(s^2 + 2s + 1)$, $|E(P_t \odot^2 P_s)| = 2ts^2 + 3ts - t - 1$ respectively. Thus, $\Delta(P_t \odot^2 P_s) = 2p(H_2) + 2 = 2s + 2$ and $\delta(P_t \odot^2 P_s) = 2$. We define tree cases, namely for $\chi_{1 \leq r \leq 2}(P_t \odot^2 P_s)$, $\chi_{3 \leq r < 2s+2}(P_t \odot^2 P_s)$, $\chi_{r \geq 2s+2}(P_t \odot^2 P_s)$.

1 Case 1 : For 3; $1 \leq r \leq 2$

Based on Lemma 1, the lower bound for $1 \leq r \leq 2$ is $\chi_r(P_t \odot^2 P_s) \geq \delta + 1 = 2 + 1 = 3$. To find upper bound for $\chi_r(P_t \odot^2 P_s)$, we claim $c_1 : V(P_t \odot^2 P_s) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, as follows:

$$c_1(x_\alpha) = \begin{cases} 1; & \alpha \text{ is odd} \\ 2; & \alpha = 2 \end{cases}$$

$$c_1(x_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 1; & \alpha = 2; \beta \text{ is odd} \\ 2; & \alpha = 1 \pmod 2; \beta = 1 \pmod 2 \\ 3; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 0 \pmod 2 \end{cases}$$

$$c_1(x_{\alpha,\beta}^\gamma) = \begin{cases} 1; & \alpha, \beta, \gamma \text{ are odd}; 1 \leq \alpha \leq t, \beta \text{ is even}, \gamma \text{ is odd} \\ 2; & 1 \leq \alpha \leq t, \beta, \gamma \text{ are even}; \alpha \equiv 2; \beta, \gamma \text{ are odd} \\ 3; & 1 \leq \alpha \leq t, \beta \text{ is odd}, \gamma = 1 \pmod 2 \end{cases}$$

$$c_1(y_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 1; & \alpha = 2; \beta = 1 \pmod 2 \\ 2; & \alpha = 1 \pmod 2; \beta = 1 \pmod 2 \\ 3; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 0 \pmod 2 \end{cases}$$

Clearly, c_1 shows the upper bound for $\chi_{1 \leq r \leq 2}(P_t \odot^2 P_s) \leq 3$. Hence, $\chi_{1 \leq r \leq 2}(P_t \odot^2 P_s) = 3$.

Case 2 : For $r + 1; 3 \leq r < 2s + 2$

Based on Lemma 1, the lower bound for $3 \leq r < 2s + 2$ is $\chi_r(P_t \odot^2 P_s) \geq r + 1$. To find upper bound for $\chi_r(P_t \odot^2 P_s)$, we claim $c_2 : V(P_t \odot^2 P_s) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, as follows:

$$c_2(x_\alpha) = \begin{cases} 1; & \alpha \text{ is odd} \\ 2; & \alpha = 2 \end{cases}$$

$$c_2(x_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 3; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta \text{ is odd}; r = 3 \\ 4; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta \text{ is even}; r = 3 \\ (r-2) + \beta; & 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq t; 4 \leq r \leq 2s + 1 \end{cases}$$

$$c_2(x_{\alpha,\beta}^\gamma) = \begin{cases} 1, 2, \dots, 2s + 2 \neq c(x_{\alpha,\beta}) \cap cN(x_{\alpha,\beta}); \\ 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; 1 \leq \gamma \leq s; 3 \leq r \leq 2s + 1 \end{cases}$$

$$c_2(y_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 1; & \alpha \text{ is even}; \beta = 1 \pmod 3; 3 \leq r \leq 2s \\ 2; & \alpha \text{ is odd}; \beta = 1 \pmod 3; 3 \leq r \leq 2s \\ 3; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 2 \pmod 3; 3 \leq r \leq 2s + 1 \\ 4; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 0 \pmod 3; 3 \leq r \leq 2s + 1 \\ s + 2; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 1 \pmod 3; r = 2s + 1 \end{cases}$$

Clearly, c_2 shows the upper bound for $\chi_{3 \leq r < 2s+2}(P_t \odot^2 P_s) \leq r + 1$. Hence, $\chi_{3 \leq r < 2s+2}(P_t \odot^2 P_s) = r + 1$.

Case 3 : For $2s + 3; r \geq 2s + 2$

Based on Lemma 1, the lower bound for $r \geq 2s + 2$ is $\chi_r(P_t \odot^2 P_s) \geq 2s + 2 + 1 = 2s + 3$. To find the upper bound, we claim $c_3 : V(P_t \odot^2 P_s) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, as follows:

$$c_3(x_\alpha) = \begin{cases} 1; & \alpha \equiv 1 \pmod 3 \\ 2; & \alpha \equiv 2 \pmod 3 \\ 3; & \alpha \equiv 0 \pmod 3 \end{cases}$$

$$c_3(x_{\alpha,\beta}) = \beta + s + 3; 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; r = 2s + 3$$

$$c_3(x_{\alpha,\beta}^\gamma) = \begin{cases} 1, 3, 4, \dots, s + 1; & \alpha \text{ is even}; 1 \leq \beta \leq s; 1 \leq \gamma \leq s \\ 2, 3, 4, \dots, s + 1; & \alpha \text{ is odd}; 1 \leq \beta \leq s; 1 \leq \gamma \leq s \end{cases}$$

$$c_3(y_{\alpha,\beta}) = \beta + 3; 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; r = 2s + 3$$

Clearly, c_3 shows the upper bound for $\chi_{r \geq 2s+2}(P_t \odot^2 P_s) \leq 2s + 3$. Hence, $\chi_{r \geq 2s+2}(P_t \odot^2 P_s) = 2s + 3$. \square

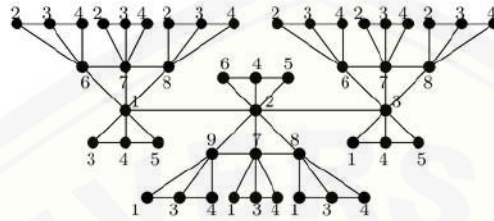


Figure 2. Example of r -Dynamic Coloring of $P_3 \odot^2 P_3$

Theorem 2. Let $H = P_t \odot^2 S_s; t, s \geq 3$, then:

$$\chi_r(H) = \begin{cases} 3; & \text{for } 1 \leq r \leq 2 \\ r + 1; & \text{for } 3 \leq r < 2s + 2 \\ 2s + 3, & \text{for } r \geq 2s + 2 \end{cases}$$

Proof. The Graph $P_t \odot^2 S_s$ have vertex set $V(P_t \odot^2 S_s) = \{x_\alpha; 1 \leq \alpha \leq t\} \cup \{x_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq 3, 1 \leq \beta \leq s\} \cup \{x_{\alpha,\beta}^\gamma; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s, 1 \leq \gamma \leq s\} \cup \{y_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s\}$, and edge set $E(P_t \odot^2 S_s) = \{x_\alpha x_{\alpha+1}; 1 \leq \alpha \leq t-1\} \cup \{x_\alpha y_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s\} \cup \{y_{\alpha,\beta} y_{\alpha,s}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s-1\} \cup \{x_\alpha x_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s\} \cup \{x_{\alpha,\beta} x_{\alpha,s}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s-1\} \cup \{x_{\alpha,\beta} x_{\alpha,\beta,\gamma}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s, 1 \leq \gamma \leq s-1\}$. The vertex and edge cardinality of graph are $|V(P_t \odot^2 S_s)| = ts^2 + 2ts + t$, $|E(P_t \odot^2 S_s)| = 2ts^2 + 3ts - t - 1$ respectively. Thus, $\Delta(P_t \odot^2 S_s) = 2p(H_2) + 2 = 2s + 2$ and $\delta(P_t \odot^2 S_s) = 2$. We define tree cases, namely for $\chi_{1 \leq r \leq 2}(P_t \odot^2 S_s)$, $\chi_{3 \leq r < 2s+2}(P_t \odot^2 S_s)$, $\chi_{r \geq 2s+2}(P_t \odot^2 S_s)$.

1 Case 1 : For 3; $1 \leq r \leq 2s + 2$

Based on Lemma 1, the lower bound for $1 \leq r \leq 2$ is $\chi_r(P_t \odot^2 S_s) \geq \delta + 1 = 2 + 1 = 3$. To find upper bound for $\chi_r(P_t \odot^2 S_s)$, we claim $c_4 : V(P_t \odot^2 S_s) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, as follows:

$$c_4(x_\alpha) = \begin{cases} 1; & \alpha \text{ is odd} \\ 2; & \alpha = 2 \end{cases}$$

$$c_4(x_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 1; & \alpha = 2; 1 \leq \beta \leq s - 1 \\ 2; & \alpha \text{ is odd}; 1 \leq \beta \leq s - 1 \\ 3; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = s \end{cases}$$

$$c_4(x_{\alpha,\beta}^\gamma) = \begin{cases} 1; & \alpha \text{ is odd}; 1 \leq \beta \leq s - 1; 1 \leq \gamma \leq s - 1; 1 \leq \alpha \leq t; \beta = s; \gamma = s \\ 2; & \alpha = 2; 1 \leq \beta \leq s; 1 \leq \gamma \leq s - 1; \alpha \text{ is odd}; 1 \leq \beta \leq s; 1 \leq \gamma \leq s - 1 \\ 3; & 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s - 1, k = s \end{cases}$$

$$c_4(y_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 1; & \alpha = 2; \beta = 1 \text{ mod } 2 \\ 2; & \alpha = 1 \text{ mod } 2; \beta = 1 \text{ mod } 2 \\ 3; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 0 \text{ mod } 2 \end{cases}$$

Clearly, c_4 shows the upper bound for $\chi_{1 \leq r \leq 2}(P_t \odot^2 S_s) \leq 3$. Hence, $\chi_{1 \leq r \leq 2}(P_t \odot^2 S_s) = 3$.

Case 2 : For $r + 1; 3 \leq r < 2s + 2$

Based on Lemma 1, the lower bound for $3 \leq r < 2s + 2$ is $\chi_r(P_t \odot^2 S_s) \geq r + 1$. To find upper bound for $\chi_r(P_t \odot^2 S_s)$, we claim $c_5 : V(P_t \odot^2 S_s) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, as follows:

$$c_5(x_\alpha) = \begin{cases} 1; & \alpha \text{ is odd} \\ 2; & \alpha = 2 \end{cases}$$

$$c_5(x_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 1; & \alpha \text{ is even}; 1 \leq \beta \leq s - 1; 3 \leq r \leq s + 1 \\ 2; & \alpha \text{ is odd}; 1 \leq \beta \leq s - 1; 3 \leq r \leq s + 1 \\ 3; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = s; 3 \leq r \leq s \\ \beta + 2; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = s; s + 1 \leq r \leq 2s + 1 \\ s + 3; & 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s - 1; r = s + 2; 1 \leq \alpha \leq t; \beta \text{ is odd}; r = s + 3 \\ s + 4; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta \text{ is even}; r = s + 3 \\ s + \beta + 2; & 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; 2s \leq r \leq 2s + 1 \end{cases}$$

$$c_5(x_{\alpha,\beta}^\gamma) = \begin{cases} 1, 2, 3, \dots, s & ; 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; 1 \leq \gamma \leq s; r = 3 \\ 1, 2, 3, \dots, s + 1 & ; 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; 1 \leq \gamma \leq s \neq c(x_{\alpha,\beta}); s \leq r \leq 2s + 1 \end{cases}$$

$$c_5(y_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 1, 2, 3, \dots, s + 1 & ; 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; 1 \leq \gamma \leq s \neq c(x_\alpha); s \leq r \leq 2s \\ 2s + 2 & ; 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; \gamma = 1; r = 2s + 1 \end{cases}$$

Clearly, c_5 shows the upper bound for $\chi_{3 \leq r < 2s + 2}(P_t \odot^2 S_s) \leq r + 1$. Hence, $\chi_{3 \leq r < 2s + 2}(P_t \odot^2 S_s) = r + 1$.

Case 3 : For $2s + 3; r \geq 2s + 2$

Based on Lemma 1, the lower bound for $r \geq 2s + 2$ is $\chi_{r \geq 2s + 2} \geq 2s + 2 + 1 = 2s + 3$. To find the upper bound, we claim $c_6 : V(P_t \odot^2 S_s) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, as follows:

$$c_6(x_\alpha) = \begin{cases} 1; & \alpha \equiv 1 \pmod{3} \\ 2; & \alpha \equiv 2 \pmod{3} \\ 2s + 3; & \alpha \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

$$c_6(x_{\alpha,\beta}) = \beta + s + 1; 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; r = 2s + 2$$

$$c_6(x_{\alpha,\beta}^\gamma) = \{ 1, 2, 3, \dots, s + 1 \} ; 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; 1 \leq \gamma \leq s; r = 2s + 2$$

$$c_6(y_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} \beta + 2; & 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s - 1; r = 2s + 2 \\ 2s + 2; & 1 \leq \alpha \leq t; j = s; r = 2s + 2 \end{cases}$$

Clearly, c_6 shows the upper bound for $\chi_{r \geq 2s + 2}(P_t \odot^2 S_s) \leq 2s + 3$. Hence, $\chi_{r \geq 2s + 2}(P_t \odot^2 S_s) = 2s + 3$. \square

Theorem 3. Let $H = P_t \odot^2 K_s; t, s \geq 3$, then:

$$\chi_r(H) = \begin{cases} s + 1; & \text{for } 1 \leq r \leq s \\ r + 1; & \text{for } s + 1 \leq r < 2s + 2 \\ 2s + 3, & \text{for } r \geq 2s + 2 \end{cases}$$

Proof. The Graph $P_t \odot^2 K_s$ have vertex set $V(P_t \odot^2 K_s) = \{x_\alpha; 1 \leq \alpha \leq t\} \cup \{x_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s\} \cup \{x_{\alpha,\beta}^\gamma; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s, 1 \leq \gamma \leq s\} \cup \{y_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s\}$. The vertex and edge cardinality of graph are $|V(P_t \odot^2 K_s)| = ts^2 + 2ts + t$, $|E(P_t \odot^2 K_s)| = 2ts^2 + 3ts + \frac{t(t-5)}{2}$ respectively. Thus, $\Delta(P_t \odot^2 K_s) = 2p(H_2) + 2 = 2s + 2$ and $\delta(P_t \odot^2 K_s) = s$. We determine tree cases, namely for $\chi_{1 \leq r \leq s}(P_t \odot^2 K_s)$, $\chi_{s+1 \leq r < 2s+2}(P_t \odot^2 K_s)$, $\chi_{r \geq 2s+2}(P_t \odot^2 K_s)$.

1 Case 1 : For $s + 1; 1 \leq r \leq s$

Based on Lemma 1, the lower bound for $1 \leq r \leq s$ is $\chi_r(P_t \odot^2 K_s) \geq \delta + 1 = s + 1$. To find upper bound for $\chi_r(P_t \odot^2 K_s)$, we claim $c_7 : V(P_t \odot^2 K_s) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, as follows:

$$c_7(x_\alpha) = \begin{cases} 1; & \alpha \text{ is odd} \\ 2; & \alpha = 2 \end{cases}$$

$$c_7(x_{\alpha,\beta}) = 1, 2, \dots, s + 1 \neq c(x_\alpha); \quad 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; 1 \leq r \leq s$$

$$c_7(x_{\alpha,\beta}^\gamma) = 1, 2, \dots, s + 1 \neq c(x_{\alpha,\beta}); \quad 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; 1 \leq \gamma \leq s; 1 \leq r \leq s$$

$$c_7(y_{\alpha,\beta}) = 1, 2, \dots, s + 1 \neq c(x_\alpha); \quad 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; 1 \leq r \leq s$$

Clearly, c_7 shows the upper bound for $\chi_{1 \leq r \leq s}(P_t \odot^2 K_s) \leq \delta + 1$. Hence, $\chi_{1 \leq r \leq s}(P_t \odot^2 K_s) = s + 1$.

Case 2 : For $r + 1; s + 1 \leq r < 2s + 2$

Based on Lemma 1, the lower bound for $s + 1 \leq r < 2s + 2$ is $\chi_r(P_t \odot^2 K_s) \geq r + 1$. To find upper bound for $\chi_r(P_t \odot^2 K_s)$, we claim $c_8 : V(P_t \odot^2 K_s) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, as follows:

$$c_8(x_\alpha) = \begin{cases} 1; & \alpha \text{ is odd} \\ 2; & \alpha \text{ is even} \end{cases}$$

$$c_8(x_{\alpha,\beta}) = r + \beta - 3; \quad 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; s + 1 \leq r \leq 2s + 1$$

$$c_8(x_{\alpha,\beta}^\gamma) = \begin{cases} 1, 2, \dots, 2s + 2 \neq c(x_{\alpha,\beta}) \cap cN(x_{\alpha,\beta}); & 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; \\ & 1 \leq \gamma \leq s; s + 1 \leq r \leq 2s + 1 \end{cases}$$

$$c_8(y_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} \beta + 1; & 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; s + 1 \leq r \leq 2s \\ \beta + 2; & 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; r = 2s + 1 \end{cases}$$

Clearly, c_8 shows the upper bound for $\chi_{s+1 \leq r < 2s+2}(P_t \odot^2 K_s) \leq r + 1$. Hence, $\chi_{s+1 \leq r < 2s+2}(P_t \odot^2 K_s) = r + 1$.

