SOLUSI PERSAMAAN SCHRODINGER ATOM DEUTERIUM ($^{2}_{1}$
DENGAN BILANGAN KUANTUM

SKRIPSI

Oleh:

Fitroh Fuadah

NIM. 150210102113

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN FISIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MIPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER
2019

SOLUSI PERSAMAAN SCHRODINGER ATOM DEUTERIUM (^2_1H)
DENGAN BILANGAN KUANTUM $n = 4$

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk
menyelesaikan Program Studi Pendidikan Fisika (S1)
dan mencapai gelar Sarjana Pendidikan

Oleh:

Fitroh Fuadah

NIM 150210102113

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN FISIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MIPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER
2019

PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan untuk:

1. Kedua orang tua saya Abah Sufyan Tsauri dan Ummi Masruroh, serta ketiga saudara saya yang senantiasa memberikan doa, motivasi dan dukungan dalam setiap langkah perjalanan hidup.
2. Guru-guru saya sejak raudhatul athfal hingga perguruan tinggi yang telah membimbing serta memberikan ilmu yang bermanfaat.
3. Teman seperjuangan Pendidikan Fisika angkatan 2015 yang selalu memberikan motivasi, doa serta dukungan.
4. Almamater Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember

MOTO

Sesungguhnya Allah tidak akan mengubah keadaan suatu kaum sebelum mereka mengubah keadaan mereka sendiri.[1]

[1] Departemen Agama Republik Indonesia. 2016. *Al-Qur'an dan Terjemahnya Special for Woman.* Bandung: PT Sigma Examedia Arkanleema

PERNYATAAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama : Fitroh Fuadah

NIM : 150210102113

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi berjudul "Solusi Persamaan Schrodinger Atom Deuterium ($^{2}_{1}H$) dengan Bilangan Kuantum n = 4" adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada instansi mana pun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus di junjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenar-benarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 03 Januari 2019

Yang Menyatakan,

Fitroh Fuadah

NIM. 150210102113

SKRIPSI

SOLUSI PERSAMAAN SCHRODINGER ATOM DEUTERIUM ($^{2}_{1}H$)
DENGAN BILANGAN KUANTUM $n = 4$

Oleh:

Fitroh Fuadah

NIM 150210102113

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama	**: Drs. Sri Handono B.P., M.Si**
Dosen Pembimbing Anggota	**: Lailatul Nuraini, S.Pd., M.Pd**

PENGESAHAN

Skripsi berjudul "Solusi Persamaan Schrodinger Atom Deuterium (^2_1H) dengan Bilangan Kuantum$n = 4$" telah diuji dan disahkan pada:

Hari, Tanggal:

Tempat:

Tim Penguji

Ketua,	Sekertaris,
Drs. Sri Handono B.P., M.Si NIP. 19580318 198503 1 004	Lailatul Nuraini, S.Pd., M.Pd NIDN. 0025128903
Anggota I	Anggota II
Dr. Yushardi, S.Si., M.Si NIP. 196504020 199512 1 001	Drs. Trapsilo Prihandono, M.Si NIP. 19620401 198702 1 001

Mengesahkan

Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan

Universitas Jember,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D

NIP 19680802 199303 1 004

RINGKASAN

Solusi Persamaan Schrodinger Atom Deuterium ($^{2}_{1}H$) dengan Bilangan Kuantum $n = 4$; Fitroh Fuadah, 150210102113; 2018; 44 Halaman; Program Studi Pendidikan Fisika Jurusan Pendidikan MIPA Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Atom Deuterium yang memiliki simbol (H^2_1) merupakan salah satu dari isotop Hidrogen yang terdiri dari satu proton, elektron dan neutron. Aplikasi atom ini dapat digunakan sebagai bahan pembuatan air sadah dan penentuan genesis air tanah. Persamaan gelombang sebagai gambaran dari elektron atau partikel mikroskopik dalam keadaan non relativistik disebut Persamaan Schrodinger, yang diajukan Erwin Schrodinger dalam bentuk persamaan diferensial orde dua berdasarkan hukum kekekalan energi $E = K + U$ dan taat pada hipotesis de Broglie. Hipotesis de Broglie dapat dirumuskan $\lambda = {}^{h}/_{p}$, λ adalah panjang gelombang de Broglie dari suatu partikel. Dalam mengkaji atom Deuterium digunakan persamaan Schrodinger Koordinat bola karena atom Deuterium berbentuk bola. Persamaan tersebut terdiri dari 2 persamaan, persamaan pertama yakni persamaan angular yang terdiri dari persamaan polar yang bergantung pada sudut θ dan azimuth yang bergantung pada sudut φ. Persamaan kedua yakni persamaan radial yang bergantung pada jari-jari r.

Penyelesaian dari persamaan Schrodinger koordinat bola disebut fungsi Schrodinger koordinat bola. Penelitian ini bertujuan untuk mencari fungsi gelombang atom Deuterium dengan bilangan kuantum utama $n = 4$. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah non eksperimen atau kajian literatur mengenai atom hidrogenik. Sedangkan perhitungan yang digunakan yakni perhitungan secara analitik menggunakan pendekatan persamaan Schrodinger dan secara numerik menggunakan aplikasi MatlabR2013a.

Massa tereduksi atom Deuterium didapatkan sebesar $9{,}0847 \times 10^{-31} kg$ dan jari-jari atom Deuterium sebesar $5{,}30625 \times 10^{-11}$ yang menunjukkan bahwa

jari-jari tersebut lebih besar daripada jari-jari yang dimiliki oleh atom Hidrogen ($aB = 5{,}291777 \times 10^{-11} m$). Hal itu dikarenakan massa tereduksi atom Deuterium lebih kecil dari pada massa tereduksi atom Hidrogen. Terdapat 16 fungsi gelombang atom Deuterium yang dapat diselesaikan melalui separasi variabel yang dapat ditulsikan $\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)\Theta(\theta)\varphi(\phi)$. Sehingga didapatkan fungsi gelombang atom Deuterium yang terdiri dari fungsi polar, azimut dan radial. Grafik yang dihasilkan dalam perhitungan secara numerik merupakan grafik fungsi radial dua dimensi atom Deuterium dengan bilangan kuantum utama $n = 4$.

PRAKATA

Puji Syukur kehadiret allah Swt, atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Solusi Persamaan Schrodinger Atom Deuterium (${}^{2}_{1}H$) dengan Bilangan Kuantum n = 4". Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Program Studi Pendidikan Fisika Jurusan Pendidikan MIPA Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Penyusunan ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyatakan terimakasih kepada:

1. Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D., selaku Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember yang telah memberikan fasilitas sehingga skripsi ini dapat selesai;
2. Dr. Dwi Wahyuni, M.Kes, selaku ketua jurusan Pendidikan MIPA yang telah memberikan fasilitas sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini;
3. Drs. Bambang Supriadi, M.Sc, selaku ketua program studi Pendidikan Fisika FKIP Universitas Jember yang telah memberikan fasilitas dan motivasi sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini;
4. Drs. Subiki, M.Kes, selaku dosen pembimbing akademik yang telah memberikan fasilitas sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini;
5. Drs. Sri Handono B.P., M.Si selaku Dosen Pembimbing Utama yang telah membimbing penulis dalam segala aspek sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini;
6. Lailatul Nuraini, S.Pd., M.Pd selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan segala waktu, pikiran, dan perhatian dalam membantu penulisan skripsi ini;
7. Dr. Yushardi, S.Si, M.Si, selaku Dosen Penguji Utama yang telah meluangkan waktu untuk memberikan saran dan kritik yang membangun demi kesempurnaan skripsi ini;

8. Drs. Trapsilo Prihandono, M.Si selaku Dosen Penguji Anggota yang telah membimbing, memberikan saran dan kritik yang membangun demi kesempurnaan skripsi ini;
9. Vela, Melvin, Rico, Tutut yang selalu memberikan do'a, semangat, dukungan serta membantu berdiskusi dalam mengerjakan penelitian fisika kuantum ini;
10. Risma, Isna, Dian, Evi, Annisaa' yang selalu memberikan do'a dan motivasi;
11. Keluarga Pendidikan Fisika angkatan 2015 yang selalu memberikan motivasi;
12. Serta pihak-pihak lain yang tidak dapat disebutkan satu – persatu yang telah memberikan kontribusi dan bantuannya demi kelancaran pengerjaan skripsi ini.

Kritik dan saran sangat penulis harapkan demi kebaikan dan kesempurnaan skripsi ini, semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat.

Jember, 03 Januari 2019

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

BAB 1. PENDAHULUAN

Pada bab ini memaparkan penjelasan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan, batasan masalah dan manfaat dilakukannya penelitian dengan judul "Solusi Persamaan Schrodinger Atom Deuterium (^2_1H) dengan Bilangan Kuantum n = 4".

1.1 Latar Belakang

Salah satu perkembangan dalam mekanika kuantum yang paling berpengaruh adalah gejala atom Hidrogen yang memiliki susunan yang paling sederhana. Deuterium disimbolkan D atau ^2H merupakan salah satu dari tiga bentuk isotop dari Hidrogen. Berat Deuterium dua kali lipat dari berat yang dimiliki Hidrogen (Santoso, 2015:5527). Deutron adalah sebutan dari inti yang dimiliki oleh Deuterium, mengandung satu proton dan satu neutron. Deuterium merupakan isotop stabil dengan kelimpahan alami.

Dalam aplikasinya, atom Deuterium memiliki peranan yang sangat penting salah satunya yakni produksi air berat. Air berat adalah senyawa oksida dari isotop Hidrogen dengan rumus kimia (D_2O). Air berat banyak terdapat dalam air alam, gas alam, petrolium dan sebagainya (Sukarsono, 2008:24). Dalam reaksi fisi uranium, air berat digunakan sebagai moderator neutron. Fungsi moderator adalah untuk memperlambat neutron dengan cara menyerap energi dan menumbuk neutron tanpa kecenderungan menyerap partikelnya (Beiser, 1990:426). Selain itu air berat juga digunakan pada bidang reaktor nuklir sebagai pendingin. Proses pembuatan air berat dapat dilakukan dengan beberapa metode yakni meliputi distilasi air, distilasi Hidrogen, pemisahan dengan laser, elektrolisa dan pertukaran isotop. Proses yang banyak digunakan untuk produksi air berat adalah pertukaran isotop *Gildler – Sulphide* (G-S), distilasi dan elektrolisa, yang mana metode tersebut memiliki kekurangan dan kelebihannya masing – masing. Penelitian yang telah dilakukan di BATAN Yogyakarta menggunakan 3 metode yakni metode distilasi, elektrolisa dan pertukaran isotop (Sukarsono, 2008:1).

Prinsip dari metode distilasi didasarkan atas perbedaan titik didih atau sifat volatilitas dari komponen penyusun dalam senyawa air alam. Pada air alam terdapat campuran dari H_2O, HDO dan D_2O. Metode elektrolisis menggunakan tenaga listrik untuk memisahkan isotop Deuterium dan Hidrogen, proses ini mempunyai harga faktor pemisah antara 2 – 8 kali lipat dibandingkan dengan secara distilasi. Metode pemisahan air berat dengan laser menggunakan konsep yang didasarkan pada perbedaan frekuensi resonansi dari ikatan akhir dari atom Protium dan Deuterium. Sedangkan metode pemisahan pertukaran isotop dapat dibedakan menjadi dua proses berdasarkan panas yang digunakan yakni proses monotermal dan bitermal. Penelitian Saksono *et al* (2006) menyatakan bahwa untuk mengurangi timbulnya kerak yang diakibatkan oleh air sadah dalam pipa dapat diatasi dengan magnetisasi air sadah.

Selain sebagai bahan produksi air berat, Deuterium berperan sebagai bahan penentuan genesis air tanah (sumber air tanah). Pemanfaatan isotop alam, δD dan $\delta^{18}O$ telah digunakan dalam penelitian yang dilakukan Siftianida (2016) hasil penelitian yang didapat adalah persamaan garis *merapi meteoric water line* yang dapat digunakan sebagai acuan studi hidrologi menggunakan isotop alam. Perbedaan rasio isotop yaitu D/H dan $^{16}O/^{18}O$ digunakan untuk menentukan perbandingan antara isotop berat dan isotop ringan. Dimana perbandingan antara isotop berat dan isotop ringan digunakan untuk menentukan genesis air. Rasio perbandingan antara isotop berat dan isotop ringan ini merupakan perbandingan antara rasio isotop sampel terhadap komposisi isotop dalam air laut (Siftianida *et al*, 2016:99).

Dalam mekanika kuantum persamaan yang digunakan untuk merepresentasikan elektron atau partikel mikroskopik dalam keadaan non-relativistik disebut persamaan Schrodinger yang ditemukan oleh Erwin Schrodinger (Syaifudin, *et al*). Persamaan Schrodinger atom Deuterium menggunakan persamaan Schrodinger koordinat bola mengingat atom Deuterium berbentuk bola. Fungsi persamaan Schrodinger merupakan solusi dari persamaan Schrodinger.

Penelitian sebelumnya tentang atom hidrogenik telah banyak dilakukan salah satunya yakni penelitian yang dilakukan oleh Supriyadi dan Arkundanto (2006) menyimpulkan solusi numerik persamaan Schordinger atom Hidrogen dengan metode elemen hingga memberi hasil yang cukup akurat bila dibandingkan dengan solusi analitik, kesalahan terhadap solusi analitik kurang dari 0,1 %; Aziz dan Abdullah (2015) menyimpulkan teknik pemisahan operator dan pendekatan spektral dengan menerapkan fungsi basis Chebyshev dan fungsi basis operator-operatornya yaitu: operator laplacian radian satu dimensi, operator momentum sudut dan operator potensial dapat menyelesaikan persamaan Schrodinger tiga dimensi dalam kordinat bola; Ganesan dan Balaji (2008) mengatakan untuk menyelesaikan persamaan Schrodinger pada atom elektron tunggal atau atom mirip Hidrogen adalah dengan mengubah koordinat kartesius menjadi koordinat polar dan membutuhkan pemahaman tentang polinomial legendre dan laguerre.

Kenyataan bahwa karakteristik dari atom Hidrogen dapat dikaji dengan persamaan Schrodinger dalam koordinat bola maka penelitian ini akan mengkaji isotop dari Hidrogen yakni Deuterium. Penelitian tentang atom Deuterium menggunakan pendekatan Schrodinger dengan bilangan kuantum utama $n = 1,2,3$ telah dilakukan oleh Hermanto (2016). Maka peneliti tertarik untuk mengkaji pada bilangan kuantum utama $n = 4$. Oleh karena itu penelitian ini berjudul “Solusi Persamaan Schrodinger Atom Deuterium $({}^{2}_{1}H)$ dengan Bilangan Kuantum n = 4”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang penelitian ini maka rumusan masalah yang akan dikaji adalah bagaimana fungsi gelombang atom Deuterium dengan menggunakan persamaan Schrodinger pada bilangan kuantum utama $(n = 4)$?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah menentukan fungsi gelombang atom Deuterium dengan menggunakan persamaan Schrodinger pada bilangan kuantum utama $(n = 4)$.

1.4 Batasan Masalah

Agar penelitian lebih terfokus dan dapat menjawab permasalahan yang ada, maka batasan masalah pada penelitian ini sebagai berikut:

a. Bilangan kuantum yang dimaksud dalam penelitian ini adalah bilangan kuantum utama $(n = 4)$
b. Fungsi gelombang Deuterium menggunakan syarat normalisasi
c. Fungsi gelombang yang diperoleh mengabaikan efek spin
d. Atom yang digunakan berupa atom Deuterium $({}_{1}^{2}H)$
e. Grafik yang dikaji hanya grafik fungsi radial atom Deuterium $({}_{1}^{2}H)$

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang dapat diperoleh dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

a. Bagi peneliti, dapat menambah wawasan, pengetahuan, dan pengalaman tentang fisika kuantum khususnya persamaan Schrodinger untuk mengkaji atom hidrogenik.
b. Bagi pembaca, dapat dijadikan sebagai salah satu sumber dalam mempelajari fisika kuantum khususnya persamaan Schrodinger dalam mengkaji atom hidrogenik.
c. Bagi lembaga, dapat memberikan sumbangan penelitian dan bahan referensi tambahan dalam pembelajaran mata kuliah fisika kuantum dengan pokok bahasan atom hidrogenik.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

Bab 2 menerangkan tentang dasar teori yang digunakan sebagai dasar dalam penelitian "Solusi Persamaan Schrodinger Atom Deuterium $({}_{1}^{2}H)$ dengan Bilangan Kuantum n = 4". Dasar teori yang digunakan adalah dualisme gelombang partikel, atom Deuterium $({}_{1}^{2}H)$, persamaan Schrodinger, persamaan Schrodinger atom Deuterium $({}_{1}^{2}H)$, fungsi persamaan Schrodinger atom berelektron tunggal, fungsi persamaan Schrodinger atom Deuterium $({}_{1}^{2}H)$ dan bilangan kuantum.

2.1 Dualisme Gelombang Partikel

Berbagai penemuan yang telah didiskusikan sejauh ini diantaranya mengenai radiasi benda hitam, efek foto listrik dan efek compton, Davisson-Gemer, Thomson, dan eksperimen celah ganda mengungkapkan bahwa photon, elektron, dan partikel-partikel mikroskopik tidak seperti partikel klassik dan tidak seperti gelombang klassik. Penemuan ini mengindikasikan bahwa pada skala mikroskopik secara alami dapat menampilkan perilaku partikel sama halnya seperti perilaku gelombang. (Zettili, 2009: 26).

Teori mekanika kuantum telah menjelaskan kerangka kerja yang tepat untuk memecahkan aspek partikel dan gelombang pada suatu materi, dengan menggunakan fungsi gelombang sebagai berikut:

$$\Psi(x,t) = A\, e^{-i\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)}$$

Dimana $\omega = \frac{E}{\hbar}$ dan $E = p\,v$ maka diperoleh:

$$\Psi(x,t) = A\, e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-px)} \qquad (2.1)$$

(Beiser, 1990:171)

Untuk mendeskripsikan suatu partikel seperti elektron, mekanika kuantum dapat mensimulasikan dengan membuat pernyataan tentang perilaku partikel dan gelombang sistem mikroskopik. Hal ini menggabungkan kuantitas energi dengan deskripsi gelombang materi. Itu artinya, ia menggunakan kedua partikel dan gambar gelombang untuk mendeskripsikan partikel materi yang sama.

Oleh karena itu, sistem mikroskopik bukanlah hanya murni dari partikel saja ataupun gelombang saja akan tetapi gabungan antara keduanya. Keberadaan partikel dan gelombang tidak bertentangan atau menghalangi satu sama lain, akan tetapi sama seperti yang disarankan oleh Bohr keduanya adalah sebagai pelengkap. Keduanya saling melengkapi untuk menjelaskan sifat sebenarnya dari sistem mikroskopik. Menjadi pelengkap dari sistem mikroskopik, partikel dan gelombang sangat penting untuk mendeskripsikan secara lengkap tentang sistem kuantum (Zettili, 2009:26).

2.2 Atom Deuterium ($^{2}_{1}H$)

Deuterium disebut juga Hidrogen berat merupakan salah satu dari tiga bentuk isotop Hidrogen yang terdiri dari Protium, Deuterium dan Tritium. Atom Deuterium terbentuk dari reaksi fusi yaitu penggabungan dari dua inti Hidrogen ringan. Dalam proses penggabungan dua atom Hidrogen ini melibatkan pengubahan sebuah proton menjadi sebuah proton yang disertai dengan pancaran positron (partikel menyerupai elektron yang bersifat positif), sehingga atom Deuterium yang terbentuk terdiri dari 1 elektron, 1 proton , dan 1 neutron. Berikut ini reaksi pembentukan atom Deuterium:

$$^{1}_{1}H + ^{1}_{1}H \rightarrow ^{1}_{1}H + e^{+} + \nu$$ (Beiser , 1990).

Deuterium merupakan isotop stabil dengan kelimpahan alami di bumi kira-kira satu drai 6.500 atom Hidrogen. Dengan demikian, Deuterium merupakan 0,015% dari semua Hidrogen yang terbentuk secara alami (Krane, 1992:419). Deuterium memiliki muatan +1,6 x 10^{-19} C (Gautreau *et al.*, 2006:146). Inti atom dari atom Deuterium disebut deuteron. Deuteron adalah inti dari Deuterium yang memiliki lebih dari satu penyusun yakni terdiri atas sebuah proton dan sebuah neutron yang terikat membentuk sistem stabil. Inti atom Deuterium bermuatan positif satu (+e) dan massa rehatnya sebesar 2,013 553 u. Berikut ini perbandingan antara jumlah massa proton dan neutron:

Massa proton m_p = 1,007 277 u

Massa neutron m_n = 1,008 665 u

$m_p + m_n$ = 2,015 942 u

Massa deuteron m_d = 2,013 553 u

Selisih massa disebut energi ikat, energi ikat adalah energi yang diperlukan untuk memecah inti menjadi penyusun-penyusunnya. Pada pemaparan massa proton, neutron, dan Deuterium jumlah selisih massanya sebesar = $(m_p + m_n) - m_d$ = 0,002 389 u. Besar Energi ikat deuteron adalah sebagai:

$[(m_p + m_n) - m_d]c^2$ = 0,002 389 u × 931,5 MeV/c^2 = 2,225 MeV (Kusminarto, 2011:160).

Dalam aplikasinya, atom Deuterium dapat dijadikan sebagai bahan air berat, mengetahui genesis (asal) air tanah. Dalam reaksi fisi uranium, air berat digunakan sebagai moderator neutron dengan cara menyerap energi dan menumbuk neutron tanpa kecenderungan menyerap partikelnya (Beiser, 1990:496). Salah satu contohnya dalam pembangkit listrik tenaga nuklir dengan reaktor tipe CANDU menggunakan uranium sebagai bahan bakar dan air berat sebagai moderator neutron. Air berat dimasukkan dalam pipa kalandria yang terbuat dari bahan yang tidak menyerap neutron.

Pada penelitian yang dilakukan oleh Sukarsono *et al* (2007) menyatakan bahwa ada 5 batasan karakteristik yang dapat digunakan untuk membuat pertimbangan terhadap proses pembuatan air berat (D_2O) yaitu distilasi air, distilasi Hidrogen, elektrolisa air, pemisahan isotop dengan laser dan pertukaran isotop. Berikut Tabel 2.1 yang membandingkan beberapa proses yang mungkin untuk memproduksi air berat.