Case 3 : For $2s + 3; r \geq 2s + 2$

Based on Lemma 1, the lower bound for $r \geq 2s + 2$ is $\chi_r(P_t \odot^2 K_s) \geq 2s + 2 + 1 = 2s + 3$. To find the upper bound, we claim $c_9 : V(P_t \odot^2 K_s) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, as follows:

$$c_9(x_i) = \begin{cases} 1; & \alpha \equiv 1 \pmod{3} \\ 2; & \alpha \equiv 2 \pmod{3} \\ 3; & \alpha \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

$$c_9(x_{\alpha,\beta}) = s + \beta + 3; \quad 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; r = 2s + 2$$

$$c_9(x_{\alpha,\beta}^\gamma) = \begin{cases} 1, 2, \dots, 2s+3 \neq c(x_{\alpha,\beta}) \cap cN(x_{\alpha,\beta}); & 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; \\ & 1 \leq \gamma \leq s; r = 2s+2 \end{cases}$$

$$c_9(y_{\alpha,\beta}) = \beta + 3; \quad 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; r = 2s+2$$

Clearly, c_9 shows the upper bound for $\chi_{r \geq 2s+2}(P_t \odot^2 K_s) \leq 2s+3$. Hence, $\chi_{r \geq 2s+2}(P_t \odot^2 K_s) = 2s+3$. \square

Theorem 4. Let $H = P_t \odot^2 F_s; t, s \geq 3$, then:

$$\chi_r(H) = \begin{cases} 4; & \text{for } 1 \leq r \leq 3 \\ r+1; & \text{for } 4 \leq r < 2s+4 \\ 2s+5, & \text{for } r \geq 2s+4 \end{cases}$$

Proof. The Graph $P_t \odot^2 F_s$ have vertex set $V(P_t \odot^2 F_s) = \{x_\alpha; 1 \leq \alpha \leq t\} \cup \{x_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s+1\} \cup \{x_{\alpha,\beta}^\gamma; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s+1, 1 \leq \gamma \leq s+1\} \cup \{y_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s+1\}$ and edge set $E(P_t \odot^2 F_s) = \{x_\alpha x_{\alpha+1}; 1 \leq \alpha \leq t-1\} \cup \{x_\alpha y_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s+1\} \cup \{y_{\alpha,\beta} y_{\alpha,\beta+1}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s-1\} \cup \{y_{\alpha,s+1} y_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s\} \cup \{x_\alpha x_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s+1\} \cup \{x_\alpha x_{\alpha,\beta+1}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s-1\} \cup \{x_{\alpha s+1} x_{\alpha,\beta}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s\} \cup \{x_{\alpha,\beta} x_{\alpha,\beta}^\gamma; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s+1, 1 \leq \gamma \leq s+1\} \cup \{x_{\alpha,\beta} x_{\alpha,\beta,\gamma+1}; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s+1, 1 \leq \gamma \leq s-1\} \cup \{x_{\alpha,\beta,s} x_{\alpha,\beta}^\gamma; 1 \leq \alpha \leq t, 1 \leq \beta \leq s+1, 1 \leq \gamma \leq s\}$. The vertex and edge cardinality of graph are $|V(P_t \odot^2 F_s)| = t(s^2 + 4s + 4)$, $|E(P_t \odot^2 F_s)| = 3t(s^2 + 3s) + t - 1$ respectively. Thus, $\Delta(P_t \odot^2 F_s) = 2p(H_2) + 2 = 2s + 4$ and $\delta(P_t \odot^2 F_s) = 3$. We define tree cases, namely for $\chi_{1 \leq r \leq s+1}(P_t \odot^2 F_s)$, $\chi_{s+2 \leq r < \Delta}(P_t \odot^2 F_s)$, $\chi_{r \geq \Delta}(P_t \odot^2 F_s)$.

1 Case 1 : For 4; $1 \leq r \leq 3$

Based on Lemma 1, the lower bound for $1 \leq r \leq 3$ is $\chi_r(P_t \odot^2 F_s) \geq \delta + 1 = 3 + 1 = 4$. To find upper bound for $\chi_r(P_t \odot^2 F_s)$, we claim $c_{10} : V(P_t \odot^2 F_s) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, as follows:

$$c_{10}(x_\alpha) = \begin{cases} 1; & \alpha = 1 \pmod{2} \\ 2; & \alpha = 0 \pmod{2} \end{cases}$$

$$c_{10}(x_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 1; & \alpha = 0 \pmod{2}; \beta = 1 \pmod{2} \\ 2; & \alpha = 1 \pmod{2}; \beta = 1 \pmod{2} \\ 3; & \alpha = 0 \pmod{2}; \beta = 0 \pmod{2} \\ 4; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = s+1 \end{cases}$$

$$c_{10}(x_{\alpha,\beta}^\gamma) = \begin{cases} 1; & \alpha \text{ is odd}; 1 \leq \beta \leq s+1; \gamma \text{ is odd}; \gamma \neq s+1 \\ & \alpha \text{ is even}; 1 \leq \beta \leq s+1; \gamma \text{ is odd}; \gamma \neq s+1 \\ 2; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta \text{ is even}; \gamma \text{ is even}; \gamma \neq s+1 \\ & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = s+1; \gamma \text{ is even}; \gamma \neq s+1 \\ & \alpha \text{ is even}; \gamma \text{ is odd}; \beta \neq s+1; \gamma \text{ is odd}; \gamma \neq s+1 \\ 3; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta \text{ is odd}; \beta \neq s+1; \gamma \text{ is even}; \gamma \neq s+1 \\ & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = s+1; \gamma = s+1 \\ 4; & 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s; \gamma = s+1 \end{cases}$$

$$c_{10}(y_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 1; & \alpha = 0 \pmod{2}; \beta = 1 \pmod{2} \\ 2; & \alpha = 1 \pmod{2}; \beta = 1 \pmod{2} \\ 3; & \alpha = 0 \pmod{2}; \beta = 0 \pmod{2} \\ 4; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = s+1 \end{cases}$$

Clearly, c_{10} shows the upper bound for $\chi_{1 \leq r \leq 3}(P_t \odot^2 F_s) \leq \delta + 1$. Hence, $\chi_{1 \leq r \leq 3}(P_t \odot^2 F_s) = 4$.

1 Case 2 : For $r + 1$; $4 \leq r < 2s + 4$

Based on Lemma 1, the lower bound for $4 \leq r < 2s + 4$ is $\chi_r(P_t \odot^2 F_s) \geq r + 1$. To find upper bound for $\chi_r(P_t \odot^2 F_s)$, we claim $c_{11} : V(P_t \odot^2 F_s) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, as follows:

$$c_{11}(x_\alpha) = \begin{cases} 1; & \alpha = 1 \pmod 2 \\ 2; & \alpha = 0 \pmod 2 \end{cases}$$

$$c_{11}(x_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 1; & \alpha \text{ is even}; \beta = 1 \pmod 3; r = 4 \\ 2; & \alpha \text{ is odd}; \beta = 2 \pmod 3; r = 4 \\ 3; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 2 \pmod 3; r = 4 \\ 4; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 0 \pmod 3; r = 4 \\ 5; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = s + 1; r = 4 \\ r + j - 3; & 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s + 1; 5 \leq r \leq 2s + 3 \end{cases}$$

$$c_{11}(x_{\alpha,\beta}^\gamma) = \begin{cases} 1, 2, \dots, 2s + 4 \neq & c(x_{\alpha,\beta}) \cap cN(x_{\alpha,\beta}); 1 \leq \alpha \leq t; \\ & 1 \leq \beta \leq s; 1 \leq \gamma \leq s; \\ & 4 \leq r \leq 2s + 3 \end{cases}$$

$$c_{11}(y_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 1; & \alpha \text{ is even}; \beta = 1 \pmod 3; 4 \leq r \leq 2s + 2 \\ 2; & \alpha \text{ is odd}; \beta = 2 \pmod 3; 4 \leq r \leq 2s + 2 \\ 3; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 2 \pmod 3; 4 \leq r \leq 2s + 2 \\ 4; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = 0 \pmod 3; 4 \leq r \leq 2s + 2 \\ 5; & 1 \leq \alpha \leq t; \beta = s + 1; 4 \leq r \leq 2s + 2 \\ \beta + 2; & 1 \leq \alpha \leq t; 1 \leq \beta \leq s + 1; r = 2s + 4 \end{cases}$$

Clearly, c_{11} shows the upper bound for $\chi_{4 \leq r < 2s + 4}(P_t \odot^2 F_s) \leq r + 1$. Hence, $\chi_{4 \leq r < 2s + 4}(P_t \odot^2 F_s) = r + 1$.

Case 3 : For $2s + 5$; $r \geq 2s + 4$

Based on Lemma 1, the lower bound for $r \geq 2s + 4$ is $\chi_{r \geq \Delta} \geq 2s + 4 + 1 = 2s + 5$. To find the upper bound, we claim $c_{12} : V(P_t \odot^2 F_s) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, as follows:

$$c_{12}(x_\alpha) = \begin{cases} 1; & \alpha = 1 \\ 2; & \alpha = 2 \\ 2s + 5; & \alpha = 3 \end{cases}$$

$$c_{12}(x_{\alpha,\beta}) = \beta + 6; \quad 1 \leq \alpha \leq 3; 1 \leq \beta \leq s + 1$$

$$c_{12}(x_{\alpha,\beta}^\gamma) = \gamma + 1; \quad 1 \leq \beta \leq t; 1 \leq \beta \leq s + 1$$

$$c_{12}(y_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 2s + 4; & 1 \leq \beta \leq 3; \beta = 1 \\ \beta + 1; & 1 \leq \alpha \leq t; 2 \leq \beta \leq s + 1 \end{cases}$$

Clearly, c_{12} shows the upper bound for $\chi_{r \geq 2s + 4}(P_t \odot^2 F_s) \leq 2s + 5$. Hence, $\chi_{r \geq 2s + 4}(P_t \odot^2 F_s) = 2s + 5$. \square

3. CONCLUDING REMARKS

The open problem of this research is :

Open Problem 1. Determine the lower bounds of $\chi_r(G)$ in another graph of corona order two.

Acknowledgement. We thankfully acknowledge the support from CGANT University of Jember of year 2018.

References

- [1] Ali Taherkhani 2016 On r-Dynamic Chromatic Number of Graphs *Discrete Applied Mathematics* Vol. 201 pp.222-227.
- [2] B. Montgomery 2001 Dynamic Coloring of Graphs (Ph.D Dissertation), West Virginia University
- [3] Dafik, Meganingtyas D E W, Purnomo K D, Tarmidzi M D, Agustin I H. 2017 Several classes of graphs and their r-dynamic chromatic numbers *Journal of Physics: Conference Series* Vol. 855, No. 1, p. 012011.
- [4] Hanna Furmanczyk, Marek Kubale 2016 Equitable Coloring of Corona Products of Cubic Graphs is Harder Than Ordinary Coloring, *Ars Mathematica Contemporanea* Vol. 10 pp.333-347.
- [5] Kristiana A I 2017 On r-dynamic Chromatic Number of the coronation of path and several graphs, *International Journal of Advanced Engineering, Research and Science* Vol. 04 pp.96-101.
- [6] Kristiana A. I., Utoyo, M I, Dafik. 2018 The lower bound of the r-dynamic chromatic number of corona product by wheel graphs *AIP Conference Proceedings* Vol. 2014, pp.020054.
- [7] Kristiana, A. I., Utoyo, M. I. (2018, April). On the r-dynamic chromatic number of the coronation by complete graph. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1008, No. 1, p. 012033). IOP Publishing.
- [7] Pathinahan T, Arokia Mary A and Bhuvanawari D 2014 b-Chromatic Number of Subdivision Edge and Vertex Corona, *International Journal of Computing Algorithm* Vol. 03 pp.516-520.
- [8] Ramya N 2014 On Coloring of Corona Graphs, *Indian Journal of Science and Technology* Vol. 7 pp.9-11.
- [9] Ross Kang, Tobias Muller, Douglas B. West 2015 On r-Dynamic Coloring of Grids, *Discrete Applied Mathematics* Vol. 186 pp.286-290.
- [10] S. Akbari, M. Ghanbari, S. Jahanbekam 2014 On The Dynamic Coloring of Cartesian Product Graphs, *Ars Combinatoria* Vol. 114 pp.161-167.

ORIGINALITY REPORT

23%

SIMILARITY INDEX

12%

INTERNET SOURCES

19%

PUBLICATIONS

5%

STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

1	Arika Indah Kristiana, M. Imam Utoyo, Dafik. "The lower bound of the r-dynamic chromatic number of corona product by wheel graphs", AIP Publishing, 2018 Publication	4%
2	se.wtb.tue.nl Internet Source	2%
3	ijaers.com Internet Source	2%
4	china.iopscience.iop.org Internet Source	2%
5	Submitted to Higher Education Commission Pakistan Student Paper	1%
6	etd.lib.metu.edu.tr Internet Source	1%
7	www.math.uzh.ch Internet Source	1%

8	Agustin, Elsa Yuli Kurniawati. "On locating independent domination number of amalgamation graphs", Journal of Physics: Conference Series, 2017 Publication	1%
9	Submitted to Universitas Jember Student Paper	1%
10	Mazorchuk, V.. "Cuspidal sl"n-modules and deformations of certain Brauer tree algebras", Advances in Mathematics, 20111001 Publication	1%
11	Arika Indah Kristiana, M. Imam Utoyo, Dafik. "On the r-dynamic chromatic number of the coronation by complete graph", Journal of Physics: Conference Series, 2018 Publication	1%
12	Perturbation theory for linear operators, 1966. Publication	<1%
13	HONG, HARRISON, JEREMY C. STEIN, and JIALIN YU. "Simple Forecasts and Paradigm Shifts", The Journal of Finance, 2007. Publication	<1%
14	math.usask.ca Internet Source	<1%
15	A. Bremner. "Some Quartic Curves with no Points in any Cubic Field", Proceedings of the	<1%

16

www.i-scholar.in

Internet Source

<1%

17

www-bcf.usc.edu

Internet Source

<1%

18

Dafik, Ika Hesti Agustin, Ermita Rizki Albirri, Ridho Alfarisi, R. M. Prihandini. "Locating domination number of m-shadowing of graphs", Journal of Physics: Conference Series, 2018

Publication

<1%

19

Slamin, Dafik, Gembong Angger Waspodo. "Distance Domination Number of Graphs Resulting from Edge Comb Product", Journal of Physics: Conference Series, 2018

Publication

<1%

20

Submitted to University of Oxford

Student Paper

<1%

21

Jian-Xing Xu, Mu-Yi Chen, Zhan-Jiang Zheng, Jian Cao, Zheng Xu, Yu-Ming Cui, Li-Wen Xu. "Platinum-Catalyzed Multicomponent Alcoholysis/Hydrosilylation and Bis-hydrosilylation of Alkynes with Dihydrosilanes", ChemCatChem, 2017

Publication

<1%

22 Jens Perch Nielsen. "Variable bandwidth kernel hazard estimators", Journal of Nonparametric Statistics, 2003 $<1\%$
Publication

23 Hanna Furmańczyk, J. Vernold Vivin, N. Mohanapriya. "r-Dynamic Chromatic Number of Some Line Graphs", Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2018 $<1\%$
Publication

24 Varaporn Saenpholphat. "Conditional resolvability in graphs: a survey", International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2004 $<1\%$
Publication

25 epubs.siam.org $<1\%$
Internet Source

26 Shen, H.. "Embeddings of Resolvable Triple Systems", Journal of Combinatorial Theory, Series A, 200001 $<1\%$
Publication

27 Michael D. Hirschhorn. "The Power of q", Springer Nature, 2017 $<1\%$
Publication

28 Alan Stulman. "Excess Inventory with Stochastic Demand: Continuous Reporting Model", Journal of the Operational Research $<1\%$

29 V. W. COULING C. GRAHAM. "Second Kerr effect virial coefficients of polar molecules with linear and lower symmetry", *Molecular Physics*, 2010 $<1\%$
Publication

30 I. V. Smazhenko. "Weighted Moduli of Smoothness and Sign-Preserving Approximation", *Ukrainian Mathematical Journal*, 03/2005 $<1\%$
Publication

31 www.pld.ttu.ee $<1\%$
Internet Source

32 www.njleg.state.nj.us $<1\%$
Internet Source

33 Zhi-Hong Sun. "Cubic residues and binary quadratic forms", *Journal of Number Theory*, 2007 $<1\%$
Publication

34 Tuntsov, A. V., and G. F. Lewis. "Microlensing in phase space - II. Correlations analysis", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2006. $<1\%$
Publication

35 LONC, ZBIGNIEW, and MIROSLAW

TRUSZCZYNSKI. "Computing minimal models, stable models and answer sets", Theory and Practice of Logic Programming, 2006.

Publication

<1%

36

Leviatan, D.. "Some Positive Results and Counterexamples in Comonotone Approximation, II", Journal of Approximation Theory, 199909

Publication

<1%

37

R. Adawiyah, I. H. Agustin, Dafik, Slamin, E. R. Albirri. "Related Wheel Graphs and Its Locating Edge Domination Number", Journal of Physics: Conference Series, 2018

Publication

<1%

38

R. Adawiyah, Dafik, I. H. Agustin, A. I. Kristiana, R. Alfarisi. "Some unicyclic graphs and its vertex coloring edge-weighting", AIP Publishing, 2018

Publication

<1%

39

Kennedy Adinbo Aganah, Olorunfemi Ojo. "Generalized Carrier-Based PWM Method for a 12-Switch Converter", Open Engineering, 2016

Publication

<1%



GRADEMARK REPORT

FINAL GRADE

/0

GENERAL COMMENTS

Instructor

PAGE 1

PAGE 2

PAGE 3

PAGE 4

PAGE 5

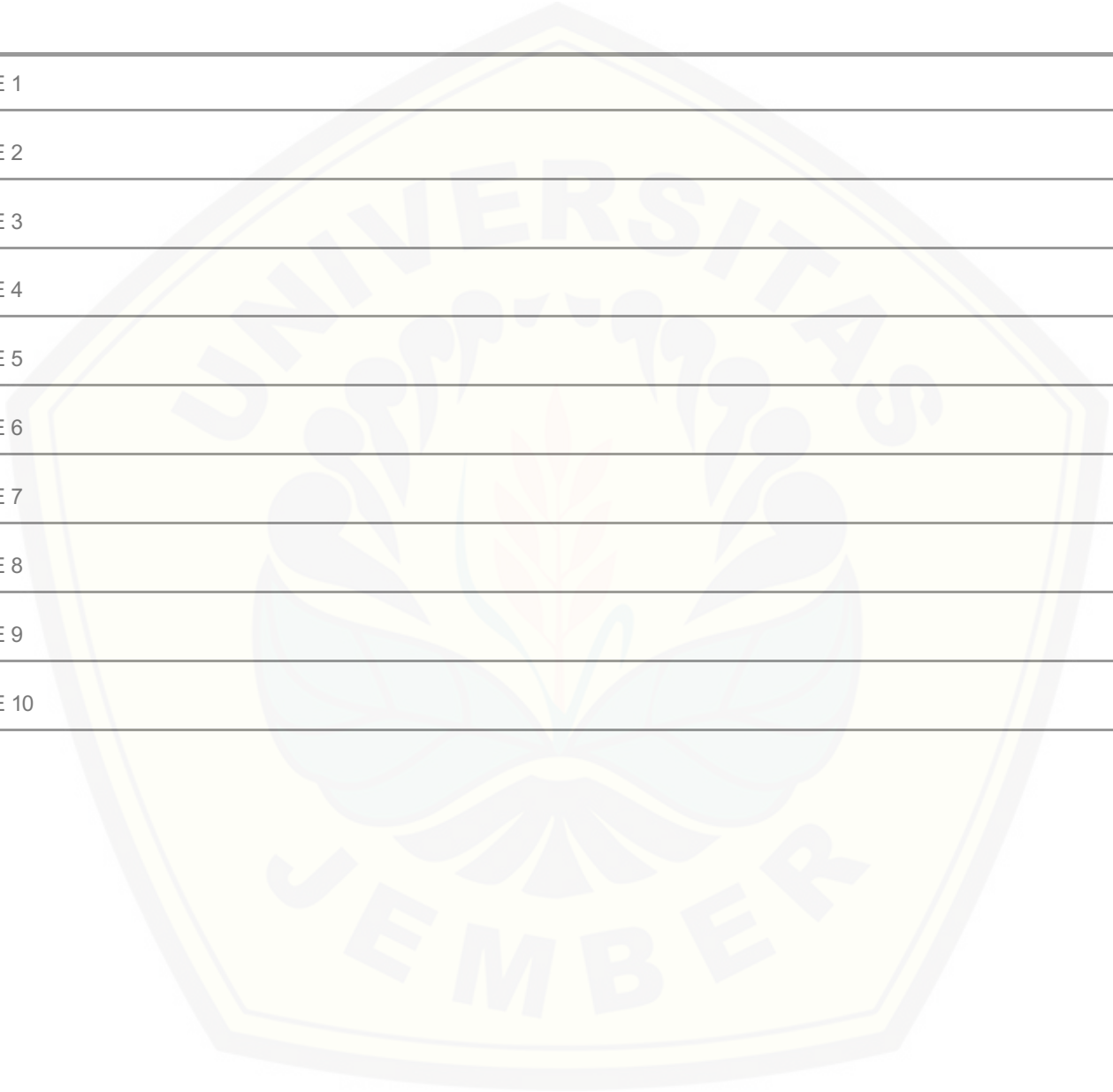
PAGE 6

PAGE 7

PAGE 8

PAGE 9

PAGE 10



The analysis of students combinatorial thinking skills in solving *r*-dynamic vertex coloring under the implementation of problem based learning

B J Septory¹², Dafik¹², I M Tirta¹³

¹CEREBEL University of Jember, Indonesia

² Mathematics Edu. Depart. University of Jember, Indonesia

³ Mathematics Depart. University of Jember, Indonesia

Email: brianseptory95@gmail.com

Abstract. Learning implementation is expected to maximize the students' combinatorial thinking skill. This research was intended to examine the students' combinatorial thinking skill and the implementation of problem based learning to improve the students' combinatorial thinking skill in solving the problem of *r*-dynamic vertex coloring. The method used was the mixed-methods that combined quantitative and qualitative research. This research involved 86 participants that were divided into two classes; experimental and control classes. There were 42 students in the control class and 44 students in the experimental class. This study showed that there was a significant difference showed by the value of independent t-test for post-test. The data analysis showed the independent sample t-test value of post-test was $0.000 \leq 0.05$, so it was significant. Thus, there was an influence on the implementation of problem based learning on improving the students' combinatorial thinking skill in solving *r*-dynamic vertex coloring problem.

1. Introduction

This research aimed at examining the students' combinatorial thinking skill and the implementation of problem based learning to improve the students' combinatorial thinking skill in solving *r*-dynamic vertex coloring problem.

Combinatorial thinking is a tool to solve the problem when he did the experiment with the students to do geometry tasks. He found that the students must use their combinatorial thinking and find the systematic to assure that all of the possibilities have been discussed. In his view, combinatorial thinking is a special aspect of mathematical thinking [5].

There are five factors that influence the combinatorial thinking skill, in which each indicator has several different sub-indicators. The indicators and sub-indicators of combinatorial thinking are shown in the table 1.

Table 1. Indicators that Influence the Combinatorial Thinking Skill

Indicator	Sub- Indicator
Identifying several cases	a. Identifying properties/characteristics of problems b. Implementing several cases
Recognizing the pattern of all cases	a. Identifying the pattern of problem solving b. Expanding the pattern of problem solving obtained

Generalizing all cases	<ul style="list-style-type: none"> a. Implementing mathematical symbolization b. Calculating the cardinality c. Developing algorithm
Proving mathematically	<ul style="list-style-type: none"> a. Conducting argumentation calculation b. Testing algorithm c. Developing the seed d. Testing the seed e. Implementing inductive, deductive, and qualitative evidences
Considering other combinatorial problems	<ul style="list-style-type: none"> a. Conducting an interpretation b. Proposing open-questions c. Recognizing new combinatorial problems d. Finding the potential application

Problem Based Learning (PBL) is learning and teaching strategy that promotes the active learning by giving the process control to the students. It involves the use of unstructured open-questions to gain the learning activity [3]. PBL is a constructivism problem learning model that helps the students to think and solve the problem. Ben and Erickson emphasize that Problem Based Learning is a learning strategy that involves the students in solving the problem and integrating various concepts and skills from various science disciplines. This strategy includes collecting and uniting information and presenting the invention. Problem Based Learning (PBL) has been adopted broadly in various subjects and contexts of education to promote critical thinking and problem solving in the authentic learning situation [4].

The implementation of learning by using learning tool that is accordance with the Problem Based Learning can be used to see the students' combinatorial thinking skill as it has been presented in the portrait phase based on the indicators of the combinatorial thinking skill. Based on the explanation above, the researcher needs to conduct a further research. Therefore, the researcher conducts a research with a tittle *The Analysis of the Students' Combinatorial thinking skill in Solving R-Dynamic Vertex Coloring* under the Implementation of Problem Based Learning.

Definition 1. If $G = (V, E)$ is a simple Graph, connected and undirected graph with the vertices set V and the edge of set E and $d(v)$ to degree for each $v \in V(G)$. The maximum and minimum degrees G is symbolized as $\Delta(G)$ and $\delta(G)$ [1]. With k color on the G graph, we map $c : V(G) \Rightarrow S$, in which $|S| = k$ so that every two closed vertices have different colors. A r -dynamic with k color on the graph G , therefore $|c(N(v))| \geq \min\{r, d(v)\}$ to each vertex v in $V(G)$ in which $N(v)$ is the environment v and $c(S) = \{c(v) : v \in S\}$ for each part of S [8]. The chromatic r -dynamic is written as $\chi_r(G)$ is a minimum value of k and graph G has r -dynamic with k color.

The k coloring vertex can be said as dynamic vertex coloring if for each vertex $v \in V(G)$ with $d(v) \geq 2$. The neighboring vertex have two different colors. The number of r -dynamic of the

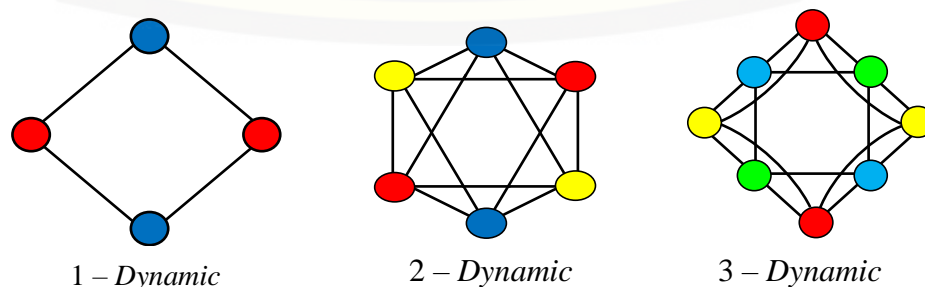


Figure 1. example 1,2,3 r -Dynamic Vertex Coloring

graph G is notated as $\chi_r(G)$ is the minimum color k on the G graph. The number of color 1-Dynamic on the Graph G is the color introduced as Chromatic Number and is notated as $\chi_d(G)$ and for the number of Dynamic ≥ 2 on the graph G is the introduced color as *r-Dynamic Chromatic Number* [2].

2. Research Methods

The method used in this research was a mixed method which combines the qualitative and quantitative research methods. The design used was Sequential explanatory: Quantitative data was collected first, followed by qualitative data that explained the findings from quantitative data (e.g., after assessing pragmatic competence at group-level, following up on several participants to gain understanding about their characteristics) [7] and [6,9,10] also applied this model to their research. Quantitative research analyzed the students learning outcomes after the application of problem-based learning method. Then qualitative research aimed to analyze the data from observations and interviews of selected students. This research investigated two variables, namely the implementation of problem based learning as an independent variable and students' learning outcomes from solving the problem of the *r-dynamic vertex coloring* as the dependent variable.

To understand deeply about the effectiveness of Problem based learning, we continued the research by sharing observations with all students of the experimental class and selecting several students to be interviewed about their understanding process in finding a new pattern of *r-dynamic vertex coloring*.

The experimental design of this research was to compile two class groups, namely the experimental class and the control class, which were selected by purposive random sampling and examined by pre-test and post-test using the following design.

A	O	X	O
A	O	C	O

Information:

- A : Random sampling
- X : Treatment given (Independent Variable)
- C : Control of treatment
- O : Pre-test / Post-test (Dependent Variables observed)

In this design, there were two groups of classes in which each chosen randomly. Before the research was conducted, the two groups were given pre-test to find out their initial situation. During the research, the first class was treated (X) and the second group was not treated (C), the treated group was called as the experimental group and the untreated group was called a control group.

Then, at the end of the research, the two groups were given a post-test to see how the results were. This design was used to see the effect of the treatment (independent variable) on changes/improvements in the dependent variable that was being observed.

Population

This research was done to Mathematics Education students at the University of Jember in the odd semester of the 2018/2019 academic year. The sampling technique used was random sampling by randomly selecting two classes, the first class was the experimental class with the implementation of problem-based learning which was consisted of 44 students, and the second class was class control with the application of conventional learning that consisted of 42 students.

Instrument

The instruments used in this research were tests, observation, and interview. The figure below showed the combination of the research methods with research procedures consisting of three stages according to the stages in the research design, namely: preliminary study (qualitative research), analysis of combinatorial thinking skill and the application of problem-based learning (quantitative research), portrait phase (research qualitative). Explanation of research procedures was illustrated in the chart as follows.

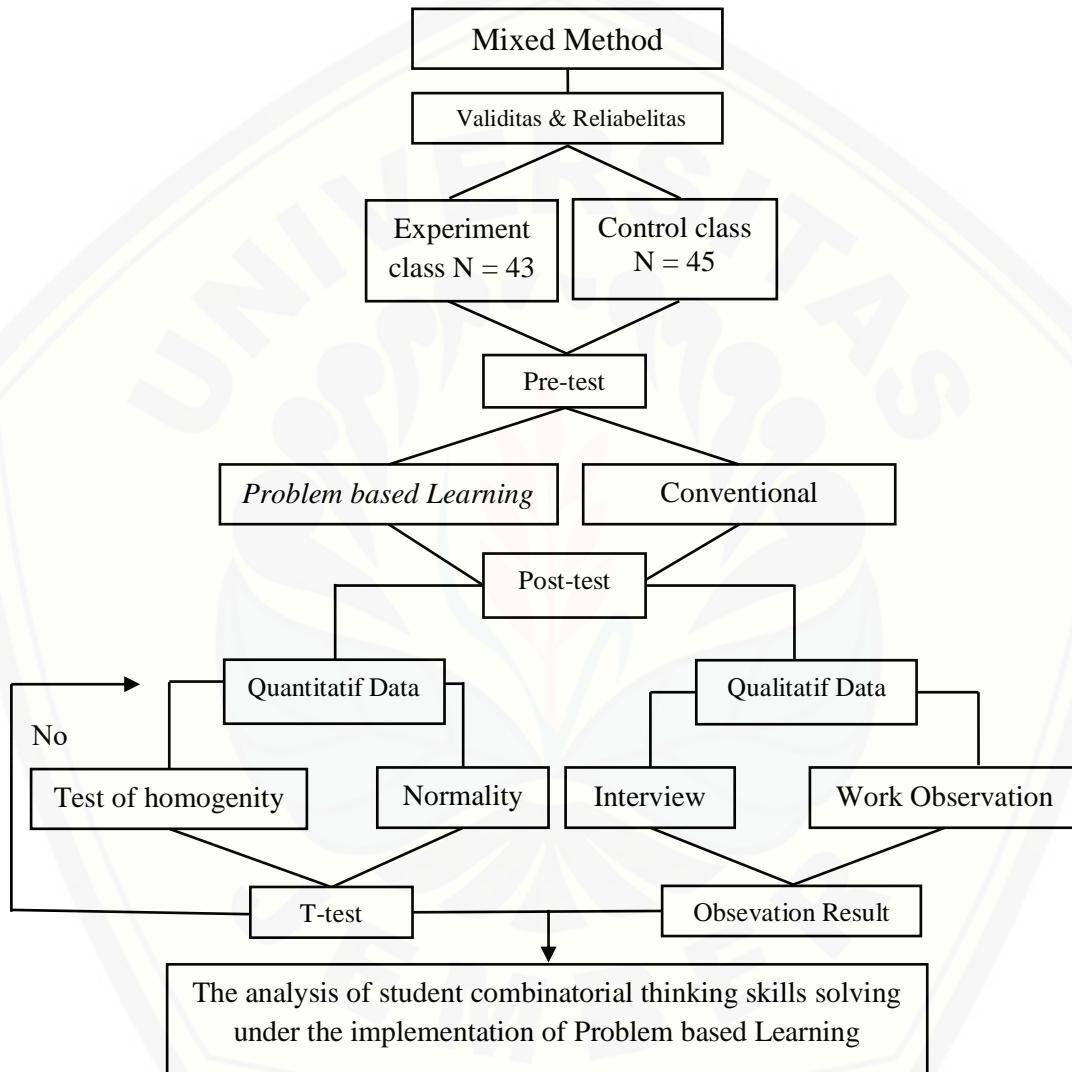


Figure 2. The Model of Mixed Method

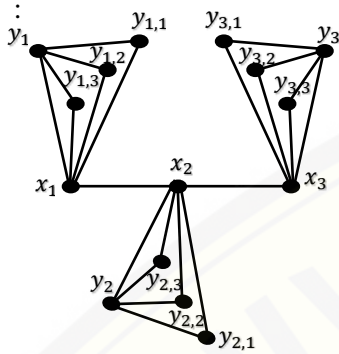
Task

Students' combinatorial thinking skill were measured based on the indicators that had been converted into test instrument. One of the test instruments used was to discuss dynamic vertex coloring in $P_3 \odot S_4$ graph which consisted of dynamic vertex coloring.