Tabel 2.1 Rangkuman proses pemisahan air berat

Proses	Faktor Pemisahan	Energi dibutuhkan	Kecepatan Pemisahan	Aliran berlawanan	Masukan
Distilasi Air	**1,015-1,055**	**Sangat tinggi**	Moderat	Ya	*Air*
Distilasi Cairan H_2	*~ 1,5*	Moderat	Pelan	Ya	**H_2 sangat murni**
Elektrolisa Air	*5-10*	**Sangat tinggi**	Cepat	Tidak	Air
Pemisahan Isotop dengan Laser	*Sangat besar* > *20.000*	Moderat	Pelan	Tidak penting	**CFC_s**
Pertukaran Air H_2S	1,8-2,3	Tinggi	Cepat	Ya	*Air*

Proses	Faktor Pemisahan	Energi dibutuhkan	Kecepatan Pemisahan	Aliran berlawanan	Masukan
Pertukaran Ammonia-Hidrogen	2,8-6	Moderat	**Lambat-diperlukan katalis**	Ya	H_2
Pertukaran Aminometan	3,5-7	Moderat	**Lambat-diperlukan katalis**	Ya	H_2
Air-Hidrogen	2-3,8	Moderat	**Hampir tidak ada-diperlukan katalis**	Ya	Air

Tabel 2.1 adalah perbandingan beberapa proses yang dimungkinkan untuk proses pemisahan air berat dan proses yang mungkin untuk memproduksi air berat dari air, gas, atau bahan lain. Kalimat yang dicetak huruf tebal merupakan penjelasan tentang proses yang tidak ekonomis dan kalimat yang dicetak miring menandakan proses yang baik. Setiap proses pemisahan air berat memiliki kelebihan dan kelemahannya masing-masing.

Aplikasi isotop alam adalah salah satu metode yang digunakan sebagai tinjauan mengenai dinamika air dalam aspek hidrogeologi, khususnya mengenai asal usul air tanah. Isotop yang digunakan untuk mengetahui asal – usul air tanah adalah isotop stabil Deuterium (^{2}H atau D) dan isotop Oksigen (^{18}O) (Siftianida *et al.*, 2016:98).

2.3 Persamaan Schrodinger

Persamaan Schrodinger merupakan persamaan differensial orde kedua yang ditemukan oleh seorang ilmuwan fisika yang berasal dari Austria yakni Erwin Schrodinger (1887-1961). Pemecahan persamaan Schrodinger harus memenuhi 3 syarat di bawah ini:

1. Taat hukum kekekalan energi.

   Hukum kekekalan energi menyatakan bahwa jumlah energi kinetik dan energi potensial sama dengan jumlah energi total yang selalu bersifat kekal. Secara matematis tertulis sebagai berikut:

   $$K + V = E \tag{2.2}$$

K = energi kinetik, V = energi potensial dan E = energi total. Dalam fisika kuantum energi total dibatasi oleh keadaan tidak relativistik, yang dapat ditulis:

$$K = \frac{1}{2}\, m\, v^2 = \frac{p^2}{2m} \tag{2.3}$$

E hanyalah menyatakan jumlah energi kinetik dan potensial, bukan energi massa relativistik.

2. Tidak boleh melanggar asas terhadap hipotesis deBroglie.

   Bentuk persamaan apapun yang ditulis harus taat asas terhadap hipotesis deBroglie. Pemecahan matematika bagi seluruh partikel dengan momentum p, maka haruslah berbentuk sebuah fungsi gelombang dengan panjang gelombang $\lambda = \frac{h}{p}$, variabel h merupakan konstanta planck yang besarnya 6,627 x 10^{-34} $J.s$.

3. Bernilai tunggal dan linear.

   Fungsi gelombang bernilai tunggal artinya probabilitas guna menemukan partikel disuatu titik yang sama tidak boleh ada dua kemungkinan (probabilitas). Sedangkan fungsi gelombang harus linear tujuannya agar gelombangnya memiliki sifat superposisi yang kita harap sebagai milik gelombang yang berperilaku baik. Indikator dari sifat gelombang bernilai tunggal dan linier adalah fungsi gelombang harus memiliki sifat superposisi gelombang (Krane, 1992:172).

Fungsi gelombang Schrodinger dilambangkan dengan simbol ψ. Pada atom Hidrogen, fungsi gelombangnya mengandung makna tiga dimensi yakni pada sumbu x, sumbu y dan sumbu z dan juga fungsi φ yang menunjukkan fungsi waktu t. Dengan demikian, fungsi dari persamaan Schrodinger dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\psi\,(x,y,z,t) = \psi\,(x,y,z)\,\varphi(t) \tag{2.4}$$

Dimana:

ψ_x = fungsi gelombang pada arah sumbu x

ψ_y = fungsi gelombang pada arah sumbu y

ψ_z= fungsi gelombang pada arah sumbu z

φ_t = fungsi waktu

Fungsi ψ jika ditulis dalam fungsi eksponensial maka dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\psi\ (x,y,z,t) = A\ e^{i(k_1+k_2+k_3)} + B\ e^{-i(k_1+k_2+k_3)} \tag{2.5}$$

Sedangkan fungsi 2.4 yang mengandung fungsi waktu jika ditulis sebagai fungsi eksponensial akan menjadi:

$$\varphi(t) = D\ e^{-i\omega t} \tag{2.6}$$

Dari persamaan fungsi eksponensial 2.5 dan 2.6 dapat dituliskan:

$$\psi = AD\ e^{i(k_1+k_2+k_3)}e^{-i\omega t} + BD\ e^{-i(k_1+k_2+k_3)}e^{-i\omega t} \tag{2.7}$$

Variabel A dan B adalah koefisien dari fungsi posisi (ψ), D adalah koefisien dari fungsi waktu (φ), sedangkan k adalah konstanta gelombang yang dapat dicari melalui $\frac{2\pi}{\lambda}$ dan ω adalah kecepatan sudut yang sama dengan $2\pi f$, kemudian e adalah natural euler dan i adalah bilangan imajiner.

Persamaan 2.7 dapat ditulis secara ringkas sebagai berikut:

$$\psi = C_1\ e^{i(k_1+k_2+k_3)}e^{-i\omega t} + C_2\ e^{-i(k_1+k_2+k_3)}e^{-i\omega t} \tag{2.8}$$

Dengan C_1 = AD dan C_2 = BD

Kemudian turunan pertama dari persamaan 2.8 terhadap waktu dapat dituliskan:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\omega\psi = -i2\pi f \tag{2.9}$$

Atau dapat dituliskan:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\ \frac{E}{\hbar} \tag{2.10}$$

Simbol E adalah kuanta energi menurut Planck $E = hf$ dan konstanta Planck persatuan 2π adalah $\hbar = \frac{h}{2\pi}$.

Diketahui posisi pada tiga dimensi terdapat tiga komponen yakni pada sumbu x, y dan z maka turunan kedua dari fungsi posisi dibutuhkan operator Laplacian:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{2.11}$$

Fungsi gelombang ψ diturunkan secara parsial terhadap ruang tiga dimensi akan menghasilkan:

$$\nabla^2\psi = (i^2k_1^2 + i^2k_2^2 + i^2k_3^2)\psi = - k^2\psi = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \quad (2.12)$$

$$\nabla^2\psi = -\frac{p^2}{\hbar^2}\psi \quad (2.13)$$

Kemudian energi mekanik total dapat dinyatakan oleh persamaan:

E = K + V

Hasil kali antara energi mekanik total dan persamaan fungsi gelombang dapat dituliskan:

$$E\psi = \frac{P^2}{2m}\psi + V\psi \quad (2.14)$$

Kemudian subtitusikan persamaan 2.10 dan persamaan 2.13 kedalam persamaan 2.14, sehingga diperoleh:

$$E\psi = \frac{P^2}{2m}\psi + V\psi$$

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi}\nabla^2\psi\psi + V\psi$$

$$i\,\hbar\,\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi \quad (2.15)$$

Persamaan 2.15 disebut sebagai persamaan Schrodinger yang dalam hal ini berkeadaan non relativistik pada kasus tiga dimensi (Sugiyono, 2016). Sedangkan untuk kasus satu dimensi dapat ditulis sebagai berikut:

$$i\,\hbar\,\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi \quad (2.16)$$

2.3.1 Persamaan Schrodinger Tidak Bergantung Waktu

Persamaan Schrodinger tidak bergantung waktu memiliki makna bahwa persamaan tersebut bersifat kekal. Untuk menyelesaikan persamaan Schrodinger tidak bergantung waktu, ditinjau kembali persamaan 2.1 kemudian diuraikan berdasarkan variabel x dan t:

$$\Psi(x,t) = A\,e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-px)}$$

$$\Psi(x,t) = A\,e^{\frac{-iEt+ipx}{\hbar}}$$

$$\Psi(x,t) = A\,e^{\frac{ipx}{\hbar}}e^{\frac{-iEt}{\hbar}}$$

Dengan memisalkan $\Psi(x) = A\,e^{\frac{ipx}{\hbar}}$ maka diperoleh:

$$\Psi(x,t) = \Psi(x)e^{\frac{-iEt}{\hbar}} \quad (2.17)$$

Kemudian subtitusi persamaan (2.17) ke dalam persamaan (2.16) diperoleh hasil sebagai berikut:

$$i\,\hbar\,\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi$$

$$i\,\hbar\,\frac{\partial\psi(x)e^{\frac{-iEt}{\hbar}}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)e^{\frac{-iEt}{\hbar}}}{\partial x^2} + V\psi(x)e^{\frac{-iEt}{\hbar}}$$

$$-i\,\hbar\,\frac{iE}{\hbar}\psi(x)e^{\frac{-iEt}{\hbar}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}e^{\frac{-iEt}{\hbar}} + V\psi(x)e^{\frac{-iEt}{\hbar}} \qquad (2.18)$$

Pada semua ruas persamaan (2.18) dikalikan dibagi dengan $e^{\frac{-iEt}{\hbar}}$ maka akan diperoleh:

$$E\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} + V\psi$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} + \big(E - V(x)\big)\psi(x) = 0 \qquad (2.19)$$

Persamaan 2.19 merupakan persamaan Schrodinger tidak bergantung waktu dalam satu dimensi, jika pada tiga dimensi dapat dituliskan:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{\partial^2\psi_{(x,y,z)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_{(x,y,z)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi_{(x,y,z)}}{\partial z^2}\right\} + \big(E - V(x)\big)\psi_{(x,y,z)} = 0$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\}\psi_{(x,y,z)} + \big(E - V(x)\big)\psi_{(x,y,z)} = 0 \qquad (2.20)$$

(Beiser, 1990:176).

2.3.2 Persamaan Schrodinger Atom Hidrogen

Atom Hidrogen terdiri dari satu proton sebagai nukleus dan satu elektron yang mengitarinya merupakan atom yang sederhana. Nilai dari massa proton lebih besar daripada massa elektron, dengan besar perbandingannya adalah m_p (massa proton) = 1836 m_e (massa elektron). Pada pembahasan ini, diasumsikan proton diam dipusat koordinat dan elektron bergerak mengelilinginya dibawah pengaruh medan atau gaya Couloumb. Karena proton dianggap diam, maka kontribusi energi sistem hanya diberikan oleh elektron yaitu energi kinetik (persamaan 2.3) serta energi potensial:

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} \qquad (2.21)$$

Atau dapat ditulis:

$$V(r) = -\frac{e^2 Z}{4\pi\varepsilon_{0r}}$$

Variabel V merupakan interaksi energi antara elektron dan nukleus yang diberikan oleh formulasi Coulomb (Metiu, 1940:296). Karena k = $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ maka persamaan 2.21 juga dapat ditulis:

$$V(r) = -\frac{ke^2}{r}$$

(Anderson, 1982:187)

$$E = H = \frac{P^2}{2m_e} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} \tag{2.22}$$

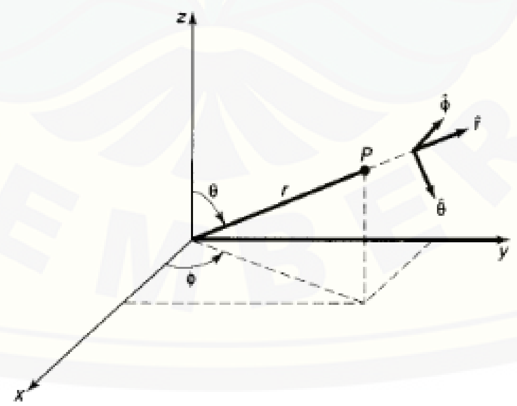
Dengan demikian, persamaan Schrodinger untuk atom Hidrogen:

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m_e}\nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\right\} \psi(\bar{r}) = E\psi(\bar{r}) \tag{2.23}$$

Mengingat sistem Hidrogen berbentuk simetri bola, analisis menjadi lebih sederhana bila operator Laplace ∇^2 diungkapkan dalam koordinat bola, operator Laplace diberikan:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\ \frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi^2} \tag{2.24}$$

(Supriadi *et al.*, 2018:2)



Gambar 2.1 Koordinat bola: jari-jari r, sudut polar θ dan sudut azimuth ϕ.

Di dalam koordinat bola (r,θ, φ), variabel r merupakan persamaan radial, θ merupakan persamaan polar dan φ merupakan persamaan azimut. Kemudian persamaan (2.23) menjadi:

$$\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right\}\psi_{(r,\theta,\varphi)}+$$

$$(E-V)\psi_{(r,\theta,\varphi)} \tag{2.25}$$

Karena atom Hidrogen terdiri dari sistem 2 partikel dengan gaya sentral, maka persamaan 2.25 dapat dituliskan:

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{{r_c}^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r_c}\left({r_c}^2\frac{\partial}{\partial r_c}\right)+\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right\}\psi_{(r,\theta,\varphi)}+$$

$$(E-V)\psi_{(r,\theta,\varphi)} \tag{2.26}$$

Dengan μ merupakan massa tereduksi yang dinyatakan sebagai:

$$\mu=\frac{m_1\,m_2}{m_1+m_2} \tag{2.27}$$

(Kozlowski,2010)

Kemudian r_c merupakan posisi pusat massa sistem yang dinyatakan sebagai berikut:

$$r_c=\frac{(r_1m_1+r_2m_2)}{(m_1+m_2)} \tag{2.28}$$

Kemudian untuk mendapatkan solusi bagi persamaan (2.26) dilakukan pemisahan antara variabel $\psi\,(\bar{r})=\psi(\mathrm{r},\theta,\varphi)$:

$$\psi(\mathrm{r},\theta,\varphi)=\mathrm{R(r)}\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

atau dapat dituliskan sebagai:

$$\psi(\mathrm{r},\theta,\varphi)=\mathrm{R}\Theta\Phi \tag{2.29}$$

Persamaan 2.29 disubtituskan ke dalam persamaan (2.26) kemudian dikalikan $\left(\frac{2\mu {r_c}^2}{\hbar^2}\right)$ didapatkan:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial r_c}\left({r_c}^2\frac{\partial}{\partial r_c}\right)+\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right\}\mathrm{R}\Theta\Phi+\frac{2\mu {r_c}^2}{\hbar^2}$$

$$E\mathrm{R}\Theta\Phi-\frac{2\mu {r_c}^2}{\hbar^2}V\mathrm{R}\Theta\Phi=0$$

$$\frac{\partial}{\partial r_c}\left({r_c}^2\frac{\partial\mathrm{R}\Theta\Phi}{\partial r_c}\right)+\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial\mathrm{R}\Theta\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{sin^2\theta}\frac{\partial^2\mathrm{R}\Theta\Phi}{\partial\varphi^2}+\frac{2\mu {r_c}^2}{\hbar^2}$$

$$(E-V)\mathrm{R}\Theta\Phi=0$$

$$\frac{d}{dr_c}\left({r_c}^2\frac{d\mathrm{R}}{dr_c}\right)\Theta\Phi+\frac{1}{sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)\mathrm{R}\Phi+\frac{1}{sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\mathrm{R}\Theta+\frac{2\mu {r_c}^2}{\hbar^2}$$

$$(E-V)\mathrm{R}\Theta\Phi=0$$

Selanjutnya setiap suku dari persamaan diatas dibagi dengan RΘΦ maka diperoleh:

$$\frac{d}{dr_c}\left(r_c{}^2\frac{dR}{dr_c}\right)\frac{\Theta\Phi}{R\Theta\Phi}+\frac{1}{sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)\frac{R\Phi}{R\Theta\Phi}+\frac{1}{sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\frac{R\Theta}{R\Theta\Phi}+\frac{2\mu r_c{}^2}{\hbar^2}$$

$$(E-V)\frac{R\Theta\Phi}{R\Theta\Phi}=0$$

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr_c}\left(r_c{}^2\frac{dR}{dr_c}\right)+\frac{1}{\Theta sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\frac{1}{\phi sin^2\theta}\frac{d^2\phi}{d\varphi^2}+\frac{2\mu r_c{}^2}{\hbar^2}(E-V)=0$$

(2.30)

Pada persamaan 2.30 tampak bahwa suku pertama dan suku keempat hanya bergantung jari-jari r, suku kedua dan ketiga hanya bergantung sudut θ dan φ. Jika masing masing suku (suku pertama, kedua, ketiga dan keempat) sama dengan konstan maka penjumlahan suku–suku yang hanya bergantung pada jari–jari dan dua sudut ini akan selalu sama dengan nol untuk sembarang nilai r, θ, dan φ. Suku yang hanya bergantung jari-jari akan menjadi:

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr_c}\left(r_c{}^2\frac{dR}{dr_c}\right)+\frac{2\mu r_c{}^2}{\hbar^2}(E-V)=l(l+1) \qquad (2.31)$$

Sedangkan suku yang hanya mengandung sudut θ dan φ dapat dituliskan menjadi:

$$\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\frac{1}{\phi sin^2\theta}\frac{d^2\phi}{d\varphi^2}=-l(l+1) \qquad (2.32)$$

Dikalikan dengan $sin^2\theta$, persamaan 2.32 menjadi:

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\frac{1}{\phi}\frac{d^2\phi}{d\varphi^2}+l\,(l+1)sin^2\theta=0 \qquad (2.33)$$

Selanjutnya tetapkan masing-masing bagian dengan konstanta -m^2 dan m^2.

$$\frac{1}{\phi}\frac{d^2\phi}{d\phi^2}=-m^2 \qquad (2.34)$$

Atau

$$\frac{d^2\phi}{d\phi^2}+m^2\phi=0 \qquad (2.35)$$

Sehingga

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+l\,(l+1)sin^2\theta=m^2 \qquad (2.36)$$

Atau setelah dikalikan dengan $\Theta/_{sin^2\theta}$ diperoleh:

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\left\{l\,(l+1)-\frac{m^2}{sin^2\theta}\right\}\Theta=0 \qquad (2.37)$$

Dengan demikian persamaan 2.26 dapat dipisah menjadi tiga persamaan differensial biasa. Selanjutnya, akan dijabarkan solusi persamaan azimut, persamaan polar dan persamaan radial (Purwanto, 2006).

2.4 Persamaan Schrodinger Atom Deuterium ${}_{1}^{2}H$

Persamaan Schrodinger atom Deuterium sama seperti persamaan Schrodinger atom Berelektron tunggal. Terdiri dari 3 persamaan yakni persamaan radial yang tertulis pada persamaan 2.31, persamaan azimut yang tertulis pada persamaan 2.35, dan persamaan polar pada persamaan 2.33.

2.5 Fungsi Persamaan Schrodinger Atom Berelektron Tunggal

Fungsi persamaan Schrodinger atom Hidrogen (atom berelektron tunggal) merupakan solusi dari persamaan Schrodinger yang terdiri dari fungsi persamaan radial, azimut dan polar yang didapatkan dari metode pemisahan variabel. Pembahasan lebih rinci mengenai solusi radial, azimuth dan polar adalah sebagai berikut:

2.5.1 Fungsi Persamaan Koordinat Azimut (ϕ)

Persamaan azimut adalah persamaan yang menunjukkan gerak angular (rotasi) pada sumbu z (sudut ϕ) (Sugiyono, 2016:410). Tinjau kembali 2.35 tertulis:

$$\frac{d^2\phi}{d\phi^2} + m^2\phi = 0$$

Persamaan diatas merupakan persamaan diferensial biasa yang pemecahannya dapat dimisalkan $\frac{d}{d\varphi}$ = T maka menjadi:

$$(T^{\mathbf{2}} + m^{\mathbf{2}})\boldsymbol{\phi} = 0$$

$$(T^2\phi + m^2\phi) = 0$$

$$T^2\phi = -m^2\phi$$

$$T = \sqrt{-m^2}$$

$$T = \pm im \tag{2.38}$$

Kedua ruas persamaan 2.35 dikalikan dengan ϕ maka dihasilkan:

$$\frac{d\phi}{\phi} = \pm imd\varphi \tag{2.39}$$

Kemudian persamaan 2.36 diintegralkan sehingga dihasilkan:

$$\int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\phi}{\phi} = \pm im \int_0^{\varphi} d\varphi$$

$$(\ln \phi]_{\phi_0}^{\phi} = \pm im\ (\varphi]_0^{\varphi}$$

$$\ln \frac{\phi}{\phi_0} = \pm im\varphi$$

$$\frac{\phi}{\phi_0} = e^{\pm im\varphi}$$

$$\Phi = \phi_0 e^{\pm im\varphi}$$

Agar nilai dari ϕ_0 didapatkan, maka fungsi Φ tersebut harus dinormalisasikan sebagai berikut:

$$\int_0^{2\pi} \phi^* \phi = 1 \text{ maka } \int_0^{2\pi} \phi_0^2 d\varphi = 1$$

Sehingga diperoleh nilai dari $\phi_0 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}$. Jadi solusi untuk persamaan azimut ϕ adalah

$$\Phi = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{\pm im\varphi} \tag{2.40}$$

Bilangan kuantum m disebut juga *bilangan kuantum magnetik* (Purwanto, 2006:157).

2.5.2 Fungsi Persamaan Koordinat Polar (θ)

Persamaan polar atau pada persamaan 2.36 disebut juga persamaan differensial legendre terasosiasi, yang mana solusi persamaan ini dapat diperoleh menggunakan metode Frobenius dan diberikan oleh deret berhingga yang dikenal sebagai polinom legendre terasosiasi. Konstanta pada persamaan ini adalah $l(l+1)$ agar solusinya berhingga. Solusi persamaan 2.36 diberikan oleh polinom legendre terasosiasi $F_l^m(\cos\theta)$.

$$\Theta(\theta) = \Theta_{lm}(\theta) = N_{lm} F_l^m(cos\theta) \tag{2.41}$$

Dengan N_{lm} merupakan konstanta normalisasi. Sedangkan fungsi dari $F_l^m(\cos\theta)$ sendiri dapat dituliskan sebagai berikut:

$$F_l^m(\cos\theta) = (1 - cos^2\theta)^{\frac{|m|}{2}} \left(\frac{d}{d(\cos\theta)}\right)^{|m|} F_l(\cos\theta) \tag{2.42}$$

$F_l(\cos\theta)$ disebut polinomial legendre yang didapatkan dengan rumus Rodrigues yang dapat dituliskan:

$$F_l(\cos\theta) = \frac{1}{2^l l!}\left(\frac{d}{d(\cos\theta)}\right)^l (cos^2\theta - 1)^l \text{ ....} (2.43)$$

Kemudian dilakukan normalisasi yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\int_0^\pi F_l^m(cos\theta) F_{l'}^{m'}(cos\theta) sin\theta d\theta = \frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)}{(l-m)}\delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

Sedangkan konstanta normalisasi fungsi Legendre terasosiasi didapatkan:

$$N_{lm} = (-1)^{(m+|m|)/2}\sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} \tag{2.44}$$

Sehingga persamaan

$$\Theta_{lm}(\theta) = (-1)^{(m+|m|)/2}\sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} F_l^m(cos\theta) \tag{2.45}$$

Untuk l tertentu m dapat berharga

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm l \tag{2.46}$$

Bilangan bulat l disebut sebagai *bilangan kuantum orbital* (Purwanto, 2006:160). Persamaan ini menggambarkan elektron bergerak secara periodik didalam ruang tiga dimensi.

2.5.3 Fungsi Persamaan Koordinat Radial (r)

Persamaan koordinat radial yang sudah tertulis pada persamaan 2.31 dapat dituliskan kembali sebagai berikut:

$$\frac{d}{dr_c}\left(r_c{}^2\frac{dR}{dr_c}\right)+\frac{2\mu r_c{}^2}{\hbar^2}(E-V)R=l(l+1)R$$

Subtitusikan persamaan 2.1 kedalam persamaan 2.31 akan diperoleh:

$$\frac{d}{dr_c}\left(r_c{}^2\frac{dR}{dr_c}\right)+\frac{2\mu r_c{}^2}{\hbar^2}\left(E+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_c}\right)R=l(l+1)R \qquad (2.46)$$

Atau dapat dituliskan:

$$\frac{1}{r_c^2}\frac{d}{dr_c}\left(r_c{}^2\frac{dR}{dr_c}\right)+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_c}-\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r_c^2}\right)R=0 \qquad (2.47)$$

Untuk mencari solusi persamaan radial dapat digunakan pemisalan sebagai berikut:

$$\rho=\left[\frac{8\mu|E|}{\hbar^2}\right]^{\left(\frac{1}{2}\right)}r_c \qquad (2.48)$$

$$d\rho=\left[\frac{8\mu|E|}{\hbar^2}\right]^{\left(\frac{1}{2}\right)}dr_c \qquad (2.49)$$

Kemudian subtitusikan persamaan 2.48 dan 2.49 kedalam persamaan 2.47:

$$\frac{1}{\frac{\rho 2}{\left[\frac{8\mu|E|}{\hbar^2}\right]^{(1)}}\cdot\frac{d\rho}{\left[\frac{8\mu|E|}{\hbar^2}\right]^{\left(\frac{1}{2}\right)}}}\left(\frac{\rho 2}{\left[\frac{8\mu|E|}{\hbar^2}\right]^{(1)}}\frac{dR}{\frac{d\rho}{\left[\frac{8\mu|E|}{\hbar^2}\right]^{\left(\frac{1}{2}\right)}}}\right)+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\frac{\rho}{\left[\frac{8\mu|E|}{\hbar^2}\right]^{\left(\frac{1}{2}\right)}}}-\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu\frac{\rho 2}{\left[\frac{8\mu|E|}{\hbar^2}\right]^{(1)}}}\right)R=0$$

$$\frac{1}{\left[\frac{8\mu|E|}{\hbar^2}\right]^{-1}\rho^2\,d\rho}\left(\rho^2\frac{dR}{d\rho}\right)+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\frac{\rho}{\left[\frac{8\mu|E|}{\hbar^2}\right]^{\left(\frac{1}{2}\right)}}}-\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu\frac{\rho 2}{\left[\frac{8\mu|E|}{\hbar^2}\right]^{(1)}}}\right)R=0$$

(2.50)

$$\frac{1}{\left[\frac{8\mu|E|}{\hbar^2}\right]^{-1}\rho^2\;d\rho}\left(\rho^2\frac{dR}{d\rho}\right)+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\rho\left[\frac{8\mu|E|}{\hbar^2}\right]^{\left(-\frac{1}{2}\right)}}-\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu\left[\frac{8\mu|E|}{\hbar^2}\right]^{(-1)}\rho}\right)R=0$$

(2.51)

Setiap suku pada persamaan 2.51 dikalikan dengan $\left[\frac{8\mu|E|}{\hbar^2}\right]^{(-1)}$akan didapatkan:

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\,\frac{dR}{d\rho}\right)+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\rho}\left[\frac{8\mu|E|}{\hbar^2}\right]^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu\rho^2}\right)R=0$$

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\,\frac{dR}{d\rho}\right)+\left(\frac{E}{4|E|}+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{\rho}\frac{2\mu}{\hbar^2}\left[\frac{8\mu|E|}{\hbar^2}\right]^{\left(-\frac{1}{2}\right)}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right)R=0$$

Untuk kasus energi terikat dimana $E=\;-|E|$, maka diperoleh:

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\,\frac{dR}{d\rho}\right)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{\rho}\frac{\mu}{\hbar}[8\mu|E|]^{\left(-\frac{1}{2}\right)}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right)R=0 \qquad (2.52)$$

Agar penyelesainnya lebih sederhana maka dibuat pemisalan $Q=\left[\frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0\hbar}\right]\left[\frac{\mu}{8|E|}\right]^{1/2}$pada persamaan 2.52. Maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\frac{1}{\rho^2}\,\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{dR}{d\rho}\right)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{\rho}.Q-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right)R=0 \qquad (2.53)$$

Untuk mencari solusi dari persamaan 2.53 maka akan dicari perilaku persamaan pada dua daerah yakni pada jarak jauh sekali dan pada daerah koordinat. Daerah jauh sekali $\rho\to\infty$ yang diperoleh:

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}-\frac{1}{4}R=0$$

Maka solusinya dapat ditulis:

$$R\approx e^{-\rho/2} \qquad (2.54)$$

Sedangkan untuk daerah titik asal diperoleh:

$$R = \frac{R(\rho)}{\rho}$$

$$R(\rho) = U$$

Maka:

$$\frac{dR}{d\rho} = \frac{d}{d\rho}\left(\frac{U}{P}\right)$$

$$= \frac{1}{\rho}\frac{dU}{d\rho} - \frac{1}{\rho^2}.U$$

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{dR}{d\rho}\right) = \frac{d}{d\rho}\left[\rho^2\left(\frac{1}{\rho}.\frac{dU}{d\rho} - \frac{1}{\rho^2}.U\right)\right]$$

$$= \frac{d}{d\rho}\left[\rho\left(\frac{dU}{d\rho} - \frac{1}{\rho}.U\right)\right]$$

$$= \frac{d}{d\rho}\left[\rho\left(\frac{dU}{d\rho} - \frac{U}{\rho}\right)\right]$$

$$= \rho.\frac{d^2U}{d\rho^2} \tag{2.55}$$

Dengan mensubtitusikan $R = \frac{U}{\rho}$ kedalam persamaan 2.53 maka dapat diperoleh:

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2.\frac{dR}{d\rho}\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{Q}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right)\frac{U}{\rho} = 0$$

$$\frac{d^2U}{d\rho^2} + \left(-\frac{1}{4}U + \frac{Q}{\rho}\,U - \frac{l(l+1)}{\rho^2}U\right) = 0$$

$$\frac{d^2U}{d\rho^2} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}U + \left(\frac{Q}{\rho} - \frac{1}{4}\right)U = 0 \tag{2.56}$$

Untuk nilai limit $\rho \to \infty$ pada $\left(\frac{Q}{\rho} - \frac{1}{4}\right)U$ dapat diabaikan, sehingga:

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{d^2U}{d\rho^2} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}U + \left(\frac{Q}{\rho} - \frac{1}{4}\right)U =$$

$$\frac{d^2U}{d\rho^2} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}U = 0$$

Solusinya:

$$U = \rho^{l+1}$$

Sehingga ,

$$R = \frac{U}{\rho} = \frac{\rho^{l+1}}{\rho} = \rho^{l} \tag{2.57}$$

Kemudian dengan menggabungkan persamaan 2.54 dan 2.57 akan diperoleh bahwa solusi umum merupakan perkalian antara persamaan 2.54 dan 2.57 dan konstanta *Laguerre* L yang bergantung pada ρ dapat dituliskan $L(\rho)$:

$$R(\rho) = \rho^{l} e^{-\frac{\rho}{2}} L(\rho) \tag{2.58}$$

Persamaan 2.58 dijabarkan menggunakan polynomial Laguerre dari persamaan 2.56:

$$\frac{d^2U}{d\rho^2} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} U + \left(\frac{Q}{\rho} - \frac{1}{4}\right) U = 0$$

$$U = \rho^{l+1} e^{-\frac{\rho}{2}} L(\rho)$$

Suku pertama dari persamaan 2.56 diperoleh:

$$\frac{d^2U}{d\rho^2} = L(\rho)\left[l(l+1)\rho^{l-1}e^{-\frac{\rho}{2}} - (l+1)\rho^{l}e^{-\frac{\rho}{2}} + \frac{1}{4}\rho^{l+1}e^{-\frac{\rho}{2}}\right] + \frac{\partial L(\rho)}{\partial \rho}\left[2(l+1)\rho^{l}e^{-\frac{\rho}{2}} - \rho^{l+1}e^{-\frac{\rho}{2}}\right] + \frac{\partial^2 L(\rho)}{\partial \rho^2}\left[\rho^{l+1}e^{-\frac{\rho}{2}}\right] \tag{2.59}$$

Persamaan 2.56 dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$$L(\rho)\left[l(l+1)\rho^{l-1}e^{-\frac{\rho}{2}} - (l+1)\rho^{l}e^{-\frac{\rho}{2}} + \frac{1}{4}\rho^{l+1}e^{-\frac{\rho}{2}}\right] + \frac{\partial L(\rho)}{\partial \rho}\left[2(l+1)\rho^{l}e^{-\frac{\rho}{2}} - \rho^{l+1}e^{-\frac{\rho}{2}}\right] + \frac{\partial^2 L(\rho)}{\partial \rho^2}\left[\rho^{l+1}e^{-\frac{\rho}{2}}\right] - -\frac{l(l+1)}{\rho^2} U + \left(\frac{Q}{\rho} - \frac{1}{4}\right) U = 0 \tag{2.60}$$

Persamaan 2.60 dikalikan dengan $\rho^{-l}e^{\frac{\rho}{2}}$ hal bertujuan agar persamaan lebih sederhana:

$$\rho\frac{\partial^2 L(\rho)}{\partial \rho^2} + \frac{\partial L}{\partial \rho}[2(l+1) - \rho] + L(\rho)[A - (l+1)] = 0 \tag{2.61}$$

Solusi deret pada persamaan 2.61 dapat dituliskan:

$$L = \rho^s \sum_{s=0}^{\sim} a_s \rho^s \tag{2.62}$$

Sehingga dapat menghasilkan rumus rekursi:

$$a_{s+1} = \frac{s+l+1-Q}{(s+1)(s+2l+2)} a_s \tag{2.63}$$

Deret akan menjadi berhingga jika A adalah bilangan bulat misal $A = n$. Namun deret a_{s+1} akan bernilai nol ketika varibel $s = n - l - 1$. Sehingga $L(\rho)$ merupakan deret polynomial. Untuk konstanta sama dengan n, maka persamaan 2.61 akan menjadi:

$$\rho \frac{\partial^2 L(\rho)}{\partial \rho^2} + \frac{\partial L}{\rho}[2(l+1) - \rho] + L(\rho)[n - (l+1)] = 0 \tag{2.64}$$

Persamaan 2.64 merupakan persamaan differensial *Laguerre Terasosiasi* yang mempunyai bentuk umum sebagai berikut:

$$\rho \frac{\partial^2 L(\rho)}{\partial \rho^2} + [p + 1 - \rho] \frac{\partial L_q^p}{\partial \rho} + [q - p] L_p^q = 0 \tag{2.65}$$

Solusi persamaan 2.65 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$L_p^q = L_{n+l}^{2l+1}(\rho) = (-1)^{2l+1} \frac{(n+l)!}{(n-l-1)!} \frac{e^{2r}}{na_0} \frac{d^{n+l}}{d\left(\frac{2r}{na_0}\right)^{n+l}} \left(e^{-\frac{2r}{na_0}} \left(\frac{2r}{na_0}\right)^{n-l-1}\right) \tag{2.66}$$

Sehingga solusi persamaan radial didapatkan:

$$R_{nl} = \sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n((n+l)!)^3}} \left(\frac{2r}{na_0}\right)^l e^{-\frac{r}{na_0}} L_{n+l}^{2l+1} \left(\frac{2r}{na_0}\right) \tag{2.67}$$

(Singh, 2009:237)

2.6 Fungsi Persamaan Schrodinger Atom Deuterium $\left({}_1^2H\right)$

2.6.1 Fungsi Persamaan Azimut dan Polar

Fungsi persamaan azimut dan polar pada atom Deuterium sama dengan fungsi azimut dan polar yang dimiliki atom berelektron tunggal (Hidrogen), yang tertulis masing-masing pada persamaan 2.40 dan 2.45.

2.6.2 Fungsi Persamaan Radial

Fungsi persamaan radial pada atom Deuterium sama dengan fungsi radial koordinat bola yang dalam hal ini tertulis pada persamaan 2.67.

2.7 Bilangan Kuantum

Persamaan Schrodinger dalam koordinat bola (r,θ, ϕ) atau tiga dimensi dalam pemecahan persoalannya membutuhkan tiga bilangan kuantum untuk mencirikan semua pemecahannya. Oleh karena itu, semua fungsi atom Hidrogen akan diperoleh oleh ketiga bilangan kuantum. Bilangan kuantum pertama, n berkaitan dengan pemecahan fungsi radial. Bilangan n ini disebut bilangan kuantum utama yang digunakan pula untuk menamai tingkat–tingkat energi pada atom Bohr. Pemecahan bagi fungsi polar, $\Theta(\theta)$, memberikan bilangan kuantum l, dan bagi fungsi, $\phi(\phi)$, memberikan bilangan kuantum ketiga yaitu *m* (Krane, 1992:268).

a. Bilangan kuantum utama (n)

Bilangan kuantum utama berfungsi untuk menentukan energi dari elektron di dalam atom yang berisi satu elektron dan banyak elektron. Bilangan kuantum ini berharga positif dan bulat dari 1 keatas. Makin besar harga n, maka tenaga elektronnya akan makin besar (Sukardjo, 2013:472). Menentukan bilangan n adalah setara dengan memilih suatu tingkat energi tertentu, seperti halnya dengan atom Bohr. Selanjutnya, bila memecahkan persamaan Schrodinger, akan ditemukan bahwa semua tingkat energi terkuantisasinya sesuai dengan milik model Bohr.

$$E_n = -\frac{me^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}\frac{1}{n^2} \tag{2.68}$$

Perhatikan bahwa energi pada persamaan 2.68 hanya bergantung kepada bilangan kuantum n, tidak bergantung pada bilangan kuantum l dan *m* (Krane, 1992:269).

b. Bilangan Kuantum Azimut (l)

Bilangan kuantum azimut adalah bilangan kuantum yang menentukan momentum sudut. Jadi, semakin besar bilangan kuantum azimut (l) maka semakin besar pula momentum sudutnya. Bilangan kuantum ini bernilai bulat dari 0 hingga n – 1. Sebagai contoh, untuk n = 2 maka l = 0 dan l = 1 (Sukardjo, 2013:472). Besarnya momentum sudut elektron dapat dituliskan sebagai berikut:

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar \tag{2.69}$$

(Krane, 2008:271)

Gabungan nilai bilangan kuantum utama (n) dan bilangan kuantum azimut (l) sering digunakan untuk menyatakan keadaan atomik. Contohnya pada keadaan $n = 2, l = 0$ adalah keadaan 2s.

c. Bilangan kuantum magnetik (m)

Bilangan kuantum magnetik menyatakan orientasi ruang orbital sehingga disebut juga bilangan kuantum orientasi orbital. Bilangan kuantum ini memiliki nilai 0, ± 1, ± 2, ..., $\pm l$ untuk setiap nilai l. Sebagai contoh, untuk nilai l = 1 maka nilai m adalah -1,0,+1.

Keadaan dasar memiliki n = 1, karena itu l = 0 pada keadaan ini nilai m yang diperkenankan hanyalah m = 0. Jadi, keadaan dasar memiliki bilangan kuantum (1,0,0). Keadaan eksitasi pertama memiliki n = 2 maka l = 0 dan 1. Nilai m untuk l = 0 adalah m = 0, sedangkan untuk l = 1 nilai m = -1, 0, +1. Dengan demikian himpunan bilangan kuantum yang mungkin bagi tingkat ini adalah (2, 0, 0), (2 , 1 ,1), (2, 1, 0), dan (2 , 1, -1). Semua keadaan ini memiliki n = 2 dan karena itu semuanya memiliki energi yang sama, karena energinya hanya bergantung pada n. Dengan demikian semua keadaan ini *tergenerasi*, dan n = 2 tergenerasi rangkap empat. Pada umumnya, tingkat ke-n tergenerasi rangkap n^2 (Krane,1992:2).

BAB 3. METODE PENELITIAN

Bab 3 menjelaskan tentang jenis, waktu dan tempat penelitian, definisi operasional, langkah penelitian, teori hasil pegembangan, data simulasi dan pembanding hasil simulasi penelitian yang digunakan untuk menyusun penelitian dengan judul "Solusi Persamaan Schrodinger Atom Deuterium (^2_1H) dengan Bilangan Kuantum n = 4".

3.1 Jenis, Waktu dan Tempat Penelitian

Jenis penelitian ini adalah penelitian non eksperimen. Penelitian ini akan dilaksanakan pada semester 7 bulan September sampai bulan Oktober 2018 di Laboratorium Fisika Lanjut, Program Studi Pendidikan Fisika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember.

3.2 Definisi Operasional

Definisi operasional dalam penelitian ini digunakan agar tidak ada kesalahan – kesalahan dalam mengartikan istilah penelitian yang digunakan. Adapun variabel-variabel yang akan diteliti dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

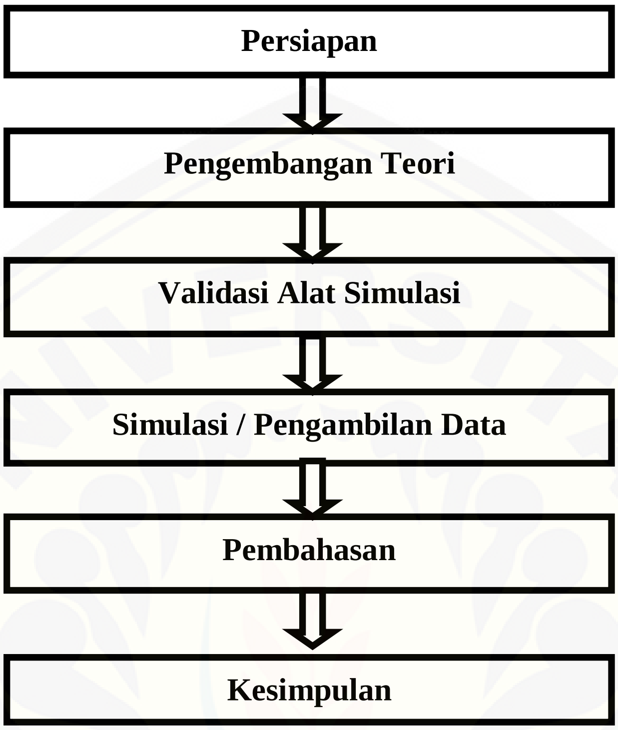
a. Persamaan Schrodinger

Persamaan Schrodinger merupakan persamaan differensial orde dua yang ditemukan oleh Erwin Schrodinger. Dalam hal ini persamaan Schrodinger yang digunakan adalah persamaan Schrodinger koordinat bola. Mengingat atom Deuterium berbentuk bola.

b. Fungsi Gelombang Atom Deuterium

Fungsi gelombang atom Deuterium merupakan solusi persamaan Schrodinger. Fungsi gelombang tersebut terdiri dari fungsi radial dan angular. Fungsi angular terdiri dari fungsi polar dan azimuth.

3.3 Langkah Penelitian



Gambar 3.1 Bagan langkah – langkah penelitian

Berdasarkan Gambar 3.1 dapat dijelaskan tentang langkah-langkah penelitian sebagai berikut:

a. Persiapan

Tahap persiapan ialah tahap yang pertama dalam penelitian ini, yang mana menyiapkan beberapa literatur guna mengumpulkan informasi mengenai bahan-bahan yang dibutuhkan dalam penelitian. Literatur yang digunakan diantaranya berupa buku fisika modern, fisika kuantum, kimia fisika, mekanika kuantum, fisika matematika, fisika inti, jurnal serta berbagai sumber berskala nasional maupun internasional yang relevan atau terkait dengan persamaan Schrodinger.

b. Pengembangan Teori

Pada tahapan pengembangan teori ini, peneliti melakukan pengembangan teori dari teori yang sudah ada dalam berbagai literatur atau hasil penelitian dari peneliti sebelumnya. Pada penelitian ini perkembangannya berupa bilangan kuantum utama $(n = 4)$.

c. Validasi Alat Simulasi

Pada tahapan ini menggunakan data-data atom Hidrogen dengan bilangan kuantum $n \geq 3$ untuk validasi fungsi gelombang. Alasan menggunakan atom Hidrogen dalam validasi ini, karena Deuterium merupakan salah satu isotop dari atom Hidrogen.

d. Simulasi / Pengambilan Data

Tahap ini peneliti melakukan pengambilan data secara analitik yakni dengan mencari fungsi gelombang atom Deuterium dengan bilangan kuantum utama $n = 4$ dan secara numerik dengan grafik fungsi gelombang radial atom Deuterium menggunakan MatlabR2013a.

e. Pembahasan

Hasil dari perhitungan secara analitik pada tahap pengambilan data akan dibahas secara lebih rinci mengenai solusi persamaan Schrodinger atom Deuterium dengan bilangan kuantum $(n = 4)$ dan data secara numerik akan dibahas lebih rinci mengenai grafik persamaan radial atom Deuterium dengan bilangan kuantum $(n = 4)$.

f. Kesimpulan

Pada tahapan yang terakhir peneliti menyimpulkan hasil dari pembahasan guna menjawab rumusan masalah dalam penelitian.

3.4 Teori Hasil Pengembangan

Berikut adalah teori yang telah ditetapkan dalam berbagai literatur terkait penelitian ini:

a. Fungsi Radial

$$R_{nl}\,(\mathrm{r}) = \sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}} \left(\frac{2r}{na_0}\right)^{\mathrm{t}} e^{-\frac{r}{na_0}} L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right)$$

b. Fungsi Polar

$$\Theta_{lm}(\theta) = (-1)^{(m+|m|)/2} \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{2(l+m)!}}\, P_l^m(\cos\theta)$$

c. Fungsi Azimut

$$\phi_m(\varphi) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\, e^{im\varphi}$$

d. Separasi Variabel

$$\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)\Theta(\theta)\phi(\varphi)$$

3.5 Data Simulasi

Perhitungan yang digunakan dalam penilitian ini meliputi perhitungan secara analitik. Perhitungan secara analitik digunakan untuk menyelesaikan persamaan Schrodinger untuk mencari fungsi gelombang atom Deuterium. Berikut ini Tabel 3.1 contoh data simulasi untuk fungsi gelombang $\psi_{(r,\theta,\phi)}$:

Tabel 3.1 Contoh data simulasi untuk menentukan fungsi gelombang $\psi_{(r,\theta,\phi)}$

n	l	m	$\mathrm{R}(r)$	$\Theta(\theta)$	$\Phi(\phi)$	$\psi_{(r,\theta,\phi)}$
4	0	0				
	1	-1				
		0				
		+1				
	2	-2				
		-1				
		0				
		+1				
		+2				
	3	-3				
		-2				
		-1				
		0				
		1				
		2				
		3				

3.6 Pembanding Hasil Simulasi Penelitian

Pembanding hasil simulasi pada penelitian ini yakni solusi persamaan Schrodinger pada atom Hidrogen dengan bilangan kuantum $n = 3$.