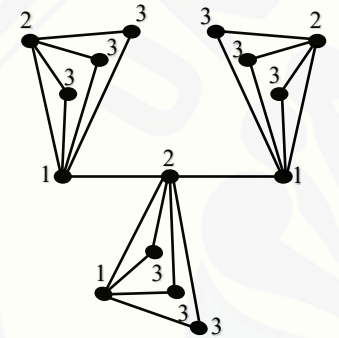
A k vertex coloring is said to be dynamic vertex coloring if for each vertex $v \in V(G)$ with $d(v) \geq 2$. The neighboring vertex have two different colors. A dynamic r with k color on graph G so that $|c(N(v))| \geq \min\{r, d(v)\}$ for each vertex v in $V(G)$ where $N(v)$ is environment v and $c(S) = \{c(v): v \in S\}$ for each part of S . The dynamic r -chromatic number written with $\chi_r(G)$

was the minimum value of k so that graph G had dynamic r with k -color. The graph used was a corona operating graph symbolized by \odot , the forming graph was a path graph with $n = 3$ which was operated with a star graph with $m = 4$, so the graph used was $P_3 \odot S_4$.

The following was the r -dynamic vertex coloring on $P_3 \odot S_4$:



The following figure was the giving of vertex notation to the graph $P_3 \odot S_4$

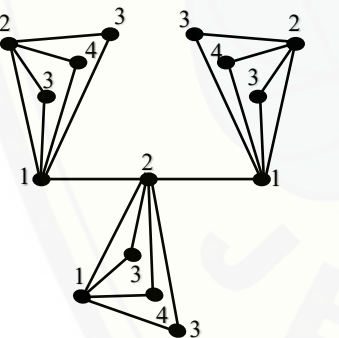


The following figure was the coloring for $r = 1$ and $r = 2$.

$$|c(N(x_1))| \geq \min\{r, d(x_1)\}$$

$$2 \geq \{1, 2\}$$

The following was the notation for coloring at vertex x_1 , then notation given at all vertex. On the figure beside, each vertex had a maximum of 2 neighbor colors so that the figure met the requirements of $r = 1$ and $r = 2$.

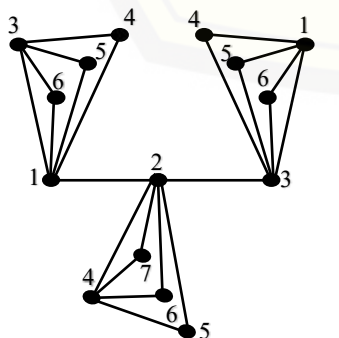


The following figure was the coloring for $r = 3$

$$|c(N(x_1))| \geq \min\{r, d(x_1)\}$$

$$3 \geq \{3, 3\}$$

On the figure beside, each vertex had a maximum of 3 neighbor colors so that the figure met the requirement of $r = 3$. r increased, so that the given color also increased. Coloration was given until it reached $\Delta(G)+1$.



The following figure was the coloring for $r = k$

$$|c(N(x_2))| \geq \min\{r, d(x_2)\}$$

$$6 \geq \{6, 6\}$$

On the figure beside, each vertex had a maximum of 6 neighbor colors so that the figure met the requirement of $r = k$.

Figure 3. Example of r -dynamic vertex coloring from $\text{Grat } P_3 \odot S_4$

The purpose of this task was to provide a r -dynamic vertex coloring that was different from the previous pattern and gave a different color to the vertex such that each vertex had a different color.

3. Research Finding

The Result of Data Analysis

This research was conducted at the experimental and control classes by using two qualitative methods in order to know the students skill of combinatorial thinking. The implementation of the research was done after conducting validity and reliability tests for the instruments. After that, the experimental and control classes were given pre-test to know their initial combinatorial thinking skill.

After conducting pre-test in the control and experimental classes, the learning by implementing Problem based learning model held in the experimental class while the usual learning held in the control class where the data that would be analyzed by using spss obtained. The following was the result of the analysis by using spss application.

Before showing our result, we needed to conduct reliability and validity tests for the instruments of our post-test.

Table 2. The test result of the validity question Correlations

		No_1	No_2	No_3	No_4	Total
No_1	Pearson Correlation	1	.127	.062	.151	.440**
	Sig. (2-tailed)		.412	.690	.329	.003
	N	44	44	44	44	44
No_2	Pearson Correlation	.127	1	.227	.063	.510**
	Sig. (2-tailed)	.412		.138	.686	.000
	N	44	44	44	44	44
No_3	Pearson Correlation	.062	.227	1	.316*	.825**
	Sig. (2-tailed)	.690	.138		.036	.000
	N	44	44	44	44	44
No_4	Pearson Correlation	.151	.063	.316*	1	.578**
	Sig. (2-tailed)	.329	.686	.036		.000
	N	44	44	44	44	44
Total	Pearson Correlation	.440**	.510**	.825**	.578**	1
	Sig. (2-tailed)	.003	.000	.000	.000	
	N	44	44	44	44	44

** . Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

* . Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).

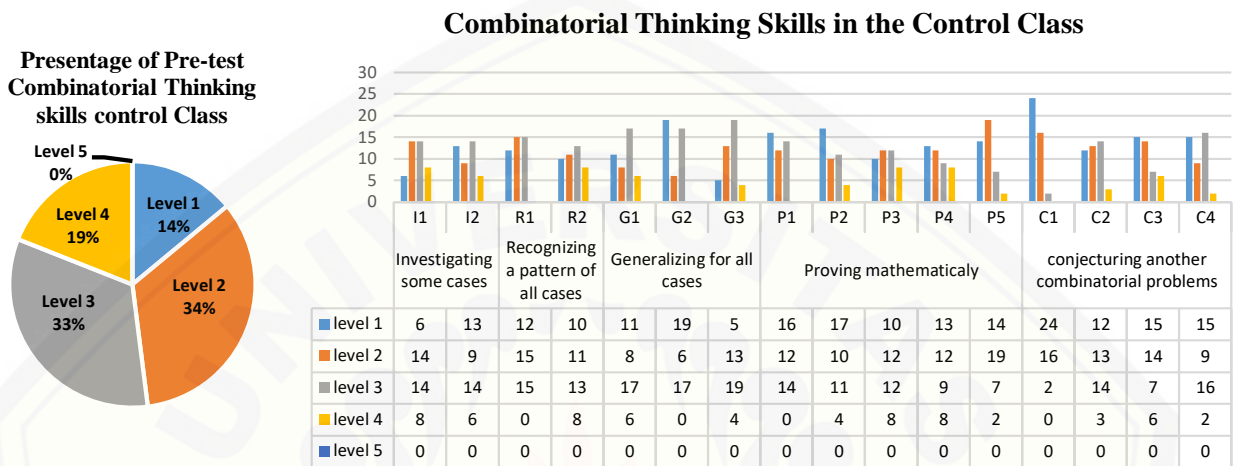
The following table showed the reliability and validity of the result. Based on the table, it could be seen that the value of r_{count} from number 1 was 0.440, number 2 was 0.510, number 3 was 0.825, and number 4 was 0.578. All items resulted the value of $r_{\text{count}} > r_{\text{table}}$ with $N=44$, therefore all items were valid.

Table 3. The test result of the realibility question

Reliability Statistics	
Cronbach's Alpha	N of items
.405	4

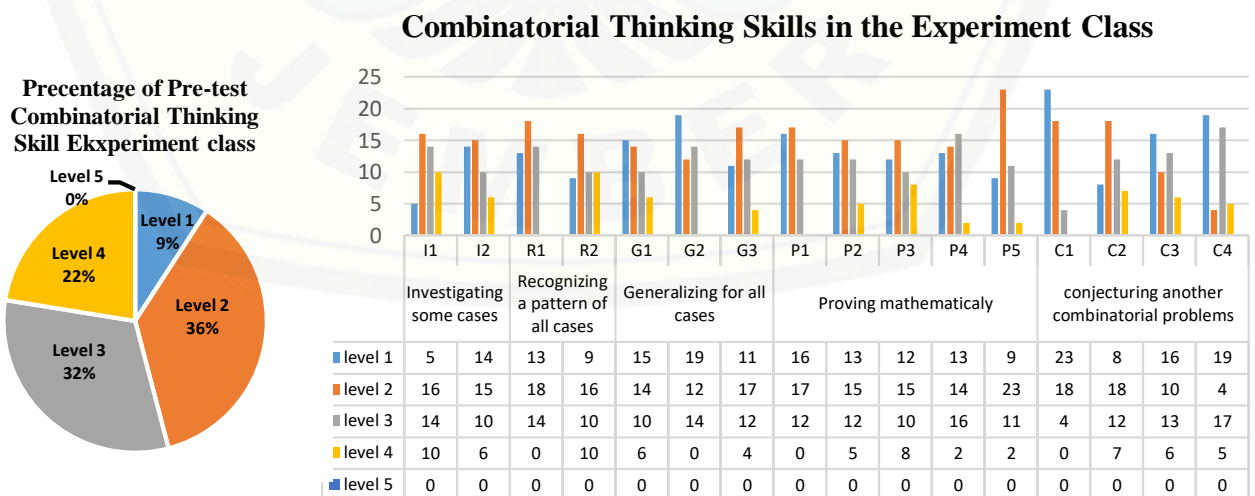
Based on the table, it could be seen that the overall values of reliability were 0.405 and $r(\text{table})$ form the significance level of 5% with $dk=N-1=43$, $r(\text{table})= 0.400$. Thus, $r_{\text{count}} > r_{\text{table}}$. This concluded that the instruments item were reliable.

Chart 1. The Distribution of Pre-test of student Combinatorial Thinking Skill in the Control Class



The initial research was done to 42 students in the control class to know the level of their combinatorial thinking. 42 subjects were tested by using pre-test (chart 1), in the experimental class it was found that 14% students were in the category of level 1 in combinatorial thinking, 34% students were in the category of level 2, 33% students were in the category of level 3, 19% students were in the category of level 4 and there was no student reached the category of level 5 in combinatorial thinking

Chart 2. The distribution of Pre-test of student Combinatorial thinking skill in the experiment class.



The research was done to 44 students in the experimental class to know the level of their combinatorial thinking. 44 subjects were tested by using pre-test (chart 2), in the experimental

class it was found that 9% students were in the category of level 1 in combinatorial thinking, 36% students were in the category of level 2, 32% students were in the category of level 3, 22% students were in the category of level 4, and there was no students in the category of level 5.

The data analysis used quantitative method to find out the different of the variance of problem-based learning outcomes. The data analysis was done by using SPSS application with the learning result data of pre-test.

Table 4. Independent sample pre-tes

Test of homogeneity of variance				
	Levene statistic	df1	df2	Sig.
Based on mean	1.537	9	27	.186

Homogeneity test was done to determine whether the variance of the data from the analyzed samples was homogeneous or not. Based on table 4, homogeneity test obtained the result of sig. 0.186. This would be significant if it was higher than 0.05 (based on the mean = $0.186 > 0.05$), therefore, the variance of the data was homogenous.

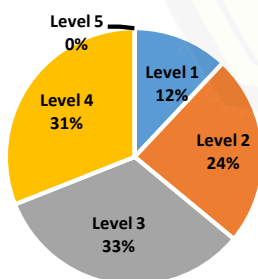
Tabel 5. Independent sampel t-tes pre-test

Independent Samples Test						
Class	N	Mean	SD	t	df	Sig(2-tailed)
Experiment	42	35.98	3.530	1.606	84	.112
Control	44	34.68	3.922	1.610	83.718	.111

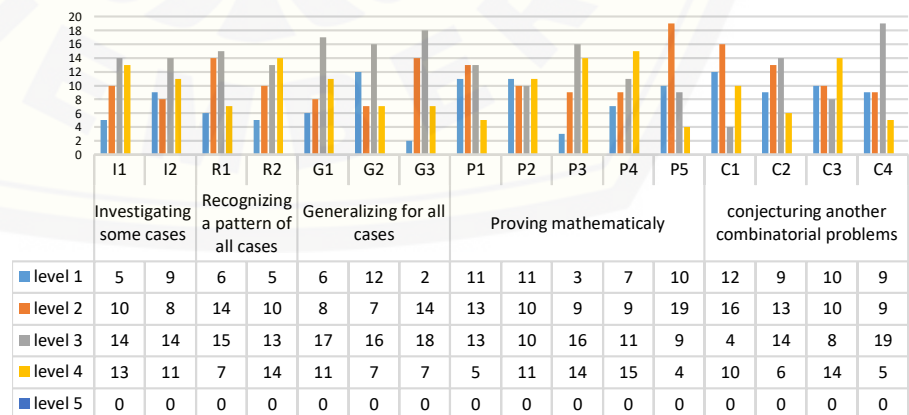
The data about pre-test in the experimental and control classes had found that the variance was homogeneous. Then, independent sample t test was conducted significantly if the value of sig. was higher than 0.05. The value of Sig. (2-tailed) based on the mean= $0.112 > 0.05$). H_0 was accepted, there was no different within the pre-test mean score from the control and experimental classes.

Chart 3. The distribution of Post-test of student Combinatorial thinking skill in the Control class

Presentage of Post-test Combinatorial Thinking Skills Control Class



Combinatorial Thinking Skills in the Control Class

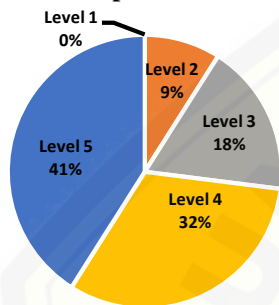


The research was continued by conducting learning used conventional learning model followed by post-test. The research was done to 42 students in the control class to know their combinatorial thinking level after the learning. 42 subjects were tested by using post-test (Chart

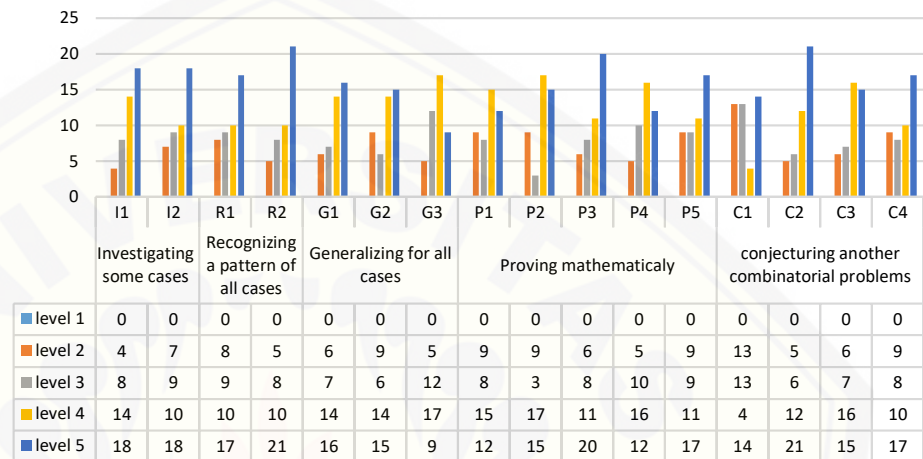
3), in the control class it was found that 12% students were on the category of level 1 in combinatorial thinking, 24% students were in the category of level 2, 33% students were in the category of level 3, 31% students were in the category of level 4, and there was no students in the category of level 5.

Chart 4. The distribution of Post-test of student Combinatorial thinking skill in the experiment class

Percentage of Post-test Combinatorial Thinking Skills Experiment class



Combinatorial Thinking Skills in the Experiment Class



The research was continued by conducting learning used problem-based learning followed by post-test. The research was done to 42 students in the control class to know their combinatorial thinking level after the learning. 42 subjects were tested by using post-test (chart 4), in the control class it was found that there was no students in the category of level 1 in combinatorial thinking, 9% students were in the category of level 2, 18% students were in the category of level 3, 32% students were in the category of level 4, and 41% students were in the category of level 5.

Table 6. Normality Post-test

Test of Normality	Kolmogorov-Smirnova			Shapiro-Wilk		
	Statistic	Df	Sig.	Statistic	Df	Sig.
Experiment	.101	42	.200	.982	42	.753
Control	.106	42	.200	.979	42	.635

After that, it was followed by normality test. This test was done to determine whether the distribution of the data was normal or not. The distribution of the data would be said as significant if the value was higher or the same with 0.05. Based on Table 6, it was shown that the significance value from the experimental class was $0.200 \geq 0.05$ and the control class was $0.200 \geq 0.05$. Thus, this data from both classes were normally distributed.