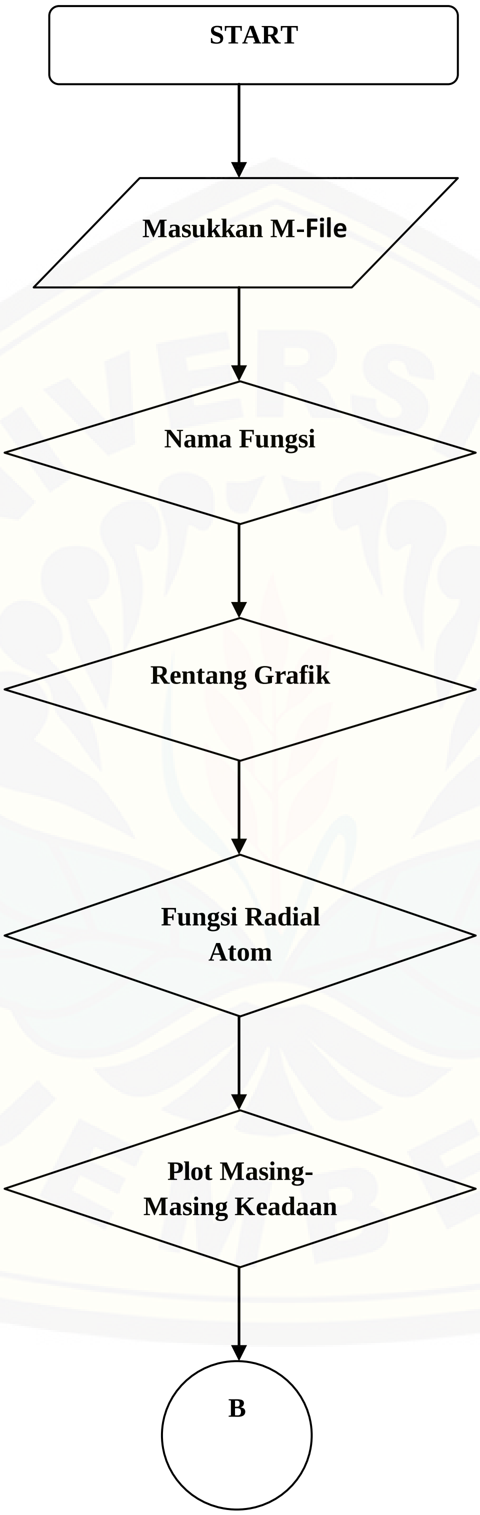
3.6.1 Fungsi Gelombang Atom Hidrogen

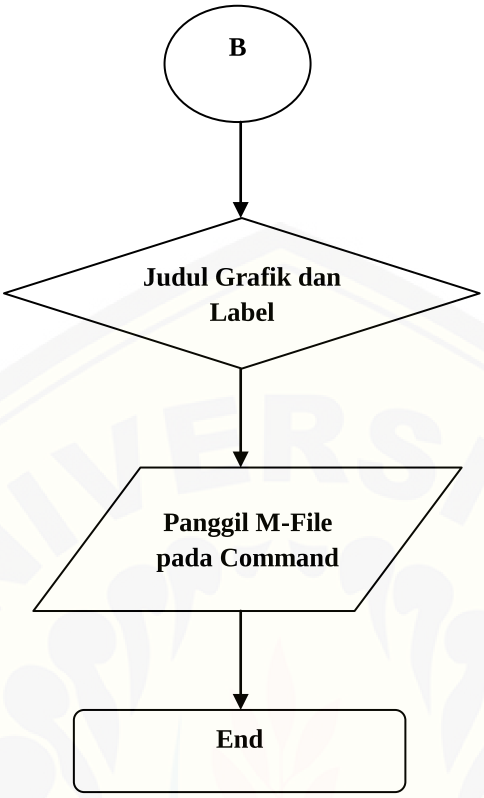
Fungsi gelombang atom Hidrogen terdapat 3 fungsi yakni fungsi radial, fungsi azimuth dan fungsi polar. Penelitian ini menggunakan pembanding hasil simulasi penelitian dengan bilangan kuantum $n = 3$. Alasan menggunakan atom Hidrogen untuk penelitian karena atom Hidrogen secara kuantum masih memiliki sifat yang mirip dengan atom Deuterium. Berikut ini Tabel 3.2 yang memaparkan fungsi gelombang atom Hidrogen dari buku literatur:

Tabel 3.2 Fungsi gelombang $\psi_{(r,\theta,\phi)}$ atom Hidrogen dari literatur

n	l	m	$R(r)$	$\Theta(\theta)$	$\phi(\Phi)$
3	0	0	$\frac{1}{(3a_0^{3/2})}\left(2-\frac{2r}{3a_0}-\frac{2r^2}{27a_0^2}\right)e^{-r/3a_0}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
	1	0	$\frac{8}{9\sqrt{2}(3a_0)^{3/2}}\left(\frac{r}{a_0}-\frac{r^2}{6a_0^2}\right)-e^{-r/3a_0}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}cos\theta$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
		1	$\frac{8}{9\sqrt{2}(3a_0)^{3/2}}\left(\frac{r}{a_0}-\frac{r^2}{6a_0^2}\right)-e^{-r/3a_0}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}cos\theta$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\phi}$
		-1	$\frac{8}{9\sqrt{2}(3a_0)^{3/2}}\left(\frac{r}{a_0}-\frac{r^2}{6a_0^2}\right)-e^{-r/3a_0}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}cos\theta$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\phi}$
	2	0	$\frac{1}{27\sqrt{10}\,(3a_0)^{3/2}}\left(\frac{r}{a_0}\right)^2e^{-r/3a_0}$	$\sqrt{\frac{5}{8}}$ $-\ (3cos^2\theta-1)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
		1	$\frac{1}{27\sqrt{10}\,(3a_0)^{3/2}}\left(\frac{r}{a_0}\right)^2e^{-r/3a_0}$	$-\sqrt{\frac{15}{4}}\ sin\theta cos\theta$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\phi}$
		-1	$\frac{1}{27\sqrt{10}\,(3a_0)^{3/2}}\left(\frac{r}{a_0}\right)^2e^{-r/3a_0}$	$\sqrt{\frac{15}{4}}\ sin\theta cos\theta$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\phi}$
		2	$\frac{1}{27\sqrt{10}\,(3a_0)^{3/2}}\left(\frac{r}{a_0}\right)^2e^{-r/3a_0}$	$\sqrt{\frac{15}{4}}\ sin^2\theta$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{2i\phi}$
		-2	$\frac{1}{27\sqrt{10}\,(3a_0)^{3/2}}\left(\frac{r}{a_0}\right)^2e^{-r/3a_0}$	$\sqrt{\frac{15}{4}}\ sin^2\theta$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-2i\phi}$

3.6.2 Flowchart Fungsi Gelombang Radial Atom Hidrogen

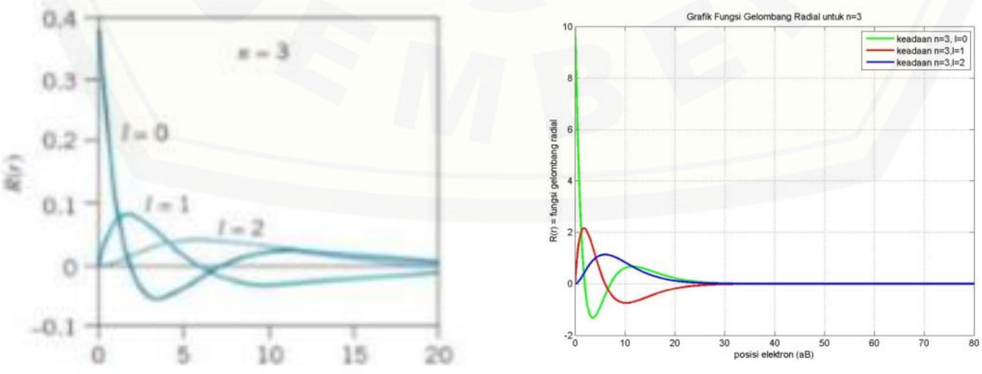




Gambar 3.2 Flowchart fungsi radial atom Hidrogen

3.6.3 Grafik Fungsi Gelombang Radial Atom Hidrogen

Berikut ini perbandingan grafik fungsi gelombang radial Hidrogen $n = 3$ dari hasil MatlabR2013a terhadap buku teks (Krane, 2011:2006) yang dijadikan sebagai validasi penelitian:



Gambar 3.3 Perbandingan grafik fungsi gelombang radial Hidrogen dari buku teks (kiri) dan simulasi MatlabR2013a(kanan)

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

Bab 5 memaparkan kesimpulan untuk menjawab rumusan masalah, serta saran yang diajukan oleh penulis dengan judul penelitian "Solusi Persamaan Schrodinger Atom Deuterium (^2_1H) dengan bilangan kuantum $n = 4$".

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan maka dapat disimpulkan bahwa Fungsi gelombang atom Deuterium terdiri dari 2 fungsi yakni fungsi radial dan fungsi angular. Fungsi angular terdiri dari fungsi polar dan fungsi azimut. Fungsi radial bergantung pada variabel r yang merupakan jari-jari atom. Sedangkan fungsi polar dan azimut masing-masing bergantung pada sudut θ dan φ. Terdapat 16 fungsi gelombang yang didapatkan pada penelitian ini). Berbeda dengan bilangan kuantum 3. Bilangan kuntum menghasilkan 9 fungsi gelombang. Pada grafik fungsi radial dengan bilangan kuantum utama menunjukkan bahwa grafik yang dihasilkan berbentuk eksponensial. Hubungan simpangan berbading terbalik dengan eksponensial posisi elektron dan berbanding lurus dengan fungsi laguerre terasosiasi yang didapatkan. Semakin besar bilangan kuantum orbital (l) maka nilai amplitudo yang dihasilkan pada suatu grafik akan semakin kecil.

5.2 Saran

Berdasarkan kesimpulan yang telah dijelaskan pada 5.1 maka saran dalam penelitian ini adalah perlu diadakan penelitian lebih lanjut dalam bidang fisika teori mengenai atom Deuterium dengan bilangan kuantum $n = 4$ dengan tambahan kajian mengenai probabilitas dan ekspektasi atau dengan kajian atom Deuterium dengan bilangan kuantum yang lain, agar dapat meningkatkan pemahaman yang lebih mengenai persamaan Schrodinger.

DAFTAR PUSTAKA

Anderson, E. E. 1982. *Introduction to Modern Physiscs*. 1982. Philadephia: Saunders College Publishing.

Azis, S. A dan Z. Abdullah. 2015. Teknik Pemisahan Operator dan Pendekatan Spektral sebagai Solusi Persamaan Schrodinger Bergantung Waktu pada Atom Hidrogen. *Jurnal Fisika Unand*. 4(3): 255-262.

Beiser, A. 1990. *Konsep Fisika Modern*. Edisi Keempat. Terjemahan oleh The Howling. Jakarta: Erlangga.

Ganesan, L. R., & M. Balaji. 2008. Schrodinger Equation for the Hydrogen Atom A Simplified Treatment. *Journal of Chemistry*. 5(3):659-662.

Gautreau, W dan W. Savin. 2006. *Fisika Modern.* Jakarta: Erlangga.

Hermanto, W. 2016. Fungsi Gelombang Atom Deuterium dengan Pendekatan Persamaan Schrodinger. *Skripsi*. Jember: Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan.

Kozlowski,M., & Marciak,J. 2010. Modified Schrodinger Equatiom for Particles with Mass of the Order of Human Neuron Mass. *Neuroquantology*. 8(4):564-570.

Krane, K. S. 1992. *Quantum Physics*. Fisrt Edition: John Wiley and Sons, Inc.Terjemahan oleh H. J. Wospakrik. *Fisika Modern.* Cetakan Pertama. Jakarta: UI-Press.

Krane, K. S. 2008. *Fisika Modern*. Jakarta: UI-Press.

Kusminarto. 2011. *Esensi Fisika Modern.* Yogyakarta: ANDI.

Purwanto, A. 2006. *Fisika Kuantum*. Edisi Pertama. Yogyakarta: Gava Media.

Saksono, N. S. Bismo., E. Kristanti., A. Munaf dan R. Widaningrum. 2006. Pengaruh Medan Magnet Terhadap Proses Pretisipasi $CaCO_3$ dalam Air Sadah. *Makara*, *Teknologi*. 10(2) : 96 – 101.

Santoso, B. 2015. Perkembangan Energi Nuklir Fusi. *Jurnal Ilmu dan Budaya*. 39(40): 5527 – 5534.

Siftianida, I . I ., A. B. Wijatna dan B. Pratikno. 2016. Aplikasi Isotop Alam untuk Pendugaan Daerah Resapan Air Mata Air di Kecamatan Cijeruk, Kabupaten Bogor, Jawa Barat. *Jurnal Ilmiah Aplikasi Isotop Radiasi*. 12(2): 97 -106.

Singh, R.B. 2009. *Introduction to Modern Physics Volume 1*. New Delhi: New Age International Publishers.

Sugiyono, V. 2016. *Mekanika Kuantum.* Yogyakarta: CAPS (Center for Academic Publishing Service).

Sukardjo. 2013. *Kimia Fisika*. Cetakan Ketiga. Jakarta: PT. Rineka Cipta.

Sukarsono., I. Darsono dan D. Herhady. 2007. Studi Status Teknik Pengayaan D_2O. *PPI*. 10 Juli 2017. *Pustek Akselerator dan Proses Bahan – BATAN*: 172 – 182.

Supriyadi dan A. Arkundanto. 2006. Metode Elemen Hingga untuk Penyelesaian Persamaan Schrodinger Atom Hidrogenik. *Jurnal Matematika, Sains, dan Teknologi*. 7(1): 11-23.

Supriadi, B., S. H. B. Pratowo., S. Bahri., Z. R. Ridlo dan T. Prihandono. 2018. The Stark Effect on the Wave Function of Tritium Relativistic Condition. *Jurnal of Physics*. IOP Publishing.

Syaifudin, Suparmi, Cari. 2015. Penyelesaian Persamaan Schrodinger Potensial Non Sentral Scarf Hiperbolik Plus Rosen-Morse Trigonometrik Menggunakan Metode Supersimetri Mekanika Kuantum. *Jurnal Fisika dan Aplikasinya*. 16(2): 20-24.

Zettili, N. 2009. *Quatum Physics Concepts and Applications*. New Delhi: John Wiley and Son Ltd.

Lampiran 1. Matrik Penelitian

JUDUL	TUJUAN PENELITIAN	VARIABEL	DATA DAN TEKNIK PENGAMBILAN DATA	METODE PENELITIAN
Solusi Persamaan Schrodinger Atom Deuterium $({}^{2}_{1}H)$ dengan Bilangan Kuantum $n = 4$	1. Menentukan fungsi gelombang atom Deuterium $({}^{2}_{1}H)$ dengan menggunakan persamaan Schrodinger dengan bilangan kuantum $n = 4$	Variabel Bebas : 1. Bilangan kuantum $n = 3\,,4$ Variabel kontrol : 1. Atom Deuterium 2. Persamaan Schrodinger Variabel Terikat : 1. Fungsi gelombang atom Deterium $({}^{2}_{1}H)$ dengan bilangan kuantum $n = 4$	Data : Primer Tenik Pengambilan Data : perhitungan dilakukan secara analitik (menggunakan persamaan Schrodinger) dan secara numerik menggunakan MatlabR2013a	Kajian Teoritis *(Study Literature)*

Lampiran 2. Perhitungan Jari-Jari Atom Bohr

Dari study literatur data berbagai ketetapan yaitu :

1. Konstanta Planck (ħ = 1,0546 $\times\ 10^{-34}$ J.s)
2. Massa proton (m_p = 1,6726$\times\ 10^{-27}$ kg)
3. Massa elektron (m_e = 9,1094 $\times\ 10^{-31}$kg)
4. Massa neutron (m_n = 1,675 $\times\ 10^{-27}$kg)
5. Konstanta struktur halus ($\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} = 2{,}307113707464\ \times 10^{-28}$)

Persamaan dibawah ini menunjukkan rumusan matematis dari jari-jari atom.

$$r = \frac{n^2\hbar^2 4\pi\varepsilon_0}{Ze^2 m}$$

Karena Atom Deuterium termasuk sistem 2 partikel, maka massanya menggunakan massa tereduksi sebagaimana berikut :

$$m_{deutron} = m_{proton} + m_{neutron}$$

$$= (1{,}6726 \times 10^{-27} + 1{,}675 \times 10^{-27})$$

$$= 3{,}3476 \text{ x } 10^{-27}\text{kg}$$

Massa tereduksi deutron dan elektron sebagai berikut :

$$\mu = \frac{m_{deutron} \times m_{elektron}}{m_{deutron} + m_{elektron}}$$

$$= \frac{3{,}3476 \times 10^{-27} \times 9{,}1094 \times 10^{-31}}{3{,}3476 \times 10^{-27} + 9{,}1094 \times 10^{-31}}$$

$$= \frac{30{,}49462744 \times 10^{-58}}{0{,}00033476 \times 10^{-31} + 9{,}1094 \times 10^{-31}}$$

$$= \frac{30{,}49462744 \times 10^{-58}}{9{,}10973476 \times 10^{-31}}$$

$$= 3{,}34748 \times\ 10^{-27}\text{kg}$$

Jari jari Bohr atom Deuterium $({}_{1}^{2}D)$ didapatkan :

$$r = \frac{n^2\hbar^2}{Z\mu\alpha}$$

$$r = \frac{1\ (1{,}0546 \times 10^{-34})^2}{1.(3{,}34748 \times 10^{-27})\ (2{,}307113707464 \times 10^{-28})}$$

$$r = \frac{1\ (1{,}0546 \times 10^{-34})^2}{1.(3{,}34748 \times 10^{-27})\ (2{,}307113707464 \times 10^{-28})}$$

$$= \frac{1{,}0546 \times 10^{-68}}{7{,}72302 \times 10^{-55}}$$

$$= 0{,}136553 \times 10^{-13}\ \text{m}$$

$$= 0{,}136553 \times\ 10^{-5}\ \text{Å}$$

Lampiran 3. Solusi Persamaan Polar Atom Deuterium

Persamaan Schrodinger atom Deuterium yang hanya mengandung θ dan φ dituliskan pada persamaan :

$$\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\phi sin^2\theta}\frac{d^2\phi}{d\varphi^2}=-l(l+1) \qquad (1)$$

Kemudian dikalikan dengan $sin^2\theta$:

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\phi}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}+\ l\,(l+1)sin^2\theta=0 \qquad (2)$$

Suku yang hanya bergantung pada θ disebut persamaan polar dan ditetapkan dengan konstanta m^2 dapat dituliskan :

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\ l\,(l+1)sin^2\theta=m^2 \qquad (3)$$

Kemudian dikalikan dengan ${}^{\Theta}/_{sin^2\theta}$ maka menjadi :

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\left\{l\,(l+1)-\frac{m^2}{sin^2\theta}\right\}\Theta=0 \qquad (4)$$

Solusi Persamaan Polar

Transformasikan variabel pada persamaan 4 , w = cos θ. Maka :

w = cos θ

$$\frac{dw}{d\theta}=-\sin\theta$$

$$\frac{d}{d\theta}=\frac{d}{dw}\frac{dw}{d\theta}=-sin\theta\frac{d}{dw}$$

$$sin^2\theta+\ cos^2\theta=1$$

$$sin^2\theta+\ w^2=1$$

$$sin^2\theta\ =1-\ w^2$$

$$\sin\theta=(1-w)^{1/2}$$

Sehingga persamaan 4 menjadi :

$$\frac{1}{\sin\theta}\left(-sin\theta\frac{d}{dw}\right)\left(\sin\theta(-sin\theta\,)\frac{\partial\Theta}{\partial w}\right)+\left\{l\,(l+1)-\frac{m^2}{sin^2\theta}\right\}\Theta=0$$

$$-\frac{\partial}{\partial w}\left(-sin^2\theta\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)+\left\{l\,(l+1)-\frac{m^2}{sin^2\theta}\right\}\Theta=0$$

$$-\frac{\partial}{\partial w}\left(-(1-w^2)\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)+\left\{l\,(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right\}\Theta = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial w}\left((1-w^2)^2\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)+\left\{l\,(l+1)-\frac{m^2}{(1-w^2)}\right\}\Theta = 0$$

$$\frac{\partial(1-w^2)}{dw}\frac{\partial}{\partial\theta}+(1-w^2)\frac{\partial}{\partial w}\frac{\partial\theta}{\partial w}+\left\{l\,(l+1)-\frac{m^2}{(1-w^2)}\right\}\Theta = 0$$

$$-2w\frac{\partial\theta}{\partial w}+(1-w^2)\frac{\partial^2\theta}{\partial w^2}+\left\{l\,(l+1)-\frac{m^2}{(1-w^2)}\right\}\Theta = 0 \qquad (5)$$

Persamaan 5 merupakan bentuk umum dari persamaan diferensial orde dua fungsi legendre. Untuk menyelesaikan persamana diatas dengan memisalkan m = 0, dalam kondisi ini persamaan Differensial Legendre Terasosiasi berubah menjadi persamaan differensial legendre berikut ini :

$$(1-w^2)\frac{\partial^2\theta}{\partial w^2}-2w\frac{\partial\theta}{\partial w}+l\,(l+1)\Theta = 0 \qquad (6)$$

Persamaan 6 dapat diselesaikan dengan fungsi pembangkit Legendre, yaitu :

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = (1-2wt+t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\Theta_l(w)t^n$$

Dengan memisalkan A = $(2wt - t^2)$

$$(1-2wt+t^2)^{-1/2} = (1-A)^{-1/2}$$

Kemudian dengan menggunakan uraian deret binomial $(1+x)^p$ maka bentuk dari polinomialnya sebagai berikut :

$$(1-A)^{-1/2} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-A) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}(-A)^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}(-A)^3 + \ldots\ldots + \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}(-A)^n$$

$$(1-2wt+t^2)^{-1/2} = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}(-A)^n$$

$$= \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}(-1)^n(A)^n$$

$$= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}(A)^n$$

$$(1-2wt+t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\ (2wt-\ t^2)^n \qquad (7)$$

Untuk ekspansi $(2wt-\ t^2)^n$ ialah

$$(2wt-\ t^2)^n =\ t^n(2wt-\ t^2)^n$$

$$= t\ [(2w)^n -\ n(2w)^{n-1}(-t) + \frac{n(n-1)}{2!}\ (2w)^{n-2}(-t)^2 + \cdots + \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\ (2w)^{n-k}(t)^k(-1)^k]$$

$$(2wt-\ t^2)^n\ = t^n \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} (2w)^{n-k}(t)^k(-1)^k \qquad (8)$$

Subtitusikan persamaan (8) kedalam persamaan (7).

$$(1-2wt-\ t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\ [t^n \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} (2w)^{n-k}(t)^k(-1)^k]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!n!}{2^{2n}(n!)^2 k!(n-k)!}\ (2w)^{n-k}(t)^{n+k}(-1)^k$$

Kemudian gunakan pendekatan $n+k \rightarrow n$ sehingga $n \rightarrow n-k$ sehingga persamaannya akan menjadi:

$$(1-2wt-\ t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2[n-k])!}{2^{2(n-k)}(n-k)!} \frac{1}{k!(n-2k)!}\ (2w)^{n-2k}(t)^n(-1)^k$$

Dari rumus awal fungsi pembangkit diperoleh :

$$(1-2wt+t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_l(w)t^n$$

Diketahui variabel Θ bergantung pada variabel l maka varibael n dapat diganti dengan variabel l. Persamaan menjadi :

$$(1-2wt+t^2)^{-1/2} = \sum_{l=0}^{\infty} \Theta_l(w)t^l$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{l} \frac{(2[l-k])!}{2^{2(l-k)}(l-k)!} \frac{1}{k!(l-2k)!}\ (2w)^{l-2k}(t)^l(-1)^k = \sum_{l=0}^{\infty} \Theta_l(w)t^l$$

$$\sum_{k=0}^{l} \frac{(2[l-k])!}{2^{2(l-k)}(l-k)!} \frac{1}{k!(l-2k)!} (2)^{l-2k}(w)^{(l-2k)}(-1)^k = \Theta_l(w)$$

$$\sum_{k=0}^{l} \frac{(2[l-k])!}{2^{2l}2^{(-2k)}(l-k)!} \frac{1}{k!(l-2k)!} 2^l 2^{(-2k)}(w)^{(l-2k)}(-1)^k = \Theta_l(w)$$

$$\sum_{k=0}^{l} \frac{(2[l-k])!}{2^{2l}(l-k)!} \frac{1}{k!(l-2k)!} 2^l(w)^{(l-2k)}(-1)^k = \Theta_l(w)$$

$$\sum_{k=0}^{l} \frac{(2[l-k])!}{2^l(l-k)!} \frac{1}{k!(l-2k)!}(w)^{(l-2k)}(-1)^k = \theta_l(w)$$

$$\theta_l(w) = \sum_{k=0}^{l} \frac{(2[l-k])!}{2^l(l-k)!} \frac{1}{k!(l-2k)!}(w)^{(l-2k)}(-1)^k$$

Untuk merubah bentuk deret menjadi bentuk menjadi persamaan differensial, maka untuk setiap n bilangan bulat berlaku :

$$\frac{d^l}{dw^l} w^{2l-2k} = (2l-2k)(2l-2k-1)(2l-2k-2)(2l-2k-3) \ldots .(2l - 2k-(l-1))w^{l-2k}$$

$$\frac{d^l}{dw^l} w^{2l-2k} = \frac{[2(l-k)]!}{(l-2k)!}(w)^{(l-2k)} \tag{9}$$

Kemudian substitusikan persamaan 9 kedalam persamaan Rodrigues :

$$F_l(w) = \sum_{k=0}^{l} \frac{(2[l-k])!}{2^l(l-k)!} \frac{1}{r!(l-2k)!}(w)^{(l-2k)}(-1)^k$$

$$F_l(w) = \sum_{k=0}^{l} \frac{(2[l-k])!}{(l-2k)!} \frac{1}{2^l(l-k)!k!}(w)^{(l-2k)}(-1)^k$$

$$F_l(w) = \frac{1}{2^l(l-k)!k!}(-1)^k \sum_{k=0}^{l} \frac{d^l}{dw^l} w^{2l-2k} \frac{l!}{l!}$$

$$F_l(w) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dw^l}(-1)^k \sum_{k=0}^{l} \frac{l!}{(l-k)!k!} w^{2(l-k)}$$

Atau dapat dituliskan:

$$F_l(w) = \sum_{k=0}^{l} \frac{(-1)^k}{(2^l(l-k)!k!} \frac{d^l}{dw^l} w^{2(l-k)} \tag{10}$$

Agar lebih sederhana maka persamaan 10 subtitusikan kedalam persamaan 8. Sehingga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$F_l(w) = \frac{1}{2^l} \frac{d^l}{dw^l} w^{2(l-k)} \frac{1}{k!(l-k)!} \frac{l!}{l!}$$

$$F_l(w) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dw^l}(w^2-1)^l$$

Dalam penyelesaian legendre terasosiasi adalah dengan cara mengubah persamaan differensial fungsi legendre menjadi persamaan differensial legendre terasosiasi dengan mendifferensialkan persamaan differensial legendre m kali terhadap w:

$$\frac{d^m}{dw^m}\left[(1-w^2)\frac{d^2F(w)}{dw^2}-2w\frac{dF(w)}{dw}+l(l+1)F(w)\right]=0$$

$$\frac{d^m}{dw^m}(1-w^2)\frac{d^2F(w)}{dw^2}-\frac{d^m}{dw^m}2w\frac{dF(w)}{dw}+\ l(l+1)F(w)=0$$

Kemudian untuk penyelesaian yang lebih sederhana maka dimisalkan $J=\frac{d^m}{dw^m}\ F_l^n$

Suku 1 :

$$\frac{d^m}{dw^m}(1-w^2)\frac{d^2F(w)}{dw^2}=\frac{d^2}{dw^2}\left[\frac{d^m}{dw^m}F_l^n(1-w^2)\right]$$

Dimana $A(w)=F_l^n$ dan $B(w)=1-w^2$

Dengan menggunakan notasi Leibnit'z dapat diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{d^m}{dw^m}[(F_l^n)(1-w^2)]=\frac{m!}{0!m!}(1-w^2)\frac{d^m}{dw^m}F_l^n+\frac{m!}{1!(m-1)!}\frac{d}{dw}(1-w^2)\frac{d^{m-1}}{dw^{m-1}}F_l^n+\frac{m!}{2!(m-2)!}\frac{d}{dw}(2-w^2)\frac{d^{m-2}}{dw^{m-2}}F_l^n$$

$$\frac{d^m}{dw^m}[(F_l^n)(1-w^2)]=(1-w^2)\frac{d^m}{dw^m}F_l^n-2mw\frac{d^{m-1}}{dw^{m-1}}F_l^n-m(m-1)\frac{d^{m-2}}{dw^{m-2}}F_l^n$$

Kemudian dapat dituliskan kembali dalam bentuk:

$$\frac{d^2}{dw^2}\left[\frac{d^m}{dw^m}(F_l^n)(1-w^2)\right]=\frac{d^2}{dw^2}\left[(1-w^2)\frac{d^m}{dw^m}F_l^n-2mw\frac{d^{m-1}}{dw^{m-1}}\ F_l^n-m(m-1)\frac{d^{m-2}}{dw^{m-2}}\ F_l^n\right]$$

$$=\frac{d^2}{dw^2}(1-w^2)\frac{d^m}{dw^m}F_l^n-\ 2mw\frac{d^{m+1}}{dw^{m+1}}\ F_l^n-m(m-1)\frac{d^m}{dw^m}\ F_l^n$$

$$\frac{d^2}{dw^2}\left[\frac{d^m}{dw^m}(F_l^n)(1-w^2)\right]=(1-w^2)J''-2mwJ''-m(m-1)J \qquad (11)$$

Suku Ke-2

$$\frac{d^m}{dw^m}\ (-2w)\frac{d}{dw}F_l^n=(-2w)\frac{d}{dw}\frac{d^m}{dw^m}\ F_l^n=(-2w)\frac{d^{m+1}}{dw^{m+1}}F_l^n\ =(-2w)J' \qquad (12)$$

Suku ke-3

$$l(l+1)\ \frac{d^m}{dw^m}\ F_l^n(w) = l(l+1)J \tag{13}$$

Dengan menggabungkan persamaan 11, 12 dan 13 maka didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$\frac{d^m}{dw^m}\ (1-w^2)\frac{d^2F_l^n}{dw^2} - \frac{d^m}{dw^m}2w\frac{dF_l^n}{dw} + l(l+1)\ \frac{d^m}{dw^m}\ F_l^n = 0$$

$$(1-w^2)J'' - 2mwJ' - m(m-1)J - 2wu' + l(l+1)J = 0$$

$$(1-w^2)J'' - 2w(m+1)J' - (m^2 - m + l^2 + l)J = 0$$

Atau dapat dituliskan:

$$(1-w^2)J'' - 2w(m+1)J' +\ (l-m)(l+m+1)J = 0 \tag{14}$$

Persamaan 14 dapat menjadi persamaan self djoint dengan menggunakan pemisalan sebagai berikut:

$$v(w) = J(w)(1-w^2)^{-\frac{m}{2}}$$

Dan

$$J(w) = v(w)(1-w^2)^{-\frac{m}{2}}$$

Turunan pertama $J(w)$

$$J'(w) = \frac{d}{dw}\left[v(1-w^2)^{-\frac{m}{2}}\right]$$

$$= v'(1-w^2)^{-\frac{m}{2}} + v\,mw(1-w^2)^{-\frac{m}{2}}$$

$$= \left[v'\frac{mwv}{(1-w^2)}\right](1-w^2)^{-\frac{m}{2}}$$

Turunan kedua $J(w)$

$$J'' = \frac{d}{dw}\left(\left[v'\frac{mwv}{(1-w^2)}\right](1-w^2)^{-\frac{m}{2}}\right)$$

Agar penyelesaian persamaan diatas lebih mudah, maka dibagi menjadi 2 suku.

<u>Suku pertama</u>

$$\frac{d}{dw}\left[v'(1-w^2)^{-\frac{m}{2}}\right] = v''(1-w^2)^{-\frac{m}{2}} + \frac{mwv'}{(1-w^2)}(1-w^2)^{-\frac{m}{2}}$$

Suku kedua

$\frac{d}{dw}\left[\frac{mwv}{(1-w^2)}(1-w^2)^{-\frac{m}{2}}\right]=\frac{d}{dw}\left[mwv\,(1-w^2)^{-\frac{m+2}{2}}\right]$

$$=\frac{d}{dw}\,mwv\,(1-w^2)^{-\frac{m+2}{2}}+\,mwv\frac{d}{dw}\,(1-w^2)^{-\frac{m+2}{2}}$$

Dengan pemisalan:

$G=(1-w^2)$

$\frac{dG}{dw}=-2w$

$dw=\frac{dG}{-2w}$

Sehingga,

$\frac{d}{dw}\left[\frac{mwv}{1-w^2}(1-w^2)^{-\frac{(m+2)}{2}}\right]=m(v+v'w)+mwv(-2w)\,\frac{d}{dG}\,(G)^{-\frac{(m+2)}{2}}$

$=$

$(1-w^2)^{-\frac{(m+2)}{2}}(mv+mwv')+$

$mwv(-2w)\left(-\frac{(m+2)}{2}\right)(1-w^2)^{-\frac{(m+2)}{2}}$

$=\frac{mv}{(1-w^2)}\,(1-w^2)^{-\frac{m}{2}}+\frac{mwv'}{(1-w^2)}\,(1-w^2)^{-\frac{m}{2}}+$

$\frac{m^2w^2v}{(1-w^2)^2}\,(1-w^2)^{-\frac{m}{2}}+\frac{2m^2w^2v}{(1-w^2)^2}\,(1-w^2)^{-\frac{m}{2}}$ (15)

Kemudian gabungkan persamaan 14 dan 15:

$J''=v''(1-w^2)^{-\frac{m}{2}}+\frac{mwv'}{(1-w^2)}(1-w^2)^{-\left(\frac{m}{2}\right)}+\frac{mv}{(1-w^2)}(1-w^2)^{-\left(\frac{m}{2}\right)}+$

$\frac{mwv'}{(1-w^2)}(1-w^2)^{-\left(\frac{m}{2}\right)}+\frac{m^2w^2v}{(1-w^2)^2}(1-w^2)^{-\left(\frac{m}{2}\right)}+\frac{2mw^2v}{(1-w^2)^2}(1-w^2)^{-\frac{m}{2}}$

$J''=\left[v''\,\frac{mwv'}{(1-w^2)}+\frac{mv}{(1-w^2)}+\frac{mwv'}{(1-w^2)}+\frac{m^2w^2v}{(1-w^2)^2}\right]\,(1-w^2)^{-\frac{m}{2}}$

$=\left[v''\frac{(2mwv)}{(1-w^2)}+\frac{mv}{(1-w^2)}\,\frac{m^2w^2v}{(1-w^2)^2}+\frac{2mw^2v}{(1-w^2)^2}\right]\,(1-w^2)^{-\frac{m}{2}}$

Subtitusikan nilai $J, J'dan\;J''$kedalam persamaan 14:

$(1-w^2)J''-2w(m+1)J'+(l-m)(l+m+1)J=0$

$$(1-w^2)\left[v''+\frac{2mwv'}{(1-w^2)}+\frac{mv}{(1-w^2)}+\frac{m^2w^2v}{(1-w^2)^2}+\frac{2mw^2v}{(1-w^2)^2}\right](1-w^2)^{-\frac{m}{2}}-$$
$$2w(m+1)\left[v'+\frac{mwv}{(1-w^2)}\right](1-w^2)^{-\frac{m}{2}}+(l-m)(l+m+l)v(1-w^2)^{-\frac{m}{2}}=0$$

$$(1-w^2)v''+2mwv'+mv+\frac{m^2w^2v}{(1-w^2)}+\frac{1mw^2v}{1-w^2}-2mwv'-\frac{1mw^2v}{(1-w^2)}-\frac{m^2w^2v}{(1-w^2)}+$$
$$(l-m)(l+m+l)v=0$$

$$(1-w^2)v''+mv-2mv'-\frac{m^2w^2v}{(1-w^2)}+(l-m)(l+m+l)v=0$$

$$(1-w^2)v''-2mv'+\left[l(l+1)-m^2-m+m-\frac{m^2w^2}{(1-w^2)}\right]v=0$$

$$(1-w^2)v''-2mv'+\left[l(l+1)-m^2-\frac{m^2w^2}{(1-w^2)}\right]v=0$$

$$(1-w^2)v''-2mv'+\left[l(l+1)-\frac{w^2}{(1-w^2)}\right]v=0$$

Dengan solusi:

$$v(w)=J(w)(1-w^2)^{-\frac{m}{2}}$$

$$J(w)=J=\frac{d^m}{dw^m}F_l^m$$

Dari rumus Rodrigues:

$$F_l^m=\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dw^l}(w^2-1)^l$$

Self adjoint dapat dituliskan:

$$v(w)=(1-w^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dw^m}\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dw^l}(w^2-l)$$

Persamaan 15 identik dengan persamaan polar differensial orde dua dan fungsi legendre terasosiasi:

$$(1-w^2)\frac{d^2\theta}{dw^2}-2w\frac{d\theta}{dw}+l(l+1)\theta-\frac{m^2\theta}{\sin^2\theta}=0$$

Atau dapat dituliskan:

$$(1-w^2)\theta''-2w\,\theta'+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{(\sin^2\theta)]}\right]\theta=0$$

Maka solusi persamaan polar diberikan:

$$F_l^m = (1 - w^2)^{\frac{m}{2}} \frac{1}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{dw^{l+m}} (w^2 - 1)^l \quad (16)$$

Karena $w \cos\theta$, maka solusi persamaan 16 dapat ditulis kembali dalam bentuk:

$$F_l^m = (1 - cos^2\theta)^{\frac{m}{2}} \frac{1}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{dcos^{l+m}\theta} (\cos^2\theta - 1)^l$$

Lampiran 4. Perhitungan Fungsi Legendre

$$F_{l(w)} = \frac{1}{2^l l!}\left(\frac{d}{dw}\right)^l (w^2-1)^l$$

Dimana $w = \cos\theta$

1. $l = 0$

   $F_{0(cos\theta)} = \frac{1}{2^0 0!}\left(\frac{d}{dcos\theta}\right)^0 (\cos^2\theta - 1)^0$
   $= \frac{1}{1}.1.1$
   $= 1$
2. $l = 1$

   $F_{1(cos\theta)} = \frac{1}{2^1 1!}\left(\frac{d}{dcos\theta}\right)^1 (\cos^2\theta - 1)^1$
   $= \frac{1}{2}\ \frac{d}{dcos\theta}(\cos^2\theta - 1)$
   $= \frac{1}{2}.2\ cos\theta$
   $= cos\theta$
3. $l = 2$

   $F_{2(cos\theta)} = \frac{1}{2^2 2!}\left(\frac{d}{dcos\theta}\right)^2 (\cos^2\theta - 1)^2$
   $= \frac{1}{8}\ ((\frac{d}{dcos\theta}\ (\frac{d}{dcos\theta}(\cos^4\theta - 2\cos^2\theta + 1))$
   $= \frac{1}{8}(\frac{d}{dcos\theta}4\cos^3\theta - 4)$
   $= \frac{1}{8}(12\cos^2\theta - 4)$
   $= \frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}$
4. $l = 3$

   $F_{3(cos\theta)} = \frac{1}{2^3 3!}\left(\frac{d}{dcos\theta}\right)^3 (\cos^2\theta - 1)^3$
   $= \frac{1}{48}((\frac{d}{dcos\theta}(\frac{d}{dcos\theta}(\frac{d}{dcos\theta}\ (\cos^6\theta - 3\cos^4\theta + 3\cos^2\theta - 1)$
   $= \frac{1}{48}((\frac{d}{dcos\theta}(\frac{d}{dcos\theta}6\cos^5\theta - 12\cos^3\theta + 6cos\theta))$
   $= \frac{1}{48}((\frac{d}{dcos\theta}.30\cos^4\theta - 36\cos^2\theta + 6)$
   $= \frac{1}{48}(120\cos^3\theta - 72cos\theta)$
   $= \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3cos\theta)$

Lampiran 5. Perhitungan Fungsi Legendre Terasosiasi

$$F_l^m(cos\theta) = (1-\cos^2\theta)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{|m|}F_l(cos\theta)}{dcos\theta^{|m|}}$$

1) $n = 1(l = 0, m = 0)$

$$F_0^0(cos\theta) = (1-\cos^2\theta)^{\frac{|0|}{2}} \frac{d^{|0|}F_0(cos\theta)}{dcos\theta^{|0|}}$$
$$= 1$$

2) $n = 2(l = 1, m = -1)$

$$F_1^{-1}(cos\theta) = (1-\cos^2\theta)^{\frac{|-1|}{2}} \frac{d^{|-1|}F_1(cos\theta)}{dcos\theta^{|-1|}}$$
$$= (1-\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}.\frac{dcos\theta}{dcos\theta}$$
$$= \sqrt{1-\cos^2\theta}$$
$$= \sqrt{\sin^2\theta}$$
$$= sin\theta$$

3) $n = 2(l = 1, m = 0)$

$$F_1^0(cos\theta) = (1-\cos^2\theta)^{\frac{|0|}{2}} \frac{d^{|0|}F_1(cos\theta)}{dcos\theta^{|0|}}$$
$$= 1.\frac{cos\theta}{1}$$
$$= cos\theta$$

4) $n = 2(l = 1, m = +1)$

$$F_1^{+1}(cos\theta) = (1-\cos^2\theta)^{\frac{|+1|}{2}} \frac{d^{|+1|}F_1(cos\theta)}{dcos\theta^{|+1|}}$$
$$= (1-\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}.\frac{dcos\theta}{dcos\theta}$$
$$= \sqrt{1-\cos^2\theta}$$
$$= \sqrt{\sin^2\theta}$$
$$= sin\theta$$

5) $n = 3\ (l = 2, m = -2)$

$$F_2^{-2}(cos\theta) = (1-\cos^2\theta)^{\frac{|-2|}{2}} \frac{d^{|-2|}F_2(cos\theta)}{dcos\theta^{|-2|}}$$
$$= (1-\cos^2\theta)\ (\frac{d}{dcos\theta}\ (\frac{d}{dcos\theta}(3/2\cos^2\theta - 1/2)\ )$$
$$= (1-\cos^2\theta)(\frac{d}{dcos\theta}\ (3cos\theta))$$
$$= 3(1-\cos^2\theta)$$

6) $n = 3(l = 2\ , m = -1)$

$$F_2^{-1}(cos\theta) = (1-\cos^2\theta)^{\frac{|-1|}{2}} \frac{d^{|-1|}F_2(cos\theta)}{dcos\theta^{|-1|}}$$
$$= (1-\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}} \frac{dF_2(cos\theta)}{dcos\theta}$$

$$= \sqrt{1-\cos^2\theta}\ \ d(\tfrac{3}{2}\cos^2\theta - 1/2)$$
$$= \sqrt{\sin^2\theta}\ \ 3cos\theta$$
$$= 3\ sin\theta\ cos\theta$$

7) $n = 3\ (l = 2, m = 0)$

$$F_2^0(cos\theta) = (1-\cos^2\theta)^{\frac{|0|}{2}} \frac{d^{|0|}F_2(cos\theta)}{dcos\theta^{|0|}}$$
$$= 1.\tfrac{3}{2}\cos^2\theta - \tfrac{1}{2}$$
$$= \tfrac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$$

8) $n = 3\ (l = 2, m = 1)$

$$F_2^{+1}(cos\theta) = (1-\cos^2\theta)^{\frac{|+1|}{2}} \frac{d^{|+1|}F_2(cos\theta)}{dcos\theta^{|+1|}}$$
$$= (1-\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}} \frac{dF_2(cos\theta)}{dcos\theta}$$
$$= \sqrt{1-\cos^2\theta}\ \ d(\tfrac{3}{2}\cos^2\theta - 1/2)$$
$$= \sqrt{\sin^2\theta}\ \ 3cos\theta$$
$$= 3\ sin\theta\ cos\theta$$

9) $n = 3\ (l = 2, m = 2)$

$$F_2^{+2}(cos\theta) = (1-\cos^2\theta)^{\frac{|+2|}{2}} \frac{d^{|+2|}F_2(cos\theta)}{dcos\theta^{|+2|}}$$
$$= (1-\cos^2\theta)\ (\frac{d}{dcos\theta}\ (\frac{d}{dcos\theta}(3/2\cos^2\theta - 1/2)\ )$$
$$= (1-\cos^2\theta)(\frac{d}{dcos\theta}\ \ (3cos\theta))$$
$$= 3(1-\cos^2\theta)$$

10) $n = 4\ (l = 3, m = \ -3)$

$$F_3^{-3}(cos\theta) = (1-\cos^2\theta)^{\frac{|-3|}{2}} \frac{d^{|-3|}F_3(cos\theta)}{dcos\theta^{|-3|}}$$
$$= (1-\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}} \frac{d^3F_3(cos\theta)}{dcos\theta^3}$$
$$= \ \ (1-\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}(((\frac{d}{dcos\theta}\ (\frac{d}{dcos\theta}\ (\frac{d}{dcos\theta}(5/2\cos^3\theta - 3/2cos\theta)))$$
$$= \ \ (1-\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}\ 15$$

11) $n = 4(l = 3, m = -2)$

$$F_3^{-2}(cos\theta) = (1-\cos^2\theta)^{\frac{|-2|}{2}} \frac{d^{|-2|}F_3(cos\theta)}{dcos\theta^{|-2|}}$$