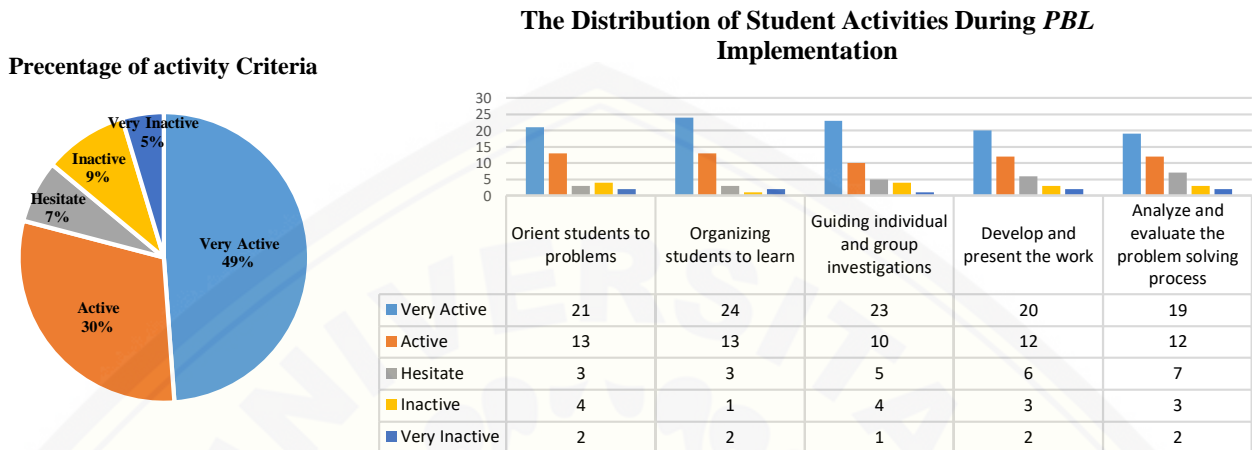
Tabel 7. Independent Sampel t-tes Post-tes

Independent Samples Test						
Class	N	Mean	SD	t	df	Sig(2-tailed)
Experiment	42	41.31	4.211	4.599	84	.000
Control	44	45.73	4.672	4.610	83.730	.000

The data of the implementation of post-test in the experimental and control classes had found that it was normally distributed. Then, independent sample t test was conducted significantly if

the value based on Table 7, it showed that Sig. (2-tailed) based on mean = 0.000 < 0.05 H_0 was rejected, there was a different of pre-test mean score of the control and experimental classes.

Chart 5. The observation result distribution of all subject in the experimental class



The distribution of the observation result from problem-based learning conducted in the experimental and control classes with 44 students. Based on Chart 5, it was found that 49% students were very active in the learning, 30% students were active, 7% students were quite active, 9% students were not active and 5% students were very inactive. Thus, PBL could affect the students work in solving problem of r -dynamic vertex coloring.

Portrait phase was taken to draw the processes, we used portrait phase, the portrait phase was brought to draw the processes from combinatorial thinking skill, we had selected six objects from experimental and control groups, but in this researchm we only described three subjects as the illustrations. The interview was carried out on selected subjects to find out the thinking process in completing the r -dynamic vertex coloring.

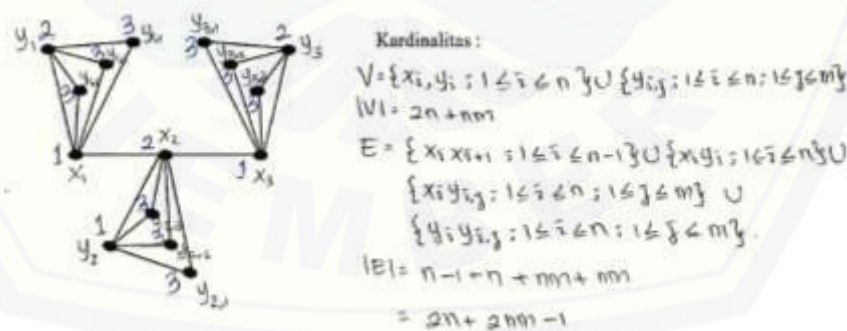


Figure 4. Graph of the subject 1

The analysis of the works was done to know the process of students' worksheet completion in producing the final result, to strengthen the solution of this students' worksheet, the result of the work sheet related to the interview and the data of observation.

The analysis of subject 1 (figure 4) r -dynamic coloring on graph $P_n \odot S_m$ with $n = 3$ dan $m = 4$ (expanding 4) and verify the truth of color from the suitable vertex and met the requirement for graph coloring in dynamic 1 and 2.

Subject 1 has reached level 3 of combinatorial thinking skills, based on the results of the analysis of work subject 1 has been able to understand simple coloring in a graph then subject 1 has been able to apply mathematical symbolization shown by being able to calculate cardinality and can develop a method of giving coloring that is prioritized by giving coloring at the vertex that has the greatest degree. This ability is clearly explained by the results of the interview below.

The interview result of subject 1:

- Researcher : can you understand the vertex coloring of graph?
 Student : Yes, I understand the vertex coloring of graphs
 Researcher : can you understand the coloring of graph if the graph given is different?
 Student : Yes, I can understand the coloring on different graphs
 Researcher : can you provide the dynamic vertex coloring of the graph?
 Student : Yes, I can give the dynamic vertex coloring according to the conditions specified
 Researcher : can you provide the dynamic vertex color staining on an addition (expand) graph?
 Student : no, I can only give coloring to this graph, if I expand it I can't do it.
 Researcher : can you apply the mathematical symbol in the completion of the given coloring?
 Student : yes, I can provide coloring along with mathematical symbols even though I still have to go back and forth or look back at the symbolic information provided.
 Researcher : can you calculate the cardinality of the graph given?
 Student : yes, I can calculate the cardinality of the graph given
 Researcher : can you develop an algorithm?
 Student : yes, I can make a simple way to give coloring to a graph
 Researcher : can you calculate and test the algorithm that you made?
 Student : no, I can only use it without being able to test it
 Researcher : can you develop a bijection?
 Student : no, I can't develop it
 Researcher : can you propose open problems regarding the coloring problems you are working on?
 Student : I can't do it, I can only do the coloring given.



Figure 5. Phase potrait subject 1

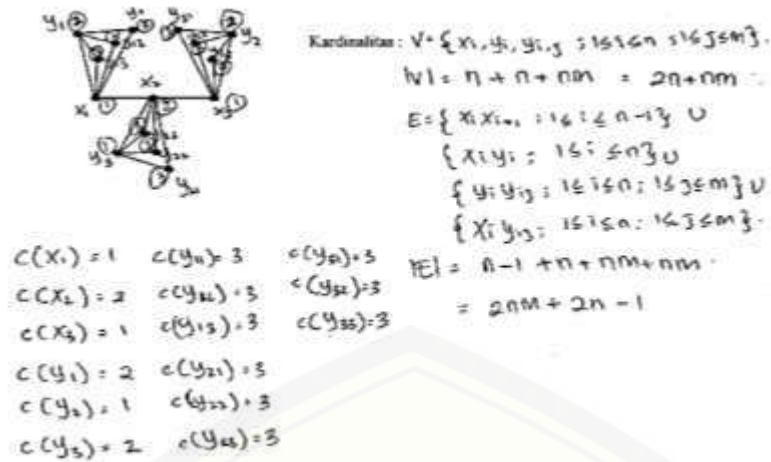


Figure 6. Graph of the subject 2

Subject 2 has reached level 4 of combinatorial thinking skills, based on the results of the analysis of work subject 2 managed to develop algorithms, calculate and test algorithms, subject 2 can also apply inductive, deductive and qualitative evidence. This ability is clearly explained by the results of the interview below.

The interview result of subject 2

- Researcher : are you able to understand the vertex coloring of graphs?
 Student : yes, I can understand it
 Researcher : can you do coloring on the other graphs?
 Student : yes, I can give coloring to a graph that is different from the one given
 Researcher : can you provide dynamic vertex coloring on a given graph?
 Student : yes, I can provide dynamic vertex coloring
 Researcher : can you do it if it's expanded?
 Student : yes, I can do it
 Researcher : can you apply mathematical symbolization and calculate the cardinality of the graph given?
 Student : yes, I can use it, but it's still not too smooth because I still have to look back at the information, and I can also calculate cardinality but it takes a long time
 Researcher : can you develop a bijection?
 Student : Yes, I can develop a wisdom and test it, but I don't know the truth
 Researchers : can you apply inductive, deductive and qualitative evidence?
 Student : yes, I can apply it
 Researcher : can you interpret and propose an open problem?
 Student : no, I can't
 Researchers : can you find out new combinatorial problems and find potential applications?
 Student : I can't, I can only do the graph that I'm working on.

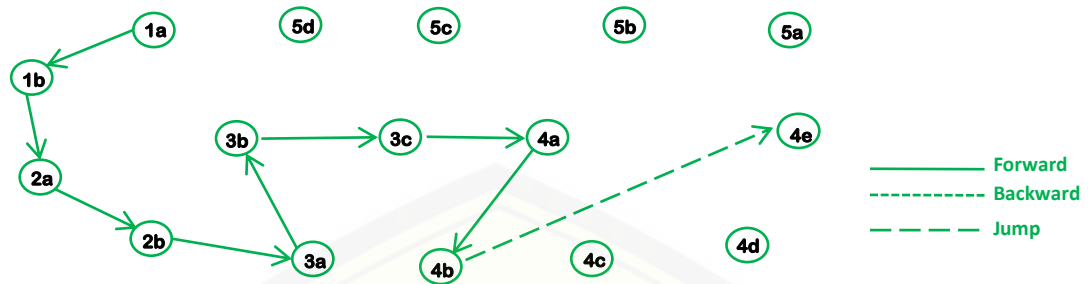


Figure 7. Phase portrait subject 2

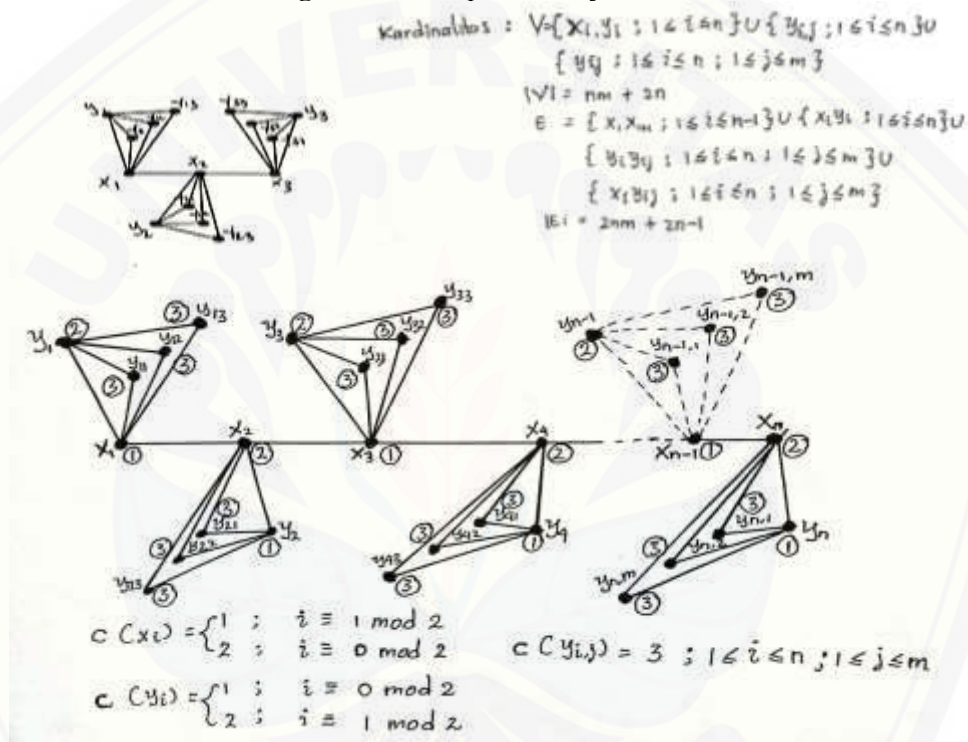


Figure 8. Graph of the subject 3

Subject 3 has reached level 5 of combinatorial thinking skills, based on the results of the analysis of work subject 3 managed to develop algorithms, calculate and test algorithms, subject 3 can also apply inductive, deductive and qualitative evidence. This ability is clearly explained by the results of the interview below.

The interview result of subject 3

- Researcher : were you able to understand vertex coloring on graph?
 Student : Yes, I understood vertex coloring on graph
 Researcher : did you understand vertex coloring on graph to the other graph?
 Student : yes, I understood the coloring on the other graph with the same coloring condition
 Researcher : could you understand the coloring pattern of the graph given?
 Student : Yes, I could understand the coloring pattern on the graph given, what I did was determining the minimum color on the graph.

- Researcher : Could the pattern be used on a graph with the same conditions
 Student : The coloring pattern could only be used for certain graph
 Researcher : Could you write down the results of your work in mathematical form and determine the cardinality?
 Student : Yes, I could write it in mathematical symbols and determine its cardinality
 Researcher : Could you develop an algorithm?
 Student : No, I couldn't make an algorithm
 Researcher : Could you test an algorithm?
 Student : No, I only gave the coloring pattern according to my thought and only on certain graph.
 Researcher : Could you understand the problem of coloring on different graph with the graph that you did coloring to its dynamic vertex?
 Student : Yes, I could understand the problem of coloring on other graph.

Figure 9 showed the thinking process of subject 3 in understanding the completion of the worksheet in the form of generalization. From step 1 to step 3b, thinking straight according to what was explained in step 3b jumped to 4a then to 4b, but in 4b, subject 1 went back to 2a. In step 3a, he jumped to 4e and then returned to 4a, continued to 4d, 4e, 5a, 5b, 5c, the thinking process was back to 4a then continued until it reached 5d.

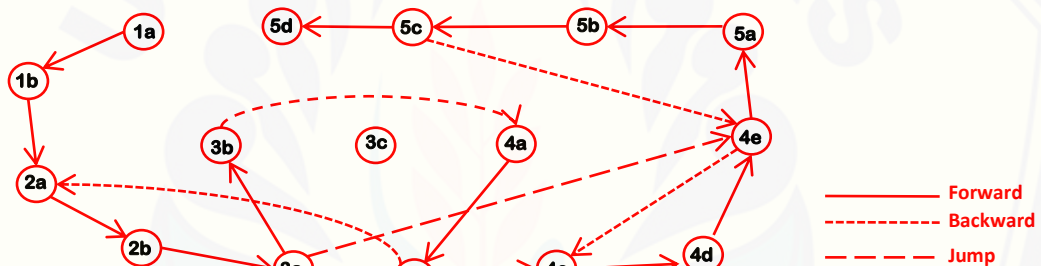


Figure 9. Phase portrait subject 3

Figure 10 was the combination of three subjects that had been studied carefully, from the images that were processed as the students' thinking processes in global; the different combinatorial thinking skill created the diversity in solving the students' problems.

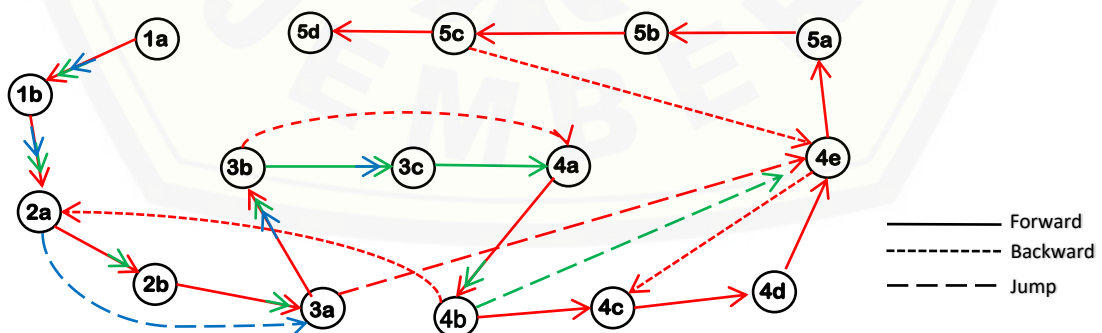


Figure 10. Phase portrait

4. Discussion

The findings showed that the students were required to use their combinatorial thinking and find a systematic to ensure that the possibilities had been discussed. In his point of view, combinatorial thinking referred to a special aspect of mathematical thinking [6]. It is in line with

this research which was intended to analyze the combinatorial thinking skill and the implementation of problem-based learning in maximizing the combinatorial thinking skill.

The findings in the control group found that 12% students were in the category of level 1 in combinatorial thinking, 24% students were in the category of level 2, 33% students were in the category of level 3, and 31% were in level 4, while there was no student who reached level 5 on combinatorial thinking. In the experimental group, it was found that there was no students in level 1 on combinatorial thinking, 9% students were in the category of level 2, 18% students were in the category of level 3, 32% students were in level 4, and 41% students were in level 5 on combinatorial thinking. The results of the analysis of independent sample test showed that the students' learning outcomes at the pre-test stage were not different and at the post-test stage, the different analysis test showed significant value of ($p \leq 0.05$) which meant that post-learning had different results.

5. Conclusion

Based on this research, the implementation of PBL had a significant effect on the students' combinatorial thinking skill in the experimental group. The students in the experimental group showed their combinatorial thinking skill compared to the control group. The result showed that the enhancement in the students' learning outcomes and combinatorial thinking skill were seen from the post-test. The scores of the experimental group were far better as it was supported by problem-based learning (PBL) to improve student combinatorial thinking.

6. Acknowledgement

I would like to express my gratitude to Postgraduate Program of Mathematics Education, Jember, Indonesia. I also want to thank the dean of the faculty of teacher training and education for his supports, University of Jember, Indonesia, CGANT, CEREBEL and the research group.