$= (1-\cos^2\theta)\,((\frac{d}{dcos\theta}(\frac{d}{dcos\theta}(\frac{5}{2}\cos^3\theta - \frac{3}{2}))$

$= \sin^2\theta\ 15cos\theta$

$= 15\sin^2\theta cos\theta$

12) $n = 4(l = 3, m = -1)$

$F_3^{-1}(cos\theta) = (1-\cos^2\theta)^{\frac{|-1|}{2}}\frac{d^{|-1|}F_3(cos\theta)}{dcos\theta^{|-1|}}$

$= (1-\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}\ ((\frac{d}{dcos\theta}(\frac{5}{2}\cos^3\theta - \frac{3}{2}cos\theta))$

$= \sqrt{1-\cos^2\theta}\,.\frac{15}{2}\cos^3\theta - \frac{3}{2}$

$= \sin^2\theta\,(\frac{15}{2}\cos^3\theta - \frac{3}{2})$

$= \frac{3}{2}\sin^2\theta(\frac{5}{2}\cos^3\theta - 1)$

13) $n = 4\ (l = 3, m = 0)$

$F_3^0(cos\theta) = (1-\cos^2\theta)^{\frac{|0|}{2}}\frac{d^{|0|}F_3(cos\theta)}{dcos\theta^{|0|}}$

$= (1-\cos^2\theta)^{\frac{0}{2}}\ (\frac{5}{2}\cos^3\theta - \frac{3}{2}\cos\ \theta)$

$= \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3cos\theta)$

14) $n = 4(l = 3, m = +1)$

$F_3^1(cos\theta) = (1-\cos^2\theta)^{\frac{|+1|}{2}}\frac{d^{|+1|}F_3(cos\theta)}{dcos\theta^{|+1|}}$

$= (1-\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}\ ((\frac{d}{dcos\theta}(\frac{5}{2}\cos^3\theta - \frac{3}{2}cos\theta))$

$= \sqrt{1-\cos^2\theta}\,.\frac{15}{2}\cos^3\theta - \frac{3}{2}$

$= \sin^2\theta\,(\frac{15}{2}\cos^3\theta - \frac{3}{2})$

$= \frac{3}{2}\sin^2\theta(\frac{5}{2}\cos^3\theta - 1)$

15) $n = 4(l = 3, m = +2)$

$F_3^{+2}(cos\theta) = (1-\cos^2\theta)^{\frac{|+2|}{2}}\frac{d^{|+2|}F_3(cos\theta)}{dcos\theta^{|+2|}}$

$= (1-\cos^2\theta)\,((\frac{d}{dcos\theta}(\frac{d}{dcos\theta}(\frac{5}{2}\cos^3\theta - \frac{3}{2}))$

$= \sin^2\theta\ 15cos\theta$

$= 15\sin^2\theta cos\theta$

16) $n = 4\ (l = 3, m = \ +3)$

$F_3^{+3}(cos\theta) = (1-\cos^2\theta)^{\frac{|+3|}{2}}\frac{d^{|+3|}F_3(cos\theta)}{dcos\theta^{|+3|}}$

$= (1-\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}\frac{d^3F_3(cos\theta)}{dcos\theta^3}$

$$= \quad (1-\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}(((\frac{d}{dcos\theta}(\frac{d}{dcos\theta}(\frac{d}{dcos\theta}(5/2\cos^3\theta - 3/2cos\theta)))$$

$$= \quad (1-\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}\,15$$

Lampiran 6. Perhitungan Solusi Persamaan Polar

$$\Theta_{lm}(\theta) = (-1)^{(m+|m|)/2}\sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\,F_l^m(cos\theta)$$

1. $n = 3(l = 0, m = 0)$

$$\Theta_{00}(\theta) = (-1)^{(0+|0|)/2}\sqrt{\frac{2.0+1}{2}\frac{(0-|0|)!}{(0+|0|)!}}\,F_0^0(cos\theta)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}}$$

2. $n = 3(l = 1, m = -1)$

$$\Theta_{1-1}(\theta) = (-1)^{(-1+|-1|)/2}\sqrt{\frac{2.1+1}{2}\frac{(1-|-1|)!}{(1+|-1|)!}}\,F_1^{-1}(cos\theta)$$

$$= (-1)^0\sqrt{\frac{3}{2}.\frac{0!}{2!}}\,.sin\theta$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4}}sin\theta$$

3. $n = 3(l = 1, m = 0)$

$$\Theta_{10}(\theta) = (-1)^{(0+|0|)/2}\sqrt{\frac{2.1+1}{2}\frac{(1-|0|)!}{(1+|0|)!}}\,F_1^0(cos\theta)$$

$$= (-1)^0\sqrt{\frac{3}{2}.\frac{1}{1}}\,cos\theta$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}}cos\theta$$

4. $n = 3(l = 1, m = 1)$

$$\Theta_{11}(\theta) = (-1)^{(1+|1|)/2}\sqrt{\frac{2.1+1}{2}\frac{(1-|-1|)!}{(1+|-1|)!}}\,F_1^{-1}(cos\theta)$$

$$= (-1)^1\sqrt{\frac{3}{2}.\frac{0!}{2!}}\,.sin\theta$$

$$= -\sqrt{\frac{3}{4}}sin\theta$$

5. $n = 3(l = 2, m = -2)$

$$\Theta_{2-2}(\theta) = (-1)^{(-2+|-2|)/2}\sqrt{\frac{2.2+1}{2}\frac{(2-|-2|)!}{(2+|-2|)!}}\,F_2^{-2}(cos\theta)$$

$$= (-1)^0\sqrt{\frac{5}{2}.\frac{0!}{4!}}\,3\sin^2\theta$$

$= \sqrt{\frac{45}{48}} \sin^2 \theta$

$= \sqrt{\frac{15}{16}} \sin^2 \theta$

6. $n = 3(l = 2, m = -1)$

$\Theta_{2-1}(\theta) = (-1)^{(-1+|-1|)/2} \sqrt{\frac{2.2+1}{2} \frac{(2-|-1|)!}{(2+|-1|)!}} F_2^{-1}(cos\theta)$

$= (-1)^0 \sqrt{\frac{5}{2} . \frac{1!}{3!}}\ 3\ sin\theta cos\theta$

$= \sqrt{\frac{5}{12}} 3 sin\theta cos\theta$

$= \sqrt{\frac{45}{12}} sin\theta cos\theta$

$= \sqrt{\frac{15}{4}} sin\theta cos\theta$

7. $n = 3(l = 2, m = 0)$

$\Theta_{20}(\theta) = (-1)^{(0+|0|)/2} \sqrt{\frac{2.2+1}{2} \frac{(2-|0|)!}{(2+|0|)!}} F_2^{0}(cos\theta)$

$= (-1)^0 \sqrt{\frac{5}{2} . \frac{2!}{2!}} \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1)$

$= \sqrt{\frac{5}{8}} (3 \cos^2 \theta - 1)$

8. $n = 3(l = 2, m = 1)$

$\Theta_{21}(\theta) = (-1)^{(1+|1|)/2} \sqrt{\frac{2.2+1}{2} \frac{(2-|1|)!}{(2+|1|)!}} F_2^{1}(cos\theta)$

$= (-1)^1 \sqrt{\frac{5}{2} . \frac{1!}{3!}}\ 3\ sin\theta cos\theta$

$= -\sqrt{\frac{5}{12}} 3 sin\theta cos\theta$

$= -\sqrt{\frac{45}{12}} sin\theta cos\theta$

$= -\sqrt{\frac{15}{4}} sin\theta cos\theta$

9. $n = 3(l = 2, m = 2)$

$\Theta_{22}(\theta) = (-1)^{(2+|2|)/2} \sqrt{\frac{2.2+1}{2} \frac{(2-|2|)!}{(2+|2|)!}} F_2^{2}(cos\theta)$

$$= (-1)^2\sqrt{\frac{5}{2}.\frac{0!}{4!}}3\sin^2\theta$$

$$= \sqrt{\frac{45}{48}}\sin^2\theta$$

$$= \sqrt{\frac{15}{16}}\sin^2\theta$$

10. $n = 4(l = 0, m = 0)$

$$\Theta_{00}(\theta) = (-1)^{(0+|0|)/2}\sqrt{\frac{2.0+1}{2}\frac{(0-|0|)!}{(0+|0|)!}}F_0^0(cos\theta)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}}$$

11. $n = 4(l = 1, m = -1)$

$$\Theta_{1-1}(\theta) = (-1)^{(-1+|-1|)/2}\sqrt{\frac{2.1+1}{2}\frac{(1-|-1|)!}{(1+|-1|)!}}F_1^{-1}(cos\theta)$$

$$= (-1)^0\sqrt{\frac{3}{2}.\frac{0!}{2!}}.sin\theta$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4}}sin\theta$$

12. $n = 4(l = 1, m = 0)$

$$F_1^0(cos\theta) = (1-\cos^2\theta)^{\frac{|0|}{2}}\frac{d^{|0|}F_1(cos\theta)}{dcos\theta^{|0|}}$$

$$= 1.\frac{cos\theta}{1}$$

$$= cos\theta$$

13. $n = 4(l = 1, m = 1)$

$$\Theta_{11}(\theta) = (-1)^{(1+|1|)/2}\sqrt{\frac{2.1+1}{2}\frac{(1-|-1|)!}{(1+|-1|)!}}F_1^{-1}(cos\theta)$$

$$= (-1)^1\sqrt{\frac{3}{2}.\frac{0!}{2!}}.sin\theta$$

$$= -\sqrt{\frac{3}{4}}sin\theta$$

14. $n = 4(l = 2, m = -2)$

$$\Theta_{2-2}\,(\theta) = (-1)^{(-2+|-2|)/2}\sqrt{\frac{2.2+1}{2}\frac{(2-|-2|)!}{(2+|-2|)!}}F_2^{-2}(cos\theta)$$

$$= (-1)^0\sqrt{\frac{5}{2}.\frac{0!}{4!}}3\sin^2\theta$$

$$= \sqrt{\frac{45}{48}}\sin^2\theta$$

$$= \sqrt{\frac{15}{16}}\sin^2\theta$$

15. $n = 4(l = 2, m = -1)$

$$\Theta_{2-1}\,(\theta) = (-1)^{(-1+|-1|)/2}\sqrt{\frac{2.2+1}{2}\frac{(2-|-1|)!}{(2+|-1|)!}}F_2^{-1}(cos\theta)$$

$$= (-1)^0\sqrt{\frac{5}{2}.\frac{1!}{3!}}\,3\,sin\theta cos\theta$$

$$= \sqrt{\frac{5}{12}}3sin\theta cos\theta$$

$$= \sqrt{\frac{45}{12}}sin\theta cos\theta$$

$$= \sqrt{\frac{15}{4}}sin\theta cos\theta$$

16. $n = 4(l = 2, m = 0)$

$$\Theta_{20}\,(\theta) = (-1)^{(0+|0|)/2}\sqrt{\frac{2.2+1}{2}\frac{(2-|0|)!}{(2+|0|)!}}F_2^0(cos\theta)$$

$$= (-1)^0\sqrt{\frac{5}{2}.\frac{2!}{2!}\frac{1}{2}}(3\cos^2\theta - 1)$$

$$= \sqrt{\frac{5}{8}}(3\cos^2\theta - 1)$$

17. $n = 4(l = 2, m = 1)$

$$\Theta_{21}(\theta) = (-1)^{(1+|1|)/2}\sqrt{\frac{2.2+1}{2}\frac{(2-|1|)!}{(2+|1|)!}}\,F_2^1(cos\theta)$$

$$= (-1)^1\sqrt{\frac{5}{2}.\frac{1!}{3!}}\,3\,sin\theta cos\theta$$

$$= -\sqrt{\frac{5}{12}}3sin\theta cos\theta$$

$$= -\sqrt{\frac{45}{12}}sin\theta cos\theta$$

$$= -\sqrt{\frac{15}{4}}sin\theta cos\theta$$

18. $n = 4(l = 2, m = 2)$

$$\Theta_{22}(\theta) = (-1)^{(2+|2|)/2}\sqrt{\frac{2.2+1}{2}\frac{(2-|2|)!}{(2+|2|)!}}\,F_2^2(cos\theta)$$

$$= (-1)^2\sqrt{\frac{5}{2}.\frac{0!}{4!}}3\sin^2\theta$$

$$= \sqrt{\frac{45}{48}}\sin^2\theta$$

$$= \sqrt{\frac{15}{16}}\sin^2\theta$$

19. $n = 4(l = 3, m = -3)$

$$\Theta_{3-3}(\theta) = (-1)^{(-3+|-3|)/2}\sqrt{\frac{2.3+1}{2}\frac{(3-|-3|)!}{(3+|-3|)!}}\,F_3^{-3}(cos\theta)$$

$$= (-1)^0\sqrt{\frac{7}{2}.\frac{0!}{6!}}15\,(1-\cos^2\theta)^{3/2}$$

$$= \sqrt{\frac{1575}{1440}}(1-\cos^2\theta)^{3/2}$$

20. $n = 4(l = 3, m = -2)$

$$\Theta_{3-2}(\theta) = (-1)^{(-2+|-2|)/2}\sqrt{\frac{2.3+1}{2}\frac{(3-|-2|)!}{(3+|-2|)!}}\,F_3^{-2}(cos\theta)$$

$$= (-1)^0\sqrt{\frac{7}{2}\frac{1!}{5!}}15\sin^2\theta cos\theta$$

$$= \sqrt{\frac{1575}{240}} \sin^2\theta cos\theta$$

$$= \sqrt{\frac{315}{48}} \sin^2\theta cos\theta$$

21. $n = 4(l = 3, m = -1)$

$$\Theta_{3-1}(\theta) = (-1)^{(-1+|-1|)/2} \sqrt{\frac{2.3+1}{2} \frac{(3-|-1|)!}{(3+|-1|)!}} F_3^{-1}(cos\theta)$$

$$= (-1)^0 \sqrt{\frac{7}{2} \frac{2!}{4!}} \ \frac{3}{2} \ sin\theta \, (5\cos^2\theta - 1)$$

$$= \sqrt{\frac{14}{48}} \sqrt{\frac{9}{4}} \ (5\cos^2\theta - 1)$$

$$= \sqrt{\frac{126}{192}} \ (5\cos^2\theta - 1)$$

$$= \sqrt{\frac{21}{32}} \ (5\cos^2\theta - 1)$$

22. $n = 4(l = 3, m = 0)$

$$\Theta_{30}(\theta) = (-1)^{(0+|0|)/2} \sqrt{\frac{2.3+1}{2} \frac{(3-|0|)!}{(3+|0|)!}} F_3^0(cos\theta)$$

$$= \sqrt{\frac{7}{2}} \frac{1}{2} (5\cos^3\theta - 3cos\theta)$$

$$= \sqrt{\frac{7}{8}} (5\cos^3\theta - 3cos\theta)$$

23. $n = 4(l = 3, m = 1)$

$$\Theta_{31}(\theta) = (-1)^{(1+|1|)/2} \sqrt{\frac{2.3+1}{2} \frac{(3-|1|)!}{(3+|1|)!}} F_3^1(cos\theta)$$

$$= (-1)^1 \sqrt{\frac{7}{2} \frac{2!}{4!}} \ \frac{3}{2} \ sin\theta \, (5\cos^2\theta - 1)$$

$$= -\sqrt{\frac{14}{48}} \sqrt{\frac{9}{4}} \ (5\cos^2\theta - 1)$$

$$= -\sqrt{\frac{126}{192}} \ (5\cos^2\theta - 1)$$

$$= -\sqrt{\frac{21}{32}} \ (5\cos^2\theta - 1)$$

24. $n = 4(l = 3, m = 2)$

$$\Theta_{32}(\theta) = (-1)^{(2+|2|)/2} \sqrt{\frac{2.3+1}{2} \frac{(3-|2|)!}{(3+|2|)!}} F_3^{-2}(cos\theta)$$

$$= (-1)^2\sqrt{\frac{7}{2}\frac{1!}{5!}}15\sin^2\theta cos\theta$$

$$= \sqrt{\frac{1575}{240}}\sin^2\theta cos\theta$$

$$= \sqrt{\frac{315}{48}}\sin^2\theta cos\theta$$

25. $n = 4(l = 3, m = 3)$

$$\Theta_{33}(\theta) = (-1)^{(3+|3|)/2}\sqrt{\frac{2.3+1}{2}\frac{(3-|3|)!}{(3+|3|)!}}F_3^3(cos\theta)$$

$$= (-1)^3\sqrt{\frac{7}{2}.\frac{0!}{6!}}15\,(1-\cos^2\theta)^{3/2}$$

$$= -\sqrt{\frac{1575}{1440}}(1-\cos^2\theta)^{3/2}$$

Lampiran 7. Perhitungan Fungsi Persamaan Azimuth

$$\Phi = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}e^{\pm im\varphi}$$

1. $n = 3(l = 0, m = 0)$

   $\Phi = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}e^{\pm i0\varphi}$

   $= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}$

2. $n = 3(l = 1, m = -1)$

   $\Phi = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}e^{i-1\varphi}$

   $= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}e^{-i\varphi}$

3. $n = 3(l = 1, m = 0)$

   $\Phi = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}e^{i0\varphi}$

   $= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}$

4. $n = 3(l = 1, m = 1)$

   $\Phi = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}e^{i1\varphi}$

   $= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}e^{i\varphi}$

5. $n = 3(l = 2, m = -2)$

   $\Phi = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}e^{i-2\varphi}$

   $= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}e^{-2i\varphi}$

6. $n = 3(l = 2, m = -1)$

   $\Phi = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}e^{i-1\varphi}$

   $= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}e^{-i\varphi}$

7. $n = 3(l = 2, m = 0)$

   $\Phi = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}e^{i0\varphi}$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}$$

8. $n = 3(l = 2, m = 1)$

$$\Phi = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i1\varphi}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i\varphi}$$

9. $n = 3(l = 2, m = 2)$

$$\Phi = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i2\varphi}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{2i\varphi}$$

10. $n = 4(l = 0, m = 0)$

$$\Phi = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i0\varphi}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}$$

11. $n = 4(l = 1, m = -1)$

$$\Phi = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i-1\varphi}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{-i\varphi}$$

12. $n = 4(l = 1, m = 0)$

$$\Phi = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i0\varphi}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}$$

13. $n = 4(l = 1, m = 1)$

$$\Phi = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i1\varphi}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i\varphi}$$

14. $n = 4(l = 2, m = -2)$

$$\Phi = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i-2\varphi}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{-2i\varphi}$$

15. $n = 4(l = 2, m = -1)$

$$\Phi = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i-1\varphi}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{-i\varphi}$$

16. $n = 4(l = 2, m = 0)$

$$\Phi = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i0\varphi}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}$$

17. $n = 4(l = 2, m = 1)$

$$\Phi = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i1\varphi}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i\varphi}$$

18. $n = 4(l = 2, m = 2)$

$$\Phi = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i2\varphi}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{2i\varphi}$$

19. $n = 4(l = 3, m = -3)$

$$\Phi = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i-3\varphi}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{-3i\varphi}$$

20. $n = 4(l = 3, m = -2)$

$$\Phi = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i-2\varphi}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{-2i\varphi}$$

21. $n = 4(l = 3, m = -1)$

$$\Phi = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i-1\varphi}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{-i\varphi}$$

22. $n = 4(l = 3, m = 0)$

$$\Phi = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i0\varphi}$$

$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}}$

23. $n = 4(l = 3, m = 1)$

$\Phi = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i1\varphi}$

$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i\varphi}$

24. $n = 4(l = 3, m = 2)$

$\Phi = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i2\varphi}$

$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{2i\varphi}$

25. $n = 4(l = 3, m = 3)$

$\Phi = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i3\varphi}$

$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{3i\varphi}$

Lampiran 8. Perhitungan Fungsi Radial

Bentuk umum fungsi radial :

$$R_{nl} = \sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n\left((n+l)!\right)^3}} \left(\frac{2r}{na_0}\right)^l e^{-\frac{r}{na_0}} L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right)$$

Dengan rumus Rodrigues sebagai berikut:

$$L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right) = (-1)^{2l+1}\frac{(n+l)!}{(n-l-1)!} e^{2r/na_0} \frac{d^{n+l}}{d\left(\frac{2r}{na_0}\right)^{n+l}} \left(e^{-\frac{2r}{na_0}}\left(\frac{2r}{na_0}\right)^{n-l-1}\right.$$

1. $n = 3\,, l = 0$

$$L_{3+0}^{2.0+1}\left(\frac{2r}{3a_0}\right) = (-1)^{2.0+1}\frac{(3+0)!}{(3-0-1)!} e^{2r/3a_0} \frac{d^{3+0}}{d\left(\frac{2r}{3a_0}\right)^{3+0}} \left(e^{-\frac{2r}{3a_0}}\left(\frac{2r}{3a_0}\right)^{3-0-1}\right)$$

$$= -1\frac{3!}{2!} e^{2r/3a_0} \frac{d^3}{\left(d\left(\frac{2r}{3a_0}\right)\right)^3} \left(e^{-\frac{2r}{3a_0}}\left(\frac{2r}{3a_0}\right)^{3-0-1}\right)$$

Misal : $Z = \frac{2r}{3a_0}$

$$L_{3+0}^{2.0+1}\left(\frac{2r}{3a_0}\right) = -3\, e^Z \frac{d^3}{dZ^3}\,(e^{-Z}.Z^2)$$

$= -3e^Z \frac{d^2}{dZ^2}(e^{-Z}.2Z + (-e^{-Z}).Z^2)$

$= -3e^Z \frac{d}{dZ}(e^{-Z}.2 + (-e^{-Z}).2Z + (-e^{-Z}).2Z + e^{-Z}.Z^2)$

$= -3e^Z(-2e^{-Z} - 2e^{-Z} + e^{-Z}.2Z - 2e^{-Z} + e^{-Z}.2Z + e^{-Z}.2Z -$
$e^{-Z}.Z^2)$

$= -3e^Z(-6e^{-Z} + 6Ze^{-Z} - Z^2e^{-Z})$

$= 18 - 18Z + 3Z^2$

Maka fungsi radialnya:

$$R_{nl} = \sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n\left((n+l)!\right)^3}} \left(\frac{2r}{na_0}\right)^l e^{-\frac{r}{na_0}} L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right)$$

$$R_{30} = \sqrt{\left(\frac{2}{3a_0}\right)^3 \frac{(3-0-1)!}{2.3\left((3+0)!\right)^3}} \left(\frac{2r}{3a_0}\right)^0 e^{-\frac{r}{3a_0}} L_{3+l}^{2.0+1} \left(\frac{2r}{3a_0}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{4}{3a_0^3}\frac{1}{54}}\ 3(6-6Z-Z^2)e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3a_0^3}}\frac{1}{9}\left(6-\frac{12r}{3a_0}-\frac{4r^2}{9a_0}\right)$$