References

- [1] Agustin, I. H. Dafik. Harsya, Y. A. 2016 On r-dynamic coloring of some graph operations. *Indonesian journal of combinatorics* Vol 1 pp 22-30.
- [2] B. Montgomery 2001 Dynamic Coloring of Graphs (Ph.D Dissertation), West Virginia University.
- [3] C. Benjamin, C. Keenan 2015 Implications of introducing problem based learning in a traditionally tough course *Engineering Education* Vol 1 pp 2-7.
- [4] Elaine H. J. Yew , Karen Goh 2016 Problem based learning : An over view of it's process and impact on learning, *Health Professions education* Vol 2 pp 75-79
- [5] Graumann, G. (2002). *General aims of mathematics education explained with examples in geometry teaching*. Palermo: The Mathematics Education into the 21st Century Project.
- [6] Hobri. Dafik. Hossain. 2018. The Implementation of Learning Together in Improving Students' Mathematical Performance. *International Journal of Instruction* e-ISSN: 1308-1470
- [7] Naoko Taghuci 2018. Description and explanation of pragmatic development:Qualitative, Quantitative and mixed methods research *SYSTEM* Vol 1 pp 1-10.
- [8] S. Akbari, M. Ghanbari, S. Jahanbekam 2014 On The Dynamic Coloring of Cartesian Product Graphs, *Ars Combinatorial* Vol 114 pp 161-167.
- [9] Suntusia, Dafik, Hobri 2018 The effectiveness oresearch based learning in improving students' achievement in solving two-dimensional arithmetic sequence problems *International journal of instruction*. Vol 12 pp 17-32.
- [10] Tohir, M. Abidin, Z. Dafik. Hobri. 2018. Students creative thinking skills in solving two dimensional arithmetic series through research-based learning, *Journal of Physics: Conf. Series* 1008 (2018) 012072.

Paper BRIAN

by Brian Juned

Submission date: 25-Jan-2019 10:01AM (UTC+0700)

Submission ID: 1068244097

File name: turnytin_ICCGANT_BRIAN_JUNED_SEPTORY_turnityn.pdf (1.27M)

Word count: 5809

Character count: 28106

The analysis of students combinatorial thinking skills in solving *r*-dynamic vertex coloring under the implementation of problem based learning

B J Septory²², Dafik², I M Tirta¹³

¹CEREBEL, University of Jember, Indonesia

² Mathematics Edu. Depart. University of Jember, Indonesia

³ Mathematics Depart. University of Jember, Indonesia

Email: brianseptory95@gmail.com

Abstract. Learning implementation is expected to maximize the students' combinatorial thinking skill. This research was interested to examine the students' combinatorial thinking skill and the implementation of problem based learning to improve the students' combinatorial thinking skill in solving the problem of *r*-dynamic vertex coloring. The method used was the mixed-methods that combined quantitative and qualitative research. This research involved 86 participants that were divided into two classes: experimental and control classes. There were 42 students in the control class and 44 students in the experimental class. This study showed that there was a significant difference showed by the value of independent t-test for post-test. The data analysis showed the independent sample t-test value of post-test was $0.000 \leq 0.05$, so it was significant. Thus, there was an influence on the implementation of problem based learning on improving the students' combinatorial thinking skill in solving *r*-dynamic vertex coloring problem.

1. Introduction

This research aimed at examining the students' combinatorial thinking skill and the implementation of problem based learning to improve the students' combinatorial thinking skill in solving *r*-dynamic vertex coloring problem.

Combinatorial thinking is a tool to solve the problem when he did the experiment with the students to do geometry tasks. He found that the students must use their combinatorial thinking and find the systematic to assure that all of the possibilities have been discussed. In his view, combinatorial thinking is a special aspect of mathematical thinking [5].

There are five factors that influence the combinatorial thinking skill, in which each indicator has several different sub-indicators. The indicators and sub-indicators of combinatorial thinking are shown in the table 1.

Table 1. Indicators that Influence the Combinatorial Thinking Skill

Indicator	Sub- Indicator
Identifying several cases	a. Identifying properties/characteristics of problems b. Implementing several cases
Recognizing the pattern of all cases	a. Identifying the pattern of problem solving b. Expanding the pattern of problem solving obtained

Generalizing all cases	<ul style="list-style-type: none"> a. Implementing mathematical symbolization b. Calculating the cardinality c. Developing algorithm
Proving mathematically	<ul style="list-style-type: none"> a. Conducting argumentation calculation b. Testing algorithm c. Developing the seed d. Testing the seed e. Implementing inductive, deductive, and qualitative evidences
Considering other combinatorial problems	<ul style="list-style-type: none"> a. Conducting an interpretation b. Proposing open-questions c. Recognizing new combinatorial problems d. Finding the potential application

26 **Problem Based Learning (PBL)** is learning and teaching strategy that promotes the active learning by giving the process control to the students. It involves the use of unstructured open-questions to gain the learning activity [3]. PBL is a constructivism problem learning model that helps the students to think and solve the problem. Ben and Erickson emphasize that Problem Based Learning is a learning strategy that involves the students in solving the problem and integrating various concepts and skills from various science disciplines. This strategy includes collecting and uniting information and presenting the invention. Problem Based Learning (PBL) has been adopted broadly in various subjects and contexts of education to promote critical thinking and problem solving in the authentic learning situation [4].

The implementation of learning by using learning tool that is accordance with the Problem Based Learning can be used to see the students' combinatorial thinking skill as it has been presented in the portrait phase based on the indicators of the combinatorial thinking skill. Based on the explanation above, the researcher needs to conduct a further research. Therefore, the researcher conducts a research with a title The Analysis of the Students' Combinatorial thinking skill in Solving *R-Dynamic Vertex Coloring* under the Implementation of Problem Based Learning.

Definition 1. If $G = (V, E)$ is a simple Graph, connected and undirected graph with the vertices set V and the edge of set E and $d(v)$ to degree for each $v \in V(G)$. The maximum and minimum degrees G is symbolized as $\Delta(G)$ and $\delta(G)$ [1]. With k color on the G graph, we map $c : V(G) \Rightarrow S$, in which $|S| = k$ so that every two adjacent vertices have different colors. A r -dynamic with k color on the graph G , therefore $|c(N(v))| \geq \min\{r, d(v)\}$ to each vertex v in $V(G)$ in which $N(v)$ is environment v and $c(S) = \{c(v) : v \in S\}$ for each part of S [8]. The chromatic r -dynamic is written as $\chi_r(G)$ is a minimum value of k and graph G has r -dynamic with k color.

The k coloring vertex can be said as dynamic vertex coloring if for each vertex $v \in V(G)$ with $d(v) \geq 2$. The neighboring vertex have two different colors. The number of r -dynamic of the

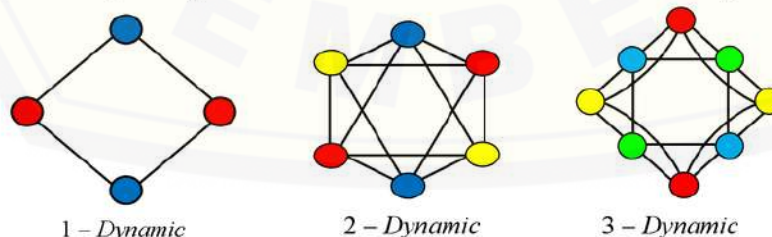


Figure 1. example 1,2,3 *r*-Dynamic Vertex Coloring

graph G is notated as $\chi_r(G)$ is the minimum color k on the G graph. The number of color 1-*Dynamic* on the Graph G is the color introduced as Chromatic Number and is notated as $\chi_d(G)$ and for the number of *Dynamic* ≥ 2 on the graph G is the introduced color as *r-Dynamic Chromatic Number* [2].

20

2. Research Methods

The method used in this research was a mixed method which combines the qualitative and quantitative research methods. The design used was Sequential explanatory: Quantitative data was collected first, followed by qualitative data that explained the findings from quantitative data (e.g., after assessing pragmatic competence at group-level, following up on several participants to gain understanding about their characteristics) [7] and [6,9,10] also applied this model to their research. Quantitative research analyzed the students learning outcomes after the application of problem-based learning method. Then qualitative research aimed to analyze the data from observations and interviews of selected students. This research investigated two variables, namely the implementation of problem based learning as an independent variable and students' learning outcomes from solving the problem of the *r-dynamic vertex coloring* as the dependent variable.

To understand deeply about the effectiveness of Problem based learning, we continued the research by sharing observations with all students of the experimental class and selecting several students to be interviewed about their understanding process in finding a new pattern of *r-dynamic vertex coloring*.

The experimental design of this research was to compile two class groups, namely the experimental class and the control class, which were selected by purposive random sampling and examined by pre-test and post-test using the following design.

A	O	X	O
A	O	C	O

Information:

- A : Random sampling
- X : Treatment given (Independent Variable)
- C : Control of treatment
- O : Pre-test / Post-test (Dependent Variables observed)

30

In this design, there were two groups of classes in which each chosen randomly. Before the research was conducted, the two groups were given pre-test to find out their initial situation. During the research, the first class was treated (X) and the second group was not treated (C), the treated group was called as the experimental group and the untreated group was called a control group.

4

Then, at the end of the research, the two groups were given a post-test to see how the results were. This design was used to see the effect of the treatment (independent variable) on changes/improvements in the dependent variable that was being observed.

Population

21

This research was done to Mathematics Education students at the University of Jember in the odd semester of the 2018/2019 academic year. The sampling technique used was random sampling by randomly selecting two classes, the first class was the experimental class with the implementation of problem-based learning which was consisted of 44 students, and the second class was class control with the application of conventional learning that consisted of 42 students.

Instrument

The instruments used in this research were tests, observation, and interview. The figure below showed the combination of the research methods with research procedures consisting of three stages according to the stages in the research design, namely: preliminary study (qualitative research), analysis of combinatorial thinking skill and the application of problem-based learning (quantitative research), portrait phase (research qualitative). Explanation of research procedures was illustrated in the chart as follows.

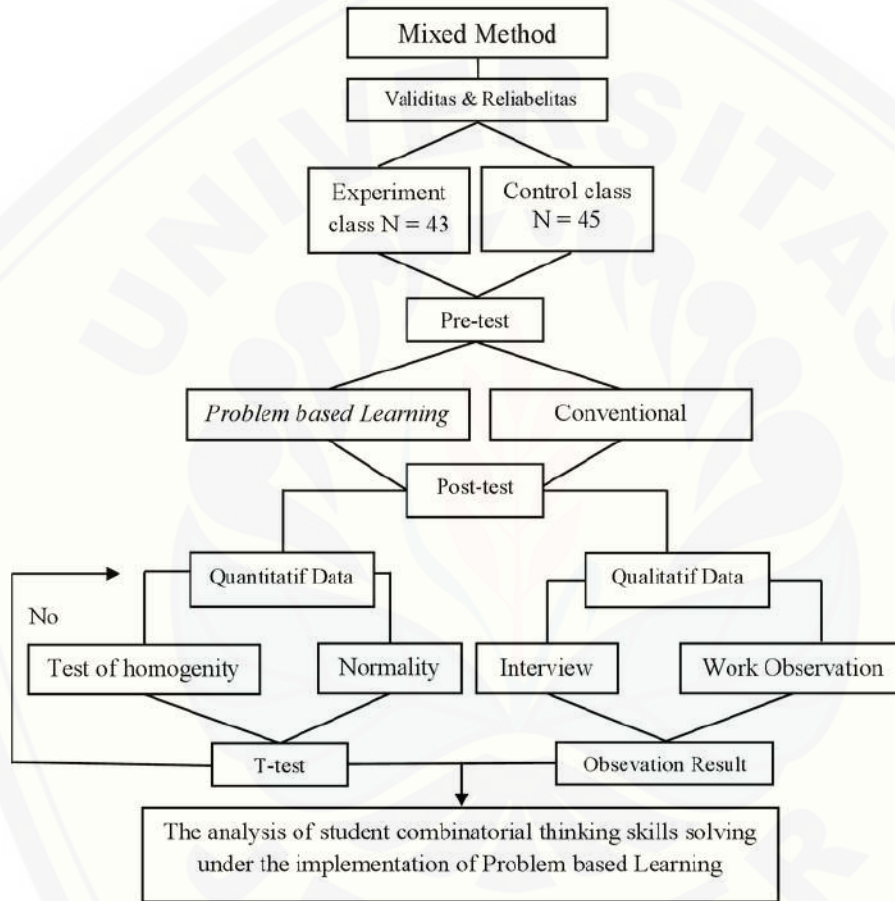


Figure 2. The Model of Mixed Method

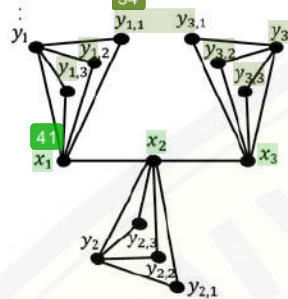
Task

Students' combinatorial thinking skill were measured based on the indicators that had been converted into test instrument. One of the test instruments used was to discuss dynamic vertex coloring in $P_3 \odot S_4$ graph which consisted of dynamic vertex coloring.

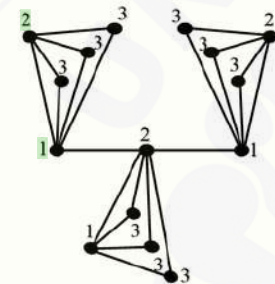
A k vertex coloring is said to be dynamic vertex coloring if for each vertex $v \in V(G)$ with $d(v) \geq 2$. The neighboring vertex have two different colors. A dynamic r with k color on graph G so that $|c(N(v))| \geq \min\{r, d(v)\}$ for each vertex v in $V(G)$ where $N(v)$ is environment v and $c(S) = \{c(v): v \in S\}$ for each part of S . The dynamic r -chromatic number written with $\chi_r(G)$

was the minimum value of k so that graph G had dynamic r with k -color. The graph used was a corona operating graph symbolized by \odot , the forming graph was a path graph with $n = 3$ which was operated with a star graph with $m = 4$, so the graph used was $P_3 \odot S_4$.

The following was the r -dynamic vertex coloring on $P_3 \odot S_4$:



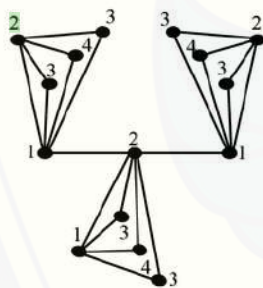
The following figure was the giving of vertex notation to the graph $P_3 \odot S_4$



The following figure was the coloring for $r = 1$ and $r = 2$.

$$\begin{aligned} |c(N(x_1))| &\geq \min\{r, d(x_1)\} \\ 2 &\geq \{1, 5\} \end{aligned}$$

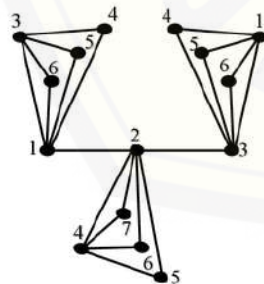
The following was the notation for coloring at vertex x_1 , then notation given at all vertex. On the figure beside, each vertex had a maximum of 2 neighbor colors so that the figure met the requirements of $r = 1$ and $r = 2$.



The following figure was the coloring for $r = 3$

$$\begin{aligned} |c(N(x_1))| &\geq \min\{r, d(x_1)\} \\ 3 &\geq \{3, 5\} \end{aligned}$$

On the figure beside, each vertex had a maximum of 3 neighbor colors so that the figure met the requirement of $r = 3$. r increased, so that the given color also increased. Coloration was given until it reached $\Delta(G)+1$.



The following figure was the coloring for $r = k$

$$\begin{aligned} |c(N(x_2))| &\geq \min\{r, d(x_2)\} \\ 6 &\geq \{6, 6\} \end{aligned}$$

On the figure beside, each vertex had a maximum of 6 neighbor colors so that the figure met the requirement of $r = k$.

Figure 3. Example of r -dynamic vertex coloring from Graf $P_3 \odot S_4$

The purpose of this task was to provide a r -dynamic vertex coloring that was different from the previous pattern and gave a different color to the vertex such that each vertex had a different color.

3. Research Finding

The Result of Data Analysis

This research was conducted at the experimental and control classes by using two qualitative methods in order to know the students skill of combinatorial thinking. The implementation of the research was done after conducting validity and reliability tests for the instruments. After that, the experimental and control classes were given pre-test to know their initial combinatorial thinking skill.

After conducting pre-test in the control and experimental classes, the learning by implementing Problem based learning model held in the experimental class while the usual learning held in the control class where the data that would be analyzed by using spss obtained. The following was the result of the analysis by using spss application.

Before showing our result, we needed to conduct reliability and validity tests for the instruments of our post-test.

Table 2. The test result of the validity question Correlations

		No_1	No_2	No_3	No_4	Total
No_1	Pearson Correlation	1	.127	.062	.151	.440**
	Sig. (2-tailed)		.412	.690	.329	.003
	N	44	44	44	44	44
No_2	Pearson Correlation	.127	1	.227	.063	.510**
	Sig. (2-tailed)	.412		.138	.686	.000
	N	44	44	44	44	44
No_3	Pearson Correlation	.062	.227	1	.316*	.825**
	Sig. (2-tailed)	.690	.138		.036	.000
	N	44	44	44	44	44
No_4	Pearson Correlation	.151	.063	.316*	1	.578**
	Sig. (2-tailed)	.329	.686	.036		.000
	N	44	44	44	44	44
Total	Pearson Correlation	.440**	.510**	.825**	.578**	1
	Sig. (2-tailed)	.003	.000	.000	.000	
	N	44	44	44	44	44

** . Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

* . Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).

The following table showed the reliability and validity of the result. Based on the table, it could be seen that the value of r_{count} from number 1 was 0.440, number 2 was 0.510, number 3 was 0.825, and number 4 was 0.578. All items resulted the value of $r_{count} > r_{table}$ with $N=44$, therefore all items were valid.

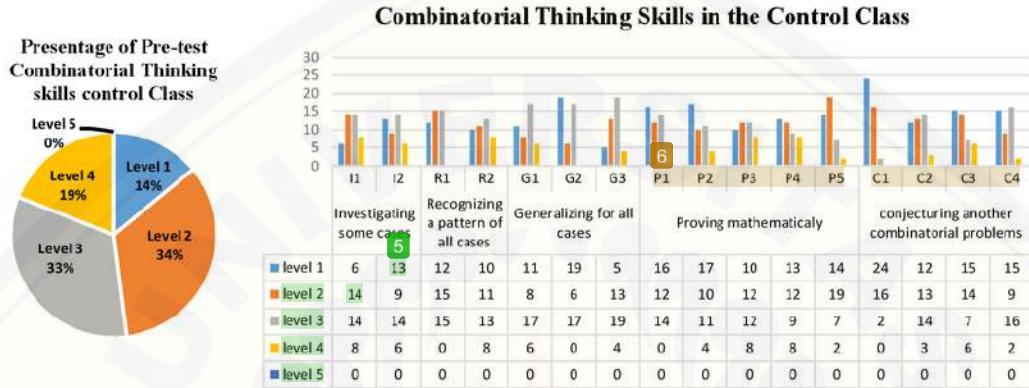
Table 3. The result of the realibility question

Reliability Statistics	
Cronbach's Alpha	N of items
.405	4

4

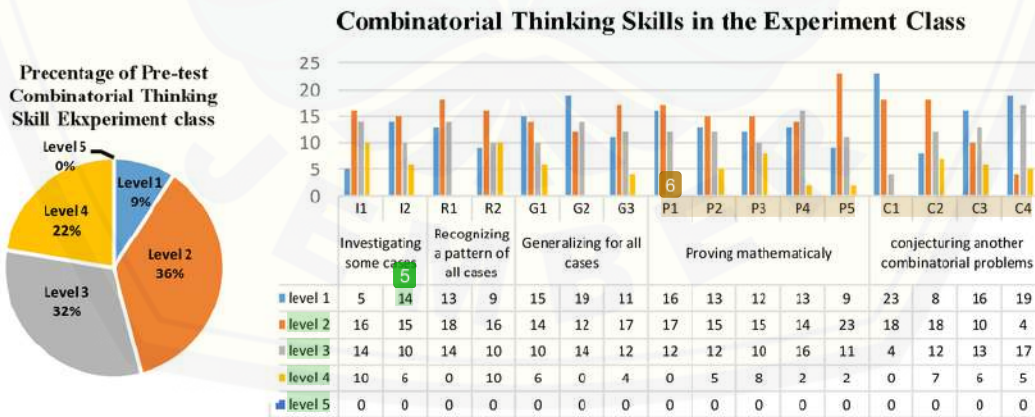
Based on the table, it could be seen that the overall values of reliability were 0.405 and r (table) form the significance level of 5% with $dk=N-1=43$, $r(\text{table})= 0.400$. Thus, $r_{\text{count}} > r_{\text{table}}$. This concluded that the instruments item were reliable.

Chart 1. The Distribution of Pre-test of student Combinatorial Thinking Skill in the Control Class



The initial research was done to 42 students in the control class to know the level of their combinatorial thinking. 42 subjects were tested by using pre-test (chart 1), in the experimental class it was found that 14% students were in the category of level 1 in combinatorial thinking, 34% students were in the category of level 2, 33% students were in the category of level 3, 19% students were in the category of level 4 and there was no student reached the category of level 5 in combinatorial thinking

Chart 2. The distribution of Pre-test of student Combinatorial thinking skill in the experiment class.



The research was done to 44 students in the experimental class to know the level of their combinatorial thinking. 44 subjects were tested by using pre-test (chart 2), in the experimental

class it was found that 9% students were in the category of level 1 in combinatorial thinking, 36% students were in the category of level 2, 32% students were in the category of level 3, 22% students were in the category of level 4, and there was no students in the category of level 5.

The data analysis used quantitative method to find out the different of the variance of problem-based learning outcomes. The data analysis was done by using SPSS application with the learning result data of pre-test.

Table 4. Independent sample pre-tes

Test of homogeneity of variance				
	Levene statistic	df1	df2	Sig.
Based on mean	1.537	9	27	.186

Homogeneity test was done to determine whether the variance of the data from the analyzed samples was homogeneous or not. Based on table 4, homogeneity test obtained the result of sig. 0.186. This would be significant if it was higher than 0.05 (based on the mean = 0.186 > 0.05), therefore, the variance of the data was homogenous.

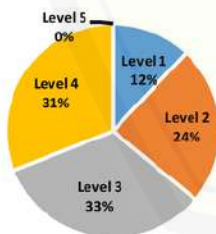
Tabel 5. Independent sampel t-tes pre-test

Independent Samples Test						
Class	N	Mean	SD	t	df	Sig(2-tailed)
Experiment	42	35.98	3.530	1.606	84	.112
Control	44	34.68	3.922	1.610	83.718	.111

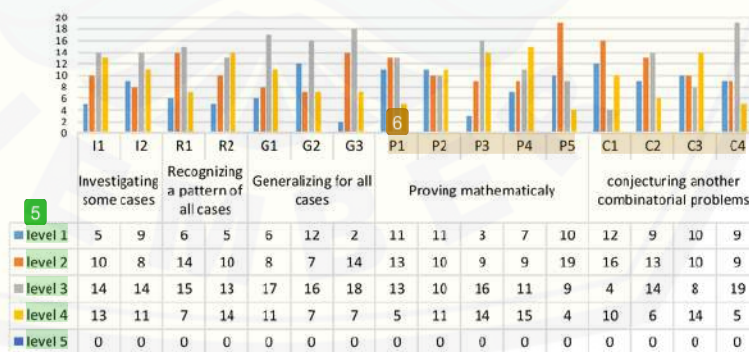
The data about pre-test in the experimental and control classes had found that the variance was homogeneous. Then, independent sample t test was conducted significantly if the value of sig. was higher than 0.05. The value of Sig. (2-tailed) based on the mean = 0.112 > 0.05). H_0 was accepted, there was no different within the pre-test mean score from the control and experimental classes.

Chart 3. The distribution of Post-test of student Combinatorial thinking skill in the Control class

Percentage of Post-test Combinatorial Thinking Skills Control Class



Combinatorial Thinking Skills in the Control Class

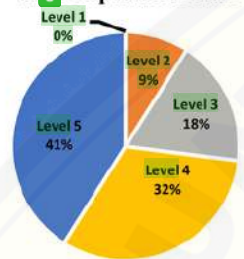


The research was continued by conducting learning used conventional learning model followed by post-test. The research was done to 42 students in the control class to know their combinatorial thinking level after the learning. 42 subjects were tested by using post-test (Chart

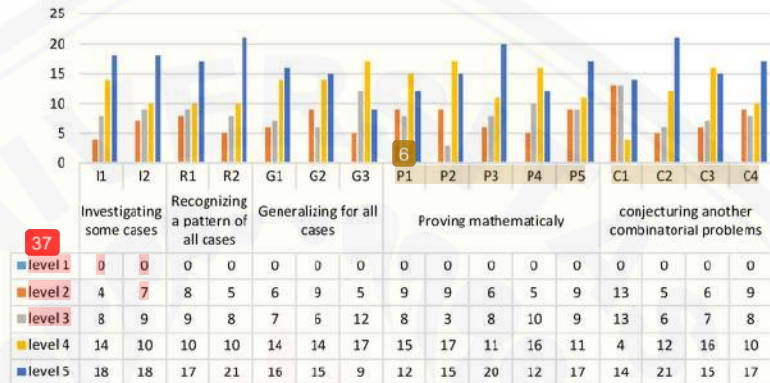
3), in the control class it was found that 12% students were on the category of level 1 in combinatorial thinking, 24% students were in the category of level 2, 33% students were in the category of level 3, 31% students were in the category of level 4, and there was no students in the category of level 5.

Chart 4. The distribution of Post-test of student Combinatorial thinking skill in the experiment class

Percentage of Post-test Combinatorial Thinking Skills Experiment class



Combinatorial Thinking Skills in the Experiment Class



The research was continued by conducting learning used problem-based learning followed by post-test. The research was done to 42 students in the control class to know their combinatorial thinking level after the learning. 42 subjects were tested by using post-test (chart 4), in the control class it was found that there was no students in the category of level 1 in combinatorial thinking, 9% students were in the category of level 2, 18% students were in the category of level 3, 32% students were in the category of level 4, and 41% students were in the category of level 5.

Table 6. Normality Post-test

Test of Normality	Kolmogorov-Smimova			Shapiro-Wilk		
	Statistic	Df	Sig.	Statistic	Df	Sig.
Experiment	.101	42	.200	.982	42	.753
Control	.106	42	.200	.979	42	.635

After that, it was followed by normality test. This test was done to determine whether the distribution of the data was normal or not. The distribution of the data would be said significant if the value was higher or the same with 0.05. Based on Table 6, it was shown that the significance value from the experimental class was $0.200 \geq 0.05$ and the control class was $0.200 \geq 0.05$. Thus, this data from both classes were normally distributed.

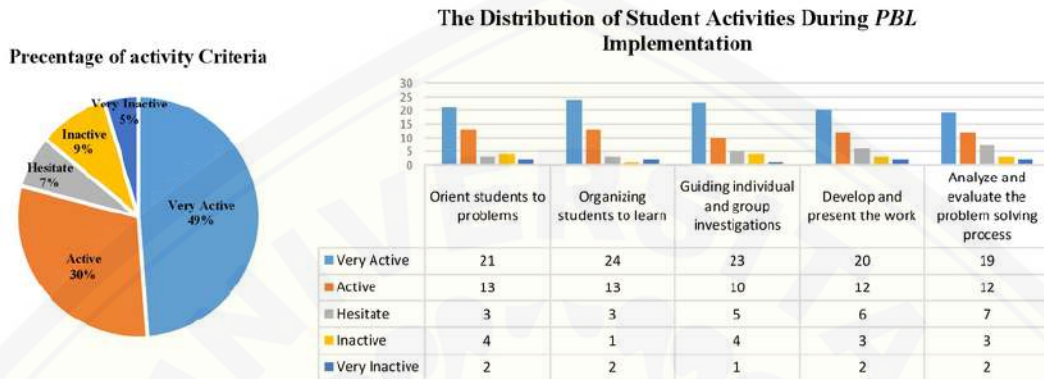
Table 7. Independent Sampel t-tes Post-tes

Independent Samples Test						
Class	N	Mean	SD	t	df	Sig(2-tailed)
Experiment	42	41.31	4.211	4.599	84	.000
Control	44	45.73	4.672	4.610	83.730	.000

The data of the implementation of post-test in the experimental and control classes had found that it was normally distributed. Then, independent sample t test was conducted significantly if

the value based on Table 7, it showed that Sig. (2-tailed) based on mean = 0.000 < 0.05 H_0 was rejected, there was a different of pre-test mean score of the control and experimental classes.

Chart 5. The observation result distribution of all subject in the experimental class



The distribution of the observation result from problem-based learning conducted in the experimental and control classes with 44 students. Based on Chart 5, it was found that 49% students were very active in the learning, 30% students were active, 7% students were quite active, 9% students were not active and 5% students were very inactive. Thus, PBL could affect the students work in solving problem of r -dynamic vertex coloring.

Portrait phase was taken to draw the processes, we used portrait phase, the portrait phase was brought to draw the processes from combinatorial thinking skill, we had selected six objects from experimental and control groups, but in this researchm we only described three subjects as the illustrations. The interview was carried out on selected subjects to find out the thinking process in completing the r -dynamic vertex coloring.

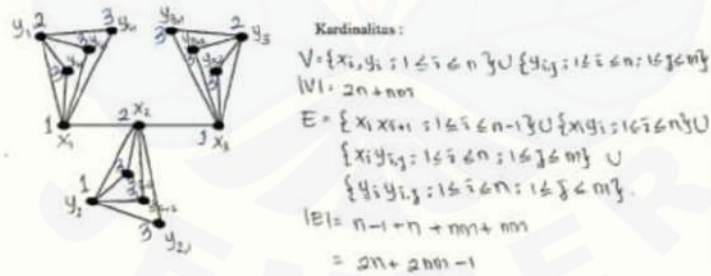


Figure 4. Graph of the subject 1

The analysis of the works was done to know the process of students' worksheet completion in producing the final result, to strengthen the solution of this students' worksheet, the result of the work sheet related to the interview and the data of observation.

The analysis of subject 1 (figure 4) r -dynamic coloring on graph $P_n \odot S_m$ with $n = 3$ dan $m = 4$ (expanding 4) and verify the truth of color from the suitable vertex and met the requirement for graph coloring in dynamic 1 and 2.

Subject 1 has reached level 3 of combinatorial thinking skills, based on the results of the analysis of work subject 1 has been able to understand simple coloring in a graph then subject 1 has been able to apply mathematical symbolization shown by being able to calculate cardinality and can develop a method of giving coloring that is prioritized by giving coloring at the vertex that has the greatest degree. This ability is clearly explained by the results of the interview below.

The interview result of subject 1:

- Researcher : can you understand the vertex coloring of graph?
 Student : Yes, I understand the vertex coloring of graphs
 Researcher : can you understand the coloring of graph if the graph given is different?
 Student : Yes, I can understand the coloring on different graphs
 Researcher : can you provide the dynamic vertex coloring of the graph?
 Student : Yes, I can give the dynamic vertex coloring according to the conditions specified
 Researcher : can you provide the dynamic vertex color staining on an addition (expand) graph?
 Student : no, I can only give coloring to this graph, if I expand it I can't do it.
 Researcher : can you apply the mathematical symbol in the completion of the given coloring?
 Student : yes, I can provide coloring along with mathematical symbols even though I still have to go back and forth or look back at the symbolic information provided.
 Researcher : can you calculate the cardinality of the graph given?
 Student : yes, I can calculate the cardinality of the graph given
 Researcher : can you develop an algorithm?
 Student : yes, I can make a simple way to give coloring to a graph
 Researcher : can you calculate and test the algorithm that you made?
 Student : no, I can only use it without being able to test it
 Researcher : can you develop a bijection?
 Student : no, I can't develop it
 Researcher : can you propose open problems regarding the coloring problems you are working on?
 Student : I can't do it, I can only do the coloring given.



Figure 5. Phase potrait subject 1

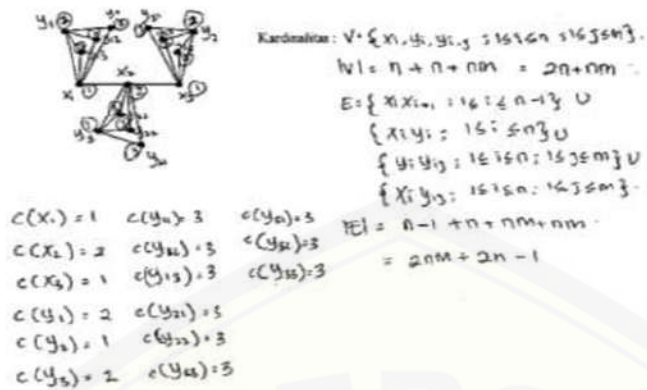


Figure 6. Graph of the subject 2

Subject 2 has reached level 4 of combinatorial thinking skills, based on the results of the analysis of work subject 2 managed to develop algorithms, calculate and test algorithms, subject 2 can also apply inductive, deductive and qualitative evidence. This ability is clearly explained by the results of the interview below.

The interview result of subject 2

- Researcher : are you able to understand the vertex coloring of graphs?
 Student : yes, I can understand it
 Researcher : can you do coloring on the other graphs?
 Student : yes, I can give coloring to a graph that is different from the one given
 Researcher : can you provide dynamic vertex coloring on a given graph?
 Student : yes, I can provide dynamic vertex coloring
 Researcher : can you do it if it's expanded?
 Student : yes, I can do it
 Researcher : can you apply mathematical symbolization and calculate the cardinality of the graph given?
 Student : yes, I can use it, but it's still not too smooth because I still have to look back at the information, and I can also calculate cardinality but it takes a long time
 Researcher : can you develop a bijection?
 Student : Yes, I can develop a wisdom and test it, but I don't know the truth
 Researchers : can you apply inductive, deductive and qualitative evidence?
 Student : yes, I can apply it
 Researcher : can you interpret and propose an open problem?
 Student : no, I can't
 Researchers : can you find out new combinatorial problems and find potential applications?
 Student : I can't, I can only do the graph that I'm working on.