2. $n = 3, l = 1$

$$L_{3+1}^{2.1+1}\left(\frac{2r}{3a_0}\right) = (-1)^{2.1+1}\frac{(3+1)!}{(3-1-1)!}\,e^{2r/3a_0}\frac{d^{3+1}}{d\left(\frac{2r}{3a_0}\right)^{3+1}}\left(e^{-\frac{2r}{3a_0}}\left(\frac{2r}{3a_0}\right)^{3-1-1}\right)$$

$$L_4^3\left(\frac{2r}{3a_0}\right) = -1\frac{4!}{2!}\,e^{2r/3a_0}\frac{d^4}{d\left(\frac{2r}{3a_0}\right)^4}\left(e^{-\frac{2r}{3a_0}}\left(\frac{2r}{3a_0}\right)^1\right)$$

Misal $Z = \frac{2r}{3a_0}$

$$L_4^3\left(\frac{2r}{3a_0}\right) = -\frac{4x3x2!}{1!}\,e^Z\frac{d^4}{dZ^4}\left(e^{-Z}.Z\right)$$

$$= -24\,e^Z\frac{d^4}{dZ^4}\left(e^{-Z}.Z\right)$$

$$= -24\,e^Z\frac{d^3}{dZ^3}\left(e^{-Z} - e^{-Z}.Z\right)$$

$$= -24\,e^Z\frac{d^2}{dZ^2}\left(-e^{-Z} - e^{-Z} + e^{-Z}.Z\right)$$

$$= -24\,e^Z\frac{d}{dZ}\left(e^{-Z} + e^{-Z} + e^{-Z} - e^{-Z}.Z\right)$$

$$= -24\,e^Z\left(-e^{-Z} - e^{-Z} - e^{-Z} - e^{-Z} + e^{-Z}.Z\right)$$

$$= -24\,e^Z\left(-4e^{-Z} + e^{-Z}.Z\right)$$

$$= 96 - 24Z$$

Maka fungsi radialnya:

$$R_{nl} = \sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)^3\frac{(n-l-1)!}{2n\left((n+l)!\right)^3}}\left(\frac{2r}{na_0}\right)^l e^{-\frac{r}{na_0}}L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right)$$

$$R_{31} = \sqrt{\left(\frac{2}{3a_0}\right)^3\frac{(3-1-1)!}{2.3\left((3+1)!\right)^3}}\left(\frac{2r}{3a_0}\right)^1 e^{-\frac{r}{3a_0}}L_4^3\left(\frac{2r}{3a_0}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2^3}{3^3a_0^3}\frac{1!}{2.3(4!)^3}}\left(\frac{2r}{3a_0}\right)^1 e^{-\frac{r}{3a_0}}\,96 - 24Z$$

$$= \sqrt{\frac{1}{6a_0}}\frac{2r}{3a_0}\left(4 - \frac{2r}{3a_0}\right)\,e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

3. $n = 3\,, l = 2$

$$L_{3+2}^{2.2+1}\left(\frac{2r}{3a_0}\right) = (-1)^{2.2+1}\frac{(3+2)!}{(3-2-1)!}e^{2r/3a_0}\frac{d^{3+2}}{d\left(\frac{2r}{3a_0}\right)^{3+2}}\left(e^{-\frac{2r}{3a_0}}\left(\frac{2r}{3a_0}\right)^{3-2-1}\right)$$

$$= -\frac{5!}{0!}e^{2r/3a_0}\frac{d^5}{d\left(\frac{2r}{3a_0}\right)^5}\left(e^{-\frac{2r}{3a_0}}\left(\frac{2r}{3a_0}\right)^{3-2-1}\right)$$

Misalkan $Z = \frac{2r}{3a_0}$

$$L_5^5\left(\frac{2r}{3a_0}\right) = -120e^Z\frac{d^5}{dZ^5}\left(e^{-Z}\right)$$

$$= -120\, e^Z\frac{d^4}{dZ^4}\left(-e^{-Z}\right)$$

$$= -120\, e^Z\frac{d^3}{dZ^3}\left(e^{-Z}\right)$$

$$= -120\, e^Z\frac{d^2}{dZ^2}\left(-e^{-Z}\right)$$

$$= -120\, e^Z\frac{d}{dZ}\left(e^{-Z}\right)$$

$$= -120\, e^Z\left(-e^{-Z}\right)$$

$$= 120$$

Maka fungsi radialnya:

$$R_{nl} = \sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)^3\frac{(n-l-1)!}{2n\big((n+l)!\big)^3}}\left(\frac{2r}{na_0}\right)^l e^{-\frac{r}{na_0}}L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right)$$

$$R_{nl} = \sqrt{\left(\frac{2}{3a_0}\right)^3\frac{(3-2-1)!}{2.3\big((3+2)!\big)^3}}\left(\frac{2r}{3a_0}\right)^2 e^{-\frac{r}{3a_0}}L_{3+2}^{2.2+1}\left(\frac{2r}{3a_0}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2^3}{3^3a_0^3}\frac{0!}{2.3(5!)^3}}\left(\frac{2r}{3a_0}\right)^2 e^{-\frac{r}{3a_0}}L_{3+2}^{2.2+1}\left(\frac{2r}{3a_0}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2^2}{3^4.5!a_0^3}\frac{1}{5!}}\left(\frac{4r^2}{3^2a_0^2}\right)e^{-\frac{r}{3a_0}}\,120$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2^3.3.5a_0^3}\frac{2}{3^2}\frac{1}{120}}\,120\left(\frac{4r^2}{3^2a_0^2}\right)e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{30a_0^3}\frac{1}{9}}\left(\frac{4r^2}{9a_0^2}\right)e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{30a_0^3}}\left(\frac{4r^2}{81a_0^2}\right)e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

4. $n = 4\,, l = 0$

$$L_{4+0}^{2.0+1} = (-1)^{2.0+1}\frac{(4+0)!}{(4-0-1)!}e^{2r/4a_0}\frac{d^{4+0}}{d\left(\frac{2r}{4a_0}\right)^{4+0}}\left(e^{-\frac{2r}{4a_0}}\left(\frac{2r}{4a_0}\right)^{4-0-1}\right.$$

$$L_4^1 = (-1)^1\,\frac{4!}{3!}e^{2r/4a_0}\frac{d^{4+0}}{d\left(\frac{2r}{4a_0}\right)^{4+0}}\left(e^{-\frac{2r}{4a_0}}\left(\frac{2r}{4a_0}\right)^3\right.$$

$$L_4^1 = (-1)\frac{24}{6}e^{\frac{r}{2a_0}}d^4/d\left(\frac{r}{2a_0}\right)^4\left(e^{-\frac{r}{2a_0}}\left(\frac{r}{2a_0}\right)^3\right)$$

Dimisalkan $Z = \frac{r}{2a_0}$

$$L_4^1 = -4\,e^Z\frac{d^4}{d(Z)^4}\,(e^{-Z}(Z)^3)$$

$$= -4\,e^Z\frac{d^3}{d(Z)^3}\,\left(\frac{d}{dZ}(e^{-Z}(Z)^3)\right.$$

$$= -4\,e^Z\frac{d^3}{d(Z)^3}(e^{-Z}3Z^2 + (-e^{-Z}).Z^3)$$

$$= -4\,e^Z\frac{d^2}{d(Z)^2}\left(\left(\frac{d}{df}(e^{-Z}.3Z^2)\right) + \left(\frac{d}{df}(-e^{Z}.Z^3)\right)\right)$$

$$= -4\,e^Z\,\frac{d^2}{d(Z)^2}\,((e^{-Z}6Z + (-e^{-Z})3Z^2 + (-e^{-Z})3Z^2 + \,e^{-Z}.Z^3))$$

$$= -4\,e^Z\frac{d}{dZ}\,\left(\left(\frac{d}{dZ}(e^{-Z}6Z) + \frac{d}{dZ}((-e^{-Z})3Z^2) + \frac{d}{dZ}\left((-e^{-Z})3Z^2\right) + \frac{d}{dZ}(e^{-Z}.Z^3)\right.\right.$$

$$= -4\,e^Z\frac{d}{dZ}\,((e^{-Z}6 + (-e^{-Z})6Z + (-e^{-Z})6Z + e^{-Z}3Z^2 + (-e^{-Z})6Z + e^{-Z}3Z^2 + \,e^{-Z}3Z^2 + (-e^{-Z}).Z^3)$$

$$= -4\,e^Z\,\left(\frac{d}{dZ}e^{-Z}6 + \frac{d}{dZ}\left((-e^{-Z})6Z\right) + \frac{d}{dZ}((-e^{-Z})6Z) + \frac{d}{dZ}(e^{-Z}3Z^2) + \frac{d}{dZ}\left((-e^{-Z})6Z\right) + \frac{d}{dZ}(e^{-Z}3Z^2) + \frac{d}{dZ}(e^{-Z}3Z^2) + \frac{d}{dZ}((-e^{-Z}).Z^3)\right)$$

$$= -4e^Z(-6e^{-Z} - 6^{-Z} + 6Ze^{-Z} - 6^{-Z} + 6Ze^{-Z} + 6Ze^{-Z} - 3Z^2e^{-Z} - 6e^{-Z} + 6Ze^{-Z} + 6Ze^{-Z} - 3Ze^2e^{-Z} + 6Ze^{-Z} - 3Z^2e^{-Z} - 3Z^2e^{-Z} + Z^3e^{-Z}$$

$$= \;-4e^Z\,(-24e^{-Z} + 36Ze^{-Z} - 12Z^2e^{-Z} + Z^3e^{-Z})$$

$= 96 - 144\,Z + 48\,Z^2 - 4Z^3$

Maka, fungsi radialnya:

$$R_{nl} = \sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n\big((n+l)!\big)^3}} \left(\frac{2r}{na_0}\right)^l e^{-\frac{r}{na_0}} L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right)$$

$$R_{40} = \sqrt{\left(\frac{2}{4a_0}\right)^3 \frac{(4-0-1)!}{2.4\big((4+0)!\big)^3}} \left(\frac{2r}{4a_0}\right)^0 e^{-\frac{r}{4a_0}} L_{4+0}^{2.0+1}\left(\frac{2r}{4a_0}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2^3}{4^3 a_0^3}\frac{3!}{2.4(4!)^3}}\, e^{-\frac{r}{4a_0}}(96 - 144\,Z + 48\,Z^2 - 4Z^3)$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{1}{(a_0)^3}\left[1 - \frac{3r}{4a_0} + \frac{r^2}{8a_0} - \frac{r^3}{192a_0^3}\right] e^{-\frac{r}{4a_0}}$$

5. $n = 4\,, l = 1$

$$L_{n+l}^{2l+1} = (-1)^{2l+1}\frac{(n+l)!}{(n-l-1)!}\frac{e^{2r}}{na_0}\frac{d^{n+l}}{d\left(\frac{2r}{na_0}\right)^{n+l}}\left(e^{-\frac{2r}{na_0}}\left(\frac{2r}{na_0}\right)^{n-l-1}\right)$$

$$L_{4+1}^{2.1+1} = (-1)^{2.1+1}\frac{(4+1)!}{(4-1-1)!}\frac{e^{2r}}{4a_0}\frac{d^{4+1}}{d\left(\frac{2r}{4a_0}\right)^{4+1}}\left(e^{-\frac{2r}{4a_0}}\left(\frac{2r}{4a_0}\right)^{4-1-1}\right)$$

$$L_5^3 = (-1)^3\frac{(5)!}{(2)!}\frac{e^{2r}}{4a_0}\frac{d^5}{d\left(\frac{2r}{4a_0}\right)^5}\left(e^{-\frac{2r}{4a_0}}\left(\frac{2r}{4a_0}\right)^2\right)$$

Dimisalkan $Z = \frac{r}{2a_0}$

$$L_5^3 = -60\,e^Z\frac{d^5}{dZ^5}(e^{-Z}Z^2)$$

$$= -60\,e^Z\,\frac{d^4}{dZ^4}\left(\frac{d}{dZ}\;e^{-Z}Z^2\right)$$

$$= -60\,e^Z\,\frac{d^4}{dZ^4}(e^{-Z}2Z + (-e^{-Z})Z^2)$$

$$= -60\,e^Z\,\frac{d^3}{dZ^3}\left(\frac{d}{dZ}e^{-Z}2Z + \frac{d}{dZ}(-e^{-Z})Z^2\right)$$

$$= -60\,e^Z\,\frac{d^3}{dZ^3}\,(e^{-Z}2 + (-e^{-Z}).2Z + (-e^{-Z})2F + e^{-Z}Z^2\,)$$

$$= -60\,e^Z\,\frac{d^2}{dZ^2}\left(\frac{d}{dZ}\;e^{-Z}2 + \frac{d}{dZ}(-e^{-Z}).2Z + \frac{d}{dZ}(-e^{-Z})2F + \frac{d}{dZ}e^{-Z}Z^2\right)$$

$= -60\, e^{Z} \frac{d^2}{dZ^2}(-e^{-Z}2 + -e^{-Z}2 + e^{-Z}2Z + -e^{-Z}2 + e^{-Z}2Z +$
$e^{-Z}2Z + -e^{-Z}2Z)$

$= -60\, e^{Z} \frac{d}{dZ}(e^{-Z}.2 + e^{-Z}.2 + e^{-Z}.2 + -e^{-Z}.2Z + e^{-Z}.2 + e^{-Z}.2 +$
$-e^{-Z}.2Z + e^{-Z}.2 + -e^{-Z}.2Z + -e^{-Z}.2Z + e^{-Z}.Z^2)$

$= -60\, e^{Z}(-2e^{-Z} - 2e^{-Z} - 2e^{-Z} - 2e^{-Z} + e^{-Z}2Z - 2e^{-Z} - 2e^{-Z} -$
$2e^{-Z} + e^{-Z}2Z - 2e^{-Z} - 2e^{-Z} + e^{-Z}2Z - 2e^{-Z} + e^{-Z}2Z + e^{-Z}2Z -$
$e^{-Z}Z^2)$

$= 1200 - 600Z + 60Z^2$

Maka, fungsi radialnya:

$$R_{nl} = \sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n((n+l)!)^3}} \left(\frac{2r}{na_0}\right)^l e^{-\frac{r}{na_0}} L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right)$$

$$R_{41} = \sqrt{\left(\frac{2}{4a_0}\right)^3 \frac{(4-1-1)!}{2.4((4+1)!)^3}} \left(\frac{2r}{4a_0}\right)^l e^{-\frac{r}{4a_0}} L_{4+1}^{2.1+1}\left(\frac{2r}{4a_0}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2a_0}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{2!}{8(5.4.3.2!)}}\, \frac{1}{5!} \frac{r}{2a_0} e^{\frac{r}{4a_0}} \left(1200 - 600\frac{r}{2a_0} + 60\frac{r^2}{8a_0^2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{1}{2.5.3}}\, \frac{1}{4}\; e^{\frac{r}{4a_0}} \left(\frac{5}{4a_0} - \frac{5r^2}{16a_0^2} + \frac{r^3}{64a_0^3}\right)$$

$$= \frac{1}{(a_0)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{1}{2^4 15}}.\frac{1}{4}\; e^{\frac{r}{4a_0}} \left(\frac{5}{4a_0} - \frac{5r^2}{16a_0^2} + \frac{r^3}{64a_0^3}\right)$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{15}} \frac{1}{(a_0)^{\frac{3}{2}}} \frac{5}{4} \left(\frac{r}{a_0} - \frac{r^2}{4a_0^2} - \frac{r^3}{80a_0^3}\right) e^{-\frac{r}{4a_0}}$$

$$= \frac{5}{16\sqrt{15}} \frac{1}{a_0^{3/2}} \left(\frac{r}{a_0} - \frac{r^2}{4a_0^2} - \frac{r^3}{80a_0^3}\right) e^{-\frac{r}{4a_0}}$$

6. $n = 4\,, l = 2$

$$L_{n+l}^{2l+1} = (-1)^{2l+1}\frac{(n+l)!}{(n-l-1)!}\frac{e^{2r}}{na_0}\frac{d^{n+l}}{d\left(\frac{2r}{na_0}\right)^{n+l}}\left(e^{-\frac{2r}{na_0}}\left(\frac{2r}{na_0}\right)^{n-l-1}\right)$$

$$L_{4+2}^{2.2+1} = (-1)^{2.2+1}\frac{(4+2)!}{(4-2-1)!}\frac{e^{2r}}{4a_0}\frac{d^{4+2}}{d\left(\frac{2r}{4a_0}\right)^{4+2}}\left(e^{-\frac{2r}{4a_0}}\left(\frac{2r}{4a_0}\right)^{4-2-1}\right)$$

$$L_6^5 = (-1)^5\frac{(6)!}{(1)!}\frac{e^{2r}}{4a_0}\frac{d^6}{d\left(\frac{2r}{4a_0}\right)^6}\left(e^{-\frac{2r}{4a_0}}\left(\frac{2r}{4a_0}\right)^1\right)$$

$$= -720e^{\frac{r}{2a_0}}\frac{d^6}{d\left(\frac{r}{2a_0}\right)^6}\left(\frac{e^{-r}}{2a_0\left(\frac{r}{2a_0}\right)}\right)$$

Dimisalkan $Z = \frac{r}{2a_0}$

$$L_6^5 = -720e^Z\frac{d^6}{dZ^6}(e^{-Z}Z)$$

$$= -720\,e^Z\,\frac{d^5}{dZ^5}\left(\frac{d}{dZ}(e^{-Z}Z)\right)$$

$$= -720\,e^Z\,\frac{d^5}{dZ^5}\,(e^{-Z} + (-e^{-Z})Z)$$

$$= -720\,e^Z\,\frac{d^4}{dZ^4}\left(\frac{d}{df}e^{-Z} + \frac{d}{df}(-e^{-Z})Z\right)$$

$$= -720\,e^Z\,\frac{d^4}{dZ^4}\left(-e^{-Z} + (-e^{-Z}) + e^Z Z\right)$$

$$= -720\,e^Z\,\frac{d^3}{dZ^3}\left(\frac{d}{dZ} - e^{-Z} + \frac{d}{dZ}(-e^{-Z}) + \frac{d}{dZ}e^Z Z\right)$$

$$= -720\,e^Z\,\frac{d^3}{dZ^3}\,(e^{-Z} + e^{-Z} + e^{-Z} + (-e^{-Z})Z)$$

$$= -720\,e^Z\,\frac{d^2}{dZ^2}\,\left(\frac{d}{dZ}e^{-Z} + \frac{d}{dZ}e^{-Z} + \frac{d}{dZ}e^{-Z} + \frac{d}{dZ}(-e^{-Z})Z\right)$$

$$= -720\,e^Z\frac{d^2}{dZ^2}\,((-e^{-Z}) + (-e^{-Z}) + (-e^{-Z}) + (-e^{-Z}) + e^{-Z}\,Z$$

$=$

$$-720\,e^Z\frac{d}{dz}\,\left(\frac{d}{dZ}(-e^{-Z}) + \frac{d}{dZ}(-e^{-Z}) + \frac{d}{dZ}(-e^{-Z}) + \right.$$

$$\left.\frac{d}{dZ}(-e^{-Z}) + \frac{d}{dZ}\,(e^{-Z}\,Z)\right)$$

$$= -720\,e^Z\frac{d}{dz}\,(e^{-Z} + e^{-Z} + e^{-Z} + e^{-Z} + e^{-Z} + (-e^{-Z})Z)$$

$$= -720\,e^Z\,\left(\frac{d}{dZ}e^{-Z} + \frac{d}{dZ}e^{-Z} + \frac{d}{dZ}e^{-Z} + \frac{d}{dZ}e^{-Z} + \frac{d}{dZ}e^{-Z} + \right.$$

$$\left.\frac{d}{dZ}(-e^{-Z})Z\right)$$

$= \ -720\ e^{Z}((-e^{-Z}) + (-e^{-Z}) + (-e^{-Z}) + (-e^{-Z}) + (-e^{-Z}) +$
$(-e^{-Z}) + \ e^{-Z}\ Z)$

$= \ -720e^{Z}\ (-60^{-Z} + e^{-Z}\ Z)$

$= 4320 - 720Z$

Maka fungsi radialnya:

$$R_{nl} = \sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n\left((n+l)!\right)^3}} \left(\frac{2r}{na_0}\right)^l e^{-\frac{r}{na_0}} L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right)$$

$$R_{42} = \sqrt{\left(\frac{2}{4a_0}\right)^3 \frac{(4-2-1)!}{2.4\left((4+2)!\right)^3}} \left(\frac{2r}{4a_0}\right)^2 e^{-\frac{r}{4a_0}} L_{4+2}^{2.2+1}\left(\frac{2r}{4a_0}\right)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2a_0}\right)^3 \frac{(1)!}{8(6.5.4.3.2.1)}} \left(\frac{r}{2a_0}\right)^2 e^{r/4a_0}\left(4320 - 720\frac{r}{\frac{2}{a_0}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{1}{2.5}\frac{1}{3}\frac{1}{8}\frac{1}{720}}\ e^{-\frac{r}{4a_0}}\left(\frac{4320r^2}{4a_0^2} - \frac{720r^3}{8a_0^3}\right)$$

$$= \frac{1}{(a_0)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2^3.2.5}\frac{1}{24}}\left(\frac{6r^2}{4a_0^2} - \frac{r^3}{8a_0^3}\right)$$

$$= (a_0)^{-\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{24}}\left(\frac{6r^2}{4a_0^2} - \frac{r^3}{8a_0^3}\right)$$

$$= a_0^{-\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{24}\frac{1}{2}}\left(\frac{6r^2}{4a_0^2} - \frac{r^3}{4a_0^3}\right)$$

$$= a_0^{-\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{1}{5}}\ \frac{1}{192}\left(\frac{6r^2}{4a_0^2} - \frac{r^3}{4a_0^3}\right)$$

7. $n = 4\ , l = 3$

$$L_{n+l}^{2l+1} = (-1)^{2l+1}\frac{(n+l)!}{(n-l-1)!}\frac{e^{2r}}{na_0}\frac{d^{n+l}}{d\left(\frac{2r}{na_0}\right)^{n+l}}\left(e^{-\frac{2r}{na_0}}\left(\frac{2r}{na_0}\right)^{n-l-1}\right)$$

$$L_{4+3}^{2.3+1} = (-1)^{2.3+1}\frac{(4+3)!}{(4-3-1)!}\frac{e^{2r}}{4a_0}\frac{d^{4+3}}{d\left(\frac{2r}{4a_0}\right)^{4+3}}\left(e^{-\frac{2r}{4a_0}}\left(\frac{2r}{4a_0}\right)^{4-3-1}\right)$$

$$L_7^7 = (-1)^7\frac{(7)!}{(0)!}\frac{e^{2r}}{4a_0}\frac{d^7}{d\left(\frac{2r}{4a_0}\right)^7}\left(e^{-\frac{2r}{4a_0}}\left(\frac{2r}{4a_0}\right)^{4-3-1}\right)$$

Dimisalkan $Z = \frac{r}{2a_0}$

$$L_7^7 = -5040\, e^Z \frac{d^7}{dZ^7}\,(e^{-Z})$$

$$= -5040\, e^Z \frac{d^6}{dZ^6}\left(\frac{d}{dZ}(e^{-Z})\right)$$

$$= -5040\, e^Z \frac{d^6}{dZ^6}\,(-e^{-Z})$$

$$= -5040\, e^Z \frac{d^5}{dZ^5}\left(\frac{d}{dZ}(-e^{-Z})\right)$$

$$= -5040\, e^Z \frac{d^5}{dZ^5}(e^{-Z})$$

$$= -5040\, e^Z \frac{d^4}{dZ^4}\left(\frac{d}{dZ}(e^{-Z})\right)$$

$$= -5040\, e^Z \frac{d^4}{dZ^4}((-e^{-Z}))$$

$$= -5040\, e^Z \frac{d^3}{dZ^3}\left(\frac{d}{dZ}(-e^{-Z})\right)$$

$$= -5040\, e^Z \frac{d^3}{dZ^3}\,(e^{-Z})$$

$$= -5040\, e^Z \frac{d^2}{dZ^2}\,(\frac{d}{dZ}(e^{-Z}))$$

$$= -5040\, e^Z \frac{d^2}{dZ^2}\,((-e^{-Z}))$$

$$= -5040\, e^Z \frac{d}{dZ}\,(\frac{d}{dZ}(-e^{-Z}))$$

$$= -5040\, e^Z \frac{d}{dZ}\,(e^{-Z})$$

$$= -5040\, e^Z\,(-e^{-Z})$$

$$= 5040$$

Maka persamaan radialnya:

$$R_{nl} = \sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n\big((n+l)!\big)^3}}\left(\frac{2r}{na_0}\right)^l e^{-\frac{r}{na_0}} L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right)$$

$$R_{43} = \sqrt{\left(\frac{2}{4a_0}\right)^3 \frac{(4-3-1)!}{2.4\big((4+3)!\big)^3}}\left(\frac{2r}{4a_0}\right)^3 e^{-\frac{r}{4a_0}} L_{4+3}^{2.3+1}\left(\frac{2r}{4a_0}\right)$$

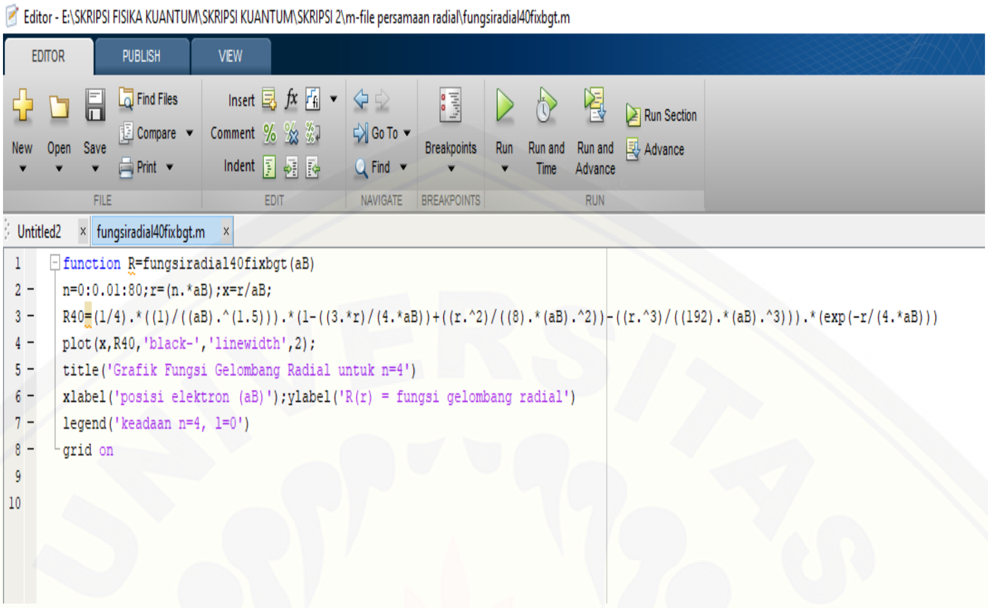
$$R_{43} = \left(\frac{2}{4a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{1}{8(7)!}}\frac{1}{(7)!}\left(\frac{r}{2a_0}\right)^3 \frac{e^{-r}}{4a_0}\,(5040)$$

$$= \frac{1}{a_0^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\sqrt{7.2.5}}\frac{1}{8}\,\frac{1}{3}\frac{1}{5040}\frac{r^3}{(8a_0)^3}\frac{e^{-r}}{4a_0}\;5040$$

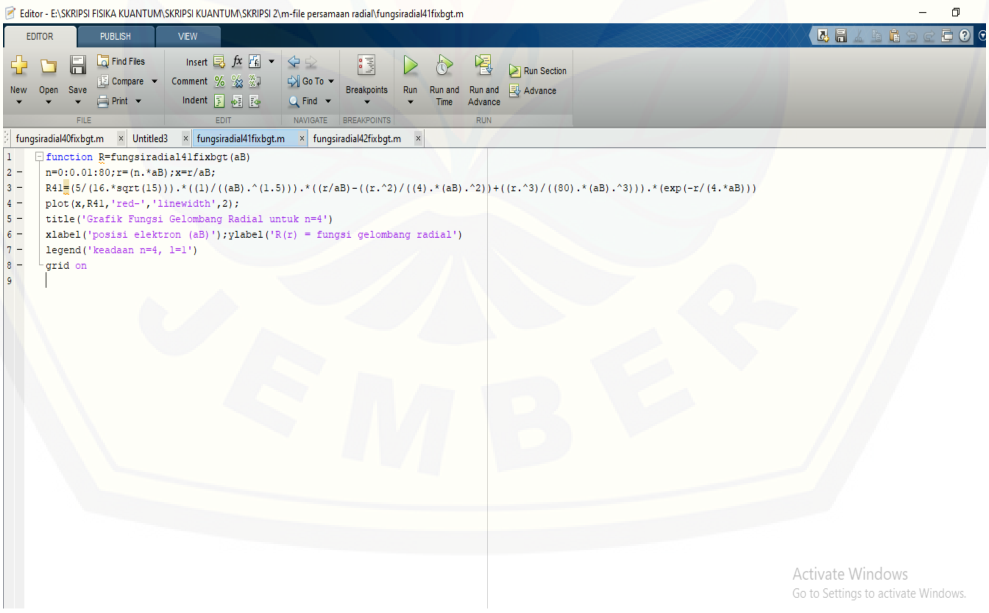
$$= \frac{1}{768\sqrt{35}a_0^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{r^3}{a_0^3}\right) e^{-\frac{r}{4a_0}}$$

Lampiran 9.

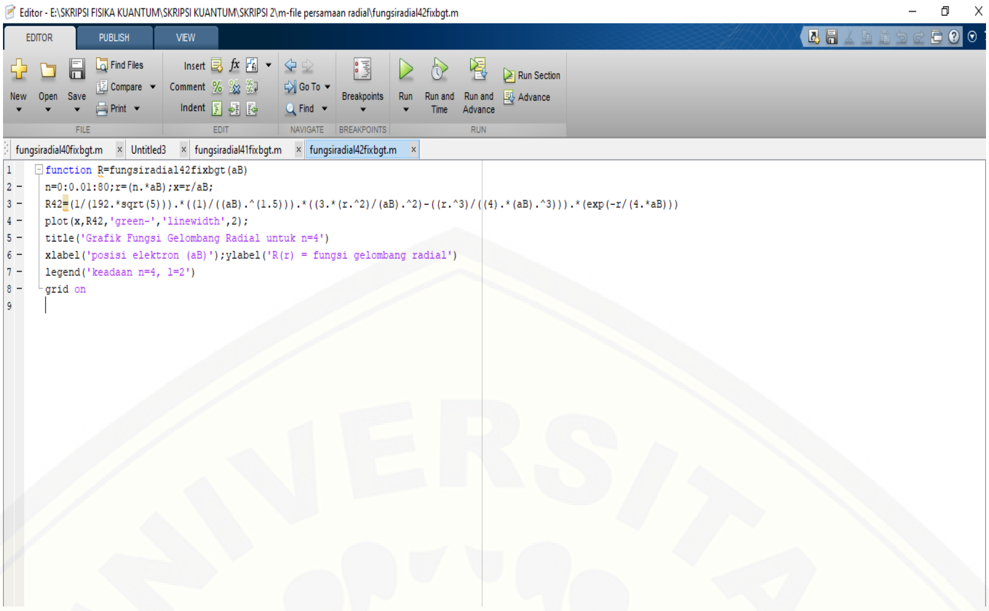
Menentukan grafik fungsi gelombang radial atom Deuterium



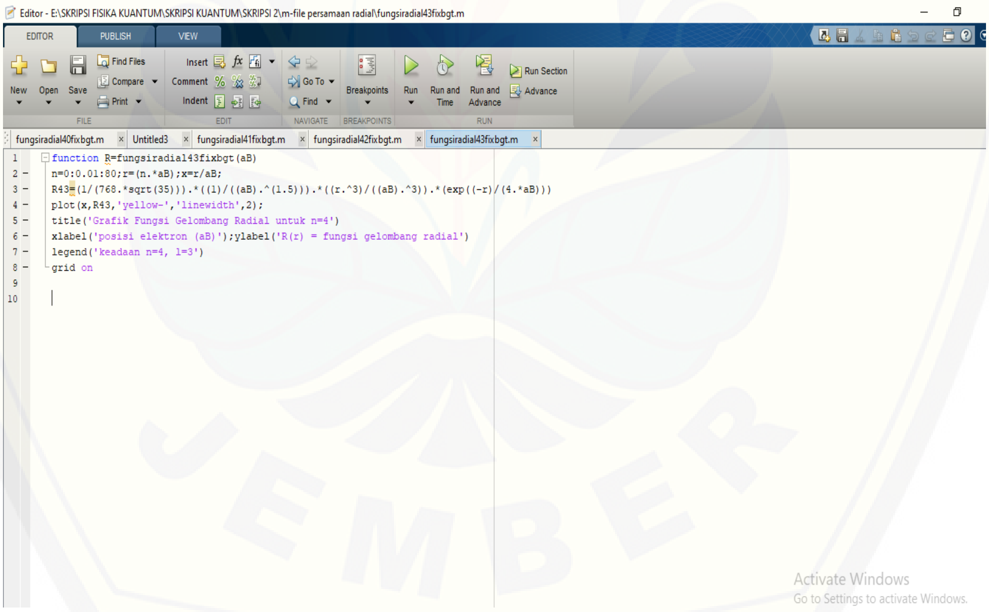
Gambar 1. M-file untuk menentukan grafik fungsi radial dengan bilangan kuantum $n = 4, l = 0$



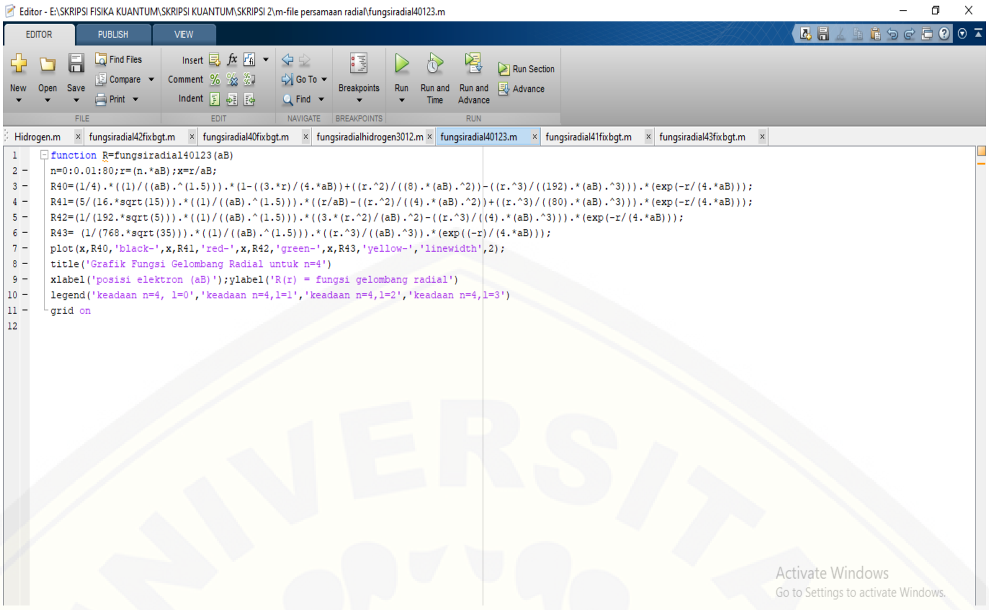
Gambar 2. M-file untuk menentukan grafik fungsi radial dengan bilangan kuantum $n = 4, l = 1$



Gambar 3. M-file untuk menentukan grafik fungsi radial dengan bilangan kuantum $n = 4, l = 2$

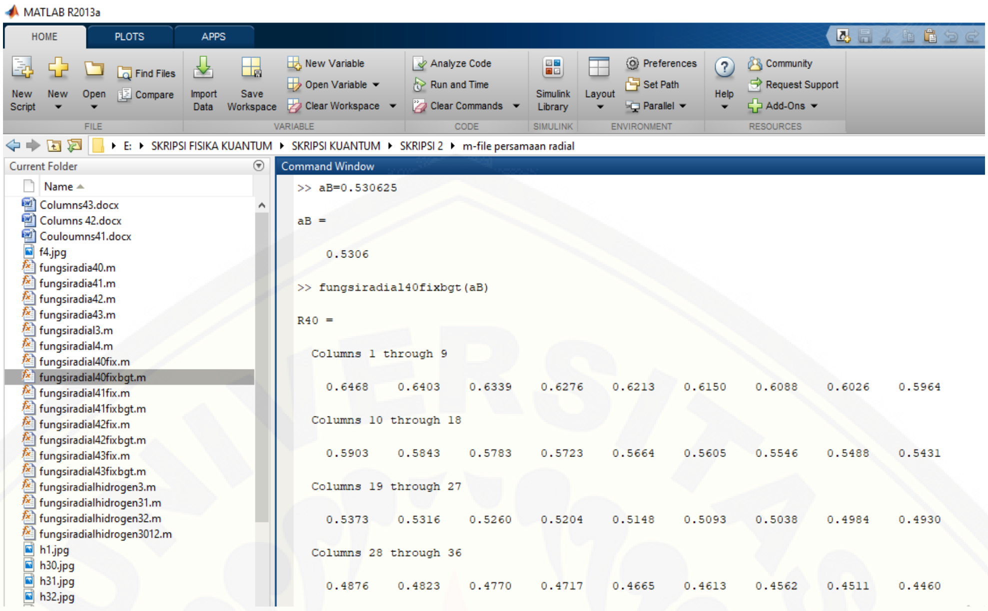


Gambar 4. M-file untuk menentukan grafik fungsi radial dengan bilangan kuantum $n = 4, l = 3$

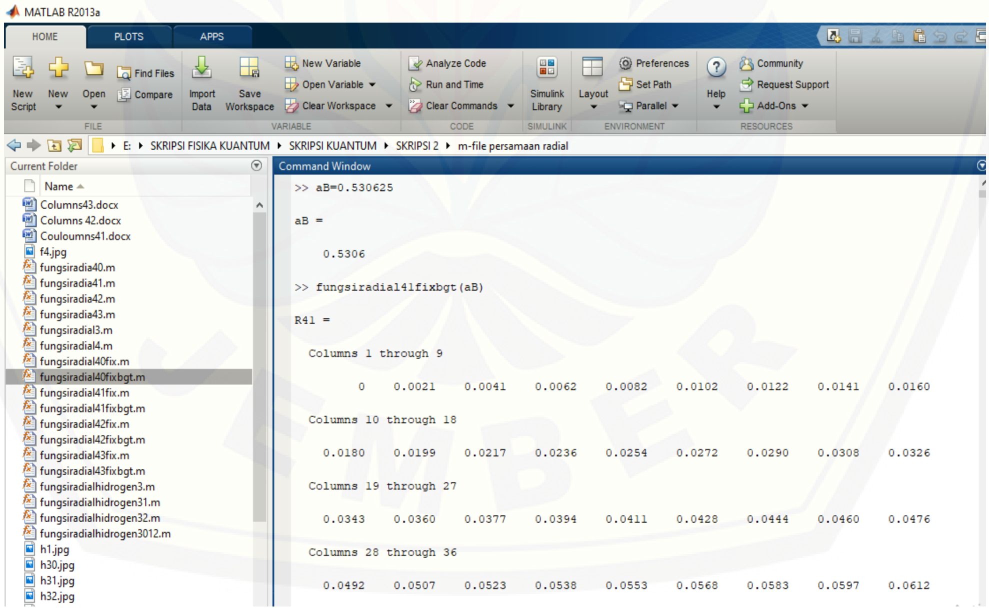


Gambar 5. M-file untuk menentukan dan menggabungkan grafik fungsi radial dengan bilangan kuantum $(n = 4, l = 0), (n = 4, l = 1), (n = 4, l = 2), (n = 4, l = 3)$

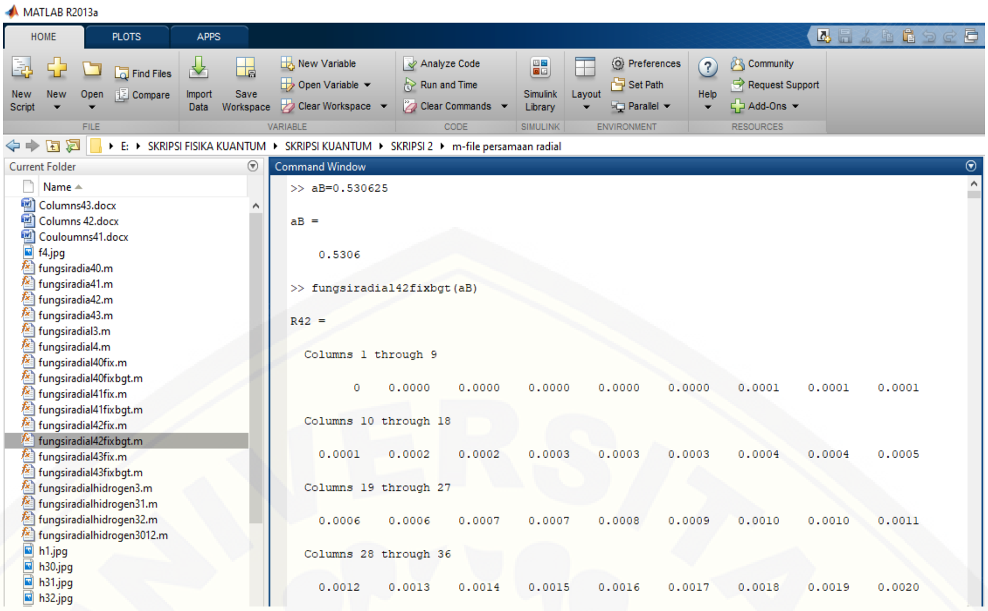
Kemudian m-file dieksekusi kedalam command window sebagai berikut:



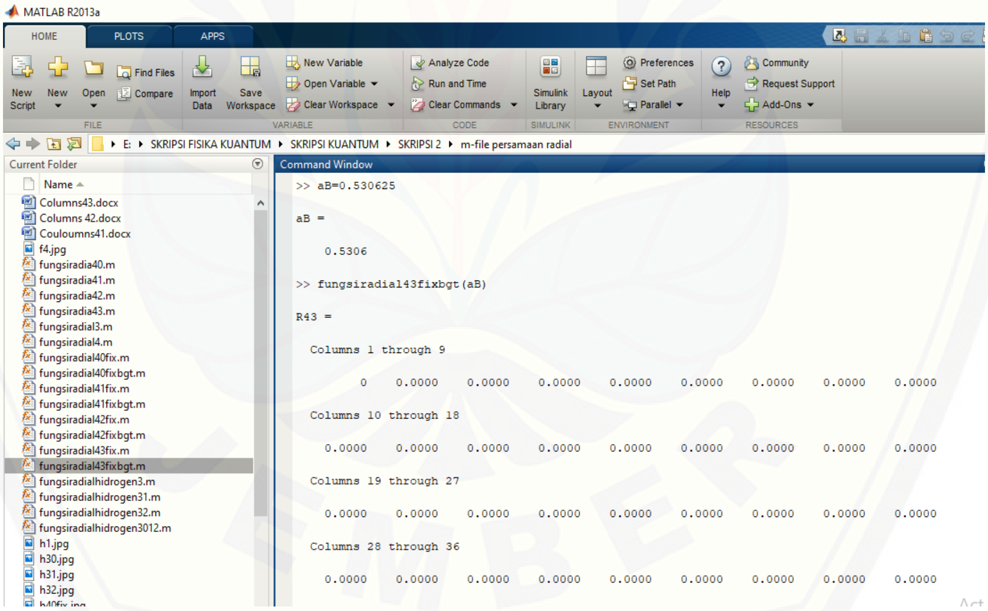
Gambar 6. Tampilan commond windows untuk membuat grafik fungsi radial
$n = 4, l = 0$



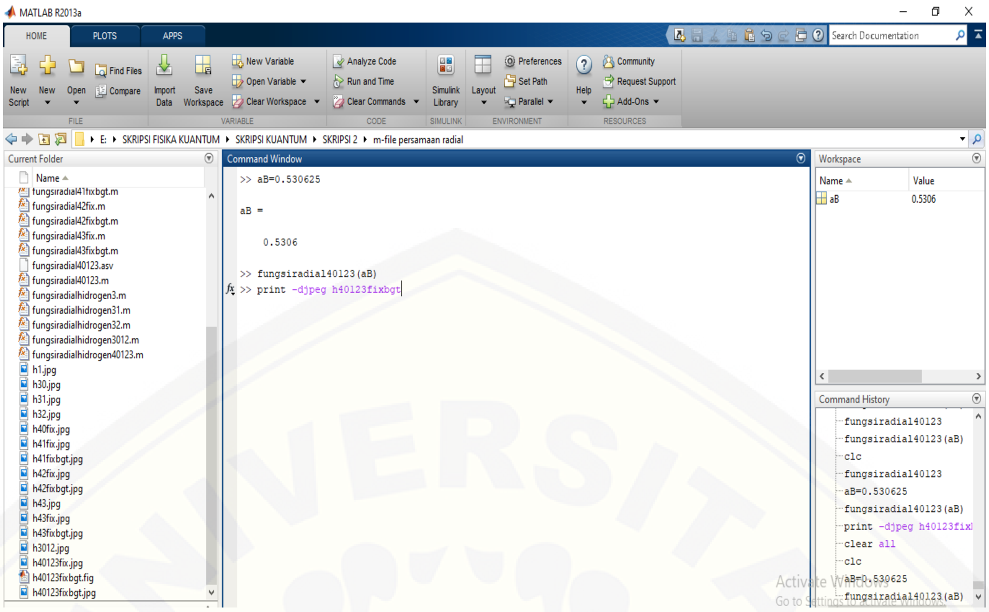
Gambar 7. Tampilan commond windows untuk membuat grafik fungsi radial
$n = 4, l = 1$



Gambar 8. Tampilan commond windows untuk membuat grafik fungsi radial $n = 4, l = 2$



Gambar 9. Tampilan commond windows untuk membuat grafik fungsi radial $n = 4, l = 3$



Gambar 10. Tampilan commond windows untuk membuat dan menggabungkan grafik fungsi radial $(n = 4, l = 0), (n = 4, l = 1), (n = 4, l = 2), (n = 4, l = 3)$