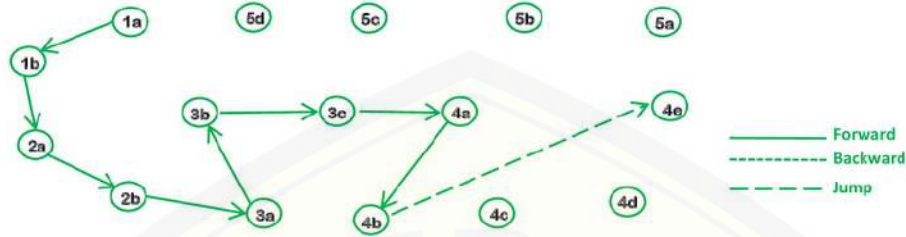


Figure 7. Phase potrait subject 2

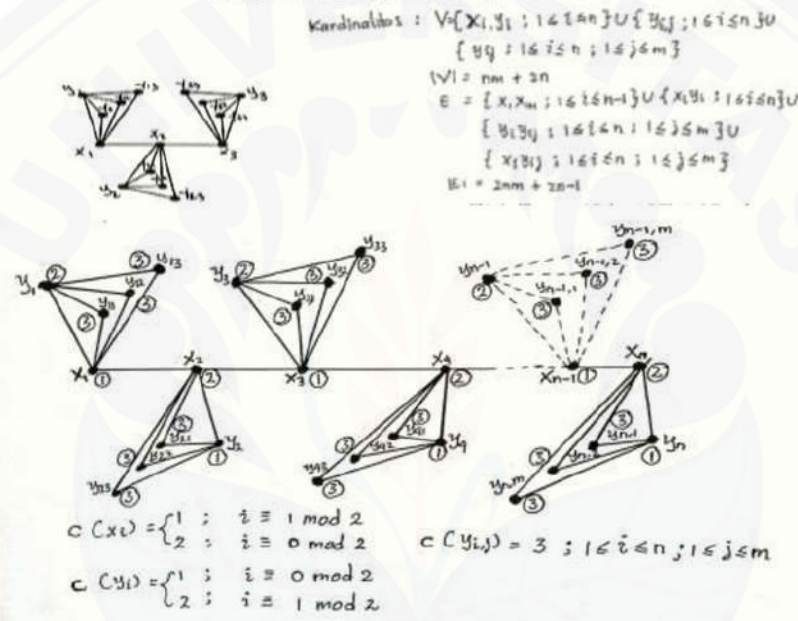


Figure 8. Graph of the subject 3

10

Subject 3 has reached level 5 of combinatorial thinking skills, based on the results of the analysis of work subject 3 managed to develop algorithms, calculate and test algorithms, subject 3 can also apply inductive, deductive and qualitative evidence. This ability is clearly explained by the results of the interview below.

The interview result of subject 3

- Researcher : were you able to understand vertex coloring on graph?
 Student : Yes, I understood vertex coloring on graph
 Researcher : did you understand vertex coloring on graph to the other graph?
 Student : yes, I understood the coloring on the other graph with the same coloring condition
 Researcher : could you understand the coloring pattern of the graph given?
 Student : Yes, I could understand the coloring pattern on the graph given, what I did was determining the minimum color on the graph.

33

- Researcher : Could the pattern be used on a graph with the same conditions
 Student : The coloring pattern could only be used for certain graph
 Researcher : Could you write down the results of your work in mathematical form and determine the cardinality?
 Student : Yes, I could write it in mathematical symbols and determine its cardinality
 Researcher : Could you develop an algorithm?
 Student : No, I couldn't make an algorithm
 Researcher : Could you test an algorithm?
 Student : No, I only gave the coloring pattern according to my thought and only on certain graph.
 Researcher : Could you understand the problem of coloring on different graph with the graph that you did coloring to its dynamic vertex?
 Student : Yes, I could understand the problem of coloring on other graph.

Figure 9 showed the thinking process of subject 3 in understanding the completion of the worksheet in the form of generalization. From step 1 to step 3b, thinking straight according to what was explained in step 3b jumped to 4a then to 4b, but in 4b, subject 1 went back to 2a. In step 3a, he jumped to 4e and then returned to 4a, continued to 4d, 4e, 5a, 5b, 5c, the thinking process was back to 4a then continued until it reached 5d.

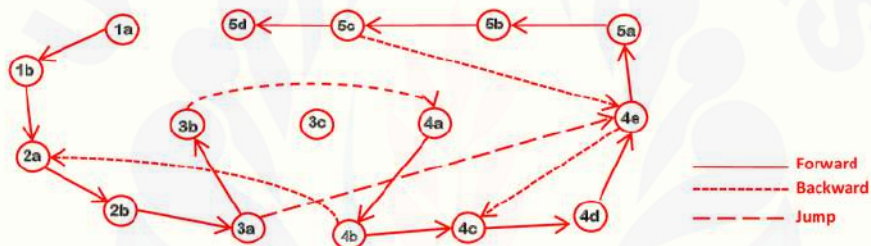


Figure 9. Phase potrait subject 3

Figure 10 was the combination of three subjects that had been studied carefully, from the images that were processed as the students' thinking processes in global; the different combinatorial thinking skill created the diversity in solving the students' problems.

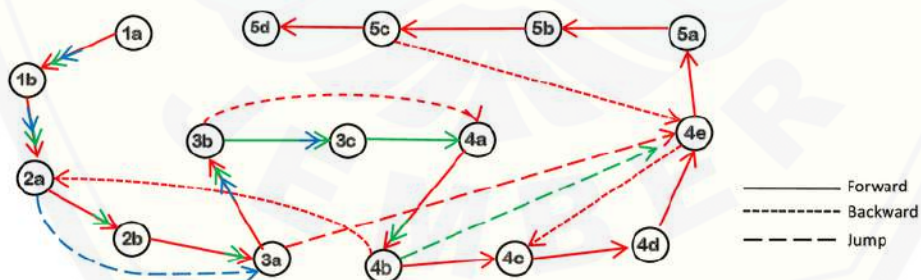


Figure 10. Phase potrait

4. Discussion

3

The findings showed that the students were required to use their combinatorial thinking and find a systematic to ensure that the possibilities had been discussed. In his point of view, combinatorial thinking referred to a special aspect of mathematical thinking [6]. It is in line with

this research which was intended to analyze the combinatorial thinking skill and the implementation of problem-based learning in maximizing the combinatorial thinking skill.

The findings in the control group found that 12% students were in the category of level 1 in combinatorial thinking, 24% students were in the category of level 2, 33% students were in the category of level 3, and 31% were in level 4, while there was no student who reached level 5 on combinatorial thinking. In the experimental group, it was found that there was no students in level 1 on combinatorial thinking, 9% students were in the category of level 2, 18% students were in the category of level 3, 40% students were in level 4, and 41% students were in level 5 on combinatorial thinking. The results of the analysis of independent sample test showed that the students' learning outcomes at the pre-test stage were not different and at the post-test stage, the different analysis test showed significant value of ($p \leq 0.05$) which meant that post-learning had different results.

5. Conclusion

Based on this research, the implementation of PBL had a significant effect on the students' combinatorial thinking skill in the experimental group. The students in the experimental group showed their combinatorial thinking skill compared to the control group. The result showed that the enhancement in the students' learning outcomes and combinatorial thinking skill were seen from the post-test. The scores of the experimental group were far better as it was supported by problem-based learning (PBL) to improve student combinatorial thinking.

6. Acknowledgement

I would like to express my gratitude to Postgraduate Program of Mathematics Education, Jember, Indonesia. I also want to thank the dean of the faculty of teacher training and education for his supports, University of Jember, Indonesia, CGANT, CEREBEL and the research group.

References

- [1] Agustin, I. H. Dafik. Harsya, Y. A. 2016 On r-dynamic coloring of some graph operations. *Indonesian journal of combinatorics* Vol 1 pp 22-30.
- [2] B. Montgomery 2001 Dynamic Coloring of Graphs (Ph.D Dissertation), West Virginia University.
- [3] C. Benjamin, C. Keenan 2015 Implications of introducing problem based learning in a additionally taught course *Engineering Education* Vol 1 pp 2-7.
- [4] Elaine H. J. Yew , Karen Goh 2016 Problem based learning : An over view of it's process and impact on learning. *Health Professions education* Vol 2 pp 75-79
- [5] Graumann, G. (2002). *General aims of mathematics education explained with examples in geometry teaching*. Palermo: The Mathematics Education into the 21st Century Project.
- [6] Hobri. Dafik. Hossain. 2018. The Implementation of Learning Together in Improving Students' Mathematical Performance. *International Journal of Instruction* e-ISSN: 1308-1470
- [7] Naoko Taghuci 2018. Description and explanation of pragmatic development:Qualitative, Quantitative and mixed methods research *SYSTEM* Vol 1 pp 1-10.
- [8] S. Akbari, M. Ghanbari, S. Jahanbekam 2014 On The Dynamic Coloring of Cartesian Product Graphs, *Ars Combinatorial* Vol 114 pp 161-167.
- [9] Suntusia, Dafik, Hobri 2018 The effectiveness of research based learning in improving students' achievement in solving two-dimensional arithmetic sequence problems *International journal of instruction* Vol 12 pp 17-32.
- [10] Tohir, M. Abidin, Z. Dafik. Hobri. 2018. Students creative thinking skills in solving two dimensional arithmetic series through research-based learning, *Journal of Physics: Conf. Series* 1008 (2018) 012072.

ORIGINALITY REPORT

15%

SIMILARITY INDEX

10%

INTERNET SOURCES

9%

PUBLICATIONS

5%

STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

1	Dafik, D.E.W. Meganingtyas, K. Dwidja Purnomo, M. Dicky Tarmidzi, Ika Hesti Agustin. " Several classes of graphs and their -dynamic chromatic numbers ", Journal of Physics: Conference Series, 2017 Publication	1%
2	Submitted to Universitas Jember Student Paper	1%
3	core.ac.uk Internet Source	1%
4	repository.uinib.ac.id Internet Source	1%
5	schools.jacksonville.com Internet Source	1%
6	citeseerx.ist.psu.edu Internet Source	1%
7	Naoko Taguchi. "Description and explanation of pragmatic development: Quantitative, qualitative, and mixed methods research",	1%

8	elibrary.almaata.ac.id Internet Source	1%
9	www.slideshare.net Internet Source	<1%
10	www.ogcio.gov.hk Internet Source	<1%
11	conferences.ukf.sk Internet Source	<1%
12	Submitted to Universitas Negeri Surabaya The State University of Surabaya Student Paper	<1%
13	ejournal.radenintan.ac.id Internet Source	<1%
14	www.sefi.be Internet Source	<1%
15	jurnalmahasiswa.unesa.ac.id Internet Source	<1%
16	Submitted to Universitas Negeri Padang Student Paper	<1%
17	Submitted to Western Governors University Student Paper	<1%
18	china.iopscience.iop.org	

<1%

19

bspace.buid.ac.ae

Internet Source

<1%

20

M Tohir, Z Abidin, Dafik, Hobri. "Students creative thinking skills in solving two dimensional arithmetic series through research-based learning", Journal of Physics: Conference Series, 2018

Publication

<1%

21

www.science.gov

Internet Source

<1%

22

Arika Indah Kristiana, M. Imam Utoyo, Dafik. "On the r-dynamic chromatic number of the coronation by complete graph", Journal of Physics: Conference Series, 2018

Publication

<1%

23

Submitted to University of Western Sydney

Student Paper

<1%

24

matematohir.wordpress.com

Internet Source

<1%

25

A Zaidah, Sukarmin, W Sunarno. "The effect of physics-based scientific learning on the improvement of the student's critical thinking skills", Journal of Physics: Conference Series,

<1%

26 Christopher Benjamin, Christine Keenan. <1%
"Implications of introducing problem-based
learning in a traditionally taught course",
Engineering Education, 2015

Publication

27 ijaers.com <1%
Internet Source

28 Submitted to UIN Raden Intan Lampung <1%
Student Paper

29 repository.uinjkt.ac.id <1%
Internet Source

30 docplayer.net <1%
Internet Source

31 R. Adawiyah, Dafik, I. H. Agustin, A. I. Kristiana,
R. Alfarisi. "Some unicyclic graphs and its
vertex coloring edge-weighting", AIP
Publishing, 2018 <1%

Publication

32 Risnawati, Z Amir, M S Lubis, M Syafri. "The
effect of problem based learning model (PBL)
towards creative thinking ability and self-
efficacy of junior high school students in
Pekanbaru", Journal of Physics: Conference
Series, 2018 <1%

33	scholarworks.umt.edu Internet Source	<1%
34	Submitted to Sim University Student Paper	<1%
35	lightedcandle.org Internet Source	<1%
36	Windi Agustiar Basuki, Ariyadi Wijaya. "The effectiveness of the realistic mathematics education approach for self-efficacy", AIP Publishing, 2018 Publication	<1%
37	www.ferris.edu Internet Source	<1%
38	thesis.binus.ac.id Internet Source	<1%
39	scholarworks.waldenu.edu Internet Source	<1%
40	rvsim.ac.in Internet Source	<1%
41	Makanin, G.S.. "Parametrisation of solutions of parametric equation in free monoid", Theoretical Computer Science, 20000706 Publication	<1%

Exclude quotes Off

Exclude matches Off

Exclude bibliography Off



ICCGANT 2018

The 2nd International Conference
on Combinatorics, Graph Theory, and
Network Topology

University of Jember, 24th - 25th 2018



Jember, 5th January 2019

Our Ref : 001/ICCGANT/I/2019

Subjects : IOP Publication

Dear Brian Juned Septory,

Paper ID : ICCGANT2018_paper_264

Paper Title : The analysis of students combinatorial thinking skills in solving r-dynamic vertex coloring under the implementation of problem based learning

Thank you for participating in the Second International Conference of Combinatorics, Graph Theory and Network Topology 2018. I am very grateful to say that the conference has been successfully held. Following your paper which you have submitted to the ICCGANT 2018 and also based on the review result of your paper, I am pleased to inform you that your paper is potentially to be published in the **Journal of Physics: Conference Series (JPCS), IOP Publishing (Indexed by Scopus)**. However, you need to revise your manuscript as follows:

1. Please kindly revise your paper based on the feedback given by the reviewers as attached in the email.
2. Please follow the guideline of **JPCS manuscript template**, see iccgant.unej.ac.id or see the JOP website: <http://iopscience.iop.org/journal/1742-6596> to help you to organize your paper.
3. The revised paper together with source files, .doc or .pdf and other relevant files, should be **compressed into one file** with the following name: AUTHORNAME_ICCGANT2018_PAPERID. It should be resubmitted to the committee by no longer than January 20th by emailing the organizing committee iccgant@gmail.com and cc to alfarisi38@gmail.com and rafiantikap@gmail.com
4. Please kindly make a payment for the IOP publication fee. Each paper will be charged USD 120 for international author or IDR 1.500.000 for Indonesian author. Payment shall be made before January 20th, 2018 to the following details.

Bank name: BNI SYARIAH JEMBER

Account name: Panitia ICCGANT 2018

Account number: [0749239210](tel:0749239210)

Address: BNI Syariah Cabang Jember, Jember, Indonesia

(For international transfer, the SWIFT Code is SYNIIDJ1)

Should you have any problem or enquiry, please do not hesitate to contact us.

5. After making payment, please notify us by sending the payment record to the organizing committee by above email or whatsapp to +6285746045070 (Rosanita Nisviasari).
6. Disclaimer: Please understand that the payment will be allocated for the IOP payment either review processor publication fee. Please do your best to meet the IOP publication standard, since rejection from IOP *will not make your money back*.

Organizing Committee for ICCGANT 2018

Signed by

Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si



Number : 01/UN25.3/FKIP/ICONSME/I/2018
Subject : IJET Publication

26th September 2018

Brian

Paper ID : ICONSME 018-12
Title : The r-dynamic chromatic number of coronation of order two of any graphs with path graph

Dear Authors,

Thank you for participating in the International Conference of Natural Sciences, Mathematics, and Education. I am very grateful to say that the conference has been successfully held. Following your paper which you have submitted to the ICONSME 2018 and also based on the review result of your paper, I am pleased to inform you that your paper is potentially to be published in the **International Journal of Engineering and Technology (IJET): Science Publishing (UAE) (Indexed by Scopus)**, with the following conditions.

1. Please kindly revise your paper based on the feedback given by the reviewer as attached in the email.
2. Please follow the guideline of **IJET template**, see iconsme.fkip.unej.ac.id to help you to organize your paper.
3. The revised paper together with relevant files should be **compressed into one file** with the following name: AUTHORNAME_ICONSME2018_PAPERID. It should be resubmitted to the committee by no longer than October 3rd 2018 by emailing the organizing committee iconsme.fkip@unej.ac.id and ermitara@unej.ac.id
4. Please kindly make a payment for the publication fee, each paper will be charged USD 175 for international author or IDR 2.625.000 for indonesian author. Payment shall be made before October 5th, 2018 to the following details.

Bank name : Bni Syariah Jember
Account name : PANITIA INTERNATIONAL CONFERENCE FKIP
UNEJ
Account number : 2000800445
Address : BNI Syariah Cabang Jember, Jember,
Indonesia

Should you have any problem or enquiry, please do not hesitate to contact us (081249492342)

5. After making payment, please notify us by sending the payment record to secretariat email (iconsme.fkip@unej.ac.id) or by whatsapp to 085746158567 (Lioni Anka Monalisa).
6. Note: Please do your best to revise your paper to meet the publication standard, as rejection from journal publication will not make your money back, but you are still entitled to publish your paper our journal.

ICONSME Committe

Ermita Rizki Albirri, S.Pd., M.Si.

Chairperson for ICONSME 2018

Dr. Dwi Wahyuni, M.Kes